CURS NR. 11
Analiză matematică, AIA

2. Integrala Riemann (definită, proprie) pentru $f:[a,b]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

2.1. Definiţii. Exemple.

De recapitulat din manualul de liceu.

Definiţia 2.1.1. Fie $[a,b]$ un interval compact în $\mathbb{R}$. O succesiune de puncte

$\Delta: a=x_0<x_1<...<x_n=b$

se numeşte o *diviziune a intervalului* $[a,b]$. Se notează cu $\mathcal{D}([a,b])$ mulţimea tuturor diviziunilor intervalului $[a,b]$. Se numeşte *normă a diviziunii* Δ numărul real pozitiv

$\|\Delta\|=\max\limits_{i\in\{1,...,n\}}(x_i-x_{i-1})$.

Un sistem de puncte $\xi=(\xi_1,...,\xi_n)$, notat şi $\xi=(\xi_i)_{i=\overline{1,n}}$, din intervalul $[a,b]$, cu proprietatea

$x_{i-1}\le\xi_i\le x_i$

se numeşte *sistem de puncte intermediare corespunzătoare diviziunii* Δ. Se notează cu $\mathcal{P}(\Delta)$ mulţimea tuturor sistemelor de puncte intermediare ale diviziunii Δ.

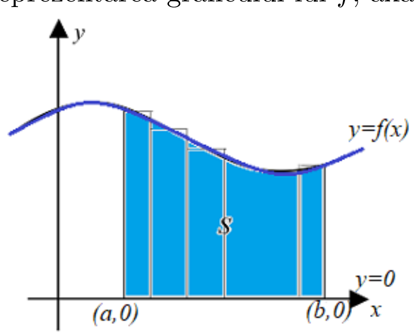
Definiţia 2.1.2. Fie $[a,b]$ un interval compact în $\mathbb{R}$, $\Delta\in\mathcal{D}([a,b])$ o diviziune a intervalului $[a,b]$ şi $\xi\in\mathcal{P}(\Delta)$ un sistem de puncte intermediare ale diviziunii Δ. Fie funcţia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Se numeşte *suma Riemann asociată funcţiei f, diviziunii Δ şi sistemului de puncte intermediare ξ* numărul real

$S(f,\Delta,\xi)=\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$.

Observaţia 2.1.1. Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este a.î.

$f(x)\ge 0,\forall x\in[a,b]$

atunci suma Riemann $S(f,\Delta,\xi)$ reprezintă suma ariilor suprafeţelor mărginite de dreptunghiuri de bază x_i-x_{i-1} şi înălţime $f(\xi_i)$, pentru $i\in\{1,...,n\}$. Se observă că, în anumite condiţii asupra f (continuă a.p.t.), aceasta aproximează **aria subgraficului lui** f, adică aria suprafeţei mărginite de reprezentarea graficului lui f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=a$, $x=b$:



$\boxed{\Gamma_f=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; a\le x\le b, 0\le y\le f(x)\right\}.}$

Definiţia 2.1.3. Funcţia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ se numeşte *integrabilă Riemann pe* $[a,b]$ dacă există un număr real I_f cu proprietatea că

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$ astfel încât, $\forall\Delta\in\mathcal{D}([a,b])$ cu $\|\Delta\|<\delta$ şi $\forall\xi\in\mathcal{P}(\Delta)$, să rezulte

$|S(f,\Delta,\xi)-I_f|<\varepsilon$.

Se notează cu $\mathcal{R}([a,b])$ mulţimea tuturor funcţiilor integrabile Riemann pe $[a,b]$.

Numărul I_f, dacă există, este unic şi se numeşte *integrala Riemann* (sau *definită*, sau *proprie*) *a funcţiei f pe* $[a,b]$. Se notează $I_f=\int_a^b f(x)\,dx$.

Observaţia 2.1.2. Dacă f este integrabilă Riemann pe $[a,b]$ atunci

$I_f = \boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|\Delta\|\to 0} S(f,\Delta,\xi) = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),}$

independent de alegerea punctelor intermediare ξ.

Din caracterizarea limitei cu şiruri, rezultă că f este integrabilă Riemann pe $[a,b]$, cu $I_f = \int_a^b f(x)\,dx$, dacă şi numai dacă oricare ar fi şirul de diviziuni ale intervalului $[a,b]$, $(\Delta_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ cu $\lim\limits_{p\to\infty} \|\Delta_p\| = 0$ şi oricare ar fi şirul de puncte intermediare $(\xi^p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ asociat şirului de diviziuni $(\Delta_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$, adică $\xi^p = (\xi_1^p, ..., \xi_n^p)$, atunci

$\lim\limits_{p\to\infty} S(f,\Delta_p,\xi^p) = I_f.$

○**Exemplul 2.1.1**. Utilizând definiţia integralei Riemann, să se arate că următoarele şiruri $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ au limită şi să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ pentru

a) $a_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + ... + \dfrac{1}{n+n}, n \in \mathbb{N}^*;$

Rezolvare. etapa 1. Se alege

-intervalul compact $[0,1]$.

-şirul de diviziuni echidistante ale intervalului $[0,1]$

$\Delta_n : 0 = \dfrac{0}{n} < \dfrac{1}{n} < ... < \dfrac{n}{n} = 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$, adică

$$\Delta_1 : 0 = \underbrace{\frac{0}{1}}_{x_0^1} < \underbrace{\frac{1}{1}}_{x_1^1} = 1$$

$$\Delta_2 : 0 = \underbrace{\frac{0}{2}}_{x_0^2} < \underbrace{\frac{1}{2}}_{x_1^2} < \underbrace{\frac{2}{2}}_{x_2^2} = 1$$

$$\Delta_3 : 0 = \underbrace{\frac{0}{3}}_{x_0^3} < \underbrace{\frac{1}{3}}_{x_1^3} < \underbrace{\frac{2}{3}}_{x_2^3} < \underbrace{\frac{3}{3}}_{x_3^3} = 1$$

...

$$\Delta_n : 0 = \underbrace{\frac{0}{n}}_{x_0^n} < \underbrace{\frac{1}{n}}_{x_1^n} < ... \underbrace{\frac{i}{n}}_{x_i^n} < ... < \underbrace{\frac{n}{n}}_{x_n^n} = 1$$

..., cu norma

$$\|\Delta_n\| = \max_{i\in\{1,...,n\}} \left(x_i^n - x_{i-1}^n\right) = \max_{i\in\{1,...,n\}} \left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}\right) = \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

De menţionat că, pentru $n \in \mathbb{N}^*$ fixat, punctele de diviziune din diviziunea Δ_n sunt

$x_i^n = \dfrac{i}{n}, i \in \{1, ..., n\}.$

-şirul de sisteme de puncte intemediare corespunzătoare şirului de diviziuni $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

$\xi^n = \left(\dfrac{1}{n}, ..., \dfrac{n}{n}\right), \forall n \in \mathbb{N}^*$, adică

$$\xi^1 = \left(\underbrace{1}_{\xi_1^1}\right)$$

$$\xi^2 = \left(\underbrace{\frac{1}{2}}_{\xi_1^2}, \underbrace{\frac{2}{2}}_{\xi_2^2}\right)$$

$$\xi^3 = \left(\underbrace{\frac{1}{3}}_{\xi_1^3}, \underbrace{\frac{2}{3}}_{\xi_2^3}, \underbrace{\frac{3}{3}}_{\xi_3^3} \right)$$

...

$$\xi^n = \left(\underbrace{\frac{1}{n}}_{\xi_1^n}, ..., \underbrace{\frac{i}{n}}_{\xi_i^n}, ..., \underbrace{\frac{n}{n}}_{\xi_n^n} \right)$$

...

De menţionat că, pentru $n \in \mathbb{N}^*$ fixat, punctele intermediare corespunzătoare diviziunii Δ_n sunt

$$\xi_i^n = \frac{i}{n}, i \in \{1, ..., n\}$$

(sunt alese capetele din dreapta intervalului de diviziune).

-o funcţie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ integrabilă Riemann pe $[0,1]$.

Atunci

$$S(f, \Delta_n, \xi^n) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i^n)\left(x_i^n - x_{i-1}^n\right) = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}\right) \underset{\text{de sumare}}{\overset{i \text{ este variabila}}{=}} \frac{1}{n}\left(f\left(\frac{1}{n}\right) + ...f\left(\frac{n}{n}\right)\right).$$

Se trece la limită pentru $n \to \infty$ şi, folosind Observaţia 2.1.2, se obţine

$$\boxed{\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(f\left(\frac{1}{n}\right) + ...f\left(\frac{n}{n}\right)\right)}$$

etapa 2. Se alege acea funcţie f a.î. $a_n = \frac{1}{n}\left(f\left(\frac{1}{n}\right) + ...f\left(\frac{n}{n}\right)\right), \forall n \in \mathbb{N}^*$. Aici

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{n+n} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + ... + \frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right), \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Se alege $f : [0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{1+x}$.

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \int_0^1 \dfrac{1}{1+x}dx = \ln(1+x)|_{x=0}^{x=1} = \ln 2.$

b) $a_n = \dfrac{n}{n^2+1^2} + \dfrac{n}{n^2+2^2} + ... + \dfrac{n}{n^2+n^2}, n \in \mathbb{N}^*$;

Rezolvare. etapa 1. Aceeaşi ca la a).

etapa 2. Se alege acea funcţie f a.î. $a_n = \frac{1}{n}\left(f\left(\frac{1}{n}\right) + ...f\left(\frac{n}{n}\right)\right), \forall n \in \mathbb{N}^*$. Aici

$$a_n = \frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + ... + \frac{n}{n^2+n^2} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2} + ... + \frac{1}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right), \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Se alege $f : [0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \int_0^1 \dfrac{1}{1+x^2}dx = \operatorname{arctg} x|_{x=0}^{x=1} = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \dfrac{\pi}{4}.$

○**Teorema 2.1.1.(de tip Cauchy de caracterizare a funcţiilor integrabile Riemann)**

Atunci $f \in \mathcal{R}([a,b])$ dacă şi numai dacă

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ a.î. } \forall \Delta \in \mathcal{D}([a,b]) \text{ cu } \|\Delta\| < \delta \text{ şi } \forall \xi', \xi'' \in \mathcal{P}(\Delta), \left|S(f,\Delta,\xi') - S(f,\Delta,\xi'')\right| < \varepsilon.$$

Definiţia 2.1.4. Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Dacă $f \in \mathcal{R}([a,b])$ atunci, *prin definiţie*

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0, \text{ dacă } a = b \text{ şi } \int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

○2.2. Caracterizarea integrabilităţii Riemann cu sume Darboux... 2.3. Proprietăţi ale integralei Riemann

Teorema 2.3.1.(**de liniaritate a integralei Riemann**)
Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ şi $\alpha \in \mathbb{R}$. Dacă $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ atunci funcţiile $f+g \in \mathcal{R}([a, b])$ şi $\alpha f \in \mathcal{R}([a, b])$

şi (**aditivitatea** în raport cu funcţia integrant) $\boxed{\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx;}$

(**omogeneitatea** în raport cu funcţia integrant) $\boxed{\int_a^b (\alpha \cdot f)(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx.}$

Propoziţia 2.3.1. Dacă $f \in \mathcal{R}([a, b])$ a.î. $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$, atunci $\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \geq 0.}$

Corolar 2.3.1.(**de monotonie a integralei Riemann în raport cu funcţia integrant**)
Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$. Dacă $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ a.î. $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, b]$,atunci $\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.}$

Corolar 2.3.2.(**de trecere la modul a integralei Riemann**)
Dacă $f \in \mathcal{R}([a, b])$ atunci $|f| \in \mathcal{R}([a, b])$ şi $\boxed{\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.}$

Corolar 2.3.3.(**Teorema întâi de medie pentru integrala Riemann**)
Dacă $f \in \mathcal{R}([a, b])$ a.î. $m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a, b]$, atunci $\boxed{m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a).}$

Valoarea $\boxed{\mu(f) = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx}$ se numeşte *media funcţiei* f *pe* $[a, b]$.

Propoziţia 2.3.2.(**de monotonie a integralei Riemann în raport cu intervalul, de ereditate**)
Dacă $f \in \mathcal{R}([a, b])$, atunci, $\forall [c, d] \subset [a, b], f \in \mathcal{R}([c, d])$.

Propoziţia 2.3.3.(**de aditivitate a integralei Riemann în raport cu intervalul**)
Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ şi $c \in]a, b[$ a.î. $f \in \mathcal{R}([a, c])$ şi $f \in \mathcal{R}([c, b])$. Atunci $f \in \mathcal{R}([a, b])$ şi

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.}$$

Exemplul 2.3.1. Fie $f : [0, 2] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \begin{cases} x^2, & \text{dacă } x \in [0, 1[\\ 2x-1, & \text{dacă } x \in [1, 2] \end{cases}$

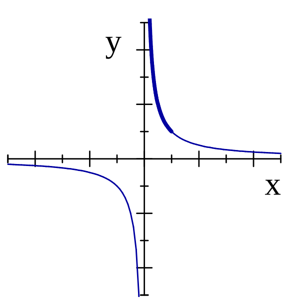
Se observă că $f \in \mathcal{R}([0, 1])$ şi $f \in \mathcal{R}([1, 2])$, deci $f \in \mathcal{R}([0, 2])$ şi

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (2x-1)\,dx \overset{\text{din LN ulterioară}}{=} \left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=1} + \left(x^2 - x\right)\Big|_{x=1}^{x=2} = \tfrac{1}{3} + 2.$$

Teorema 2.3.2.(**de mărginire a funcţiilor integrabile Riemann**)
Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Dacă $f \in \mathcal{R}([a, b])$ atunci f este funcţie mărginită pe $[a, b]$.

Observaţia 2.3.1. a) <u>Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ nu este mărginită pe $[a, b]$ atunci $f \notin \mathcal{R}([a, b])$</u>

De exemplu, $f : [0, 1] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{dacă } x \in]0, 1] \\ 1, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$



nu este mărginită pe $[0, 1]$, deci $f \notin \mathcal{R}([0, 1])$.

b) Există funcţii mărginite pe $[a,b]$, dar care nu sunt integrabile pe $[a,b]$.

De exemplu, *funcţia lui Dirichlet* $f:[0,1]\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}1, & \text{dacă } x\in[0,1]\cap\mathbb{Q}\\ 0, & \text{dacă } x\in[0,1]\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$

este mărginită pe $[0,1]$, dar nu este integrabilă Riemann pe $[0,1]$. Justificarea nu se dă aici.

c) Există funcţii f,g care nu sunt integrabile pe $[a,b]$ dar care au $f+g,\ f\cdot g$ integrabile pe $[a,b]$.

De exemplu,

$$f,g:[-1,1]\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}1, & \text{dacă } x\in[-1,1]\cap\mathbb{Q}\\ -1, & \text{dacă } x\in[-1,1]\setminus\mathbb{Q}\end{cases};\ g(x)=\begin{cases}-1, & \text{dacă } x\in[-1,1]\cap\mathbb{Q}\\ 1, & \text{dacă } x\in[-1,1]\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$$

$f+g:[-1,1]\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}, (f+g)(x)=0.$

$f\cdot g:[-1,1]\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}, (f\cdot g)(x)=-1.$

2.4. Clase de funcţii integrabile Riemann

Teorema 2.4.1.(de integrabilitate Riemann a funcţiilor monotone)
Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Dacă f este monotonă pe $[a,b]$ atunci $f\in\mathcal{R}([a,b])$.

Definiţia 2.4.1. Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Funcţia f se numeşte *monotonă pe porţiuni pe* $[a,b]$ dacă $[a,b]$ se poate scrie ca reuniunea unui număr finit de intervale compacte $[a,c_1],[c_1,c_2],...,[c_p,b]$ cu interioarele disjuncte astfel încât pe fiecare din ele f să fie monotonă (nu neapărat de acelaşi tip).

Teorema 2.4.2.(de integrabilitate Riemann a funcţiilor monotone pe porţiuni)
Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Dacă f este monotonă pe porţiuni pe $[a,b]$ atunci $f\in\mathcal{R}([a,b])$.

Teorema 2.4.3.(de integrabilitate Riemann a funcţiilor continue)
Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Dacă f este continuă pe $[a,b]$ atunci $f\in\mathcal{R}([a,b])$.

Interpretarea geometrică a integralei Riemann. Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este continuă a.î.

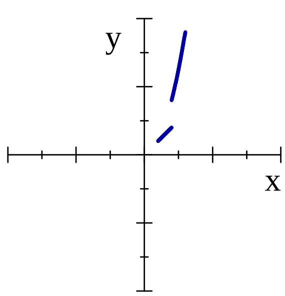
$f(x)\geq 0,\forall x\in[a,b]$

atunci $f\in\mathcal{R}([a,b])$ şi $\boxed{A(\Gamma_f)=\int_a^b f(x)\,dx,}$ unde $A(\Gamma_f)$ este aria suprafeţei mărginite de graficul lui f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=a,\ x=b:$

$$\boxed{\Gamma_f=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; a\leq x\leq b, 0\leq y\leq f(x)\right\}.}$$

Observaţia 2.4.2. Există integrabile Riemann pe $[a,b]$, dar care nu sunt continue pe $[a,b]$.

De exemplu, $f:[1,3]\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x, & \text{dacă } x\in[1,2]\\ x^2, & \text{dacă } x\in\,]2,3]\end{cases}$



este integrabilă (deoarece este monotonă pe cele două porţiuni) dar nu este continuă în 2.

În continuare se pune problema numărului de puncte de discontinuitate ale unei funcţii integrabile Riemann.

Definiţia 2.4.1. O mulţime $E\subset\mathbb{R}$ are *măsura Lebesgue nulă* (sau *este neglijabilă în sens Lebesgue*) şi se notează $m(E)=0$ dacă

$\forall\varepsilon > 0$, există o familie finită sau numărabilă de intervale $\{]a_i, b_i[\,; i \in I$-mulţime de indici$\}$ a.î $E \subset \bigcup_i]a_i, b_i[$ şi $\sum_i (b_i - a_i) < \varepsilon$.

Exemplul 2.4.1. Mulţimi cu măsura Lebesgue nulă sunt:

-mulţimile finite;

-mulţimile numărabile($\simeq \mathbb{N}, \simeq \mathbb{Z}, \simeq \mathbb{Q}$).

Există şi mulţimi nenumărabile care au măsura Lebesgue nulă. De exemplu, *mulţimea lui Cantor*:

Se consideră intervalul $[0, 1]$. Se împarte în trei părţi egale şi se înlătură intervalul $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$. Cele două intervale rămase se împart fiecare în trei subintervale egale, după care se elimină din nou intervalele din mijloc, adică $\left[\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right]$, respectiv $\left[\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right]$. Se continuă această operaţie, adică se înlătură mereu intervalele din mijloc după ce s-a împărţit fiecare interval rămas în trei părţi egale. Mulţimea care rezultă după înlăturarea tuturor acestor intervale se numeşte *mulţimea lui Cantor*. Lungimea reuniunii intervalelor eliminate este

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{4}{3^3} ... = 1 = \text{lungimea}\,[0, 1]$$

De aici rezultă că mulţimea lui Cantor este de măsură Lebesgue nulă.

Definiţia 2.2.3. Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Funcţia f se numeşte *continuă aproape peste tot pe* $[a, b]$ (prescurtăm continuă a.p.t. pe $[a, b]$) dacă mulţimea D_f a punctelor sale de discontinuitate are măsura Lebesgue zero, $m(D_f) = 0$.

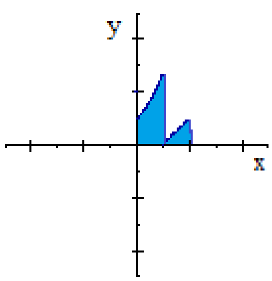
Teorema 2.4.4.(**Teorema lui Lebesgue**) Funcţia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann pe $[a, b]$ dacă şi numai dacă este mărginită pe $[a, b]$ şi continuă aproape peste tot pe $[a, b]$.

Exemplul 2.4.2. Utilizând teorema lui Lebesgue, să se studieze care dintre următoarele funcţii sunt integrabile Riemann

$$f : [0, 2] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2, & \text{dacă } x = 0 \\ e^x, & \text{dacă } 0 < x < 1 \\ x - 1, & \text{dacă } 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

(în acest caz să se calculeze $\int_0^2 f(x)\,dx$)

Rezolvare.



Din grafic, se observă că

$\cdot f$ este mărginită pe $[0, 2]$, deoarece

$0 \le f(x) < e, \forall x \in [0, 2]$

$\cdot f$ este continuă a.p.t. pe $[0, 2]$, deoarece

$x_1 = 0, x_2 = 1$ sunt punctele de discontinuitate

Atunci, conform Teoremei lui Lebesgue$\Rightarrow f \in \mathcal{R}([0, 2])$. Mai mult,

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 e^x dx + \int_1^2 (x-1)\,dx = \left(e^x\right)\Big|_{x\to 0}^{x\to 1} + \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Bigg|_{x=1}^{x=2} = e - \frac{1}{2}.$$

Exemplul 2.4.3. (**Funcţia lui Riemann**)...

Exemplul 2.4.4. (**Funcţia lui Cantor**)...

2.5. Integrale Riemann cu limite de integrare variabile

Teorema 2.5.1.(Teorema lui Barrow) Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este continuă pe $[a,b]$ atunci funcţia

$F:[a,b]\to\mathbb{R}, F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$

este derivabilă pe $[a,b]$ şi $F'=f$, adică f admite F drept primitivă pe $[a,b]$.

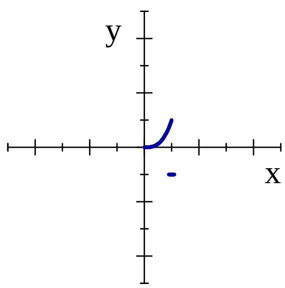
2.6. Teoreme de calcul pentru integrala Riemann

Teorema 2.6.1.(Teorema lui Leibniz-Newton)
Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Dacă $f\in\mathcal{R}([a,b])$ şi f admite primitive pe $[a,b]$, atunci, pentru orice primitivă F a lui f pe $[a,b]$ are loc

$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a) \overset{\text{notăm}}{=} F(x)\big|_{x=a}^{x=b}.$

Observaţia 2.6.1.
a) Există funcţii integrabile Riemann pe $[a,b]$, care nu admit primitive pe $[a,b]$.

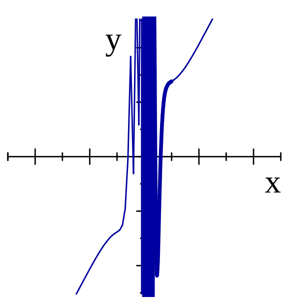
De exemplu, $f:[0,1]\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} x^3, & \text{dacă } x\in[0,1[\\ -1, & \text{dacă } x=1\end{cases}$



este integrabilă Riemann (A se vedea Teorema Lebesgue) dar nu admite primitive pe $[0,1]$ ($f([0,1])=[0,1[\cup\{-1\}$, nu are proprietatea Darboux).

b) Există funcţii care admit primitive pe $[a,b]$, dar care nu sunt integrabile pe $[a,b]$.

De exemplu, $f:[-1,1]\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}, & \text{dacă } x\in[-1,0[\cup]0,1] \\ 0, & \text{dacă } x=0\end{cases}$



nu este integrabilă Riemann pe $[-1,1]$, deoarece nu este mărginită pe $[-1,1]$. Dar

$F:[-1,1]\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ F(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x^2}, & \text{dacă } x\in[-1,0[\cup]0,1] \\ 0, & \text{dacă } x=0\end{cases}$

este derivabilă pe $[-1,1]$ şi $F'=f$, adică F este o primitivă pentru f pe $[-1,1]$.

c) Există chiar şi funcţii mărginite care au primitive, dar care nu sunt integrabile.

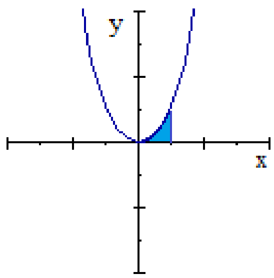
Teorema 2.6.2.(de integrare prin părţi pentru integrala Riemann)
Fie $u,v:[a,b]\to\mathbb{R}$. Dacă u,v sunt derivabile pe $[a,b]$, cu derivatele $u',v'\in\mathcal{R}([a,b])$, atunci

$$\boxed{\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)\,v(x)\big|_{x=a}^{x=b}-\int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx.}$$

Exemplul 2.6.1. Să se calculeze:

a) $\int_0^{\frac{1}{2}} x \ln \frac{1+x}{1-x} dx$;

Rezolvare. etapa 1. $f : \left[0, \frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}, f(x) = x \ln \frac{1+x}{1-x}$.



f este bine definită pe intervalul compact $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ şi continuă pe $\left[0, \frac{1}{2}\right] \Rightarrow f \in \mathcal{R}\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right)$.

etapa 2. Calcul

modul 1. Se determină o primitivă pentru f pe $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ cu teorema integrării prin părţi în integrala nedefinită şi apoi se aplică teorema Leibniz-Newton, ş.a.

$$F(x; c) = \int x \ln \frac{1+x}{1-x} dx = \int \left(\ln \frac{1+x}{1-x}\right) \left(\frac{x^2}{2}\right)' dx = \left(\ln \frac{1+x}{1-x}\right) \left(\frac{x^2}{2}\right) - \int \left(\ln \frac{1+x}{1-x}\right)' \left(\frac{x^2}{2}\right) dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{2} \int x^2 \cdot \frac{1}{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{2}{(1-x)^2} dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} - \int \frac{x^2}{1-x^2} dx = \frac{x^2}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + \int \left(1 - \frac{1}{1-x^2}\right) dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + x - \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + c, \forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \forall c \in \mathbb{R}.$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x \ln \frac{1+x}{1-x} dx = \left(\frac{x^2}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + x - \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}\right) \Bigg|_{x=0}^{x=\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{8} \ln \frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln \frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} - 0 - 0 + 0 = \frac{-3}{8} \ln 3 + \frac{1}{2}.$$

modul 2. Se aplică reguli de calcul direct în integrala Riemann. Se calculează integrala cu teorema integrării prin părţi în integrala Riemann ş.a.

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x \ln \frac{1+x}{1-x} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\ln \frac{1+x}{1-x}\right) \left(\frac{x^2}{2}\right)' dx = \left(\ln \frac{1+x}{1-x}\right) \left(\frac{x^2}{2}\right) \Bigg|_{x=0}^{x=\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\ln \frac{1+x}{1-x}\right)' \left(\frac{x^2}{2}\right) dx =$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} \ln \frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} - \frac{0^2}{2} \ln \frac{1+0}{1-0} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 \cdot \frac{1}{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{2}{(1-x)^2} dx =$$

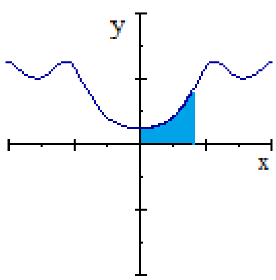
$$= \frac{1}{8} \ln 3 - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{1-x^2} dx = \frac{1}{8} \ln 3 + \int_0^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{1-x^2}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{8} \ln 3 + \left(x - \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}\right) \Bigg|_{x=0}^{x=\frac{1}{2}} = \frac{1}{8} \ln 3 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln \frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} - 0 + 0 = \frac{-3}{8} \ln 3 + \frac{1}{2}.$$

b) Există funcţii care nu admit primitive dar sunt integrabile Riemann. Există funcţii integrabile Riemann care admit primitive, dar primitivele nu se pot exprima cu funcţii elementare. În acest caz calculul integralei Riemann nu se poate aborda cu modul 1, ci se face sau direct, cu reguli de calcul în integrala Riemann, ca la modul 2, sau cu metode numerice.

Teorema 2.6.3.(de schimbare de variabilă în integrala Riemann)
Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ şi $\mathbb{I}$ un interval cu interior nevid din $\mathbb{R}$. Fie $\varphi : \mathbb{I} \to [a,b]$ o funcţie derivabilă pe $\mathbb{I}$, cu derivata continuă pe $\mathbb{I}$ ($\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{I})$) şi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că $\varphi(\alpha) = a$ şi $\varphi(\beta) = b$. Dacă $f \in \mathcal{R}([a,b])$ atunci $(f \circ \varphi) \cdot \varphi' \in \mathcal{R}([\alpha,\beta])$ şi
$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{t=\alpha}^{t=\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt.$
Observaţia 2.6.2. Funcţia din Teorema 2.6.3, $\varphi(x) = t$, cu $\varphi(\alpha) = a$ şi $\varphi(\beta) = b$, este funcţia care schimbă variabila t în variabila x.
Teorema 2.6.4.(de schimbare strict monotonă de variabilă în integrala Riemann)
Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Fie $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ o funcţie derivabilă pe $[\alpha,\beta]$, cu derivata continuă pe $[\alpha,\beta]$ cu proprietatea că φ este strict monotonă pe $[\alpha,\beta]$, cu $\varphi([\alpha,\beta]) = [a,b]$. Dacă $f \in \mathcal{R}([a,b])$ atunci $(f \circ \varphi) \cdot \varphi' \in \mathcal{R}([\alpha,\beta])$ şi
$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt.$
Observaţia 2.6.3. În Teorema 2.6.4, dacă φ este monoton strict crescătoare pe $[\alpha,\beta]$ atunci $\varphi^{-1}(a) = \alpha$ şi $\varphi^{-1}(b) = \beta$, iar dacă φ este monoton strict descrescătoare pe $[\alpha,\beta]$ atunci $\varphi^{-1}(a) = \beta$ şi $\varphi^{-1}(b) = \alpha$.

Exemplul 2.6.2. Să se calculeze
a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4\cos^4 x + \sin^4 x} dx;$
Rezolvare. etapa 1.$f : \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{4\cos^4 x + \sin^4 x}.$



f este bine definită pe intervalul compact $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ şi continuă pe $\left[0, \frac{\pi}{4}\right] \Rightarrow f \in \mathcal{R}\left(\left[0, \frac{\pi}{4}\right]\right)$.
etapa 2. Calcul.
modul 1.Se determină o primitivă pentru f pe $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ cu formule de schimbări de variabilă în integrala nedefinită şi apoi se aplică teorema Leibniz-Newton...
modul 2. Se aplică reguli de calcul direct în integrala Riemann. Se calculează integrala cu formule de schimbări de variabilă în integrala Riemann ş.a.
Deoarece
$R(-\cos x, -\sin x) = \dfrac{1}{4(-\cos x)^4 + (-\sin x)^4} = \dfrac{1}{4\cos^4 x + \sin^4 x} = R(\cos x, \sin x),$
se face schimbarea de variabilă de integrare în integrala definită

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = v,\ v \in \mathbb{J} | \text{ se inversează} \\ x = \operatorname{arctg} v,\ v \in \mathbb{J} | \text{ se diferenţiază} \\ dx = \dfrac{1}{1+v^2} dv \\ \text{capete: } \begin{cases} x = 0 \Rightarrow v = 0 \\ x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow v = 1 \end{cases} \end{cases}$$

Se înlocuieşte

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4\cos^4 x + \sin^4 x} dx = \int_0^1 \frac{1}{4\left(\dfrac{+1}{\sqrt{1+v^2}}\right)^4 + \left(\dfrac{+v}{\sqrt{1+v^2}}\right)^4} \frac{1}{1+v^2} dv =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{\dfrac{4}{(1+v^2)^2} + \dfrac{v^4}{(1+v^2)^2}} \frac{1}{1+v^2} dv = \int_0^1 \frac{1+v^2}{4+v^4} dv =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{\frac{1}{8}v + \frac{1}{4}}{v^2 - 2v + 2} + \frac{-\frac{1}{8}v + \frac{1}{4}}{v^2 + 2v + 2} \right) dv = \frac{1}{16} \int_0^1 \left(\frac{2v+4}{v^2-2v+2} - \frac{2v-4}{v^2+2v+2} \right) dv =$$

$$= \frac{1}{16} \int_0^1 \left(\frac{(2v-2)+6}{v^2-2v+2} - \frac{(2v+2)-6}{v^2+2v+2} \right) dv =$$

$$= \frac{1}{16} \int_0^1 \left(\frac{(v^2-2v+2)'}{v^2-2v+2} - \frac{(v^2+2v+2)'}{v^2+2v+2} \right) dv + \frac{6}{16} \int_0^1 \left(\frac{(v-1)'}{(v-1)^2+1} + \frac{(v+1)'}{(v+1)^2+1} \right) dv =$$

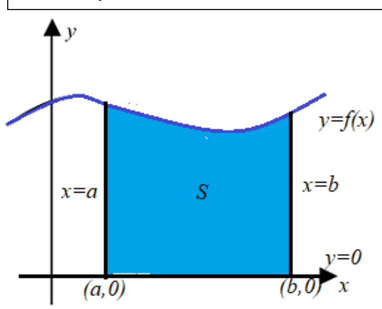
$$= \frac{1}{16} \left[\ln\left(v^2 - 2v + 2\right) - \ln\left(v^2 + 2v + 2\right) \right] \Big|_{v=0}^{v=1} + \frac{6}{16} \left(\frac{1}{1} \operatorname{arctg} \frac{v-1}{1} + \frac{1}{1} \operatorname{arctg} \frac{v+1}{1} \right) \Bigg|_{v=0}^{v=1} =$$

$$= \frac{1}{16} (-\ln 5) + \frac{3}{8} \operatorname{arctg} 2.$$

Există funcţii care nu admit primitive dar sunt integrabile Riemann. Există funcţii integrabile Riemann care admit primitive, dar primitivele nu se pot exprima cu funcţii elementare. În acest caz calculul integralei Riemann nu se poate aborda cu modul 1, ci se face sau direct, cu reguli de calcul în integrala Riemann, ca la modul 2, sau cu metode numerice.

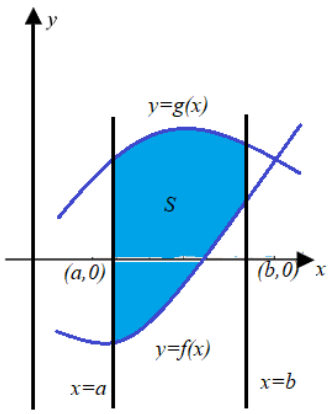
○2.7. Aplicaţii ale integralei definite

Teorema 2.7.1. a) Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă a.î. $f(x) \geq 0, \forall x \in [a,b]$.
Fie $\boxed{\Gamma_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\right\} = S}$



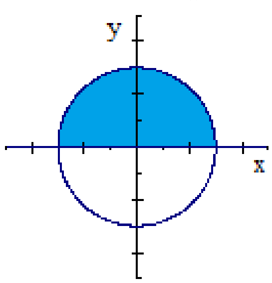
domeniul plan mărginit de graficul lui f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x = a$, $x = b$.
Atunci $f \in \mathcal{R}([a,b])$, Γ_f are arie şi $\boxed{\text{aria}(\Gamma_f) = \int_a^b f(x)\,dx.}$

b) Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funcţii continue a.î. $f(x) \le g(x), \forall x \in [a, b]$.
Fie $\boxed{\Gamma_{f,g} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; a \le x \le b, f(x) \le y \le g(x)\right\} = S}$



domeniul plan mărginit de graficele lui f, g, şi dreptele de ecuaţii $x = a$, $x = b$.
Atunci $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$, $\Gamma_{f,g}$ are arie şi $\boxed{\text{aria}(\Gamma_{f,g}) = \int_a^b (g(x) - f(x))\, dx.}$
c) Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi
$\Gamma_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; a \le x \le b \text{ şi } (0 \le y \le f(x) \text{ sau } f(x) \le y \le 0)\right\}$
domeniul plan mărginit de graficul lui f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x = a$, $x = b$.
Atunci $f \in \mathcal{R}([a, b])$, Γ_f are arie şi $\boxed{\text{aria}(\Gamma_f) = \int_a^b |f(x)|\, dx.}$
d) Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funcţii continue şi
Fie $\Gamma_{f,g} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; a \le x \le b, f(x) \le y \le g(x) \text{ sau } g(x) \le y \le f(x)\right\} = S$
domeniul plan mărginit de graficele lui f, g, şi dreptele de ecuaţii $x = a$, $x = b$.
Atunci $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$, $\Gamma_{f,g}$ are arie şi $\boxed{\text{aria}(\Gamma_{f,g}) = \int_a^b |g(x) - f(x)|\, dx.}$

Exemplul 2.7.1. a) Să se calculeze aria domeniului plan
$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \le 9, y \ge 0\right\}$.
Rezolvare. •Se reprezintă grafic domeniul



•$x^2 + y^2 = 3^2$ este cercul de centru $O(0, 0)$ şi rază 3.
$x^2 + y^2 \le 3^2$ este interiorul cercului reunit cu cercul
•$y = 0$ axa Ox
$y \ge 0$ este semiplanul superior reunit cu axa Ox
•se intersectează $\Rightarrow$ desenul

Deci D este domeniul plan mărginit de arcul de cerc $\left[A\overset{\frown}{B}A'\right]$ şi segmentul $\left[\overrightarrow{A'OA}\right]$
•Se observă că $D = \Gamma_f$ este subgraficul unei funcţii f.
Fie $(x, y) \in \Gamma_f$ un punct oarecare din domeniu. Se consideră paralele la Oy prin punctul (x, y) şi se observă că toate aceste paralele au ecuaţiile $\widetilde{x} = x$, cu $-3 \le x \le 3$ atunci când $(x, y) \in \Gamma_f$. Mai mult, când (x, y) variază în Γ_f pe o astfel de paralelă, y-ul variază între y-ul de pe segmentul

$\left[\overrightarrow{A'OA}\right]$ şi y-ul de pe arcul de cerc $\left[A\overset{\frown}{B}A'\right]$, adică $0 \le y \le +\sqrt{3^2 - x^2}$. Se menţionează explicitările curbelor care mărginesc domeniul în raport cu y.

Se alege: $f : [-3, 3] \to \mathbb{R}, f(x) = +\sqrt{3^2 - x^2}$; f este continuă pe $[-3, 3]$.

Deci $\Gamma_f = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; -3 \le x \le 3, \underbrace{0}_{y\text{-ul de pe } \left[\overrightarrow{A'OA}\right]} \le y \le \underbrace{+\sqrt{3^2 - x^2}}_{y\text{-ul de pe } \left[A\overset{\frown}{B}A'\right]} \right\}$.

Conform Teoremei 1, a)$\Rightarrow$

$\text{aria}(\Gamma_f) = \int_{-3}^{3} \sqrt{3^2 - x^2}dx = \left(\frac{1}{2}\left(x\sqrt{3^2 - x^2} + 3^2 \arcsin \frac{x}{3}\right)\right)\Big|_{x=-3}^{x=3} =$
$= \frac{1}{2}\left(0 + 3^2 \arcsin 1\right) - \frac{1}{2}\left(0 + 3^2 \arcsin(-1)\right) = \frac{1}{2}3^2 \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}\pi \cdot 3^2$.

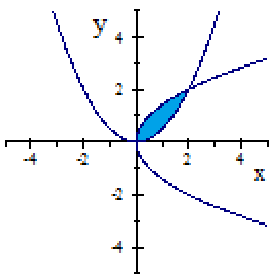
S-a folosit $\int \sqrt{9 - x^2}dx = \int \left(\sqrt{9 - x^2}\right) x' dx = \left(\sqrt{9 - x^2}\right) x - \int \frac{-x}{\sqrt{9 - x^2}} \cdot x dx =$

$$= x\sqrt{9 - x^2} - \int \frac{9 - x^2}{\sqrt{9 - x^2}}dx + \int \frac{9}{\sqrt{9 - x^2}}dx = x\sqrt{9 - x^2} - \int \sqrt{9 - x^2}dx + 9 \arcsin \frac{x}{3} \Rightarrow$$

$\int \sqrt{9 - x^2}dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{9 - x^2} + 9 \arcsin \frac{x}{3}\right) + c.$

b) Să se calculeze aria domeniului plan cuprins între parabolele de ecuaţii
$(\mathcal{P}_1) : y^2 = 2x; (\mathcal{P}_2) : x^2 = 2y.$

Rezolvare. •Se reprezintă grafic domeniul



•$y^2 = 2x$ este parabola ce trece prin $O(0, 0), A(2, 2), B(2, -2)$
•$x^2 = 2y$ este parabola ce trece prin $O(0, 0), A(2, 2), C(-2, 2)$
• $(\mathcal{P}_1) \cap (\mathcal{P}_2) = \{O, A\}$ deoarece
$\begin{cases} y^2 = 2x \\ x^2 = 2y \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0) \text{ sau } (x, y) = (2, 2)$

Deci D este domeniul plan mărginit de arcele de parabolă $\left[O\overset{\frown}{D_1}A\right]$ şi $\left[O\overset{\frown}{D_2}A\right]$

•Se studiază dacă $D = \Gamma_{f,g}$, este generat de funcţii f, g.
Fie $(x, y) \in \Gamma_{f,g}$ un punct oarecare din domeniu. Se consideră paralele la Oy prin punctul (x, y) şi se observă că toate aceste paralele au ecuaţiile $\widetilde{x} = x$, cu $0 \le x \le 2$ atunci când $(x, y) \in \Gamma_{f,g}$. Mai mult, când (x, y) variază în $\Gamma_{f,g}$ pe o astfel de paralelă, y-ul variază între y-ul de pe arcul de parabolă $\left[O\overset{\frown}{D_1}A\right]$ şi y-ul de pe arcul de parabolă $\left[O\overset{\frown}{D_2}A\right]$, adică $\frac{x^2}{2} \le y \le +\sqrt{2x}$. Se menţionează explicitările curbelor care mărginesc domeniul în raport cu y.

Se aleg: $f : [0, 2] \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2}{2}$ şi $g : [0, 2] \to \mathbb{R}, g(x) = +\sqrt{2x}$;
f, g sunt continue pe $[0, 2]$.

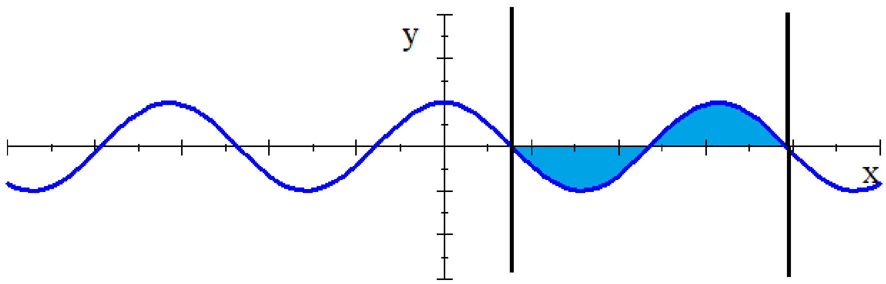
Deci $\Gamma_{f,g} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 \le x \le 2, \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{y\text{-ul de pe } \left[O\overset{\frown}{D_1}A\right]} \le y \le \underbrace{+\sqrt{2x}}_{y\text{-ul de pe } \left[O\overset{\frown}{D_2}A\right]} \right\}$

Conform Teoremei 10, b)$\Rightarrow$

$$\text{aria}\left(\Gamma_{f,g}\right) = \int_0^2 \left(\sqrt{2x} - \frac{x^2}{2}\right) dx = \left(\sqrt{2}\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - \frac{x^3}{2 \cdot 3}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=2} = \frac{4}{3}.$$

c) Să se calculeze aria domeniului plan cuprins între axa Ox şi graficul funcţiei $f : \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}, f(x) = \cos x$

Rezolvare. •Se reprezintă grafic domeniul



•f este continuă. Conform Teoremei 10, c)$\Rightarrow$

$$\text{aria}\left(\Gamma_f\right) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} |\cos x|\, dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (-\cos x)\, dx + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} \cos x dx = (-\sin x)\Big|_{x=\frac{\pi}{2}}^{x=\frac{3\pi}{2}} + (\sin x)\Big|_{x=\frac{3\pi}{2}}^{x=\frac{5\pi}{2}} = 4.$$

Teorema 2.7.2. Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă, cu derivata f' continuă. Fie

$$\boxed{G_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; a \le x \le b, y = f(x)\right\}}$$

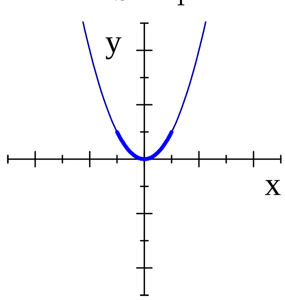
graficului lui f. Atunci G_f are lungime finită şi

$$\boxed{\text{lung}\left(G_f\right) = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} dx.}$$

Exerciţiul 2. Să se calculeze lungimea graficului funcţiei

a) $f : [-1,1] \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$.

Rezolvare.•Se reprezintă graficul funcţiei



•Este un arc de parabolă.

Se observă că f este derivabilă, adică

$\exists f' : [-1,1] \to \mathbb{R}, f'(x) = 2x.$

Mai mult, f' este continuă pe $[-1,1]$.

Conform Teoremei 2 $\Rightarrow$ $\text{lung}\left(G_f\right) = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + (2x)^2} dx = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{x^2 + \frac{1}{4}} dx =$

$$= \left(x\sqrt{x^2+\tfrac{1}{4}} + \tfrac{1}{4}\ln\left(x+\sqrt{x^2+\tfrac{1}{4}}\right)\right)\Big|_{x=-1}^{x=1} = \tfrac{\sqrt{5}}{2} + \tfrac{1}{4}\ln\left(1+\tfrac{\sqrt{5}}{2}\right) + \tfrac{\sqrt{5}}{2} - \tfrac{1}{4}\ln\left(-1+\tfrac{\sqrt{5}}{2}\right).$$

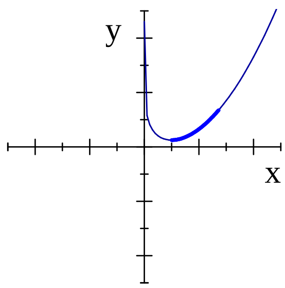
S-a folosit: $\underline{\int \sqrt{x^2+\frac{1}{4}}dx} = \int \left(\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}\right) x' dx = \left(\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}\right) x - \int \dfrac{x}{\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}} \cdot x dx =$

$$= x\sqrt{x^2+\tfrac{1}{4}} - \int \frac{x^2+\frac{1}{4}}{\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}}dx + \int \frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}}dx = x\sqrt{x^2+\tfrac{1}{4}} - \underline{\int \sqrt{x^2+\tfrac{1}{4}}dx} + \tfrac{1}{4}\ln\left(x+\sqrt{x^2+\tfrac{1}{4}}\right) \Rightarrow$$

$$\int \sqrt{x^2+\tfrac{1}{4}}dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+\tfrac{1}{4}} + \tfrac{1}{4}\ln\left(x+\sqrt{x^2+\tfrac{1}{4}}\right)\right) + c, \forall x \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R}.$$

b) $f : [1, e] \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x.$

Rezolvare.•Nu se reprezintă graficul funcţiei



Se observă direct că f este derivabilă, adică

$\exists f' : [1, e] \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{4}2x - \frac{1}{2}\frac{1}{x}.$

Mai mult, f' este continuă pe $[1, e]$.

Conform Teoremei 2 $\Rightarrow$ $\text{lung}(G_f) = \int_1^e \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\frac{1}{x}\right)^2}dx = \frac{1}{2}\int_1^e \sqrt{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2}dx =$

$$= \tfrac{1}{2}\int_1^e \left|x + \tfrac{1}{x}\right| dx = \tfrac{1}{2}\int_1^e \left(x + \tfrac{1}{x}\right) dx = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{x^2}{2} + \ln x\right)\Big|_{x=1}^{x=e} = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{e^2}{2} + \ln e\right) - \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1^2}{2} + \ln 1\right) = \tfrac{e^2+1}{4}.$$

Teorema 2.7.3. Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă a.î. $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$.

Fie $\boxed{C_f = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; a \leq x \leq b, 0 \leq \sqrt{y^2 + z^2} \leq f(x)\right\}}$ corpul de rotaţie obţinut prin rotaţia graficului lui f în jurul axei Ox.

Atunci C_f are volum şi $\boxed{\text{vol}(C_f) = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx.}$

Exemplul 2.7.3. Să se calculeze volumul corpului de rotaţie obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei

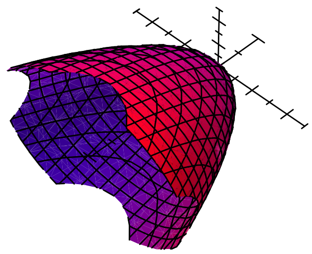
a) $f : [0, 3] \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{10x}.$

Rezolvare. a) Conform Teoremei 3 $\Rightarrow$

$$\text{vol}(C_f) = \pi \int_0^3 10x dx = 10\pi \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_{x=0}^{x=3} = \pi \cdot 5 \cdot 3^2 = 45\pi.$$

<u>Comentariu:</u> Dacă se reprezintă corpul de rotaţie

$C_f = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 0 \leq x \leq 3, 0 \leq \sqrt{y^2 + z^2} \leq \sqrt{10x}\right\}$, se obţine:



•Este un corp mărginit de o porţiune dintr-un paraboloid de rotaţie.

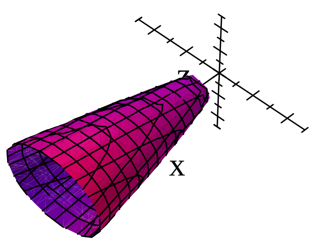
b) $f:[1,3]\rightarrow\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{x^2-1^2}$.

Rezolvare. Conform Teoremei 3 $\Rightarrow$

$$\mathrm{vol}\,(C_f)=\pi\int_1^3\left(x^2-1^2\right)dx=\pi\cdot\left(\frac{x^3}{3}-1^2x\right)\Bigg|_{x=0}^{x=3}=\pi\tfrac{20}{3}.$$

<u>Comentariu: </u>Dacă se reprezintă corpul de rotaţie

$C_f=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;1\le x\le 3, 0\le\sqrt{y^2+z^2}\le\sqrt{x^2-1^2}\right\}$ se obţine:



•Este un corp mărginit de o porţiune dintr-un hiperboloid de rotaţie.

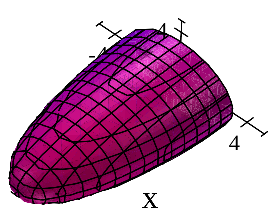
c) $f:[0,5]\rightarrow\mathbb{R}, f(x)=\frac{2}{5}\sqrt{5^2-x^2}$.

Rezolvare. Conform Teoremei 3 $\Rightarrow$

$$\mathrm{vol}\,(C_f)=\pi\int_0^5\tfrac{4}{25}\left(5^2-x^2\right)dx=1\pi\cdot\tfrac{4}{25}\left(5^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=5}=\pi\cdot\tfrac{40}{3}.$$

<u>Comentariu: </u>Se reprezintă corpul de rotaţie

$C_f=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;0\le x\le 5, 0\le\sqrt{y^2+z^2}\le\frac{2}{5}\sqrt{5^2-x^2}\right\}$ şi se obţine:



•Este un corp mărginit de o porţiune dintr-un elipsoid de rotaţie.

Teorema 2.7.4. Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcţie derivabilă, cu derivata continuă. Fie

$$\boxed{S_f=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3; a\le x\le b, \sqrt{y^2+z^2}=f(x)\right\}}$$

suprafaţa de rotaţie determinată prin rotirea graficului funcţiei f în jurul lui Ox. Atunci S_f are arie şi

$$\boxed{\operatorname{aria}(S_f)=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx.}$$

Exemplul 2.7.4. Să se calculeze aria suprafeţei de rotaţie determinată prin rotirea graficului funcţiei f în jurul lui Ox, unde

a) $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}, f(x)=\sin x.$

Rezolvare. Se observă că f este derivabilă, adică

$\exists f':[0,\pi]\to\mathbb{R}, f'(x)=\cos x.$

Mai mult, f' este continuă pe $[0,\pi]$.

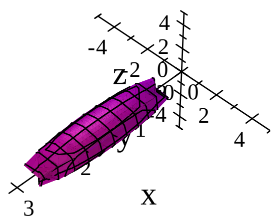
Conform Teoremei 4 $\Rightarrow$

$$\operatorname{aria}(S_f)=2\pi\int_0^\pi \sin x\sqrt{1+(\cos x)^2}dx \overset{\cos x=t}{=} -2\pi\int_1^{-1}\sqrt{1+t^2}dt=2\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{t^2+1^2}dt=$$

$$=\left(\frac{1}{2}\left(t\sqrt{t^2+1^2}+1^2\ln\left(t+\sqrt{t^2+1^2}\right)\right)\right)\Big|_{t=-1}^{t=1}=2\pi\left(\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right).$$

<u>Comentariu:</u> Se reprezintă graficul funcţiei; este un arc de sinusoidă. Se reprezintă suprafaţa de rotaţie

$$S_f=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3; 0\le x\le\pi, \sqrt{y^2+z^2}=\sin x\right\}$$



Teorema 2.7.5. Fie $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ funcţii continue a.î. $f(x)\le g(x), \forall x\in[a,b]$.

Fie $\Gamma_{f,g}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; a\le x\le b, f(x)\le y\le g(x)\right\}$ domeniul plan mărginit de graficele lui f,g, şi dreptele de ecuaţii $x=a$, $x=b$.

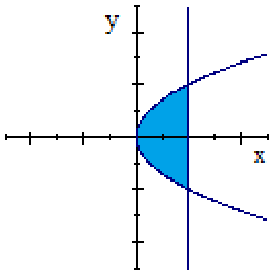
Atunci **centrul** $G(x_G,y_G)$ **de greutate** a plăcii plane identificate cu $\Gamma_{f,g}$ are coordonatele carteziene date de

$$\boxed{x_G=\frac{\int_a^b x\left(g(x)-f(x)\right)dx}{\int_a^b\left(g(x)-f(x)\right)dx}; y_G=\frac{\frac{1}{2}\int_a^b\left(g^2(x)-f^2(x)\right)dx}{\int_a^b\left(g(x)-f(x)\right)dx}.}$$

Exerciţiul 2.7.5. **a)** Să se determine centrul de greutate a unei plăci plane omogene de forma

$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; 0\le x\le 2, y^2\le 2x\right\}.$

Rezolvare. •Se reprezintă grafic domeniul



•$x = 0$ este axa Oy;
$x \geq 0 \Rightarrow$
•$x = 2$ este o dreaptă paralelă cu Oy
$x \leq 2 \Rightarrow$
•$y^2 = 2x$ este o parabolă
$y^2 \leq 2x \Rightarrow$
•se intersectează $\Rightarrow$ desenul

•Se studiază dacă $D = \Gamma_{f,g}$, este generat de funcţii f, g.
Fie $(x, y) \in \Gamma_{f,g}$ un punct oarecare din domeniu. Se consideră paralele la Oy prin punctul (x, y) şi se observă că toate aceste paralele au ecuaţiile $\widetilde{x} = x$, cu $0 \leq x \leq 2$ atunci când $(x, y) \in \Gamma_{f,g}$. Mai mult, când (x, y) variază în $\Gamma_{f,g}$ pe o astfel de paralelă, y-ul variază între y-ul de pe arcul de parabolă $\left[\overset{\frown}{OA}\right]$ şi y-ul de pe arcul de parabolă $\left[\overset{\frown}{OB}\right]$, adică $-\sqrt{2x} \leq y \leq +\sqrt{2x}$. Se menţionează explicitările curbelor care mărginesc domeniul în raport cu y.

Se alege: $f : [0, 2] \to \mathbb{R}, f(x) = -\sqrt{2x}$ şi $g : [0, 2] \to \mathbb{R}, g(x) = +\sqrt{2x}$;
f, g sunt continue pe $[0, 2]$.

Deci $\Gamma_{f,g} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 2, \underbrace{-\sqrt{2x}}_{y\text{-ul de pe } \left[\overset{\frown}{OA}\right]} \leq y \leq \underbrace{+\sqrt{2x}}_{y\text{-ul de pe } \left[\overset{\frown}{OB}\right]} \right\}$

Conform Teoremei 5 $\Rightarrow$

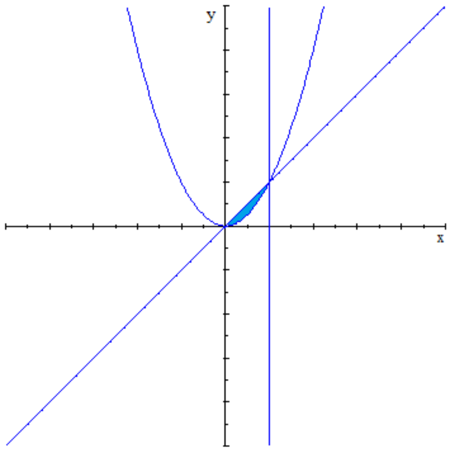
$$x_G = \frac{\int_0^2 x\left(\sqrt{2x} - \left(-\sqrt{2x}\right)\right) dx}{\int_0^2 \left(\sqrt{2x} - \left(-\sqrt{2x}\right)\right) dx} = \frac{2\sqrt{2}\int_0^2 x\sqrt{x}dx}{2\sqrt{2}\int_0^2 \sqrt{x}dx} = \frac{\left.\frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}\right|_{x=0}^{x=2}}{\left.\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right|_{x=0}^{x=2}} = \frac{3}{5} \cdot 2;$$

$$y_G = \frac{\frac{1}{2}\int_0^2 \left(\left(\sqrt{2x}\right)^2 - \left(-\sqrt{2x}\right)^2\right) dx}{\int_0^2 \left(\sqrt{2x} - \left(-\sqrt{2x}\right)\right) dx} = 0.$$

Deci $G\left(\frac{6}{5}, 0\right)$ (centrul de greutate se află pe axa Ox, care este şi axă de simetrie a mulţimii D).

b) Să se determine centrul de greutate a unei plăci plane omogene de forma
$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x\right\}$.

Rezolvare. •Se reprezintă grafic domeniul



•$x = 0$ este axa Oy;
$x \geq 0 \Rightarrow$
•$x = 1$ este o dreaptă paralelă cu Oy
$x \leq 1 \Rightarrow$
•$y = x^2$ este o parabolă
$x^2 \leq y \Rightarrow$
•$y = x$ este prima bisectoare
$y \leq x \Rightarrow$
•se intersectează $\Rightarrow$ desenul

•Se studiază dacă $D = \Gamma_{f,g}$, este generat de funcţii f, g.
Fie $(x, y) \in \Gamma_{f,g}$ un punct oarecare din domeniu. Se consideră paralele la Oy prin punctul (x, y) şi se observă că toate aceste paralele au ecuaţiile $\widetilde{x} = x$, cu $0 \leq x \leq 1$ atunci când $(x, y) \in \Gamma_{f,g}$. Mai mult, când (x, y) variază în $\Gamma_{f,g}$ pe o astfel de paralelă, y-ul variază între y-ul de pe arcul de parabolă $\left[O\overset{\frown}{D_1}A\right]$ şi y-ul de pe segmentul $\left[\overrightarrow{OD_2A}\right]$, adică $x^2 \leq y \leq x$. Se menţionează explicitările curbelor care mărginesc domeniul în raport cu y.

Se alege: $f : [0, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$ şi $g : [0, 2] \to \mathbb{R}, g(x) = x$;
f, g sunt continue pe $[0, 1]$.

Deci $\Gamma_{f,g} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1, \underbrace{x^2}_{y\text{-ul de pe } \left[O\overset{\frown}{D_1}A\right]} \leq y \leq \underbrace{x}_{y\text{-ul de pe } \left[\overrightarrow{OD_2A}\right]} \right\}$.

Conform Teoremei 5 $\Rightarrow$

$$x_G = \frac{\int_0^1 x\left(x - x^2\right) dx}{\int_0^1 \left(x - x^2\right) dx} = \frac{\left.\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\right|_{x=0}^{x=1}}{\left.\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\right|_{x=0}^{x=1}} = \frac{1}{2}; y_G = \frac{\frac{1}{2}\int_0^1 \left[x^2 - x^4\right] dx}{\int_0^1 \left[x - x^2\right] dx} = \frac{\frac{1}{2}\left.\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right)\right|_{x=0}^{x=1}}{\left.\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\right|_{x=0}^{x=1}} = \frac{2}{5}.$$

Deci $G\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{5}\right)$.

○3. Integrala Riemann (definită, proprie) cu parametri pentru $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$...