CURS NR. 12
Analiză matematică, AIA

Teoria integrabilităţii pentru $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

1. Integrale curbilinii

Integralele curbilinii au fost studiate încă din secolul al XIX-lea, pentru a oferi modelări la probleme legate de curgerea fluidelor, forţe, electricitate şi magnetism.

1.0. **Drumuri şi curbe în $\mathbb{R}^n$**

Definiţia 1.0.1. a) Fie $[a,b]$ un interval compact în $\mathbb{R}$. O funcţie

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n, \gamma(t) = (\gamma_1(t), ..., \gamma_n(t))$

se numeşte *drum* (*parametrizat*) în $\mathbb{R}^n$ dacă este funcţie continuă.

b) Dacă γ este un drum în $\mathbb{R}^n$, atunci mulţimea de "puncte" din $\mathbb{R}^n$

$\operatorname{Im}\gamma = \gamma([a,b]) = \{\gamma(t); t \in [a,b]\}$

se numeşte *imaginea drumului* γ sau *traiectoria drumului* γ sau *suportul drumului* γ (sau, pentru $n = 2$, *hodograful drumului* γ).

c) Dacă γ este un drum în $\mathbb{R}^n$, atunci ecuaţiile

$$\operatorname{Im}\gamma : \begin{cases} x_1 = \gamma_1(t) \\ ... \\ x_n = \gamma_n(t) \end{cases}, t \in [a,b]$$

se numesc *ecuaţiile parametrice ale imaginii drumului* γ (*reprezentarea parametrică a drumului* γ).

Cazuri particulare. a) $n = 2$. Un drum $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (x(t), y(t))$ se poate da şi prin

$$\operatorname{Im}\gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in [a,b], \text{ unde } x, y : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ sunt funcţii continue.}$$

A se vedea parametrizări de reprezentanţi de curbe clasice în plan la seminar la tablă (segmente de drepte, de parabole, de cercuri, de elipse, de hiperbole ş.a.m.d) şi în Exemplul 1.0.1 ulterior.

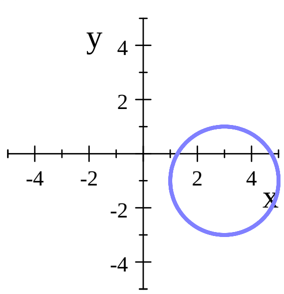
b) $n = 3$. Un drum $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3, \gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ se poate da şi prin

$$\operatorname{Im}\gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, t \in [a,b], \text{ unde } x, y, z : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ sunt funcţii continue.}$$

Exemplul 1.0.1. a) Fie drumul $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (3 + 2\cos t, -1 + 2\sin t)$. Atunci

$$\operatorname{Im}\gamma : \begin{cases} x(t) = 3 + 2\cos t \\ y(t) = -1 + 2\sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$$

sunt ecuaţiile parametrice ale cercului cu centrul $(3, -1)$ şi raza 2, parcurs o singură dată în sens direct.



Ecuaţia implicită a acestui cerc, $(x-3)^2+(y+1)^2 = 2^2$, nu oferă informaţii asupra a ce (x, y) să se aleagă încât punctele $M(x, y)$ din plan pentru care coordonatele carteziene o verifică să parcurgă o porţiune de cerc într-un anumit sens. În ecuaţiile parametrice,

-dacă se alege $t \in [0, 4\pi]$, $M(x, y)$ parcurge în sens direct cercul de două ori,

-dacă sealegem $t \in [0, \pi]$, $M(x, y)$ parcurge în sens direct semicercul de deasupra diametrului orizontal,

-dacă se alege $t \in [\pi, 2\pi]$, $M(x, y)$ parcurge în sens direct semicercul de sub diametrul orizontal,

-dacă se alege $t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $M(x, y)$ parcurge în sens direct semicercul din stânga diametrului vertical,

-dacă se alege $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $M(x, y)$ parcurge în sens direct un sfert de cerc corespunzător, ş.a.m.d.

În general, ecuaţia implicită a cercului cu centrul (x_0, y_0) şi raza r este

$$\boxed{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2,}$$

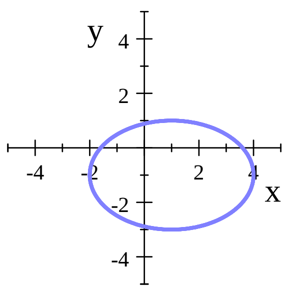
oferind informaţii doar asupra formei, nu şi a sensului de parcurgere de către $M(x, y)$, iar ecuaţiile parametrice ale *cercului* cu centrul (x_0, y_0) şi raza r, parcurs o singură dată în sens direct sunt

$$\boxed{\mathcal{C}((x_0, y_0); r) : \begin{cases} x(t) = x_0 + r\cos t \\ y(t) = y_0 + r\sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi]}$$

b) Fie drumul $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (1 + 3\cos t, -1 + 2\sin t)$. Atunci

$$\operatorname{Im}\gamma : \begin{cases} x(t) = 1 + 3\cos t \\ y(t) = -1 + 2\sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$$

sunt ecuaţiile parametrice ale elipsei cu centrul de simetrie $(1, -1)$ şi semiaxe de simetrie $a = 3, b = 2$, parcursă o singură dată în sens direct.



Ecuaţia implicită a acestei elipse, $\dfrac{(x-1)^2}{3^2} + \dfrac{(y+1)^2}{2^2} = 1$, nu poate oferi informaţii asupra a ce (x, y) să se aleagă încât punctele $M(x, y)$ din plan să constituie un anumit arc de elipsă parcurs într-un anumit sens.

În general, ecuaţia implicită a elipsei cu centrul (x_0, y_0) şi semiaxele a, b paralele cu axele este

$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-x_0)^2}{b^2} = 1,}$$

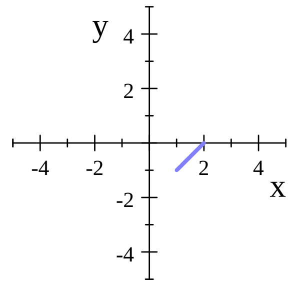
oferind informaţii doar asupra formei, nu şi a sensului de parcurgere de către $M(x, y)$, iar ecuaţiile parametrice ale *elipsei* cu centrul (x_0, y_0) şi semiaxele a, b paralele cu axele, parcursă o singură dată în sens direct sunt

$$\boxed{\mathcal{E}((x_0, y_0); r) : \begin{cases} x(t) = x_0 + a\cos t \\ y(t) = y_0 + b\sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi]}$$

c) Fie drumul $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (1 + t, -1 + t)$. Atunci

$$\operatorname{Im}\gamma : \begin{cases} x(t) = 1 + t \\ y(t) = -1 + t \end{cases}, t \in [0, 1]$$

sunt ecuaţiile parametrice ale segmentului din dreapta $x-y-2=0$, segment de capete $M_1(1,-1)$ şi $M_2(2,0)$.



Ecuaţia implicită a dreptei, $x-y-2=0$, nu poate oferi informaţii asupra a ce (x,y) să se aleagă încât punctele $M(x,y)$ din plan să constituie un anumit segment parcurs într-un anumit sens.

În general, ecuaţia implicită a dreptei în plan este

$ax+by+c=0,$

oferind informaţii doar asupra formei, nu şi a sensului de parcurgere de către $M(x,y)$, iar ecuaţiile parametrice ale *segmentului închis orientat* $\left[\overrightarrow{M_1M_2}\right]$ din plan, parcurs de la $M_1(x_1,y_1)$ la $M_2(x_2,y_2)$, sunt

$$\boxed{\left[\overrightarrow{M_1M_2}\right]:\begin{cases} x(t)=x_1+t(x_2-x_1) \\ y(t)=y_1+t(y_2-y_1) \end{cases},t\in[0,1]}$$

În general, ecuaţiile implicite ale dreptei în spaţiu sunt

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

oferind informaţii doar asupra formei, nu şi a parcurgerii, iar ecuaţiile parametrice ale *segmentului închis orientat* $\left[\overrightarrow{M_1M_2}\right]$ din spaţiu, parcurs de la $M_1(x_1,y_1,z_1)$ la $M_2(x_2,y_2,z_2)$, sunt

$$\boxed{\left[\overrightarrow{M_1M_2}\right]:\begin{cases} x(t)=x_1+t(x_2-x_1) \\ y(t)=y_1+t(y_2-y_1) \\ z(t)=z_1+t(z_2-z_1) \end{cases},t\in[0,1]}$$

d) Fie $a>0$ şi $b>0$ numere reale fixate. Fie drumul

$\gamma:A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3,\gamma(t)=(a\cos t,a\sin t,bt)$. Atunci

$$\boxed{\operatorname{Im}\gamma:\begin{cases} x(t)=a\cos t \\ y(t)=a\sin t \\ z(t)=bt \end{cases},t\in\mathbb{R}}$$

sunt ecuaţiile parametrice ale *elicei circulare în spaţiu*, parcursă în sens direct.

Ecuaţiile implicite ale acestei curbe,

$$\begin{cases} x^2+y^2=a^2 \\ \operatorname{tg}\dfrac{z}{b}=\dfrac{y}{x} \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} x=a\cos\dfrac{z}{b} \\ y=a\sin\dfrac{z}{b} \end{cases}$$

nu pot oferi informaţii asupra a ce (x,y,z) să se aleagă încât punctele $M(x,y,z)$ din spaţiu să constituie elicea parcursă într-un anumit sens, de exemplu.

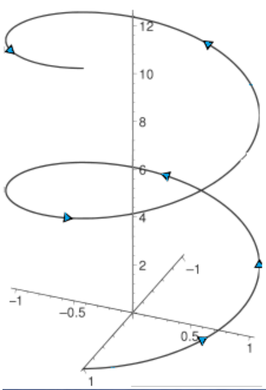
Curbura elicei generale este $\kappa=\dfrac{a}{a^2+b^2}$, iar torsiunea ei este $\tau=\dfrac{-b}{a^2+b^2}$. Pentru $a=b=1$, elicea simplă are proprietatea ce o distinge de alte curbe, şi anume, are raportul dintre curbură şi torsiune constant.

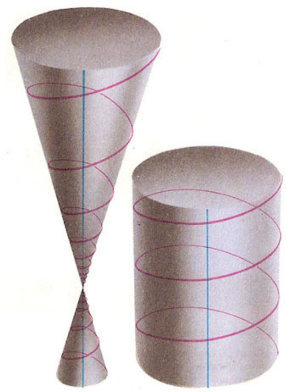
e) Fie $a>0$ şi $b>0$ numere reale fixate. Fie drumul

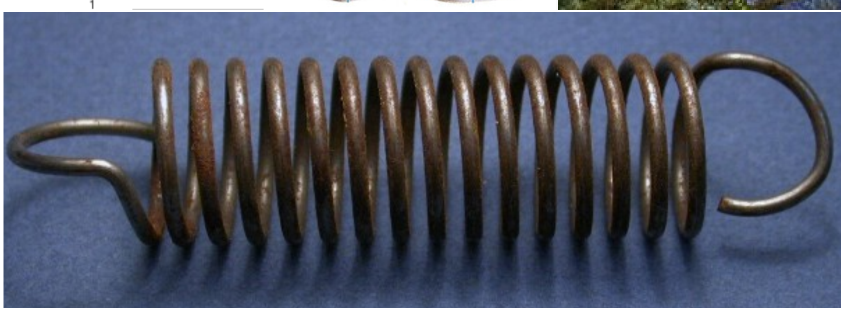
$\gamma : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \gamma(t) = (at\cos t, at\sin t, bt)$. Atunci

$$\boxed{\operatorname{Im}\gamma : \begin{cases} x(t) = at\cos t \\ y(t) = at\sin t \quad , t \in \mathbb{R} \\ z(t) = bt \end{cases}}$$

sunt ecuaţiile parametrice ale *elicei conice în spaţiu*, parcursă în sens direct.





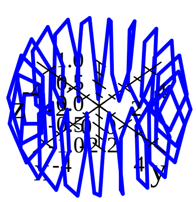


e) Fie drumul

$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \gamma(t) = ((4+\sin(20t))\cos t, (4+\sin(20t))\sin t, \cos(20t))$. Atunci

$$\operatorname{Im}\gamma : \begin{cases} x(t) = (4+\sin(20t))\cos t \\ y(t) = (4+\sin(20t))\sin t \quad , t \in [0, 2\pi] \\ z(t) = \cos(20t) \end{cases}$$

sunt ecuaţiile parametrice ale *spiralei toroidale în spaţiu*, parcursă în sens direct.

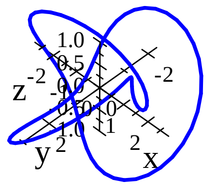


f) Fie drumul

$\gamma : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^3, \gamma(t) = \left(\left(2+\cos\left(\frac{3}{2}t\right)\right)\cos t, \left(2+\cos\left(\frac{3}{2}t\right)\right)\sin t, \sin\left(\frac{3}{2}t\right)\right)$. Atunci

$$\operatorname{Im}\gamma : \begin{cases} x(t) = \left(2+\cos\left(\frac{3}{2}t\right)\right)\cos t \\ y(t) = \left(2+\cos\left(\frac{3}{2}t\right)\right)\sin t \quad , t \in [0, 4\pi] \\ z(t) = \sin\left(\frac{3}{2}t\right) \end{cases}$$

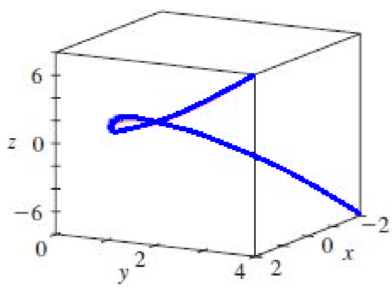
sunt ecuaţiile parametrice ale *nodului trifoi (the trefoil knot)*, parcursă în sens direct.

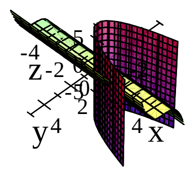


g) Fie drumul $\gamma : [-2,2] \to \mathbb{R}^3, \gamma(t) = \left(t, t^2, t^3\right)$. Atunci

$$\operatorname{Im}\gamma : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \\ z(t) = t^3 \end{cases}, t \in [-2,2]$$

sunt ecuaţiile parametrice ale *spiralei cubice (the twisted cubic)*, parcursă în sens direct.





Este curba ce are ecuaţiile implicite $\begin{cases} y = x^2 \\ z = x^3 \end{cases}$, oferind informaţii doar asupra formei, nu şi a parcurgerii, fiind obţinută prin intersecţia cilindrului parabolic $y = x^2$ (cu roşu) şi a cilindrului cubic $z = x^3$ (cu verde)

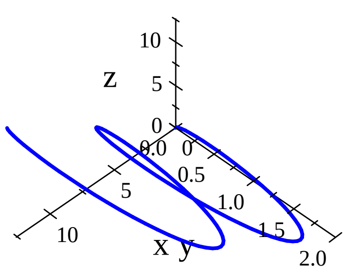
h) Fie drumurile

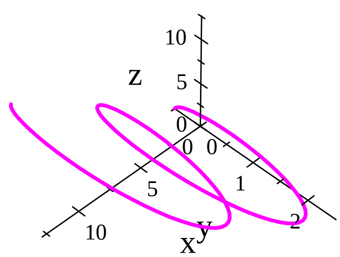
$\gamma : [0,4\pi] \to \mathbb{R}^3, \gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t, t)$ şi $\gamma : [0,4\pi] \to \mathbb{R}^3, \gamma(t) = \left(t - \frac{3}{2}\sin t, 1 - \frac{3}{2}\cos t, t\right)$.

Atunci

$$\operatorname{Im}\gamma : \begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = 1 - \cos t \\ z(t) = t \end{cases}, t \in [0,4\pi] \text{ şi } \operatorname{Im}\gamma : \begin{cases} x(t) = t - \frac{3}{2}\sin t \\ y(t) = 1 - \frac{3}{2}\cos t \\ z(t) = t \end{cases}, t \in [0,4\pi]$$

sunt ecuaţii parametrice de curbe tip *elice (the helix)*, utilizate în modelul ADN-ului.





Definiţia 1.0.2. Fie $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ un drum în $\mathbb{R}^n$. Se numeşte *opusul drumului* γ drumul

$$\gamma^- : [a,b] \to \mathbb{R}^n, \gamma^-(\tau) = \gamma(a+b-\tau).$$

Se observă că $\gamma^-(a) = \gamma(b)$ şi $\gamma^-(b) = \gamma(a)$.

Definiţia 1.0.3. Fie $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ şi $\gamma_2 : [b,c] \to \mathbb{R}^n$ drumuri în $\mathbb{R}^n$ cu proprietatea că $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$ ("se lipesc"). Se numeşte *juxtapunerea drumului* γ_1 *cu drumul* γ_2 drumul notat $\gamma_1 \cup \gamma_2$, definit prin

$$\gamma_1 \cup \gamma_2 : [a,c] \to \mathbb{R}^n, (\gamma_1 \cup \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & \text{dacă } t \in [a,b] \\ \gamma_2(t), & \text{dacă } t \in [b,c] \end{cases}$$

Definiţia 1.0.4. Fie $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n, \gamma(t) = (\gamma_1(t), ..., \gamma_n(t))$ un drum în $\mathbb{R}^n$.

a) Drumul γ se numeşte *drum neted* dacă funcţiile $\gamma_1, ..., \gamma_n$ sunt din $\mathcal{C}^1([a,b];\mathbb{R})$, cu $\gamma_1^2(t) + ... + \gamma_n^2(t) \neq 0, \forall t$.

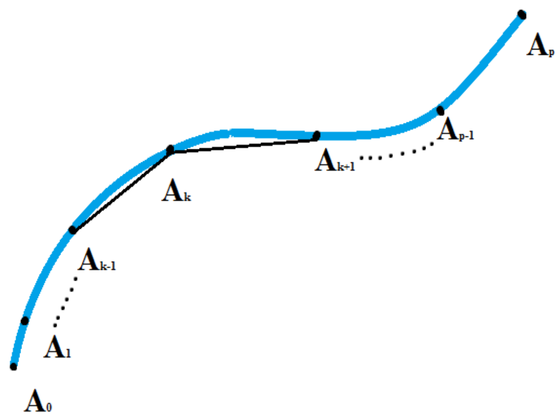
b) Drumul γ se numeşte *drum neted pe porţiuni* dacă se poate scrie ca o juxtapunere a unui număr finit de drumuri netede.

Definiţia 1.0.5. Fie $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n, \gamma(t) = (\gamma_1(t), ..., \gamma_n(t))$ un drum parametrizat în $\mathbb{R}^n$. Fie $\Delta \in \mathcal{D}([a,b])$ o diviziune a intervalului $[a,b]$,

$$\Delta : a = t_0 < t_1 < ... < t_p = b.$$

Fie γ_Δ drumul "poligonal" (reuniunea "segmentelor") cu "vârfurile" în "punctele"

$$A_k(\gamma_1(t_k), ..., \gamma_n(t_k)) \in \operatorname{Im}\gamma, \forall k \in \{0,1,...,p\}.$$



Atunci, pentru $k \in \{1,2,...,p\}$ lungimea "segmentului" cu capetele A_{k-1} şi A_k este

$$\text{lung}\left(\left[\overrightarrow{A_{k-1}A_k}\right]\right) = \sqrt{(\gamma_1(t_k) - \gamma_1(t_{k-1}))^2 + ... + (\gamma_n(t_k) - \gamma_n(t_{k-1}))^2},$$

şi deci lungimea "drumului poligonal" γ_Δ este

$$\text{lung}(\gamma_\Delta) = \sum_{k=1}^{p} \text{lung}\left(\left[\overrightarrow{A_{k-1}A_k}\right]\right) = \sum_{k=1}^{p} \sqrt{(\gamma_1(t_k) - \gamma_1(t_{k-1}))^2 + ... + (\gamma_n(t_k) - \gamma_n(t_{k-1}))^2}.$$

Drumul γ *are lungime finită* sau se numeşte *drum rectificabil* dacă mulţimea $\{\text{lung}(\gamma_\Delta); \Delta \in \mathcal{D}([a,b])\}$ este mărginită. În acest caz, *lungimea drumului* γ, notată $\text{lung}(\gamma)$, este numărul real pozitiv

$$\boxed{\text{lung}(\gamma) = \sup_{\Delta \in \mathcal{D}([a,b])} \text{lung}(\gamma_\Delta).}$$

Propoziţia 1.0.1. **a)** Dacă γ este un drum parametrizat rectificabil, atunci γ^- este un drum rectificabil şi

$$\text{lung}(\gamma^-) = \text{lung}(\gamma).$$

b) Dacă γ_1, γ_2 sunt drumuri parametrizate rectificabile, atunci $\gamma_1 \cup \gamma_2$ este un drum rectificabil şi

$$\text{lung}(\gamma_1 \cup \gamma_2) = \text{lung}(\gamma_1) + \text{lung}(\gamma_2).$$

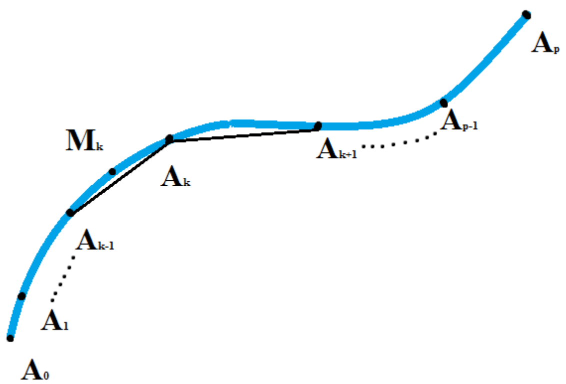
Teorema 1.0.1.(**de reprezentare integrală a lungimii unui drum**) Fie

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n, \gamma(t) = (\gamma_1(t), ..., \gamma_n(t))$
un drum parametrizat în $\mathbb{R}^n$. Dacă γ este drum neted atunci γ este drum rectificabil şi
$\operatorname{lung}(\gamma) = \int_a^b \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + ... + (\gamma_n'(t))^2} dt.$
Corolar 1.0.1. Fie $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ cu ecuaţiile parametrice
$\operatorname{Im}\gamma : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = f(t) \end{cases}, t \in [a,b]$
unde $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ este o funcţie din $\mathcal{C}^1([a,b];\mathbb{R})$. Atunci γ este drum rectificabil şi
$\operatorname{lung}(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt.$
Definiţia 1.0.6. Fie $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ un drum parametrizat în $\mathbb{R}^n$
a) γ se numeşte *drum închis* dacă $\gamma(a) = \gamma(b)$.
a) γ se numeşte *drum simplu* dacă funcţia γ este injectivă.
Definiţia 1.0.7. Fie $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ un drum parametrizat în $\mathbb{R}^n$ şi
$\varphi : [c,d] \to [a,b], \varphi(\tau) = t$
o bijecţie continuă strict crescătoare. Atunci $\gamma \circ \varphi$ este un drum numit *drumul obţinut din* γ *prin schimbarea de parametru* $t = \varphi(\tau)$.
Definiţia 1.0.8. Fie $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ şi $\gamma_2 : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ două drumuri parametrizate în $\mathbb{R}^n$. Drumurile γ_1 şi γ_2 se numesc *echivalente* prin relaţia $\sim$ de schimbare de parametru şi se notează $\gamma_1 \sim \gamma_2$ dacă există o funcţie
$\varphi : [c,d] \to [a,b], \varphi(\tau) = t$
bijectivă, continuă şi strict crescătoare astfel încât $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \varphi$.
Teorema 1.0.2. Relaţia de schimbare de parametru $\sim$ definită în Definiţia 1.0.8 este o relaţie de echivalenţă pe mulţimea drumurilor din $\mathbb{R}^n$.
Observaţia 1.0.1. Fie $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ şi $\gamma_2 : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ două drumuri parametrizate în $\mathbb{R}^n$. Dacă γ_1 este rectificabil şi $\gamma_1 \sim \gamma_2$, atunci γ_2 este rectificabil şi
$\operatorname{lung}(\gamma_2) = \operatorname{lung}(\gamma_1).$
Definiţia 1.0.8. Se numeşte *curbă orientată în* $\mathbb{R}^n$ o clasă $\widehat{\gamma}$ de drumuri echivalente în raport cu relaţia de schimbare de parametru.
Definiţia 1.0.9. O curbă $\widehat{\gamma}$ este *netedă* sau *de clasă* C^1 dacă un reprezentant al clasei de echivalenţă care este curba este drum neted sau de clasă C^1. O curbă este *netedă pe porţiuni* dacă un reprezentant al clasei de echivalenţă care este curba este drum neted pe porţiuni.
Definiţia 1.0.10. O curbă $\widehat{\gamma}$ se numeşte *rectificabilă* dacă un reprezentant al clasei de echivalenţă care este curba este drum rectificabil. În acest caz se defineşte lungimea curbei ca fiind lungimea oricarui drum reprezentant γ.

În cele ce urmează se identifică o curbă $\widehat{\gamma}$ cu orice drum reprezentant al său γ.

1.1. Integrale curbilinii de speţa 1

Definiţia 1.1.1. Fie $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n, \gamma(t) = (\gamma_1(t), ..., \gamma_n(t))$ un drum parametrizat rectificabil în $\mathbb{R}^n$. Fie $\Delta \in \mathcal{D}([a,b])$ o diviziune oarecare a intervalului $[a,b]$,
$\Delta : a = t_0 < t_1 < ... < t_p = b.$
cu "punctele" asociate $A_k(\gamma_1(t_k), ..., \gamma_n(t_k)) \in \operatorname{Im}\gamma, \forall k \in \{0, 1, ..., p\}$. Fie $\tau = (\tau_k)_{k=\overline{1,p}}$ un sistem de puncte intermediare corespunzătoare din $[a,b]$,
$t_{k-1} \le \tau_k \le t_k,$
cu "punctele" asociate $M_k(\gamma_1(\tau_k), ..., \gamma_n(\tau_k))$.



Fie funcţia $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, cu $\operatorname{Im}\gamma \subset D$.

Se numeşte *suma Riemann asociată funcţiei f în raport cu lungimea curbei γ, asociată diviziunii Δ şi sistemului de puncte intermediare τ* numărul real

$$S_\gamma (f, \Delta, \tau) = \sum_{k=1}^{p} f (\gamma (\tau_k)) \cdot \text{lung} \left(\left[\overrightarrow{A_{k-1}A_k} \right] \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{p} f (\gamma_1 (\tau_k), ..., \gamma_n (\tau_k)) \cdot \sqrt{(\gamma_1 (t_k) - \gamma_1 (t_{k-1}))^2 + ... + (\gamma_n (t_k) - \gamma_n (t_{k-1}))^2}.$$

Observaţia 1.1.1. Dacă $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ este a.î.

$f (x_1, ..., x_n) = 1, \forall (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$

atunci suma Riemann $S_\gamma (f, \Delta, \tau)$ reprezintă lungimea drumului poligonal γ_Δ cu vârfurile

$A_k (\gamma_1 (t_k), ..., \gamma_n (t_k)) \in \operatorname{Im}\gamma, \forall k \in \{0, 1, ..., p\}$, adică

$$S_\gamma (f, \Delta, \tau) = \text{lung} (\gamma_\Delta) = \sum_{k=1}^{p} \text{lung} \left(\left[\overrightarrow{A_{k-1}A_k} \right] \right) = \sum_{k=1}^{p} \sqrt{(\gamma_1 (t_k) - \gamma_1 (t_{k-1}))^2 + ... + (\gamma_n (t_k) - \gamma_n (t_{k-1}))^2}.$$

Se observă că, în anumite condiţii, aceasta aproximează lungimea curbei γ, $\text{lung} (\gamma)$.

Definiţia 1.1.2. Fie $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ un drum parametrizat rectificabil în $\mathbb{R}^n$ şi funcţia $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, cu $\operatorname{Im}\gamma \subset D$. Funcţia f se numeşte *integrabilă în raport cu lungimea curbei* γ dacă există un număr real $\mathcal{I}_f$ cu proprietatea că

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta (\varepsilon) > 0$ astfel încât $\forall \Delta \in \mathcal{D} ([a, b])$ cu $\|\Delta\| < \delta$ şi $\forall \tau \in \mathcal{P} (\Delta)$,

$|S_\gamma (f, \Delta, \tau) - \mathcal{I}_f| < \varepsilon.$

Se notează cu $\mathcal{R} (\gamma; 1)$ mulţimea tuturor funcţiilor integrabile în raport cu lungimea curbei γ.

Numărul $\mathcal{I}_f$ dacă există, este unic, şi se numeşte *integrala curbilinie pe curba γ în raport cu lungimea de arc* sau *de speţa întâi, a funcţiei f*. Se notează

$\mathcal{I}_f = \int_\gamma f (x_1, ..., x_n) \, ds.$

Propoziţia 1.1.1.(de liniaritate în raport cu integrantul a integralei curbilinii de speţa întâi)

Fie $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ un drum parametrizat rectificabil în $\mathbb{R}^n$. Fie $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, cu $\operatorname{Im}\gamma \subset D$ şi $\alpha \in \mathbb{R}$. Dacă $f, g \in \mathcal{R} (\gamma; 1)$ atunci $f + g \in \mathcal{R} (\gamma; 1)$ şi $\alpha f \in \mathcal{R} (\gamma; 1)$ şi

$\boxed{\int_\gamma (f + g) (x_1, ..., x_n) \, ds = \int_\gamma f (x_1, ..., x_n) \, ds + \int_\gamma g (x_1, ..., x_n) \, ds;}$

(**aditivitatea** în raport cu funcţia integrant)

$\boxed{\int_\gamma (\alpha \cdot f) (x_1, ..., x_n) \, ds = \alpha \int_\gamma f (x_1, ..., x_n) \, ds.}$

(**omogeneitatea** în raport cu funcţia integrant)

Propoziţia 1.1.2.a) (**invarianţa** la schimbarea de parametru) Fie $\gamma_1 : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ şi $\gamma_2 : [c, d] \to \mathbb{R}^n$ două drumuri parametrizate rectificabile în $\mathbb{R}^n$, a.î. $\gamma_1 \sim \gamma_2$. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, cu $\operatorname{Im}\gamma \subset D$. Dacă $f \in \mathcal{R} (\gamma_1; 1)$ atunci $f \in \mathcal{R} (\gamma_2; 1)$ şi

$\boxed{\int_{\gamma_1} f(x_1,...,x_n)\,ds = \int_{\gamma_2} f(x_1,...,x_n)\,ds.}$

b) (**integrala drumului opus-invarianţă**) Fie $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ un drum parametrizat rectificabil în $\mathbb{R}^n$. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, cu $\operatorname{Im}\gamma \subset D$. Dacă $f \in \mathcal{R}(\gamma;1)$ atunci $f \in \mathcal{R}(\gamma^-;1)$ şi

$\boxed{\int_{\gamma^-} f(x_1,...,x_n)\,ds = \int_{\gamma} f(x_1,...,x_n)\,ds.}$

Propoziţia 1.1.3.(**de aditivitate a integralei curbilinii de speţa întâi în raport cu drumul**) Fie $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ un drum parametrizat rectificabil în $\mathbb{R}^n$. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, cu $\operatorname{Im}\gamma \subset D$. Presupunem că $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$. Dacă $f \in \mathcal{R}(\gamma_1;1)$ şi $f \in \mathcal{R}(\gamma_2;1)$ atunci $f \in \mathcal{R}(\gamma_1 \cup \gamma_2;1)$ şi

$\boxed{\int_{\gamma_1\cup\gamma_2} f(x_1,...,x_n)\,ds = \int_{\gamma_1} f(x_1,...,x_n)\,ds + \int_{\gamma_2} f(x_1,...,x_n)\,ds.}$

Teorema 1.1.1.(**de reducere a unei integrale curbilinii de speţa 1 la o integrală Riemann**) Fie $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n, \gamma(t) = (\gamma_1(t),...,\gamma_n(t))$
un drum parametrizat rectificabil în $\mathbb{R}^n$, reprezentant al unei curbe notată tot γ. Fie
$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, cu $\operatorname{Im}\gamma \subset D$.

$$\text{Dacă } \left.\begin{array}{l}\gamma \text{ este curbă netedă (sau netedă pe porţiuni)}\\ f \text{ este câmp scalar continuu}\end{array}\right\}$$

atunci $f \in \mathcal{R}(\gamma;1)$ şi

$$\boxed{\int_{\gamma} f(x_1,...,x_n)\,ds = \int_a^b f(\gamma_1(t),...,\gamma_n(t))\sqrt{(\gamma_1'(t))^2+...+(\gamma_n'(t))^2}dt.}$$

$\boxed{ds = \sqrt{(\gamma_1'(t))^2+...+(\gamma_n'(t))^2}dt}$ se numeşte *element de arc*.

Cazuri particulare. a) $n = 2$. Dacă

$$\left.\begin{array}{l}\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (x(t),y(t)) \text{ este curbă netedă (sau netedă pe porţiuni)}\\ f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \text{ cu } \operatorname{Im}\gamma \subset D, \text{ este câmp scalar continuu}\end{array}\right\}$$

atunci $f \in \mathcal{R}(\gamma;1)$ şi

$$\boxed{\int_{\gamma} f(x,y)\,ds = \int_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt.}$$

b) $n = 3$. Dacă

$$\left.\begin{array}{l}\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3, \gamma(t) = (x(t),y(t),z(t)) \text{ este curbă netedă (sau netedă pe porţiuni)}\\ f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \text{ cu } \operatorname{Im}\gamma \subset D, \text{ este câmp scalar continuu}\end{array}\right\}$$

atunci $f \in \mathcal{R}(\gamma;1)$ şi

$$\boxed{\int_{\gamma} f(x,y,z)\,ds = \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}dt.}$$

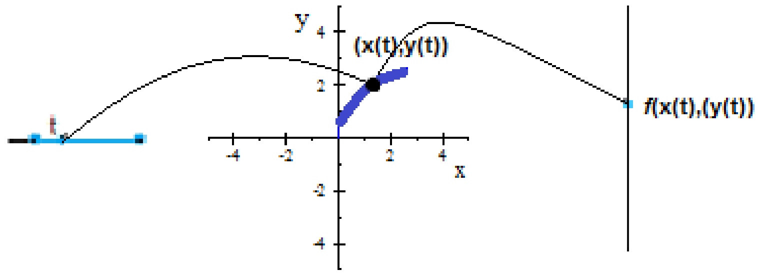
Exemplul 1.1.1. Să se calculeze $\int_{\gamma} ye^{-x}ds$, unde un reprezentant al curbei γ are ecuaţiile parametrice

$$\operatorname{Im}\gamma : \begin{cases} x(t) = \ln(1+t^2) \\ y(t) = 2\operatorname{arctg} t - t + 1 \end{cases}, t \in [0,1].$$

Rezolvare. <u>etapa 1.</u> Se studiază curba

•Se parametrizează un reprezentant al curbei, dacă aceasta nu este dată parametric. Aici este dată, adică

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) = \Bigg(\underbrace{\ln(1+t^2)}_{x(t)}, \underbrace{2\operatorname{arctg} t - t + 1}_{y(t)}\Bigg).$$



•Curba γ este netedă, deoarece

$$\begin{cases} \exists\gamma' : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \gamma'(t) = \left(\underbrace{\frac{1}{1+t^2} \cdot 2t}_{x'(t)}, \underbrace{2\frac{1}{1+t^2} - 1 + 0}_{y'(t)} \right) = \left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2} \right) \\ \gamma'\text{- este continuă pe } [0,1] \text{ şi } (x'(t))^2 + (y'(t))^2 \neq 0, \forall t \end{cases}$$

etapa 2. Se studiază integrantul f.

$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = ye^{-x}$.

$D = \mathbb{R}^2, \operatorname{Im}\gamma \subset D. f$ este câmp scalar continuu pe $\mathbb{R}^2$.

etapa 3. Se determină $\mathcal{I} = \int_\gamma ye^{-x} ds$, aplicând Teorema de reducere, caz $n = 2$.

Se calculează elementul de arc

$$ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt \Rightarrow ds = \sqrt{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2 + \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2} dt = 1dt.$$

Se înlocuieşte în formulă:

$$\mathcal{I} = \int_\gamma ye^{-x} ds = \int_0^1 (2\operatorname{arctg} t - t + 1) e^{-\ln(1+t^2)} \cdot 1dt = \int_0^1 (2\operatorname{arctg} t - t + 1) \frac{1}{1+t^2} dt =$$

$$= 2\int_0^1 \operatorname{arctg} t (\operatorname{arctg} t)' dt - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2t}{1+t^2} dt + \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt =$$

$$= 2\left.\frac{(\operatorname{arctg} t)^2}{2}\right|_{t=0}^{t=1} - \frac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right)\Big|_{t=0}^{t=1} + (\operatorname{arctg} t)\Big|_{t=0}^{t=1} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4}.$$

Exemplul 1.1.2. Să se calculeze

$$\int_\gamma \frac{1}{x^2+y^2+z^2} ds,$$

unde un reprezentant curbei γ are ecuaţiile implicite

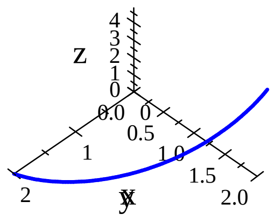
$$\operatorname{Im}\gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 = 2^2 \\ \operatorname{tg}\frac{z}{3} = \frac{y}{x} \end{cases},$$

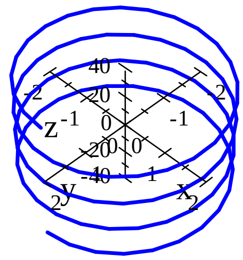
considerate a.î. $M(x,y,z)$ să parcurgă curba (elice circulară) între $A(2,0,0)$ şi $B\left(0,2,\frac{3\pi}{2}\right)$.

Rezolvare. etapa 1. Se studiază curba

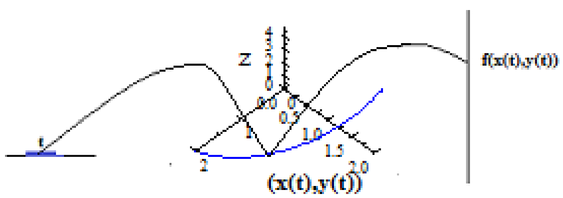
•Se parametrizează un reprezentant al curbei, deoarece aici aceasta nu este dată parametric. Se observă că

$$\operatorname{Im}\gamma : \begin{cases} x(t) = 2\cos t \\ y(t) = 2\sin t \\ z(t) = 3t \end{cases}, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \text{ adică}$$





(este o porţiune din elicea circulară desenată alături, pentru $t \in [-4\pi, 4\pi]$)



$$\gamma : \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^3, \gamma(t) = \left(\underbrace{2\cos t}_{x(t)}, \underbrace{2\sin t}_{y(t)}, \underbrace{3t}_{z(t)}\right).$$

•Se studiază dacă γ este curbă netedă. Este, deoarece

$$\begin{cases} \exists \gamma' : \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^3, \gamma'(t) = \left(\underbrace{-2\sin t}_{x'(t)}, \underbrace{2\cos t}_{y'(t)}, \underbrace{3}_{z'(t)}\right). \\ \gamma' \text{- este continuă pe } \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right] \text{ şi } (x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2 \neq 0, \forall t \end{cases}$$

etapa 2. Se studiază integrantul f.

$f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x, y, z) = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$.

$D = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}, \operatorname{Im}\gamma \subset D. f$ este câmp scalar continuu pe D.

etapa 3. Se determină $\mathcal{I} = \int_\gamma \dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2} ds$, aplicând Teorema de reducere, caz $n = 3$.

Se calculează elementul de arc

$$ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt \Rightarrow ds = \sqrt{(-2\sin t)^2 + (2\cos t)^2 + (3)^2} dt = \sqrt{13} dt.$$

Se înlocuieşte în formulă

$$\mathcal{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(2\cos t)^2 + (2\sin t)^2 + (3t)^2} \sqrt{13} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4 + 9t^2} \sqrt{13} dt = \frac{\sqrt{13}}{9} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{t^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} dt =$$

$$= \frac{\sqrt{13}}{9} \cdot \frac{1}{\frac{2}{3}} \left(\operatorname{arctg} \frac{t}{\frac{2}{3}}\right)\Bigg|_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{13}}{6} \left(\operatorname{arctg} \frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{2}{3}} - \operatorname{arctg} 0\right) = \frac{\sqrt{13}}{6} \operatorname{arctg} \frac{3\pi}{4}.$$

Teorema 1.1.2.(**o interpretare geometrică a unei integrale curbilinii de speţa 1**) Fie

$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n, \gamma(t) = (\gamma_1(t), ..., \gamma_n(t))$

un drum parametrizat rectificabil în $\mathbb{R}^n$, reprezentant al unei curbe notată tot γ. Dacă γ este curbă netedă (sau netedă pe porţiuni) atunci

$$\boxed{\operatorname{lung}(\gamma) = \int_\gamma 1 \cdot ds = \int_a^b \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + ... + (\gamma_n'(t))^2} dt.}$$

Cazuri particulare.

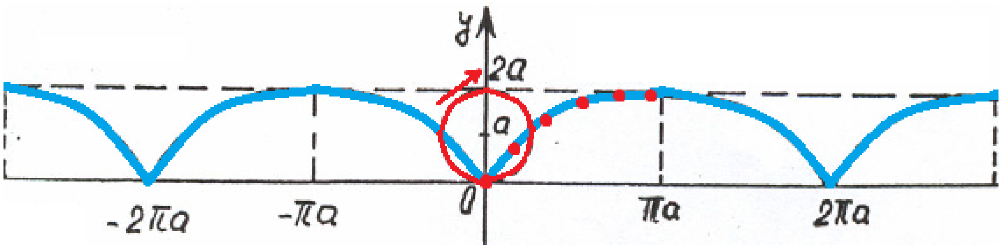
a) $n = 2$. Dacă $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (x(t), y(t))$ este curbă netedă (sau netedă pe porţiuni) atunci

$$\boxed{\text{lung}\,(\gamma) = \int_\gamma 1 \cdot ds = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt.}$$

b) $n = 3$. Dacă $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3, \gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ este curbă netedă (sau netedă pe porţiuni) atunci

$$\boxed{\text{lung}\,(\gamma) = \int_\gamma 1 \cdot ds = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,dt.}$$

Exemplul 1.1.3. a) Să se calculeze lungimea unui arc de cicloidă



$$\text{Im}\gamma : \begin{cases} x(t) = a(t - \sin t) \\ y(t) = a(1 - \cos t) \end{cases}, t \in [0, 2\pi], \text{ unde } a > 0 \text{ este un număr real fixat.}$$

Rezolvare. Se anticipează că lung $(\gamma) = \int_\gamma 1 \cdot ds$.

etapa 1. Se studiază curba

•Se parametrizează un reprezentant al curbei, dacă aceasta nu este dată parametric. Aici este dată, adică

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) = \left(\underbrace{a(t - \sin t)}_{x(t)}, \underbrace{a(1 - \cos t)}_{y(t)} \right).$$

•Se studiază dacă γ este curbă netedă. Este, deoarece

$$\begin{cases} \exists \gamma' : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \gamma'(t) = \left(\underbrace{a(1 - \cos t)}_{x'(t)}, \underbrace{a(0 + \sin t)}_{y'(t)} \right) \\ \gamma'\text{- este continuă pe } [0, 2\pi] \text{ şi } (x'(t))^2 + (y'(t))^2 \neq 0, \forall t \end{cases}$$

etapa 2. Se studiază integrantul f.

$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) = 1.$

$D = \mathbb{R}^2, \text{Im}\,\gamma \subset D. f$ este câmp scalar continuu pe $\mathbb{R}^2$.

etapa 3. Se determină $\mathcal{I} = \int_\gamma 1 \cdot ds$, aplicând Teorema, caz $n = 2$.

Se calculează elementul de arc

$$ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt \Rightarrow ds = \sqrt{(a(1 - \cos t))^2 + (a(0 + \sin t))^2}dt =$$
$$= \sqrt{a^2\left(1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t\right)}dt = \sqrt{a^2 \cdot 4\sin^2 \tfrac{t}{2}}dt = 2a\left|\sin \tfrac{t}{2}\right| dt.$$

Se înlocuieşte în formulă

$$\mathcal{I} = \int_\gamma 1 ds = \int_0^{2\pi} 2a\left|\sin \tfrac{t}{2}\right| dt = \int_0^{2\pi} 2a \sin \tfrac{t}{2} dt = 2a \left. \frac{-\cos \frac{t}{2}}{\frac{1}{2}} \right|_{t=0}^{t=2\pi} = 4a(-\cos \pi + \cos 0) = 8a.$$

Comentariu. Cicloida din figură este curba trasată prin deplasarea punctului $M = O$, fixat pe cercul de rază a, desenat cu roşu, atunci când cercul se rostogoleşte pe dreapta Ox. Este un exemplu de *ruletă*, de curbă generată de o curbă care se rostogoleşte pe o alta curbă. Aria de sub un arc de cicloidă este de trei ori mai mare decât aria cercului generator. Lungimea unei curbe este de patru ori mai mare decât diametrul cercului generator. Această curbă este diferenţiabilă peste tot cu excepţia *cuspidelor*, punctele de intersecţie cu axa Ox, unde derivata tinde spre $+\infty$ sau $-\infty$ în timp ce se apropie de cuspidă.

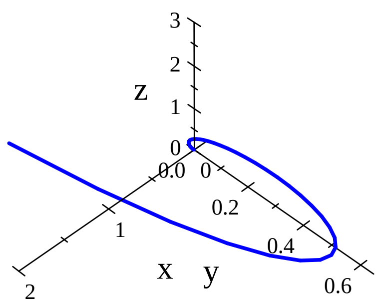
b) Să se determine elementul de arc şi să se calculeze lungimea curbei γ, unde un reprezentant al curbei γ are ecuaţiile parametrice

$$\mathrm{Im}\gamma : \begin{cases} x(t) = ae^{-t}\cos t \\ y(t) = ae^{-t}\sin t \\ z(t) = be^{-t} \end{cases}, t \in [0, +\infty[\text{, unde } a, b \text{ sunt constante reale.}$$

Rezolvare. Se anticipează că $\text{lung}(\gamma) \overset{\text{dacă } \exists}{=} \int_\gamma 1 \cdot ds$.

etapa 1. Se studiază curba

•Se parametrizează un reprezentant al curbei, dacă aceasta nu este dată parametric. Aici este dată, adică



$$\gamma : [0, +\infty[\to \mathbb{R}^3, \gamma(t) = \Bigg(\underbrace{ae^{-t}\cos t}_{x(t)}, \underbrace{ae^{-t}\sin t}_{y(t)}, \underbrace{be^{-t}}_{z(t)}\Bigg).$$

•Se studiază dacă γ este curbă netedă. Este, deoarece

$$\begin{cases} \exists\gamma' : [0, +\infty[\to \mathbb{R}^3, \gamma'(t) = \Bigg(\underbrace{-ae^{-t}\cos t - ae^{-t}\sin t}_{x'(t)}, \underbrace{-ae^{-t}\sin t + ae^{-t}\cos t}_{y'(t)}, \underbrace{-be^{-t}}_{z'(t)}\Bigg) \\ \gamma'\text{- este continuă pe } [0, +\infty[\text{ şi } (x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2 \neq 0, \forall t \end{cases}$$

etapa 2. Se studiază integrantul f.

$f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x, y, z) = 1$.

$D = \mathbb{R}^3, \mathrm{Im}\,\gamma \subset D. f$ este câmp scalar continuu pe $\mathbb{R}^3$.

etapa 3. Se determină $\mathcal{I} = \int_\gamma 1 \cdot ds$, aplicând Teorema, caz $n = 3$.

Se calculează elementul de arc $ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt \Rightarrow$

$$ds = \sqrt{(-ae^{-t}\cos t - ae^{-t}\sin t)^2 + (-ae^{-t}\sin t + ae^{-t}\cos t)^2 + (-be^{-t})^2}dt =$$
$$= \sqrt{2(a^2 + b^2)e^{-2t}}dt = \sqrt{2(a^2 + b^2)} \cdot e^{-t}dt$$

Se înlocuieşte în formulă

$$\text{lung}(\gamma) = \mathcal{I} = \int_\gamma 1 ds = \int_0^{+\infty} \sqrt{2(a^2 + b^2)} \cdot e^{-t}dt \overset{\text{dacă } \exists}{=} \sqrt{2(a^2 + b^2)}\, \frac{e^{-t}}{-1}\Bigg|_{t=0}^{t\to+\infty} =$$
$$= \sqrt{2(a^2 + b^2)}\left(0 + e^0\right) = \sqrt{2(a^2 + b^2)}.$$

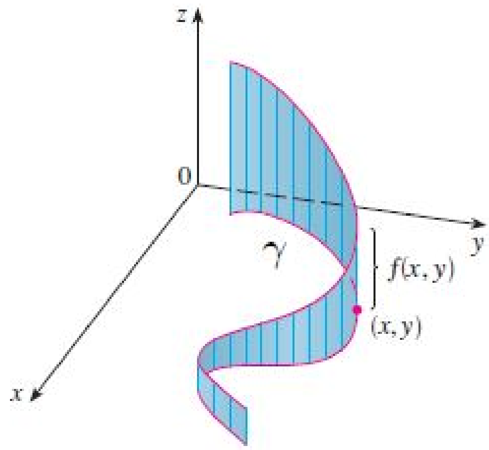
Teorema 1.1.3 (**o interpretare geometrică a integralei curbilinii de speţa 1**) Fie

$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (x(t), y(t))$

un drum parametrizat rectificabil în $\mathbb{R}^2$, reprezentant al unei curbe notată tot γ şi $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, cu $\operatorname{Im}\gamma \subset D$ şi $f(x, y) \geq 0$ pe D. Dacă γ este curbă netedă (sau netedă pe porţiuni), atunci

$A = \int_\gamma f(x, y)\, ds$

reprezintă aria "perdelei" din figură, cu baza γ şi cu înălţimea într-un punct (x, y) valoarea $f(x, y)$.



Teorema 1.1.4.(**masa unui fir material**)

Fie un fir material de grosime neglijabilă ce are forma unei imagini de curbă, $\operatorname{Im}\gamma$. Se presupune că densitatea firului este o funcţie $\rho : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

a) $n = 2$. Dacă

$$\left.\begin{array}{l}\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (x(t), y(t)) \text{ este curbă netedă} \\ \rho : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \text{ cu } \operatorname{Im}\gamma \subset D \text{ este continuă}\end{array}\right\}$$

atunci masa firului material este $\boxed{m = \int_\gamma \rho(x, y)\, ds}$

b) $n = 3$. Dacă

$$\left.\begin{array}{l}\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3, \gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)) \text{ este curbă netedă} \\ \rho : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \text{ cu } \operatorname{Im}\gamma \subset D \text{ este continuă}\end{array}\right\}$$

atunci masa firului material este $\boxed{m = \int_\gamma \rho(x, y, z)\, ds.}$

Teorema 1.1.5.(**coordonatele centrului de greutate ale unui fir material**)

Fie un fir material de grosime neglijabilă ce are forma unei imagini de curbă, $\operatorname{Im}\gamma$. Se presupune că densitatea firului este o funcţie $\rho : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

a) $n = 2$. Dacă

$$\left.\begin{array}{l}\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (x(t), y(t)) \text{ este curbă netedă} \\ \rho : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \text{ cu } \operatorname{Im}\gamma \subset D \text{ este continuă}\end{array}\right\}$$

atunci coordonatele centrului de greutate ale unui fir materiale sunt

$$\boxed{x_G = \frac{\int_\gamma x \cdot \rho(x, y)\, ds}{\int_\gamma \rho(x, y)\, ds}; y_G = \frac{\int_\gamma y \cdot \rho(x, y)\, ds}{\int_\gamma \rho(x, y)\, ds}.}$$

În cazul firului omogen, $\rho(x, y) = k, \forall (x, y, z) \in D \Rightarrow$

$$\boxed{x_G = \frac{\int_\gamma x ds}{\int_\gamma ds}; y_G = \frac{\int_\gamma y ds}{\int_\gamma ds}.}$$

b) $n=3$. Dacă
$$\left.\begin{array}{l}\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^3,\gamma(t)=(x(t),y(t),z(t))\ \text{ este curbă netedă}\\ \rho:D\subseteq\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\ \text{cu }\operatorname{Im}\gamma\subset D\text{ este continuă}\end{array}\right\}$$
atunci coordonatele centrului de greutate ale unui fir materiale sunt
$$\boxed{x_G=\frac{\int_\gamma x\cdot\rho(x,y,z)\,ds}{\int_\gamma\rho(x,y,z)\,ds};y_G=\frac{\int_\gamma y\cdot\rho(x,y,z)\,ds}{\int_\gamma\rho(x,y,z)\,ds};z_G=\frac{\int_\gamma z\cdot\rho(x,y,z)\,ds}{\int_\gamma\rho(x,y,z)\,ds}}$$
În cazul firului omogen, $\rho(x,y,z)=k,\forall(x,y,z)\in D\Rightarrow$
$$\boxed{x_G=\frac{\int_\gamma xds}{\int_\gamma ds};y_G=\frac{\int_\gamma yds}{\int_\gamma ds};z_G=\frac{\int_\gamma zds}{\int_\gamma ds}.}$$

1.2. Integrale curbilinii de speţa a-2-a

Definiţia 1.2.1. Fie $D\subseteq\mathbb{R}^n$ deschisă şi $\mathbf{x}=(x_1,...,x_n)\in D$. Fie $P_1,...,P_n:D\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ funcţii date. Se numeşte *formă diferenţială în* $\mathbf{x}$ *pe* $\mathbb{R}^n$ o aplicaţie liniară $\omega(\mathbf{x})\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$, definită prin
$$\omega(x_1,...,x_n)=P_1(x_1,...,x_n)\,dx_1+...+P_n(x_1,...,x_n)\,dx_n.$$
S-a utilizat convenţia că dx_i sunt funcţiile proiecţie a $\mathbb{R}^n$ pe Ox_i, adică $dx_i=p_i$, cu
$$p_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},p_i(h_1,...,h_n)=h_i,\forall i\in\{1,...,n\}.$$
Funcţiile $P_1,...,P_n$ se numesc *coeficienţii formei diferenţiale.*

Definiţia 1.2.2. Fie $D\subseteq\mathbb{R}^n$ deschisă şi $\mathbf{x}=(x_1,...,x_n)\in D$. Două forme diferenţiale în $\mathbf{x}$ sunt *egale* dacă au aceeaşi coeficienţi.

Observaţia 1.2.1. Fie $D\subseteq\mathbb{R}^n$ deschisă şi $\mathbf{x}=(x_1,...,x_n)\in D$. Reamintim că, dacă $g:D\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ este funcţie diferenţiabilă pe D, atunci diferenţiala ei în $(x_1,...,x_n)\in D$ are expresia
$$(dg)(x_1,...,x_n)=\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1,...,x_n)\,dx_1+...+\frac{\partial g}{\partial x_n}(x_1,...,x_n)\,dx_n.$$
Diferenţiala unei funcţii într-un punct este o formă diferenţială într-un punct. Reciproca nu este adevărată, adică nu orice formă diferenţială este diferenţiala unei funcţii. În acest sens vom da definiţia formei diferenţiale exacte.

Cazuri particulare.

a) $n=2$. Fie $D\subseteq\mathbb{R}^2$ deschisă şi $(x,y)\in D$. Fie $P,Q:D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ funcţii date. O *formă diferenţială în* (x,y) *pe* $\mathbb{R}^2$ este o aplicaţie liniară $\omega(x,y)\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$, definită prin
$$\omega(x,y)=P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy.$$
Funcţiile P,Q sunt *coeficienţii formei diferenţiale.*

Mai mult, dacă $g:D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ este funcţie diferenţiabilă pe D, atunci diferenţiala ei în $(x,y)\in D$ este forma diferenţială în (x,y)
$$(dg)(x,y)=\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\,dx+\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\,dy.$$
b) $n=3$. Fie $D\subseteq\mathbb{R}^3$ deschisă şi $(x,y,z)\in D$. Fie $P,Q,R:D\subseteq\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ funcţii date. O *formă diferenţială în* (x,y,z) *pe* $\mathbb{R}^3$ este o aplicaţie liniară $\omega(x,y,z)\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$, definită prin
$$\omega(x,y,z)=P(x,y,z)\,dx+Q(x,y,z)\,dy+R(x,y,z)\cdot dz..$$
Funcţiile P,Q,R sunt *coeficienţii formei diferenţiale.*

Mai mult, dacă $g:D\subseteq\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ este funcţie diferenţiabilă pe D, atunci diferenţiala ei în $(x,y,z)\in D$ este forma diferenţială în (x,y,z)
$$(dg)(x,y,z)=\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z)\,dx+\frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z)\,dy+\frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z)\,dz.$$
Definiţia 1.2.3. Fie $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n,\gamma(t)=(\gamma_1(t),...,\gamma_n(t))$ un drum parametrizat în $\mathbb{R}^n$. Fie $\Delta\in\mathcal{D}([a,b])$ o diviziune oarecare a intervalului $[a,b]$,

$\Delta : a = t_0 < t_1 < ... < t_p = b,$
cu "punctele" asociate $A_k(\gamma_1(t_k), ..., \gamma_n(t_k)) \in \operatorname{Im}\gamma, \forall k \in \{0, 1, ..., p\}.$
Fie $\tau = (\tau_k)_{k=\overline{1,p}}$ un sistem de puncte intermediare corespunzătoare din $[a, b]$,
$t_{k-1} \le \tau_k \le t_k.$
cu "punctele" asociate $M_k(\gamma_1(\tau_k), ..., \gamma_n(\tau_k)).$

Fie $D \subseteq \mathbb{R}^n$ deschisă şi forma diferenţială
$\omega = P_1 dx_1 + ... + P_n dx_n$
unde $P_1, ..., P_n : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sunt funcţii date cu $\operatorname{Im}\gamma \subset D$.

Se numeşte *suma Riemann asociată formei diferenţiale* ω *în raport cu* γ, *asociată diviziunii* Δ *şi sistemului de puncte intermediare* τ numărul real

$$S_\gamma(\omega, \Delta, \tau) = \sum_{k=1}^{p} \left(P_1(\gamma(\tau_k)) \cdot (\gamma_1(t_k) - \gamma_1(t_{k-1})) + ... + P_n(\gamma(\tau_k)) \cdot (\gamma_n(t_k) - \gamma_n(t_{k-1}))\right).$$

Definiţia 1.2.4. Fie $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ un drum parametrizat în $\mathbb{R}^n$. Fie $D \subseteq \mathbb{R}^n$ deschisă şi forma diferenţială
$\omega = P_1 dx_1 + ... + P_n dx_n$
unde $P_1, ..., P_n : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sunt funcţii date cu $\operatorname{Im}\gamma \subset D$. Forma diferenţială ω se numeşte *integrabilă în raport cu* γ dacă există un număr real $\mathcal{I}_\omega$ cu proprietatea că
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât $\forall \Delta \in \mathcal{D}([a, b])$ cu $\|\Delta\| < \delta$ şi $\forall \tau = (\tau_k)_{k=\overline{1,p}} \in \mathcal{P}(\Delta)$, să rezulte
$|S_\gamma(\omega, \Delta, \tau) - \mathcal{I}_\omega| < \varepsilon.$
Se notează cu $\mathcal{R}(\gamma; 2)$ mulţimea tuturor formelor diferenţiale integrabile în raport cu γ.

Numărul $\mathcal{I}_\omega$ dacă există, este unic, şi se numeşte *integrala curbilinie în raport cu* γ *în raport cu* x *şi* y sau *de speţa a doua, a formei diferenţiale* ω. Se notează
$\mathcal{I}_\omega = \int_\gamma \omega(x_1, ..., x_n) = \int_\gamma P_1(x)\,dx_1 + ... + P_n(x)\,dx_n.$

Propoziţia 1.2.1.(**de liniaritate în raport cu integrantul a integralei curbilinii de speţa a doua**)
Fie $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ un drum parametrizat în $\mathbb{R}^n$. Fie $D \subseteq \mathbb{R}^n$ deschisă şi formele diferenţiale
$\omega = P_1 dx_1 + ... + P_n dx_n$
$\widetilde{\omega} = \widetilde{P}_1 dx_1 + ... + \widetilde{P}_n dx_n$
unde $P_1, ..., P_n, \widetilde{P}_1, ..., \widetilde{P}_n : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sunt funcţii date cu $\operatorname{Im}\gamma \subset D$. Fie $\alpha \in \mathbb{R}$. Dacă $\omega, \widetilde{\omega} \in \mathcal{R}(\gamma; 2)$ atunci formele diferenţiale $\omega + \widetilde{\omega} \in \mathcal{R}(\gamma; 2)$ şi $\alpha\omega \in \mathcal{R}(\gamma; 2)$ şi

(**aditivitatea** în raport cu forma integrant) $\boxed{\int_\gamma (\omega + \widetilde{\omega})(x_1, ..., x_n) = \int_\gamma \omega(x_1, ..., x_n) + \int_\gamma \widetilde{\omega}(x_1, ..., x_n);}$

(**omogeneitatea** în raport cu forma integrant) $\boxed{\int_\gamma (\alpha\omega)(x_1, ..., x_n) = \alpha \int_\gamma \omega(x_1, ..., x_n).}$

Propoziţia 1.2.2.(**integrala drumului opus**) Fie $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ un drum parametrizat în $\mathbb{R}^n$. Fie $D \subseteq \mathbb{R}^n$ deschisă şi forma diferenţială
$\omega = P_1 dx_1 + ... + P_n dx_n$
unde $P_1, ..., P_n : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sunt funcţii date cu $\operatorname{Im}\gamma \subset D$. Dacă $\omega \in \mathcal{R}(\gamma; 2)$ atunci $\omega \in \mathcal{R}(\gamma^-; 2)$ şi

$\boxed{\int_{\gamma^-} \omega(x_1, ..., x_n) = -\int_\gamma \omega(x_1, ..., x_n).}$

Propoziţia 1.2.3.(**de aditivitate a integralei curbilinii de speţa a doua în raport cu drumul**)
Fie $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ un drum parametrizat rectificabil în $\mathbb{R}^n$. Fie $D \subseteq \mathbb{R}^n$ deschisă şi forma diferenţială
$\omega = P_1 dx_1 + ... + P_n dx_n$
unde $P_1, ..., P_n : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sunt funcţii date cu $\operatorname{Im}\gamma \subset D$. Presupunem că $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$. Dacă $\omega \in \mathcal{R}(\gamma_1; 2)$ şi $\omega \in \mathcal{R}(\gamma_2; 2)$ atunci $\omega \in \mathcal{R}(\gamma_1 \cup \gamma_2; 2)$ şi

$\boxed{\int_{\gamma_1\cup\gamma_2}\omega(x_1,...,x_n)=\int_{\gamma_1}\omega(x_1,...,x_n)+\int_{\gamma_2}\omega(x_1,...,x_n).}$

Teorema 1.2.1.(de reducere a unei integrale curbilinii de speţa a 2-a la o integrală Riemann) Fie

$\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n,\gamma(t)=(\gamma_1(t),...,\gamma_n(t))$

un drum parametrizat în $\mathbb{R}^n$, reprezentant al unei curbe notată tot γ. Fie $D\subseteq\mathbb{R}^n$ deschisă şi forma diferenţială

$\omega=P_1dx_1+...+P_ndx_n$

unde $P_1,...,P_n:D\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ sunt funcţii date cu $\operatorname{Im}\gamma\subset D$. Dacă

$$\left.\begin{array}{l}\gamma \text{ este curbă netedă (sau netedă pe porţiuni)}\\ \text{coeficienţii formei } \omega,\ P_1,...,P_n \text{ sunt câmpuri scalare continue}\end{array}\right\}$$

atunci $\omega\in\mathcal{R}(\gamma;2)$ şi

$$\int_\gamma\underbrace{P_1(x_1,...,x_n)dx_1+...+P_n(x_1,...,x_n)dx_n}_{\omega(x)}=\int_a^b(P_1(\gamma(t))\cdot\gamma_1'(t)+...+P_n(\gamma(t))\cdot\gamma_n'(t))dt.$$

Observaţia 1.2.2. Fie $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n,\gamma(t)=(\gamma_1(t),...,\gamma_n(t))$ un drum parametrizat în $\mathbb{R}^n$, reprezentant al unei curbe notată tot γ. Dacă γ este curbă netedă, atunci $d\gamma=(d\gamma_1,...,d\gamma_n)$. Fie $D\subseteq\mathbb{R}^n$ deschisă şi

$f:D\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n,f(x_1,...,x_n)=(P_1(x_1,...,x_n),...,P_n(x_1,...,x_n))$

un câmp vectorial continuu. Fie $\langle\cdot,\cdot\rangle$ produsul scalar pe $\mathbb{R}^n$. Integrala curbilinie de speţa a doua se poate defini şi ca

$$\int_\gamma\underbrace{\langle f(x_1,...,x_n),d\gamma\rangle}_{\omega(x)}=\int_a^b\langle f(\gamma(t)),\gamma'(t)\rangle dt.$$

În această interpretare, integrala curbilinie de speţa a doua $\int_\gamma\langle f(x_1,...,x_n),d\gamma\rangle$ se mai numeşte, mai ales în fizică, *circulaţia câmpului f de-a lungul curbei γ.*

Mai mult, pentru cazurile $n=2$ sau $n=3$ ulterioare, funcţiei f i se ataşează o forţă $\overrightarrow{\mathbf{F}}=P\overrightarrow{\mathbf{i}}+Q\overrightarrow{\mathbf{j}}$ sau $\overrightarrow{\mathbf{F}}=P\overrightarrow{\mathbf{i}}+Q\overrightarrow{\mathbf{j}}+R\overrightarrow{\mathbf{k}}$, iar integrala curbilinie de speţa a doua reprezintă *lucrul mecanic* efectuat de $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ când îşi deplasează punctul de aplicaţie de-a lungul curbei γ

Cazuri particulare. a) $n=2$. Dacă

$$\left.\begin{array}{l}\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^2,\gamma(t)=(x(t),y(t)) \text{ este curbă netedă (sau netedă pe porţiuni)}\\ \omega=Pdx+Qdy, \text{ formă diferenţială cu coeficienţii}\\ \quad P,Q:D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R} \text{ câmpuri scalare continue cu } \operatorname{Im}\gamma\subset D\end{array}\right\}$$

atunci $\omega\in\mathcal{R}(\gamma;2)$ şi

$$\boxed{\int_\gamma P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_a^b(P(x(t),y(t))\cdot x'(t)+Q(x(t),y(t))\cdot y'(t))dt.}$$

b) $n=3$. Dacă

$$\left.\begin{array}{l}\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^3,\gamma(t)=(x(t),y(t),z(t)) \text{ este curbă netedă (sau netedă pe porţiuni)}\\ \omega=Pdx+Qdy+Rdz, \text{ formă diferenţială cu coeficienţii}\\ \quad P,Q,R:D\subseteq\mathbb{R}^3\to\mathbb{R} \text{ câmpuri scalare continue cu } \operatorname{Im}\gamma\subset D\end{array}\right\}$$

atunci $\omega\in\mathcal{R}(\gamma;2)$ şi

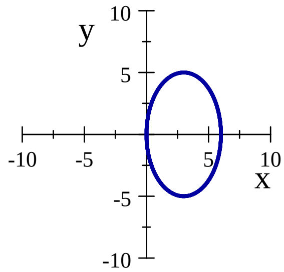
$$\boxed{\begin{array}{l}\int_\gamma P(x,y,z)dx+Q(x,y,z,)dy+R(x,y,z)dz=\\ \quad=\int_a^b[P(x(t),y(t),z(t))\cdot x'(t)+Q(x(t),y(t),z(t))\cdot y'(t)+R(x(t),y(t),z(t))\cdot z'(t)]dt.\end{array}}$$

Exemplul 1.2.1. Să se calculeze

a) $\int_\gamma ydx-(x-3)dy$,

unde γ este elipsa $\operatorname{Im}\gamma:\left\{\dfrac{(x-3)^2}{3^2}+\dfrac{y^2}{5^2}=1\right.$ parcursă o singură dată, în sens direct (trigonometric).

Rezolvare. etapa 1. Se studiază curba
•Se parametrizează un reprezentant al curbei, deoarece aceasta nu este dată parametric.



$$\mathrm{Im}\gamma : \begin{cases} x(t) = 3 + 3\cos t \\ y(t) = 0 + 5\sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi], \text{ adică}$$

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) = \left(\underbrace{3 + 3\cos t}_{x(t)}, \underbrace{5\sin t}_{y(t)} \right).$$

•Curba γ este netedă, deoarece

$$\begin{cases} \exists \gamma' : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \gamma'(t) = \left(\underbrace{-3\sin t}_{x'(t)}, \underbrace{5\cos t}_{y'(t)} \right). \\ \gamma'\text{- este continuă pe } [0, 2\pi] \text{ şi } (x'(t))^2 + (y'(t))^2 \neq 0, \forall t \end{cases}$$

etapa 2. Se studiază integrantul ω

$$\omega(x, y) = \underbrace{y}_{P(x,y)} dx + \underbrace{(-x + 3)}_{Q(x,y)} dy.$$

Coeficienţii formei diferenţiale, $P, Q : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sunt câmpuri scalare continue cu $D = \mathbb{R}^2$ şi $\mathrm{Im}\,\gamma \subset D$.

SAU

Se studiază integrantul $f, f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = \left(\underbrace{y}_{P(x,y)}, \underbrace{-x + 3}_{Q(x,y)} \right).$

$D = \mathbb{R}^2, \mathrm{Im}\,\gamma \subset D. f$ este câmp vectorial continuu pe $\mathbb{R}^2$.

Integrala dată ar fi circulaţia câmpului f de-a lungul curbei γ.

etapa 3. Se determină $\mathcal{I} = \int_\gamma ydx - (x - 3)\,dy$, aplicând Teorema de reducere, caz $n = 2$.

$$\begin{cases} x(t) = 3 + 3\cos t \\ y(t) = 0 + 5\sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi] \Rightarrow \begin{cases} dx(t) = (0 - 3\sin t)\,dt \\ dy(t) = (5\cos t)\,dt \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$$

Se înlocuieşte în formulă

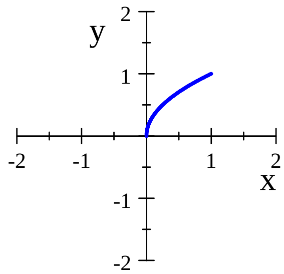
$$\mathcal{I} = \int_\gamma ydx - (x - 3)\,dy = \int_0^{2\pi} ((5\sin t)(-3\sin t) - (3 + 3\cos t - 3)(5\cos t))\,dt =$$
$$= -\int_0^{2\pi} \left(15\sin^2 t + 15\cos^2 t\right) dt = -15 \cdot 2\pi.$$

b) $\int_\gamma \frac{1}{1 + y^2} dx + \frac{1}{1 + x^2} dy,$

unde unde un reprezentant al curbei γ are ecuaţiile parametrice

$$\mathrm{Im}\gamma : \begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = t \end{cases}, t \in [0, 1].$$

Rezolvare. etapa 1. Se studiază curba
•Se parametrizează un reprezentant al curbei-aici este dată parametric, adică



$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) = \Big(\underbrace{t^2}_{x(t)}, \underbrace{t}_{y(t)}\Big).$$

•Curba γ este netedă, deoarece

$$\begin{cases} \exists \gamma' : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \gamma'(t) = \Big(\underbrace{2t}_{x'(t)}, \underbrace{1}_{y'(t)}\Big). \\ \gamma'\text{- este continuă pe } [0,1] \text{ şi } (x'(t))^2 + (y'(t))^2 \neq 0, \forall t \end{cases}$$

<u>etapa 2.</u> Sdudiem integrantul ω

$$\omega(x,y) = \underbrace{\frac{1}{1+y^2}}_{P(x,y)} dx + \underbrace{\frac{1}{1+x^2}}_{Q(x,y)} dy.$$

Coeficienţii formei diferenţiale, $P, Q : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sunt câmpuri scalare continue cu $D = \mathbb{R}^2$ şi $\operatorname{Im}\gamma \subset D$.

SAU

Se studiază integrantul $f, f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x,y) = \left(\underbrace{\frac{1}{1+y^2}}_{P(x,y)}, \underbrace{\frac{1}{1+x^2}}_{Q(x,y)}\right).$

$D = \mathbb{R}^2, \operatorname{Im}\gamma \subset D. f$ este câmp vectorial continuu pe $\mathbb{R}^2$.

Integrala dată ar fi circulaţia câmpului f de-a lungul curbei γ.

<u>etapa 3.</u> Se determină $\mathcal{I} = \int_\gamma \frac{1}{1+y^2} dx + \frac{1}{1+x^2} dy$, aplicând Teorema de reducere, caz $n = 2$.

$$\begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = t \end{cases}, t \in [0,1], \Rightarrow \begin{cases} dx(t) = 2t dt \\ dy(t) = 1 dt \end{cases}, t \in [0,1],$$

Se înlocuieşte în formulă

$$\mathcal{I} = \int_\gamma \left(\frac{1}{1+y^2} dx + \frac{1}{1+x^2} dy\right) = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+t^2} \cdot 2t + \frac{1}{1+(t^2)^2} \cdot 1\right) dt =$$

$$= \int_0^1 \frac{2t}{1+t^2} dt + \int_0^1 \frac{1}{1+t^4} dt = \int_0^1 \frac{2t}{1+t^2} dt + \int_0^1 \left(\frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}t + \frac{1}{2}}{t^2 - \sqrt{2}t + 1} + \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}t + \frac{1}{2}}{t^2 + \sqrt{2}t + 1}\right) dt =$$

$$= \int_0^1 \frac{2t}{1+t^2} dt - \tfrac{1}{4\sqrt{2}} \left(\int_0^1 \frac{2t - \sqrt{2}}{t^2 - \sqrt{2}t + 1} dt + \int_0^1 \frac{-\sqrt{2}}{\left(t - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} dt\right) +$$

$$+ \tfrac{1}{4\sqrt{2}} \left(\int_0^1 \frac{2t + \sqrt{2}}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} dt + \int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{\left(t + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} dt\right) =$$

$$= \ln\left(1+t^2\right)\Big|_{t=0}^{t=1} - \tfrac{1}{4\sqrt{2}} \ln\left(t^2-\sqrt{2}t+1\right)\Big|_{t=0}^{t=1} + \tfrac{1}{4}\cdot \tfrac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \operatorname{arctg} \frac{t-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\Bigg|_{t=0}^{t=1} +$$
$$+\tfrac{1}{4\sqrt{2}} \ln\left(t^2+\sqrt{2}t+1\right)\Big|_{t=0}^{t=1} + \tfrac{1}{4}\cdot \tfrac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \operatorname{arctg} \frac{t+\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\Bigg|_{t=0}^{t=1} =$$
$$= \ln 2 - \tfrac{1}{4\sqrt{2}} \ln\left(2-\sqrt{2}\right) + \tfrac{1}{2\sqrt{2}}\left(\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}-1\right) - \operatorname{arctg}(-1)\right) +$$
$$+\tfrac{1}{4\sqrt{2}} \ln\left(2+\sqrt{2}\right) + \tfrac{1}{2\sqrt{2}}\left(\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}+1\right) - \operatorname{arctg} 1\right) =$$
$$= \ln 2 + \tfrac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} + \tfrac{1}{2\sqrt{2}}\left(\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}-1\right) + \operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}+1\right)\right).$$

Observaţia 1.2.2. (**interpretare fizică-lucrul mecanic**) În fizică, lucrul mecanic al unei forţe conservative $\overrightarrow{F}$ de componente (P,Q,R) care se deplasează de-a lungul arcului de curbă $\overset{\frown}{AB}$ cu $\overrightarrow{r}$ de componente (x,y,z), este dat de integrala curbilinie de speţa a doua

$L = \int_{\overset{\frown}{AB}} \left[P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz\right].$

Se ştie că lucrul mecanic al forţei conservative $\overrightarrow{F}$ care îşi deplasează punctul de aplicare depinde doar de capetele drumului, nu şi de drumul parcurs între aceste capete (în câmp electric, în câmp gravitaţional). Din acest motiv, în continuare vom studia din punct de vedere matematic independenţa de drum a unei integrale curbilinii de speţa a doua.

a) $n = 2$. Dacă

$$\left.\begin{array}{l} \gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (x(t), y(t)) \text{ este curbă netedă} \\ F : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = (P(x,y), Q(x,y)) \\ \quad P, Q : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \text{ câmpuri scalare continue cu } \operatorname{Im}\gamma \subset D \end{array}\right\}$$

atunci lucrul mecanic efectuat pentru deplasarea unui punct material pe arcul $\operatorname{Im}\gamma$ sub acţiunea forţei F este

$\boxed{L = \int_\gamma \left[P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy\right]}$

b) $n = 3$. Dacă

$$\left.\begin{array}{l} \gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3, \gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)) \text{ este curbă netedă} \\ F : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = (P(x,y), Q(x,y), R(x,y,z)) \\ \quad P, Q, R : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \text{ câmpuri scalare continue cu } \operatorname{Im}\gamma \subset D \end{array}\right\}$$

atunci lucrul mecanic efectuat pentru deplasarea unui punct material pe arcul $\operatorname{Im}\gamma$ sub acţiunea forţei F este

$L = \int_\gamma \left[P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z,)\,dy + R(x,y,z)\,dz\right].$

Definiţia 1.2.5. Fie γ_1, γ_2 două drumuri parametrizate în $\mathbb{R}^n$, având aceleaşi capete. Fie $D \subseteq \mathbb{R}^n$ deschisă şi forma diferenţială

$\omega = P_1 dx_1 + ... + P_n dx_n$

unde $P_1, ..., P_n : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sunt funcţii date cu $\operatorname{Im}\gamma_{1,2} \subseteq D$. Integrala formei diferenţiale ω se numeşte *independentă de drum* dacă

$\int_{\gamma_1} \omega(x) = \int_{\gamma_2} \omega(x).$

Definiţia 1.2.6. Fie $D \subseteq \mathbb{R}^n$ deschisă şi forma diferenţială

$\omega = P_1 dx_1 + ... + P_n dx_n$

unde $P_1, ..., P_n : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sunt funcţii date. Forma diferenţială ω se numeşte *exactă* dacă există o funcţie $g : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenţiabilă astfel încât $\omega = dg$. În acest caz g se numeşte *primitivă* pentru forma diferenţială ω.

Observaţia 1.2.3. (**interpretare fizică**)

Fie $g : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ un câmp scalar de clasă $\mathcal{C}^1$ pe D. Atunci

$$\exists \nabla g : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \nabla g\,(x,y,z) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z), \frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z) \right).$$

Dacă $\nabla g = f$, spunem că g este un *câmp potenţial pentru* f.

În fizică, a studia dacă $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ este formă diferenţială exactă pe D şi a determina o primitivă g pentru forma ω revine la a studia dacă $f = (P, Q, R)$ este un câmp conservativ şi a determina un câmp potenţial pentru f.

Observaţia 1.2.4. În ipotezele Definiţiei 1.2.6, conform Observaţiei 1.2.1 şi Definiţiei 1.2.2, forma diferenţială $\omega = P_1 dx_1 + ... + P_n dx_n$ este exactă (este o diferenţială) dacă şi numai dacă există g funcţie diferenţiabilă a.î.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x_1} = P_1 \\ ... \\ \dfrac{\partial g}{\partial x_n} = P_n \end{cases}.$$

Teorema 1.2.2.(de tip Leibniz-Newton)

Fie $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ un drum parametrizat în $\mathbb{R}^n$, reprezentant al unei curbe notată tot γ. Fie $D \subseteq \mathbb{R}^n$ deschisă şi forma diferenţială

$\omega = P_1 dx_1 + ... + P_n dx_n$

unde $P_1, ..., P_n : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sunt funcţii date cu $\operatorname{Im}\gamma \subset D$. Dacă

$$\left.\begin{array}{l} \gamma \text{ este curbă netedă} \\ \text{coeficienţii formei } \omega,\ P_1, ..., P_n \text{ sunt câmpuri scalare continue pe } D \\ \omega \text{ admite o primitivă } g \text{ pe } D \end{array}\right\}$$

atunci

$\int_\gamma \omega\,(x_1, ..., x_n) = g\,(\gamma\,(b)) - g\,(\gamma\,(a))\,.$

Observaţia 1.2.4. Teorema 1.2.2 are loc şi în ipoteza că γ este curbă netedă pe porţiuni. Într-adevăr, fie $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup ... \cup \gamma_m$ şi fie $(\gamma_1(a), \gamma_1(a_1))\,,\ (\gamma_2(a_1), \gamma_2(a_2))\,,\ ...,\ (\gamma_m(a_{m-1}), \gamma_m(b))$ capetele drumurilor $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_m$. Menţionăm că $\gamma\,(a) = \gamma_1(a_1)\,,\ \gamma_1(a_1) = \gamma_2(a_1)\,, ..., \gamma_{m-1}(a_{m-1}) = \gamma_m(a_{m-1})\,,\ \gamma_m(b) = \gamma\,(b)\,.$ Atunci

$$\begin{aligned} &\int_\gamma \omega\,(x) = \int_{\gamma_1} \omega\,(x) + \int_{\gamma_2} \omega\,(x) + ... \int_{\gamma_m} \omega\,(x) = \\ &\quad = (g\,(\gamma_1(a_1)) - g\,(\gamma_1(a))) + (g\,(\gamma_2(a_2)) - g\,(\gamma_2(a_1))) + ... + g\,(\gamma_m(b)) - g\,(\gamma_m(a_{m-1})) = \\ &\quad = g\,(\gamma\,(b)) - g\,(\gamma\,(a))\,. \end{aligned}$$

Observaţia 1.2.5. Aproximând drumurile rectificabile prin linii poligonale înscrise (care sunt drumuri netede pe porţiuni), din Observaţia 1.2.4 deducem că Teorema 1.2.2 are loc şi în ipoteza că γ este curbă doar rectificabilă.

Teorema 1.2.3.(CNS de independenţă de drum a integralei formei ω)

Fie $D \subseteq \mathbb{R}^n$ deschisă şi forma diferenţială

$\omega = P_1 dx_1 + ... + P_n dx_n$

unde $P_1, ..., P_n : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sunt funcţii continue pe D. Integrala formei ω este independentă de drum dacă şi numai dacă, pentru orice $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n -$ drum parametrizat în $\mathbb{R}^n$, reprezentant al unei curbe notată tot γ, cu $\operatorname{Im}\gamma \subset D$, şi care este drum închis $(\gamma\,(a) = \gamma\,(b))$ avem

$\int_\gamma \omega\,(x) = 0.$

Definiţia 1.2.7. Fie $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Mulţimea D se numeşte *mulţime conexă* (*prin arce*) dacă orice două puncte ale sale pot fi unite printr-o linie poligonală inclusă în mulţimea D. O mulţime $D \subseteq \mathbb{R}^n$ deschisă şi conexă se numeşte *domeniu*.

Teorema 1.2.4.(CN, CS de independenţă de drum a integralei formei ω)

Fie $D \subseteq \mathbb{R}^n$ deschisă şi forma diferenţială

$\omega = P_1 dx_1 + ... + P_n dx_n$

unde $P_1,...,P_n : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sunt funcţii continue pe D.
a) Dacă ω este formă diferenţială exactă atunci are integrala independentă de drum.
b) Dacă D este conexă (prin arce) şi ω are integrala independentă de drum atunci ω este formă diferenţială exactă.
Definiţia 1.2.8. Fie $D \subseteq \mathbb{R}^n$ deschisă şi forma diferenţială

$$\omega = P_1dx_1 + ... + P_ndx_n$$

unde $P_1,...,P_n : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sunt funcţii date, de clasă $\mathcal{C}^1$ pe D. Forma diferenţială ω se numeşte *închisă* dacă

$$\frac{\partial P_i}{\partial x_j} = \frac{\partial P_j}{\partial x_i}, \forall i, j \in \{1,...,n\}, i \neq j.$$

Cazuri particulare.
a) $n = 2$. Fie $D \subseteq \mathbb{R}^2$ deschisă şi

$$\omega = Pdx + Qdy,$$

unde $P, Q : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sunt funcţii date, de clasă $\mathcal{C}^1$ pe D. Forma diferenţială ω este *închisă* dacă

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

b) $n = 3$. Fie $D \subseteq \mathbb{R}^3$ deschisă şi

$$\omega = Pdx + Qdy + Rdz,$$

unde $P, Q, R : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sunt funcţii date, de clasă $\mathcal{C}^1$ pe D. Forma diferenţială ω este *închisă* dacă

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial y} \\ \dfrac{\partial R}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial z} \end{cases}$$

Teorema 1.2.5.(CN pentru ca forma ω să fie exactă)
Fie $D \subseteq \mathbb{R}^n$ deschisă şi forma diferenţială $\omega = P_1dx_1 + ... + P_ndx_n$, unde $P_1,...,P_n : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sunt funcţii date, de clasă $\mathcal{C}^1$ pe D. Dacă forma diferenţială ω este exactă atunci este închisă.

Exemplul 1.2.2. Forma diferenţială

$$\omega(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}dx + \frac{x}{x^2 + y^2}dx$$

nu este exactă deoarece nu este închisă. Într-adevăr, fie

$$P : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, P(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2},$$

$$Q : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

$D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$-este mulţime deschisă.
Se observă că

- P, Q sunt de clasă $\mathcal{C}^1$ pe D.
- $\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \dfrac{1 \cdot \left(x^2 + y^2\right) - y(0 + 2y)}{(x^2 + y^2)^2} = \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = \dfrac{1 \cdot \left(x^2 + y^2\right) - x(2x + 0)}{(x^2 + y^2)^2} = \dfrac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \end{cases}, \forall (x, y) \in D \Rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y} \neq \dfrac{\partial Q}{\partial x}$

Deci ω nu este închisă$\Rightarrow$ ω nu poate fi exactă, deci ω este un exemplu de formă diferenţială care nu provine dintr-o diferenţială (nu admite primitive).

Definiţia 1.2.9. Fie $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Mulţimea D se numeşte *mulţime simplu conexă* dacă orice curbă $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ simplă (adică injectivă pe $[a,b]$) şi închisă ($\gamma(a) = \gamma(b)$), cu $\operatorname{Im}\gamma \subset D$, delimitează un domeniu (mulţime deschisă şi conexă) inclus în D.

Teorema 1.2.6.(**CS pentru ca forma ω să fie exactă**) Fie $D \subseteq \mathbb{R}^n$ deschisă şi forma diferenţială

$$\omega = P_1 dx_1 + ... + P_n dx_n,$$

unde $P_1, ..., P_n : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sunt funcţii date, de clasă $\mathcal{C}^1$ pe D. Dacă D este mulţime simplu conexă şi forma diferenţială ω este închisă atunci este exactă.

Corolar 1.2.1. Fie $D \subseteq \mathbb{R}^n$ deschisă şi forma diferenţială

$$\omega = P_1 dx_1 + ... + P_n dx_n,$$

unde $P_1, ..., P_n : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sunt funcţii date, de clasă $\mathcal{C}^1$ pe D. Dacă D este mulţime simplu conexă şi forma diferenţială ω este închisă atunci integrala formei ω pe o curbă închisă cu $\operatorname{Im}\gamma \subset D$ este zero.

Exemplul 1.2.3. Fie forma diferenţială

$$\omega(x,y) = (2xy)\,dx + \left(x^2 + y^2\right) dy,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

a) Să se calculeze integrala $\int_\gamma \omega(x,y)$, unde γ este o curbă simplă închisă.

b) Să se studieze dacă forma ω admite primitive pe $\mathbb{R}^2$, şi dacă da, să se determine o primitivă g a formei ω.

c) Să se calculeze $\int_\gamma \omega(x,y)$, unde $\gamma : [1,2] \to \mathbb{R}^2$ este o curbă netedă cu $\gamma(1) = (1,1)$ şi $\gamma(2) = (2,4)$.

Rezolvare. Fie

$P : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, P(x,y) = 2xy,$

$Q : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, Q(x,y) = x^2 + y^2.$

$D = \mathbb{R}^2$-este mulţime deschisă.

a) Cu Etapele $1,2,3$ nu putem rezolva exerciţiul, deoarece nu ştim o parametrizare a curbei γ.
Aici

<u>Etapa 4.</u> Aplicăm Corolarul 1.2.1.

•$D = \mathbb{R}^2$-este mulţime simplu conexă.

•P, Q sunt de clasă $\mathcal{C}^1$ pe $D = \mathbb{R}^2$.

$$\bullet \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 2x \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = 2x \end{cases}, \forall (x,y) \in D \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$\Rightarrow \omega$ este formă închisă

•γ este curbă închisă

Conform Corolarului 8.2..1 $\Rightarrow \int_\gamma \omega(x,y) = 0.$

b) De la a) se observă D este mulţime simplu conexă şi că ω este formă închisă şi atunci, conform Teoremei 1.2.5, rezultă că ω este exactă, adică ω admite primitive pe $D = \mathbb{R}^2$. Să Se determină o primitivă g pentru ω

<u>modul 1.</u> Se determină o funcţie $g : D = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenţiabilă a.î.

$$\omega = dg \Leftrightarrow$$

$$(2xy)\,dx + \left(x^2 + y^2\right) dx = \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\,dx + \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\,dy, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (1.1)\ \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 2xy \\ (1.2)\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = x^2 + y^2 \end{cases}, \forall (x,y) \in D$$

<u>modul 1.1</u> $(1.1)|\int(\cdot)\,dx \Rightarrow \int \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\,dx = \int (2xy)\,dx, \forall (x,y)\in D \Rightarrow$

$$g(x,y) \underset{\text{de integrare}}{\overset{x \text{ este var.}}{=}} 2y\cdot\frac{x^2}{2} + \underbrace{\varphi(y)}_{\substack{\text{constantă în raport}\\ \text{cu variabila de integr. } x}}, \forall (x,y)\in D| \frac{\partial}{\partial y}(\cdot) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \underset{\text{de derivare}}{\overset{y \text{ este var.}}{=}} 2\cdot\frac{x^2}{2} + \varphi'(y), \forall (x,y)\in D$$

Înlocuim $(1.2) \Rightarrow$

$x^2+y^2 = x^2+\varphi'(y), \forall (x,y)\in D \Rightarrow \varphi'(y) = y^2, \forall (x,y)\in D|\int(\cdot)\,dy \Rightarrow$

$\varphi(y) = \frac{y^3}{3} + c_1, \forall (x,y)\in D, \forall c_1\in\mathbb{R}.$

Deci $g(x,y) = yx^2 + \frac{y^3}{3} + c_1, \forall (x,y)\in D, \forall c_1\in\mathbb{R}$
sunt toate primitivele formei diferenţiale ω, mulţimea primitivelor fiind indexată dupa constanta c_1.

<u>modul 1.2</u> $(1.2)|\int(\cdot)\,dy \Rightarrow \int \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\,dy = \int \left(x^2+y^2\right)dy, \forall (x,y)\in D \Rightarrow$

$$g(x,y) \underset{\text{de integrare}}{\overset{y \text{ este var.}}{=}} x^2y + \frac{y^3}{3} + \underbrace{\psi(x)}_{\substack{\text{constantă în raport}\\ \text{cu variabila de integr. } y}}, \forall (x,y)\in D| \frac{\partial}{\partial x}(\cdot) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) \underset{\text{de derivare}}{\overset{x \text{ este var.}}{=}} 2xy + 0 + \psi'(x), \forall (x,y)\in D$$

Înlocuim $(1.1) \Rightarrow$

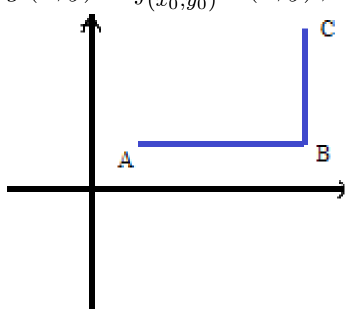
$2xy = 2xy + \psi'(x), \forall (x,y)\in D \Rightarrow \psi'(x) = 0, \forall (x,y)\in D|\int(\cdot)\,dx \Rightarrow$

$\psi(x) = c_2, \forall (x,y)\in D, \forall c_2\in\mathbb{R}.$

Deci $g(x,y) = x^2y + \frac{y^3}{3} + c_2, \forall (x,y)\in D, \forall c_2\in\mathbb{R}$
sunt toate primitivele formei diferenţiale ω, mulţimea primitivelor fiind indexată dupa constanta c_2.

<u>modul 2.</u> Deoarece ω este exactă, are integrala independentă de drum, şi se poate scrie, pentru $\forall (x_0,y_0)$ fixaţi în D,

$g(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \omega(x,y), \forall (x,y)\in D.$



Alegem drept drum ce uneste (x_0,y_0) cu (x,y) linia poligonală cu vârfurile $A(x_0,y_0)$, $B(x,y_0)$, $C(x,y)$. Din reprezentările parametrice ale

$$\left[\overrightarrow{AB}\right] : \begin{cases} \widetilde{x}(t) = t \\ \widetilde{y}(t) = y_0 \end{cases}, t\in[x_0,x], \begin{cases} d\widetilde{x}(t) = 1dt \\ d\widetilde{y}(t) = 0dt \end{cases}, t\in[x_0,x],$$

$$\left[\overrightarrow{BC}\right]:\begin{cases}\widetilde{x}(t)=x\\ \widetilde{y}(t)=t\end{cases},t\in[y_0,y]\begin{cases}d\widetilde{x}(t)=0dt\\ d\widetilde{y}(t)=1dt\end{cases},t\in[y_0,y]$$

deducem

$$g(x,y)=\int_{\left[\overrightarrow{AB}\right]}\omega(x,y)+\int_{\left[\overrightarrow{BC}\right]}\omega(x,y),\forall(x,y)\in D.$$

$$\boxed{g(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(t,y_0)\,dt+\int_{y_0}^{y}Q(x,t)\,dt,\forall(x,y)\in D.}$$

Adică

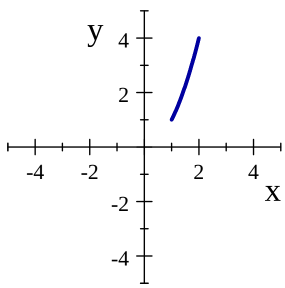
$$g(x,y)=\int_{x_0}^{x}2ty_0dt+\int_{y_0}^{y}\left(x^2+t^2\right)dt=2y_0\cdot\left.\frac{t^2}{2}\right|_{t=x_0}^{t=x}+\left.\left(x^2t+\frac{t^3}{3}\right)\right|_{t=y_0}^{t=y}$$

$$=2y_0\cdot\frac{x^2}{2}-2y_0\cdot\frac{x_0^2}{2}+\left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)-\left(x^2y_0+\frac{y_0^3}{3}\right)$$

$$=\left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)-\underbrace{\left(x_0^2y_0+\frac{y_0^3}{3}\right)}_{-c\in\mathbb{R}},\forall(x,y)\in D,$$

este o primitivă pentru forma ω pe D.

c) Cu Etapele $1,2,3$ nu putem rezolva exerciţiul, deoarece nu ştim o parametrizare a curbei γ.



Aici

Etapa 4. Nu putem aplica Corolarul 1.2.1, deoarece γ nu e curbă închisă, $\gamma(1)=(1,1)\neq(2,4)=\gamma(2)$.

Etapa 5. Aplicăm Teorema de tip Leibniz-Newton.

Parcurgem din nou b), unul din moduri, şi se obţine că

$$g(x,y)=x^2y+\frac{y^3}{3}+c,\forall(x,y)\in D,\forall c\in\mathbb{R}$$

sunt toate primitivele formei diferenţiale ω, mulţimea primitivelor fiind indexată dupa constanta c.

Deoarece

$$\left.\begin{array}{l}\gamma\text{ este curbă netedă}\\ \text{coeficienţii formei }\omega,\ P\text{ şi }Q\text{ sunt câmpuri scalare continue pe }D\\ \omega\text{ admite o primitivă }g(x,y)=x^2y+\dfrac{y^3}{3}\text{ pe }D\end{array}\right\}$$

atunci

$$\int_\gamma\omega(x,y)=g(\gamma(2))-g(\gamma(1))=g(2,4)-g(1,1)=2^2\cdot4+\frac{4^3}{3}-1^2\cdot1-\frac{1^3}{3}=36.$$

Etapa 6. dacă nu s-ar fi determinat g o primitivă, utilizam independenţa de drum:

De la a), ω formă închisă pe D conex prin arce$\Rightarrow\omega$ are integrala independentă de drum

$$\int_\gamma\omega(x,y)=\int_{\left[\overrightarrow{M_1M_2}\right]}\omega(x,y)\overset{\text{not}}{=}\int_{(1,1)}^{(2,4)}\omega(x,y),\text{ unde}$$

$$\left[\overrightarrow{M_1M_2}\right]:\begin{cases}x(t)=1+t(2-1)\\ y(t)=1+t(4-1)\end{cases},t\in[0,1]\begin{cases}dx(t)=dt\\ dy(t)=3dt\end{cases},t\in[0,1]$$

Atunci

$$\int_\gamma (2xy)\,dx + \left(x^2+y^2\right)dy = \int_0^1 \left(2\,(1+t)\,(1+3t)\cdot 1 + \left((1+t)^2 + (1+3t)^2\right)\cdot 3\right)dt = 36.$$

Observaţia 1.2.6. Integrala curbilinie de speţa a 2-a este cea care se utilizează pentru definirea integralei în $\mathbb{C}$, pentru $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.