

CURS NR. 13

Analiză matematică, AIA

2. Integrale duble

2.0. Domenii de integrare în \mathbb{R}^2

Definiția 2.0.1. O mulțime $E \subseteq \mathbb{R}^2$ are măsura Lebesgue nulă (sau este neglijabilă în sens Lebesgue), și se notează $m(E) = 0$, dacă

$\forall \varepsilon > 0$, există o familie finită sau numărabilă de interioare de dreptunghiuri

$\{[a_i, b_i[\times]c_i, d_i[; i \in I\text{-mulțime de indici}\}$ a.î

$$E \subseteq \bigcup_i [a_i, b_i[\times]c_i, d_i[\text{ și } \sum_i \sqrt{(b_i - a_i)^2 + (d_i - c_i)^2} < \varepsilon.$$

Exemplul 2.0.1. Mulțimi din \mathbb{R}^2 cu măsura Lebesgue nulă sunt

-mulțimile finite, de exemplu $\{(2, 3), (1, 5)\}$

-mulțimile numărabile, de exemplu $\left\{ \left(\frac{1}{n}, \frac{n}{n+1} \right); n \in \mathbb{N}^* \right\}$

Există și mulțimi nenumărabile din \mathbb{R}^2 care au măsura Lebesgue nulă- a se vedea mai jos.

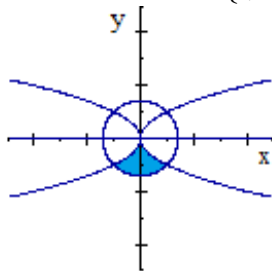
Definiția 2.0.2. O mulțime $D \subseteq \mathbb{R}^2$ se numește *domeniu de integrare plan* dacă

(i) D este mulțime mărginită în \mathbb{R}^2 ;

(ii) $m(\text{Fr } D) = 0$.

Observația 2.0.1. Se poate arăta că dacă $D \subseteq \mathbb{R}^2$ este mulțime mărginită în \mathbb{R}^2 și $\text{Fr } D$ este o curbă simplă (injectivă) închisă netedă pe porțiuni, atunci $m(\text{Fr } D) = 0$, adică D este domeniu de integrare.

Exemplul 2.0.2. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 2, x \leq y^2, x \geq -y^2, y \leq 0\}$



• $x^2 + y^2 = 2$ este cercul cu centrul $(0, 0)$ cu raza $\sqrt{2}$

$x^2 + y^2 \leq 2 \Rightarrow \dots$

• $y^2 = x$ este parabola ce trece prin $O(0, 0)$, $A_1(1, 1)$ și $B_1(1, -1)$

$x \leq y^2 \Rightarrow \dots$

• $y^2 = -x$ este parabola ce trece prin $O(0, 0)$, $A_2(-1, 1)$ și $B_2(-1, -1)$

$x \geq -y^2 \Rightarrow \dots$

• $y = 0$ este dreapta Ox

$y \leq 0 \Rightarrow \dots$

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 2 \\ y^2 = x \end{array} \right. \Rightarrow A_1(1, 1) \text{ și } B_1(1, -1); \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 2 \\ y^2 = -x \end{array} \right. \Rightarrow A_2(-1, 1) \text{ și } B_2(-1, -1)$$

Deci D este domeniul mărginit de arcele de parabolă $\left[\widehat{OB_2} \right]$, $\left[\widehat{OB_1} \right]$ și arcul de cerc $\left[\widehat{B_1B_2} \right]$.

D este domeniu de integrare deoarece

$\left\{ \begin{array}{l} -D \text{ este mulțime mărginită, } D \subsetneq [-1, 1] \times [-\sqrt{2}, 0] \\ -\text{Fr } D \text{ este curbă simplă, închisă, netedă pe 3 porțiuni.} \end{array} \right.$

Exemplul 2.0.3. Sunt domenii de integrare mulțimile

$$-D = D_{xy} = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

un dreptunghi cu interior, cu laturile paralele cu axele; se numește și *domeniu compact simplu în raport cu ambele axe*.

$$-D = D_y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\},$$

unde $g_1, g_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sunt funcții continue; se numește și *domeniu compact simplu în raport cu Oy* .

$-D = D_x = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$,
unde $h_1, h_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ sunt funcții continue; se numește și *domeniu compact simplu în raport cu Ox* .

A se vedea explicitări în raport cu y , respectiv cu x de reprezentanți de curbe clasice în plan la seminar la tablă (segmente de drepte oblice, de parabole, de cercuri, de elipse, de hiperbole ș.a.m.d.).

Definiția 2.0.3. Fie D_1 și D_2 domenii de integrare din \mathbb{R}^2 cu proprietatea că $\text{int } D_1 \cap \text{int } D_2 = \emptyset$ și $D_1 \cup D_2$ este tot domeniu de integrare. Se numește *juxtapunerea domeniului D_1 cu domeniul D_2* domeniul $D_1 \cup D_2$.

Definiția 2.0.4. Fie D o mulțime mărginită din \mathbb{R}^2 . Fie $[a, b] \times [c, d]$ dreptunghi cu interior a.î. $D \subseteq [a, b] \times [c, d]$. Fie $\Delta_1 \in \mathcal{D}([a, b])$ o diviziune oarecare a intervalului $[a, b]$ și $\Delta_2 \in \mathcal{D}([c, d])$ o diviziune oarecare a intervalului $[c, d]$,

$$\Delta_1 : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b, \Delta_2 : c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d.$$

Atunci $\Delta = \Delta_1 \times \Delta_2$ este o diviziune a dreptunghiului cu interior $[a, b] \times [c, d]$, $\Delta \in \mathcal{D}([a, b] \times [c, d])$. Dreptunghiul cu interior $[a, b] \times [c, d]$ se poate scrie ca o reuniune de dreptunghiuri cu interior $\Delta_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, adică

$$[a, b] \times [c, d] = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^m \Delta_{ij}.$$

Norma diviziunii Δ este $\|\Delta\| = \max\{\|\Delta_1\|, \|\Delta_2\|\}$ iar aria unui dreptunghi cu interior din diviziune este

$$\text{aria}(\Delta_{ij}) = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

Fie $(\xi, \eta) = (\xi_i, \eta_j)_{i=\overline{1, n}, j=\overline{1, m}}$ un sistem de puncte intermediare corespunzătoare diviziunii Δ , din $[a, b] \times [c, d]$,

$$x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i, y_{j-1} \leq \eta_j \leq y_j.$$

Fie funcția $\chi_D : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funcția mărginită pe D :

$$\chi_D : [a, b] \times [c, d] \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \chi_D(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } (x, y) \in D \\ 0, & \text{dacă } (x, y) \in ([a, b] \times [c, d]) \setminus D \end{cases}$$

Se definește numărul real

$$S(\chi_D, \Delta, (\xi, \eta)) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \chi_D(\xi_i, \eta_j) \cdot (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}).$$

Mulțimea mărginită D are *aria* $m(D) = \text{aria}(D)$ (este *mulțime măsurabilă Jordan*, chiar măsurabilă Lebesgue-măsura Lebesgue generalizează măsura Jordan pentru o clasă mai amplă de mulțimi) dacă există un numărul real $\text{aria}(D)$ cu proprietatea că

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât $\forall \Delta \in \mathcal{D}([a, b] \times [c, d])$ cu $\|\Delta\| < \delta$ și $\forall (\xi, \eta) = (\xi_i, \eta_j)_{i=\overline{1, n}, j=\overline{1, m}} \in \mathcal{P}(\Delta)$, să rezulte $|S(\chi_D, \Delta, (\xi, \eta)) - \text{aria}(D)| < \varepsilon$.

Numărul real $\text{aria}(D)$, dacă există, este și unic și se notează (A se vedea secțiunea 2.1)

$$\text{aria}(D) = \iint_D 1 dx dy.$$

Observația 2.0.2. Fie D o mulțime mărginită din \mathbb{R}^2 .

a) Folosind rezultate din teoria măsurii, se poate arăta că definiția anterioară este corectă, adică $\text{aria}(D)$ nu depinde de alegerea dreptunghiului cu interior $[a, b] \times [c, d]$ care include D , și nici de funcția χ_D construită.

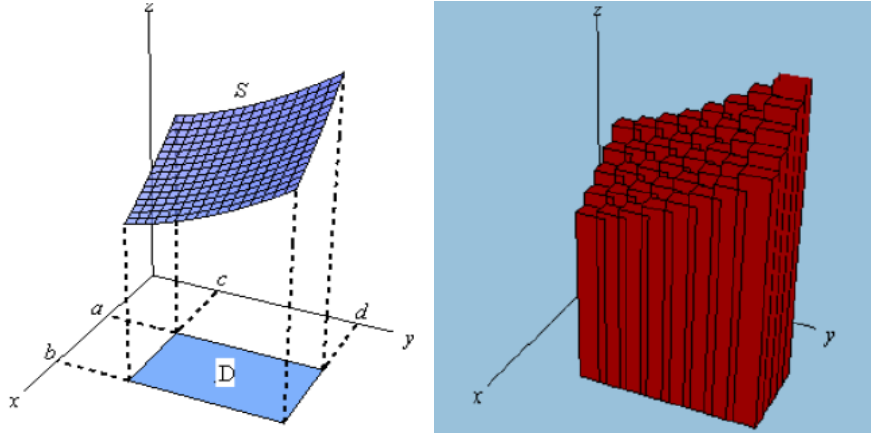
b) Se poate arăta că o mulțime mărginită D din \mathbb{R}^2 are arie dacă și numai dacă este domeniu de integrare.

Propoziția 2.0.1. Dacă $D = D_1 \cup D_2$ este domeniu de integrare din \mathbb{R}^2 obținut prin juxtapunerea domeniilor de integrare D_1 și D_2 atunci

$$\text{aria}(D_1 \cup D_2) = \text{aria}(D_1) + \text{aria}(D_2).$$

Observația 2.0.3. Teoreme de reprezentare integrală pentru domenii de integrare se pot enunța și demonstra numai pentru domenii de tip dreptunghi sau de tip simplu în raport cu una din axe.

2.1. Integrale duble proprii



A se vedea Eugene Khutoryansky, "Double integrals and Polar integrals: Explained with 3D visualizations",

<https://www.youtube.com/watch?v=GHBMiscPE-g>

Definiția 2.1.1. Fie $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un domeniu de integrare plan și fie $[a, b] \times [c, d]$ astfel încât $D \subseteq [a, b] \times [c, d]$. Fie $\Delta_1 \in \mathcal{D}([a, b])$ o diviziune oarecare a intervalului $[a, b]$ și $\Delta_2 \in \mathcal{D}([c, d])$ o diviziune oarecare a intervalului $[c, d]$

$$\Delta_1 : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b; \Delta_2 : c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d.$$

Atunci $\Delta = \Delta_1 \times \Delta_2$ este o diviziune a dreptunghiului cu interior $[a, b] \times [c, d]$, $\Delta \in \mathcal{D}([a, b] \times [c, d])$. Dreptunghiul cu interior $[a, b] \times [c, d]$ se poate scrie ca o reuniune de dreptunghiuri cu interior $\Delta_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, adică

$$[a, b] \times [c, d] = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^m \Delta_{ij}.$$

Norma diviziunii Δ este $\|\Delta\| = \max\{\|\Delta_1\|, \|\Delta_2\|\}$.

Fie $(\xi, \eta) = (\xi_i, \eta_j)_{i=1, \dots, n, j=1, \dots, m}$ un sistem de puncte intermediare corespunzătoare diviziunii Δ , din $[a, b] \times [c, d]$,

$$x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i, y_{j-1} \leq \eta_j \leq y_j.$$

Fie funcția $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mărginită pe D . Se construiește funcția

$$\tilde{f} : [a, b] \times [c, d] \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{dacă } (x, y) \in D \\ 0, & \text{dacă } (x, y) \in ([a, b] \times [c, d]) \setminus D \end{cases}$$

a) Se numește *suma Riemann asociată funcției f , diviziunii Δ și sistemului de puncte intermediare (ξ, η)* numărul real

$$S(f, \Delta, (\xi, \eta)) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \tilde{f}(\xi_i, \eta_j) \cdot (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}).$$

b) Funcția f se numește *integrabilă Riemann pe domeniul D* dacă există un număr real \mathcal{I}_f cu proprietatea că

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât $\forall \Delta \in \mathcal{D}([a, b] \times [c, d])$ cu $\|\Delta\| < \delta$ și $\forall (\xi, \eta) = (\xi_i, \eta_j)_{i=1, \dots, n, j=1, \dots, m} \in \mathcal{P}(\Delta)$, să rezulte $|S(f, \Delta, (\xi, \eta)) - \mathcal{I}_f| < \varepsilon$.

Se notează cu $\mathcal{R}(D)$ mulțimea tuturor funcțiilor integrabile Riemann pe domeniu D . Numărul

\mathcal{I}_f dacă există, este unic, și se numește *integrala dublă pe domeniul D , a funcției f* . Se notează $\mathcal{I}_f = \iint_D f(x, y) dx dy$.

Observația 2.1.1. Folosind rezultate din teoria măsurii, se poate arăta că definiția anterioară este corectă, adică \mathcal{I}_f nu depinde de alegerea dreptunghiului cu interior $[a, b] \times [c, d]$ care include D , și nici de funcția f construită.

Propoziția 2.1.1. (de liniaritate în raport cu integrantul a integralei duble)

Fie $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un domeniu de integrare plan. Fie $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mărginite pe D , și $\alpha \in \mathbb{R}$. Dacă $f, g \in \mathcal{R}(D)$ atunci funcțiile $f + g \in \mathcal{R}(D)$ și $\alpha f \in \mathcal{R}(D)$ și

$$\text{(aditivitatea în raport cu funcția integrant)} \quad \boxed{\iint_D (f + g)(x, y) dx dy = \iint_D f(x, y) dx dy + \iint_D g(x, y) dx dy;}$$

$$\text{(omogeneitatea în raport cu funcția integrant)} \quad \boxed{\iint_D (\alpha f)(x, y) dx dy = \alpha \iint_D f(x, y) dx dy.}$$

Propoziția 2.1.2. (de aditivitate a integralei duble în raport cu domeniul)

Fie $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un domeniu de integrare plan. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mărginită pe D . Se presupune că $D = D_1 \cup D_2$ prin juxtapunere. Dacă $f \in \mathcal{R}(D_1)$ și $f \in \mathcal{R}(D_2)$ atunci $f \in \mathcal{R}(D_1 \cup D_2)$ și

$$\boxed{\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy.}$$

Teorema 2.1.1. (de reducere a unei integrale duble la integrale Riemann)

a) Fie $D = [a, b] \times [c, d]$.

$D_y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ sau $D_x = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; c \leq y \leq d, a \leq x \leq b\}$ un dreptunghi cu interior, cu laturile paralele cu axele; este *domeniu compact simplu în raport cu ambele axe*;

Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă.

$$\text{Atunci } f \in \mathcal{R}(D) \text{ și } \boxed{\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx \stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.}$$

b) Fie $D = D_y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$, unde $g_{1,2} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sunt funcții continue; este *domeniu compact simplu în raport cu Oy* ;

Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă.

$$\text{Atunci } f \in \mathcal{R}(D) \text{ și } \boxed{\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.}$$

c) Fie $D = D_x = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$, unde $h_{1,2} : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ sunt funcții continue; este *domeniu compact simplu în raport cu Ox* ;

Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă.

$$\text{Atunci } f \in \mathcal{R}(D) \text{ și } \boxed{\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \right) dy.}$$

Exemplul 2.1.1. Se calculează

$$\text{a) } \mathcal{I} = \iint_D \frac{y^2}{1+x^2} dx dy,$$

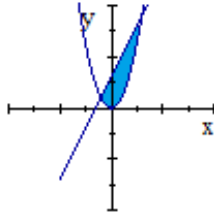
unde D este dreptunghiul cu interior mărginit de $x = \frac{1}{\sqrt{3}}, x = \sqrt{3}, y = 0, y = 1$.

Rezolvare. -A se vedea Seminar, cu interpretare geometrică.

$$\text{b) } \iint_D (xy) dx dy, \text{ unde } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq x^2, y \leq 2x + 3\}.$$

Rezolvare. etapa 1. Se studiază domeniul D .

• Se reprezintă grafic domeniul



- $y = x^2$ este parabola ce trece prin $O(0,0)$, $A(-1,1)$, $D(1,1)$
 $y \geq x^2 \Rightarrow \dots$
- $y = 2x + 3$ este dreapta ce trece prin $C(0,3)$ și $(\frac{-3}{2}, 0)$
 $y \leq 2x + 3 \Rightarrow \dots$

parabola \cap dreapta $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x + 3 \end{cases} \Rightarrow A(-1,1) \text{ și } B(3,9).$

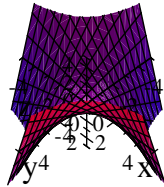
Deci D este domeniul mărginit de segmentul $[\overrightarrow{AB}]$ și arcul de parabolă $[A\hat{O}B]$.

- Se studiază dacă D este domeniu de integrare. Este, deoarece
 - $\left\{ \begin{array}{l} -D \text{ este mulțime mărginită, } D \subsetneq [-1, 3] \times [0, 9] \\ -Fr D \text{ este curbă simplă, închisă, netedă pe porțiuni.} \end{array} \right.$

etapa 2. Se studiază integrantul f .

$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = xy.$

f este câmp scalar bine definit și continuu pe D de la etapa 1. Graficul pe \mathbb{R}^2 are ca reprezentare un paraboloid hiperbolic.



etapa 3. Se calculează integrala \mathcal{I} , aplicând T1.

modul 1. Se observă că D nu este dreptunghi cu interior, cu laturile paralele cu axele.-NU

modul 2. Se studiază dacă D este domeniu compact simplu în raport cu Oy . Se explicitează curbele care mărginesc domeniul în raport cu y .

Fie $(x, y) \in D$ un punct oarecare din domeniu. Se consideră paralele la Oy prin punctul (x, y) și se observă că toate aceste paralele au ecuațiile $\tilde{x} = x$, cu $-1 \leq x \leq 3$ atunci când $(x, y) \in D$. Mai mult, când (x, y) variază în D pe o astfel de paralelă, y -ul variază între y -ul de pe arc de parabolă $[A\hat{O}B]$ și y -ul de pe segmentul $[\overrightarrow{AB}]$, adică $x^2 \leq y \leq 2x + 3$.

$$D = D_y = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; -1 \leq x \leq 3, \underbrace{x^2}_{y\text{-ul de pe } [A\hat{O}B]} \leq y \leq \underbrace{2x + 3}_{y\text{-ul de pe } [\overrightarrow{AB}]} \right\}$$

Conform Teoremei de reducere, b) \Rightarrow

$$\mathcal{I} = \iint_D (xy) dx dy = \int_{-1}^3 \underbrace{\left(\int_{x^2}^{2x+3} (xy) dy \right)}_{\mathcal{I}(x)} dx.$$

$$\mathcal{I}(x) = \int_{x^2}^{2x+3} (xy) dy = \left(x \cdot \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{y=x^2}^{y=2x+3} = x \cdot \frac{(2x+3)^2 - (x^2)^2}{2}.$$

$$\mathcal{I} = \int_{-1}^3 x \cdot \frac{(2x+3)^2 - (x^2)^2}{2} \underset{\substack{x \text{ este var.} \\ \text{de integrare}}}{\frac{160}{3}}.$$

modul 3. Se studiază dacă D este domeniu compact simplu în raport cu Ox . Se explicitează curbele care mărginesc domeniul în raport cu x .

Fie $(x, y) \in D$ un punct oarecare din domeniu. Se consideră paralele la Ox prin punctul (x, y) și se observă că toate aceste paralele au ecuațiile $\tilde{y} = y$, cu $0 \leq y \leq 9$ atunci când $(x, y) \in D$. Mai mult, când (x, y) variază în D pe o astfel de paralelă, x -ul variază între x -ul de pe arcul de parabolă $\left[\widehat{AO} \right]$, adică $x = -\sqrt{y}$ juxtapus cu x -ul de pe segmentul $\left[\overrightarrow{AB} \right]$, adică $x = \frac{y-3}{2}$ și x -ul de pe arcul de parabolă $\left[\widehat{OB} \right]$, adică $x = \sqrt{y}$. S-a împărțit domeniul D ca juxtapunere de două domenii simple în raport cu Ox , trasând o paralelă la Ox prin nodul A (în care Fr D își schimbă netezimea).

$$D = D_x^1 \cup D_x^2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq y \leq 1, \underbrace{-\sqrt{y}}_{x\text{-ul de pe } \left[\widehat{AO} \right]} \leq x \leq \underbrace{\sqrt{y}}_{x\text{-ul de pe } \left[\widehat{OC} \right]} \right\} \cup \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; 1 \leq y \leq 9, \underbrace{\frac{y-3}{2}}_{x\text{-ul de pe } \left[\overrightarrow{AB} \right]} \leq x \leq \underbrace{\sqrt{y}}_{x\text{-ul de pe } \left[\widehat{CB} \right]} \right\}.$$

Conform Teoremei de aditivitate în raport cu domeniul și Teoremei de reducere, c) \Rightarrow

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \iint_{D_x^1} (x+y) dx dy + \iint_{D_x^2} (x+y) dx dy = \int_0^1 \underbrace{\left(\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} (xy) dx \right)}_{\mathcal{I}_1(y)} dy + \int_1^9 \underbrace{\left(\int_{\frac{y-3}{2}}^{\sqrt{y}} (xy) dx \right)}_{\mathcal{I}_2(y)} dy \underset{\substack{x \text{ este var.} \\ \text{de integrare}}}{=} \\ &= \int_0^1 \left(y \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{x=-\sqrt{y}}^{x=\sqrt{y}} dy + \int_1^9 \left(\left(y \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{x=\frac{y-3}{2}}^{x=\sqrt{y}} \right) dy = \int_0^1 \left(y \frac{y}{2} - y \frac{y}{2} \right) dy + \int_1^9 \left(y \frac{y}{2} - y \frac{\left(\frac{y-3}{2} \right)^2}{2} \right) dy = \\ &= 0 + \frac{160}{3} = \frac{160}{3}. \end{aligned}$$

Comentariu. La acest exercițiu nu se verifică $f(x, y) \geq 0, \forall (x, y) \in D$, pentru a putea interpreta, conform teoremei 2.1.2b), că $\iint_D f(x, y) dx dy = \text{volum}(\Omega)$, unde Ω este corpul cilindric având generatoarele paralele cu axa Oz , mărginit de-a lungul cotei inferior de domeniul D (desenat în planul xOy) și superior de suprafața de ecuație explicită $z = f(x, y)$ (desenată în spațiu).

Teorema 2.1.2.a) (o interpretare geometrică a unei integrale duble) Fie D un domeniu de integrare din \mathbb{R}^2 . Atunci $\boxed{\text{aria}(D) = \iint_D 1 dx dy.}$

Teorema 2.1.2.b) (o interpretare geometrică a integralei duble) Fie D un domeniu de integrare din \mathbb{R}^2 . Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă a.î. $f(x, y) \geq 0, \forall (x, y) \in D$.

Atunci $f \in \mathcal{R}(D)$ și $\boxed{\iint_D f(x, y) dx dy = \text{volum}(\Omega)}$, unde Ω este corpul cilindric cu generatoarele paralele cu axa Oz , mărginit de-a lungul cotei inferior de domeniul D (în planul xOy) și superior

de suprafața de ecuație explicită $z = f(x, y)$.

Teorema 2.1.3. (o interpretare statistică a integralei duble) Fie variabila aleatoare bidimensională $X = (X_1, X_2)$, cu densitatea de probabilitate f_X , și D un domeniu din \mathbb{R}^2 . Atunci

$$P((X_1, X_2) \in D) = \iint_D f_X(x, y) dx dy.$$

Exemplul 2.1.2. Să se studieze dacă următorul domeniu are arie, și dacă da, să se calculeze aria pentru

a) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq x^2, y \leq 2x + 3\}$.

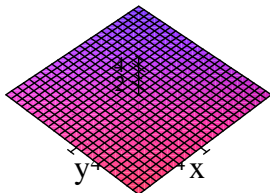
Rezolvare. Se anticipează că, dacă există, aria $(D) = \iint_D 1 dx dy$.

etapa 1. Se studiază domeniul D —la exercițiul anterior.

etapa 2. Se studiază integrantul f .

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = 1.$$

f este câmp scalar bine definit și continuu pe D de la etapa 1. Graficul pe \mathbb{R}^2 are ca reprezentare un plan paralel cu xOy .



etapa 3. Se calculează integrala \mathcal{I} , aplicând T1.

modul 2. Direct de la 1.a) \Rightarrow

$$D = D_y = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; -1 \leq x \leq 3, \underbrace{x^2}_{y\text{-ul de pe } [\hat{A}\hat{O}B]} \leq y \leq \underbrace{2x+3}_{y\text{-ul de pe } [\vec{A}\vec{B}]} \right\}$$

Conform Teoremei de reducere, b) \Rightarrow

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \iint_D 1 dx dy = \int_{-1}^3 \underbrace{\left(\int_{x^2}^{2x+3} 1 dy \right)}_{\mathcal{I}(x)} dx = \int_{-1}^3 \left((y) \Big|_{y=x^2}^{y=2x+3} \right) dx = \int_{-1}^3 (2x+3-x^2) dx = \\ &= \left(x^2 + 3x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{x=-1}^{x=3} = \frac{32}{3} > 0!!! \text{ ca arie.} \end{aligned}$$

Comentariu. f verifică $f(x, y) \geq 0, \forall (x, y) \in D$ și atunci

$$\iint_D 1 dx dy = \text{volum}(\Omega),$$

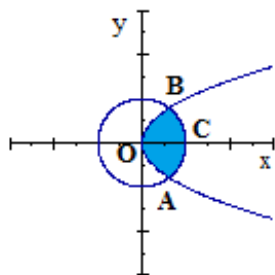
unde Ω este corpul cilindric cu generatoarele paralele cu axa Oz , mărginit de-a lungul cotei inferior de domeniul D (în planul xOy) și superior de planul de ecuație explicită $z = 1$. Pe baza interpretării volumului unui corp cilindric precum un produs dintre aria bazei și lungimea înălțimii (egală cu 1), se deduce că valoarea numerică a rezultatului reprezintă chiar aria (D) .

b) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1, y^2 \leq x\}$.

Rezolvare. Se anticipează că, dacă există, aria $(D) = \iint_D 1 dx dy$.

etapa 1. Se studiază domeniul D .

• Se reprezintă grafic domeniul



- $x^2 + y^2 = 1$ este cercul cu centrul $O(0,0)$ și raza 1
- $x^2 + y^2 \leq 1 \Rightarrow \dots$
- $y^2 = x$ este parabola ce trece prin $O(0,0)$, $(1,1)$ și $(1,-1)$
- $y^2 \leq x \Rightarrow \dots$

$$\text{cercul} \cap \text{parabola} \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y^2 = x \end{cases} \Rightarrow A \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, -\sqrt{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}} \right) \text{ și } B \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, +\sqrt{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}} \right)$$

Deci D este domeniul mărginit de arcul de parabolă $[B\hat{O}A]$ și arcul de cerc $[A\hat{C}B]$, cu $C(1,0)$.

- D este domeniu de integrare, deoarece
 - $\left\{ \begin{array}{l} -D \text{ este mulțime mărginită, } D \subsetneq [0,1] \times [-1,1] \\ -\text{Fr } D \text{ este curbă simplă, închisă, netedă pe porțiuni.} \end{array} \right.$

etapa 2. Se studiază integrantul f .

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x,y) = 1.$$

f este câmp scalar bine definit și continuu pe D de la etapa 1.

etapa 3. Se calculează integrala \mathcal{I} , aplicând T1.

modul 1. Se observă că D nu este dreptunghi cu interior, cu laturile paralele cu axele.-NU

modul 2. Se studiază dacă D este domeniu compact simplu în raport cu Oy . Se explicitează curbele care mărginesc domeniul în raport cu y .

Fie $(x,y) \in D$ un punct oarecare din domeniu. Se consideră paralele la Oy prin punctul (x,y) și se observă că toate aceste paralele au ecuațiile $\tilde{x} = x$, cu $0 \leq x \leq 1$ atunci când $(x,y) \in D$. Mai mult, când (x,y) variază în D pe o astfel de paralelă, y -ul variază între y -ul de pe arc de parabolă $[O\hat{A}]$ și arc de parabolă $[B\hat{O}]$, respectiv între arc de cerc $[A\hat{C}]$ și arc de cerc $[C\hat{B}]$. S-a împărțit domeniul D ca juxtapunere de două domenii simple în raport cu Oy , trasând o paralelă la Oy prin nodurile A, B (în care $\text{Fr } D$ își schimbă netezimea).

$$D = D_y^1 \cup D_y^2 =$$

$$= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \underbrace{-\sqrt{x}}_{y\text{-ul de pe } [O\hat{A}]} \leq y \leq \underbrace{\sqrt{x}}_{y\text{-ul de pe } [B\hat{O}]} \right\} \cup$$

$$\cup \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2; \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \leq x \leq 1, \underbrace{-\sqrt{1-x^2}}_{y\text{-ul de pe } [A\hat{C}]} \leq y \leq \underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{y\text{-ul de pe } [C\hat{B}]} \right\}$$

Conform Teoremei de aditivitate în raport cu domeniul și Teoremei de reducere, b) \Rightarrow

$$\mathcal{I} = \iint_{D_y^1} 1 dx dy + \iint_{D_y^2} 1 dx dy = \int_0^{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}} \left(\underbrace{\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} 1 dy}_{\mathcal{I}_1(x)} \right) dx + \int_{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}}^1 \left(\underbrace{\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1 dy}_{\mathcal{I}_1(x)} \right) dx \quad \begin{array}{l} y \text{ este var.} \\ \text{de integrare} \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} (y)|_{y=-\sqrt{x}}^{y=\sqrt{x}} dx + \int_{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}^1 \left((y)|_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{1-x^2}} \right) dx = \int_0^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} (2\sqrt{x}) dx + \int_{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}^1 \left(2\sqrt{1-x^2} \right) dx \quad \begin{array}{l} x \text{ este var.} \\ \text{de integrare} \end{array} \\
 &= \left(\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_{x=0}^{x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} + \left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x \right) \Big|_{x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}^{x=1} = \\
 &= \frac{4}{3} \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} - 0 + 0 + \arcsin 1 - \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right)^2} - \arcsin \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.
 \end{aligned}$$

modul 3. Se studiază dacă D este domeniu compact simplu în raport cu Ox . Se explicitează curbele care mărginesc domeniul în raport cu x .

Fie $(x, y) \in D$ un punct oarecare din domeniu. Se consideră paralele la Ox prin punctul (x, y) și se observă că toate aceste paralele au ecuațiile $\tilde{y} = y$, cu $-\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} \leq y \leq \sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$ atunci când $(x, y) \in D$. Mai mult, când (x, y) variază în D pe o astfel de paralelă, x -ul variază între x -ul de pe arcul de parabolă $\left[\widehat{BOA} \right]$ și x -ul de pe arcul de cerc $\left[\widehat{ACB} \right]$, adică $y^2 \leq x \leq \sqrt{1-y^2}$.

$$D = D_x = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; -\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} \leq y \leq \sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}, \quad \underbrace{y^2}_{x\text{-ul de pe } \left[\widehat{BOA} \right]} \leq x \leq \underbrace{\sqrt{1-y^2}}_{x\text{-ul de pe } \left[\widehat{ACB} \right]} \right\}$$

Conform Teoremei de reducere, c) \Rightarrow

$$\begin{aligned}
 \mathcal{I} &= \iint_D 1 dx dy = \int_{-\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}}^{\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}} \left(\underbrace{\int_{y^2}^{\sqrt{1-y^2}} 1 dx}_{\mathcal{I}(y)} \right) dy \quad \begin{array}{l} x \text{ este var.} \\ \text{de integrare} \end{array} \int_{-\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}}^{\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}} \left((x)|_{x=y^2}^{x=\sqrt{1-y^2}} \right) dy = \\
 &= \int_{-\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}}^{\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}} \left(\sqrt{1-y^2} - y^2 \right) dy \quad \begin{array}{l} y \text{ este var.} \\ \text{de integrare} \end{array} \left(\frac{1}{2}y\sqrt{1-y^2} + \frac{1}{2} \arcsin y - \frac{1}{3}y^3 \right) \Big|_{y=-\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}}^{y=\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}} = \\
 &= \arcsin \sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{5}} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\sqrt{\sqrt{5}-2} \simeq 1.0665 > 0!!! \text{ ca arie.}
 \end{aligned}$$

Teorema 2.1.4.(de schimbare de "variabile" de integrare în integrala dublă) Fie D un domeniu de integrare din \mathbb{R}^2 , fie $D_s \subseteq \mathbb{R}^2$. Fie

$$F : D_s \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow D \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$(u, v) \in D_s \rightsquigarrow F(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$$

o funcție bijectivă. Dacă F este difeomorfism pe $D_s \setminus \text{Fr } D_s$, adică

$$-F \text{ este de clasă } \mathcal{C}^1 \text{ pe } D_s \setminus \text{Fr } D_s$$

$$-\det J_F(u, v) \neq 0, \forall (u, v) \in D_s \setminus \text{Fr } D_s$$

atunci F^{-1} duce bijectiv și bicontinuu domeniul de integrare D în D_s , care este tot domeniu de integrare. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție. Dacă $f \in \mathcal{R}(D)$ atunci $f \circ F \in \mathcal{R}(D_s)$ și are loc

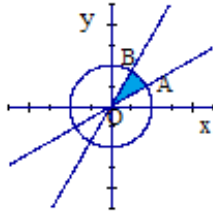
$$\boxed{\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_s} f(x(u, v), y(u, v)) |\det J_F(u, v)| du dv.}$$

Exemplul 2.1.3. Se calculează:

$$\iint_D \frac{1}{16-x^2-y^2} dx dy, \text{ unde } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq x \leq y\sqrt{3}, 0 \leq y \leq x\sqrt{3}\}.$$

Rezolvare. etapa 1. Se studiază domeniul D .

•Se reprezintă grafic domeniul



- $x^2 + y^2 = 4$ este cercul cu centrul $O(0,0)$ și raza 2
- $x^2 + y^2 \leq 4 \Rightarrow \dots$
- $x = 0$ este axa Oy
- $x \geq 0 \Rightarrow \dots$
- $x = y\sqrt{3}$ este dreapta ce trece prin $O(0,0)$, $A(\sqrt{3}, 1)$
- $x \leq y\sqrt{3} \Rightarrow \dots$
- $y = 0$ este axa Ox
- $y \geq 0 \Rightarrow \dots$
- $y = x\sqrt{3}$ este dreapta ce trece prin $O(0,0)$, $B(1, \sqrt{3})$
- $y \leq x\sqrt{3} \Rightarrow \dots$

Deci D este domeniul mărginit de segmentele $[\overrightarrow{OA}]$, $[\overrightarrow{BO}]$ și arcul de cerc $[\widehat{AB}]$.

- D este domeniu de integrare, deoarece
 - $\left\{ \begin{array}{l} -D \text{ este mulțime mărginită, } D \subsetneq [0, 2] \times [0, 2] \\ -\text{Fr } D \text{ este curbă simplă, închisă, netedă pe } 3 \text{ porțiuni.} \end{array} \right.$

etapa 2. Se studiază integrantul f .

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \frac{1}{16 - x^2 - y^2}.$$

f este câmp scalar bine definit și continuu pe D de la etapa 1.

etapa 3. Se calculează integrala \mathcal{I} , aplicând T1-NU.

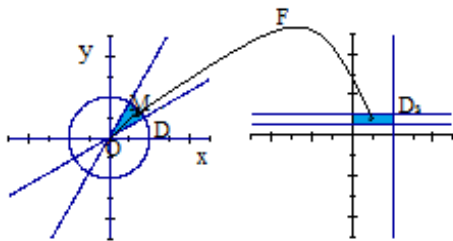
modul 1. Se observă că D nu este dreptunghi cu interior, cu laturile paralele cu axele.-NU

modul 2. Se studiază dacă D este domeniu compact simplu în raport cu Oy -este. Din cauza integrantului, integralele ce apar din teorema de reducere sunt greu de calculat \Rightarrow NU se apelează la acest mod.

modul 3. Se studiază dacă D este domeniu compact simplu în raport cu Ox -este. Din cauza integrantului, integralele ce apar din teorema de reducere sunt greu de calculat \Rightarrow NU se apelează la acest mod.

etapa 4. Se calculează integrala \mathcal{I} , aplicând Teorema de schimbare de "variabile".

Studiind forma integrantului și forma domeniului ($x^2 + y^2$ apare și în legea de asociere a f și în ecuațiile curbelor ce mărginesc D), se face o schimbare de variabile legată de coordonate polare.



Fie (x, y) coordonatele carteziene a unui punct M din D . Fie coordonatele polare ale M :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho = \text{dist}(O, M) \\ \theta = \mu(Ox, \widehat{OM}) \end{array} \right., \text{ cu } \left\{ \begin{array}{l} x = \rho \cos \theta \\ \theta = \rho \sin \theta \end{array} \right.$$

Se observă, având în vedere interpretarea geometrică, că

(x, y) parcurge $D \Leftrightarrow (\rho, \theta)$ parcurge D_s ,

unde $D_s = \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq \rho \leq 2, \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}\} = [0, 2] \times [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$.

Alături de reprezentarea domeniului D în xOy , se reprezintă D_s în $\rho O_s \theta$.

Se alege $F : D_s \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow D \subseteq \mathbb{R}^2, F(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} \underbrace{\rho \cos \theta}_{x(\rho, \theta)} & \underbrace{\rho \sin \theta}_{y(\rho, \theta)} \end{pmatrix}$.

Se observă că F este difeomorfism pe $D_s \setminus \text{Fr } D_s$, adică

- F este de clasă C^1 pe $D_s \setminus \text{Fr } D_s$
 - $\det J_F(\rho, \theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho}(\rho, \theta) & \frac{\partial x}{\partial \theta}(\rho, \theta) \\ \frac{\partial y}{\partial \rho}(\rho, \theta) & \frac{\partial y}{\partial \theta}(\rho, \theta) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{vmatrix} = \rho \neq 0, \forall (\rho, \theta) \in D_s \setminus \text{Fr } D_s$.

Atunci F^{-1} duce bijectiv și bicontinuu domeniul de integrare D în D_s , care este tot domeniu de integrare. Mai mult

$$\mathcal{I} = \iint_D \frac{1}{16 - x^2 - y^2} dx dy = \iint_{D_s} \frac{1}{16 - (\rho \cos \theta)^2 - (\rho \sin \theta)^2} |\rho| d\rho d\theta = \iint_{D_s} \frac{\rho}{16 - \rho^2} d\rho d\theta.$$

$$D_s = \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq \rho \leq 2, \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}\} = [0, 2] \times \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$$

este un dreptunghi cu interior, cu laturile paralele cu axele de coordonate $O_s \rho, O_s \theta$.

Folosind Teorema de reducere, a) \Rightarrow

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \iint_{D_s} \frac{\rho}{16 - \rho^2} d\rho d\theta = \int_0^2 \underbrace{\left(\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\rho}{16 - \rho^2} d\theta \right)}_{\mathcal{I}(\rho)} d\rho \stackrel{\theta \text{ este var. de integrare}}{=} \int_0^2 \left(\frac{\rho}{16 - \rho^2} \cdot \theta \right) \Big|_{\theta=\frac{\pi}{6}}^{\theta=\frac{\pi}{3}} d\rho = \\ &= \int_0^2 \frac{\rho}{16 - \rho^2} \cdot \frac{\pi}{6} d\rho \stackrel{\rho \text{ este var. de integrare}}{=} \frac{\pi}{6} \cdot \frac{-1}{2} \int_0^2 \frac{(16 - \rho^2)'}{16 - \rho^2} d\rho = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{-1}{2} \ln(16 - \rho^2) \Big|_{\rho=0}^{\rho=2} = \\ &= \frac{-\pi}{12} (\ln 12 - \ln 16) = \frac{-\pi}{12} \ln \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

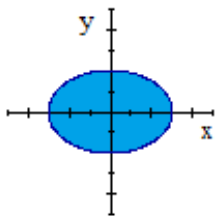
Exemplul 2.1.4. Folosind coordonate polare generalizate în plan, să se calculeze:

$$\mathcal{I} = \iint_D \sqrt{2 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy, \text{ unde } D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \leq 0 \right\}$$

Rezolvare.

etapa 1. Se studiază domeniul D .

•Se reprezintă grafic domeniul



• $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ este elipsa cu centrul $O(0, 0)$ și semiaxele a, b
 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ este interiorul elipsei anterioare reunit cu elipsa

• D este domeniu de integrare, deoarece

- $\left\{ \begin{array}{l} -D \text{ este mulțime mărginită, } D \subsetneq [-a, a] \times [-b, b] \\ -\text{Fr } D \text{ este curbă simplă, închisă, netedă pe porțiuni.} \end{array} \right.$

etapa 2. Se studiază integrantul f .

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \sqrt{2 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}.$$

f este câmp scalar bine definit și continuu pe D .

etapa 3. Se calculează integrala \mathcal{I} , aplicând T1-NU.

modul 1. Se observă că D nu este dreptunghi cu interior, cu laturile paralele cu axele.-NU

modul 2. Se studiază dacă D este domeniu compact simplu în raport cu Oy - este. Din cauza integrantului integralele ce apar din teorema de reducere sunt greu de calculat \Rightarrow NU se apelează

la acest mod.

modul 3. Se studiază dacă D este domeniu compact simplu în raport cu Ox -este. Din cauza integrantului integralele ce apar din teorema de reducere sunt greu de calculat \Rightarrow NU se apelează la acest mod.

etapa 4. Se calculează integrala \mathcal{I} , aplicând Teorema de schimbare de "variabile".

Studiind forma integrantului și forma domeniului ($\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ apare și în legea de asociere a f și în ecuația curbei ce mărginește D), se face o schimbare de variabile legată de coordonate polare generalizate.

Fie (x, y) coordonatele carteziene a unui punct M din $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$. Fie coordonatele polare generalizate ale M :

$$\begin{cases} \rho = \text{parametru} \\ \theta = \mu \left(Ox, \widehat{OM} \right) \end{cases}, \text{ cu } \begin{cases} x = a\rho \cos \theta \\ y = b\rho \sin \theta \end{cases}$$

Se observă, având în vedere interpretarea geometrică, că

$$(x, y) \text{ parcurge } D \Leftrightarrow (\rho, \theta) \text{ parcurge } D_s,$$

$$\text{unde } D_s = \left\{ (\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi \right\} = [0, 1] \times [0, 2\pi].$$

Alături de reprezentarea domeniului D în xOy , se reprezintă D_s în $\rho O_s \theta$.

$$\text{Se alege } F : D_s \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow D \subseteq \mathbb{R}^2, F(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} \underbrace{a\rho \cos \theta}_{x(\rho, \theta)} & \underbrace{b\rho \sin \theta}_{y(\rho, \theta)} \end{pmatrix}.$$

Se observă că F este difeomorfism pe $D_s \setminus \text{Fr } D_s$, chiar dacă nu se știe D_s , adică

$-F$ este de clasă \mathcal{C}^1 pe \mathbb{R}^2 chiar, deci și pe $D_s \setminus \text{Fr } D_s$

$$-\det J_F(\rho, \theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho}(\rho, \theta) & \frac{\partial x}{\partial \theta}(\rho, \theta) \\ \frac{\partial y}{\partial \rho}(\rho, \theta) & \frac{\partial y}{\partial \theta}(\rho, \theta) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \cos \theta & -a\rho \sin \theta \\ b \cos \theta & b\rho \cos \theta \end{vmatrix} = ab\rho \neq 0, \forall (\rho, \theta) \in D_s \setminus \text{Fr } D_s.$$

Atunci F^{-1} duce bijectiv și bicontinuu domeniul de integrare D în D_s , care este tot domeniu de integrare.

Mai mult

$$\mathcal{I} = \iint_D \sqrt{2 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy = \iint_{D_s} \sqrt{2 - \rho^2} |ab\rho| d\rho d\theta = ab \iint_{D_s} \rho \sqrt{2 - \rho^2} d\rho d\theta$$

$D_s = \left\{ (\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi \right\} = [0, 1] \times [0, 2\pi]$ este un dreptunghi cu interior, cu laturile paralele cu axele de coordonate $O_s u, O_s v$.

Folosind Teorema de reducere, a) \Rightarrow

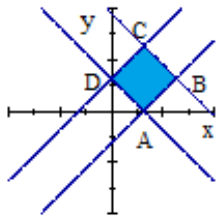
$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= ab \iint_{D_s} \rho \sqrt{2 - \rho^2} d\rho d\theta = ab \int_0^1 \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} \rho \sqrt{2 - \rho^2} d\theta \right)}_{\mathcal{I}(\rho)} d\rho \stackrel{\theta \text{ este var. de integrare}}{=} \int_0^1 \left(\rho \sqrt{2 - \rho^2} \cdot \theta \right) \Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\rho = \\ &= ab \int_0^1 \rho \sqrt{2 - \rho^2} \cdot (2\pi) d\rho = -\pi ab \int_0^1 (2 - \rho^2)^{\frac{1}{2}} (2 - \rho^2)' d\rho \stackrel{\rho \text{ este var. de integrare}}{=} -\pi ab \frac{(2 - \rho^2)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2} + 1} \Big|_{\rho=0}^{\rho=1} = \\ &= -\pi ab \frac{(2 - 1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2} + 1} + \pi ab \frac{(2 - 0)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2} + 1} = \left(-\frac{3}{2} + \frac{3}{2} \sqrt{2^3} \right) \pi ab. \end{aligned}$$

Exemplul 2.1.5 Să se calculeze

$$\iint_D (x - y)^2 \sin^2(x + y) dx dy, \text{ unde } D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; \pi \leq x + y \leq 3\pi, -\pi \leq x - y \leq \pi \right\}.$$

Rezolvare. etapa 1. Se studiază domeniul D .

• Se reprezintă grafic domeniul



• $x + y = \pi$ este dreapta ce trece prin $A(\pi, 0), D(0, \pi)$

$x + y \geq \pi \Rightarrow \dots$

• $x + y = 3\pi$ este dreapta ce trece prin $(3\pi, 0), (0, 3\pi)$

$x + y \leq 3\pi \Rightarrow \dots$

• $x - y = -\pi$ este dreapta ce trece prin $(-\pi, 0), D(0, \pi)$

$x - y \geq -\pi \Rightarrow \dots$

• $x - y = \pi$ este dreapta ce trece prin $A(\pi, 0), (0, -\pi)$

$x - y \leq \pi \Rightarrow \dots$

$$\begin{cases} x + y = \pi \\ x - y = \pi \end{cases} \Rightarrow A(\pi, 0); \begin{cases} x + y = 3\pi \\ x - y = \pi \end{cases} \Rightarrow B(2\pi, \pi).$$

$$\begin{cases} x + y = 3\pi \\ x - y = -\pi \end{cases} \Rightarrow C(\pi, 2\pi); \begin{cases} x + y = \pi \\ x - y = -\pi \end{cases} \Rightarrow D(0, \pi).$$

Deci D este domeniul mărginit de segmentele $[\overrightarrow{AB}]$, $[\overrightarrow{BC}]$, $[\overrightarrow{CD}]$, $[\overrightarrow{DA}]$.

• D este domeniu de integrare, deoarece:

$\left\{ \begin{array}{l} -D \text{ este mulțime mărginită, } D \subsetneq [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \\ -\text{Fr } D \text{ este curbă simplă, închisă, netedă pe 4 porțiuni.} \end{array} \right.$

etapa 2. Se studiază integrantul f .

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = (x - y)^2 \sin^2(x + y).$$

f este câmp scalar bine definit și continuu pe D .

etapa 3. Se calculează integrala \mathcal{I} , aplicând T1-NU.

modul 1. Se observă că D este dreptunghi cu interior, dar nu este cu laturile paralele cu axele.-NU

modul 2. Se studiază dacă D este domeniu compact simplu în raport cu Oy -este juxtapunerea a două domenii simple în raport cu Oy (obținute ducând paralela la Oy prin nodurile A, C , unde $\text{Fr } D$ își schimbă netezimea) Din cauza integrantului, integralele ce apar din teorema de reducere sunt greu de calculat \Rightarrow NU se apelează la acest mod.

modul 3. Se studiază dacă D este domeniu compact simplu în raport cu Ox -este juxtapunerea a două domenii simple în raport cu Ox (obținute ducând paralela la Ox prin nodurile B, D , unde $\text{Fr } D$ își schimbă netezimea). Din cauza integrantului, integralele ce apar din teorema de reducere sunt greu de calculat \Rightarrow NU se apelează la acest mod.

etapa 4. Se calculează integrala \mathcal{I} , aplicând Teorema de schimbare de "variabile".

Studiind forma integrantului și forma domeniului ($x - y, x + y$ apare și în legea de asociere a f și în ecuațiile curbelor ce mărginesc D), se face o schimbare de variabile legată de $x - y, x + y$.

$$\text{Se notează } \begin{cases} x - y = u \\ x + y = v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{u + v}{2} \\ y = \frac{-u + v}{2} \end{cases}$$

Nu există interpretări geometrice pentru noile variabile (u, v) .

$$\text{Se alege } F : D_s \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow D \subseteq \mathbb{R}^2, F(u, v) = \left(\underbrace{\frac{u + v}{2}}_{x(u,v)}, \underbrace{\frac{-u + v}{2}}_{y(u,v)} \right).$$

Se observă că F este difeomorfism pe $D_s \setminus \text{Fr } D_s$, fără să se știe D_s , adică

$-F$ este de clasă \mathcal{C}^1 pe \mathbb{R}^2 chiar, deci și pe $D_s \setminus \text{Fr } D_s$

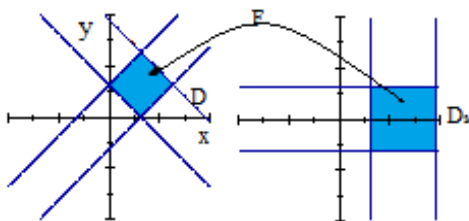
$$-\det J_F(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \neq 0, \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2 \text{ chiar, deci și pentru}$$

$(u, v) \in D_s \setminus \text{Fr } D_s$.

Atunci F^{-1} duce bijectiv și bicontinuu domeniul de integrare D în D_s , care este tot domeniu de integrare. Se înlocuiesc x, y cu u, v în ecuațiile lui $D \Rightarrow$

$$D_s = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; \pi \leq u \leq 3\pi, -\pi \leq v \leq \pi\} = [\pi, 3\pi] \times [-\pi, \pi].$$

Alături de reprezentarea domeniului D în xOy , se reprezintă D_s în $uO_s v$.



$$\mathcal{I} = \iint_D (x - y)^2 \sin^2(x + y) dx dy = \iint_{D_s} u^2 \sin^2 v \cdot \left| \frac{1}{2} \right| du dv.$$

$D_s = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; \pi \leq u \leq 3\pi, -\pi \leq v \leq \pi\} = [\pi, 3\pi] \times [-\pi, \pi]$ este un dreptunghi cu interior, cu laturile paralele cu axele de coordonate $O_s u, O_s v$.

Folosind Teorema de reducere, a) \Rightarrow

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \frac{1}{2} \iint_{D_s} u^2 \sin^2 v du dv = \frac{1}{2} \int_{\pi}^{3\pi} \underbrace{\left(\int_{-\pi}^{\pi} u^2 \sin^2 v dv \right)}_{\mathcal{I}(u)} du = \frac{1}{2} \int_{\pi}^{3\pi} \underbrace{\left(\int_{-\pi}^{\pi} u^2 \frac{1 - \cos 2v}{2} dv \right)}_{\mathcal{I}(u)} du = \\ &\text{de integrare } \frac{1}{2} \int_{\pi}^{3\pi} \left(u^2 \cdot \left(\frac{v}{2} - \frac{\sin 2v}{4} \right) \right) \Big|_{v=-\pi}^{v=\pi} du = \frac{1}{2} \int_{\pi}^{3\pi} u^2 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\sin 2\pi}{4} - \frac{-\pi}{2} + \frac{\sin(-2\pi)}{4} \right) du = \\ &= \frac{\pi}{2} \int_{\pi}^{3\pi} u^2 du \quad \text{de integrare } \frac{\pi}{2} \cdot \frac{u^3}{3} \Big|_{u=\pi}^{u=3\pi} = \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{(3\pi)^3}{3} - \frac{\pi^3}{3} \right) = \frac{4\pi^4}{3}. \end{aligned}$$

Teorema 2.1.5. (formula Riemann-Green de legătură între integrala dublă și integrala curbilinie de speța a 2-a) Fie D un domeniu de integrare din \mathbb{R}^2 bordat și orientat. Fie $P, Q : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funcții de clasă \mathcal{C}^1 pe D . Atunci

$$\int_{\text{Fr}D} (P(x, y) dx + Q(x, y) dy) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right) dx dy.$$

Corolar. În ipotezele Teoremei 5 \Rightarrow

a) $\boxed{\text{aria}(D) = \iint_D 1 dx dy = \frac{1}{2} \int_{\text{Fr}D} (-y dx + x dy)}$

b) $\boxed{\text{aria}(D) = \iint_D 1 dx dy = \int_{\text{Fr}D} (0 dx + x dy)}$

Exemplul 2.1.6. Fie $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1 \right\}$.

a) Să se determine aria domeniului D folosind integrala dublă, apoi să se verifice rezultatul folosind Corolarul de la Formula Riemann-Green.

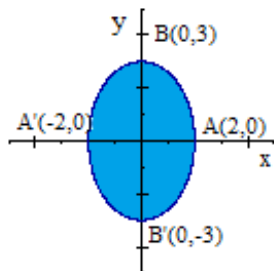
b) Să se calculeze următoarea integrală dublă direct, apoi să se verifice rezultatul cu Formula Riemann-Green:

$$\iint_D \left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \right) dx dy, \text{ unde } D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1 \right\}.$$

Rezolvare. a) Se anticipează că, dacă există, aria $(D) = \mathcal{I} = \iint_D 1 dx dy$.
Modul cu integrala dublă.

etapa 1. Se studiază domeniul D .

• Se reprezintă grafic domeniul



• $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ este elipsa cu centrul de simetrie $O(0,0)$ și semiaxele $a = 2, b = 3$.
 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1 \Rightarrow \dots$

Deci D este domeniul mărginit de elipsa $\left[AB\widehat{A'B'}A \right]$.

- D este domeniu de integrare, deoarece
 - D este mulțime mărginită, $D \subsetneq [-2, 2] \times [-3, 3]$
 - Fr D este curbă simplă, închisă, netedă.

etapa 2. Se studiază integrantul f .

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = 1.$$

f este câmp scalar bine definit și continuu pe D .

etapa 3. Se calculează integrala \mathcal{I} , aplicând T1.

modul 1. Se observă că D nu este dreptunghi cu interior, cu laturile paralele cu axele.-NU

modul 2. Se studiază dacă D este domeniu compact simplu în raport cu Oy . Se explicitează curbele care mărginesc domeniul în raport cu y .

Fie $(x, y) \in D$ un punct oarecare din domeniu. Se consideră paralele la Oy prin punctul (x, y) și se observă că toate aceste paralele au ecuațiile $\tilde{x} = x$, cu $-2 \leq x \leq 2$ atunci când $(x, y) \in D$. Mai mult, când (x, y) variază în D pe o astfel de paralelă, y -ul variază între y -ul de pe arcul de elipsă $\left[A'\widehat{B'}A \right]$ și arcul de elipsă $\left[A\widehat{B}A \right]$.

$$D = D_y = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; -2 \leq x \leq 2, \underbrace{-3\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}}_{y\text{-ul de pe } [A'\widehat{B'}A]} \leq y \leq \underbrace{+3\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}}_{y\text{-ul de pe } [A\widehat{B}A]} \right\}.$$

Conform Teoremei de reducere, b) \Rightarrow

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \iint_{D_y} 1 dx dy = \int_{-2}^2 \underbrace{\left(\int_{-3\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}}^{+3\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}} 1 dy \right)}_{\mathcal{I}_1(x)} dx \stackrel{y \text{ este var. de integrare}}{=} \int_{-2}^2 (y) \Big|_{y=-3\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}}^{y=+3\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}} dx = \\ &= \int_{-2}^2 \left(2 \cdot 3\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} \right) dx = 3 \int_{-2}^2 \sqrt{4 - x^2} dx \stackrel{x \text{ este var. de integrare}}{=} \frac{3}{2} \left(x\sqrt{4 - x^2} + 4 \arcsin \frac{x}{2} \right) \Big|_{x=-2}^{x=2} = \\ &6\pi. \end{aligned}$$

modul 3. Se studiază dacă D este domeniu compact simplu în raport cu Ox . Se explicitează curbele

care mărginesc domeniul în raport cu x .

Fie $(x, y) \in D$ un punct oarecare din domeniu. Se consideră paralele la Ox prin punctul (x, y) și se observă că toate aceste paralele au ecuațiile $\tilde{y} = y$, cu $-3 \leq y \leq 3$ atunci când $(x, y) \in D$. Mai mult, când (x, y) variază în D pe o astfel de paralelă, x -ul variază între x -ul de pe arcul de elipsă $\left[\widehat{B'A'B} \right]$ și x -ul de pe arcul de elipsă $\left[\widehat{B'AB} \right]$.

$$D = D_x = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; -3 \leq y \leq 3, \underbrace{-2\sqrt{1 - \frac{y^2}{9}}}_{x\text{-ul de pe } \left[\widehat{B'A'B} \right]} \leq x \leq \underbrace{+2\sqrt{1 - \frac{y^2}{9}}}_{x\text{-ul de pe } \left[\widehat{B'AB} \right]} \right\}$$

Conform Teoremei de reducere, c) \Rightarrow

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \iint_D 1 dx dy = \int_{-3}^3 \underbrace{\left(\int_{-2\sqrt{1 - \frac{y^2}{9}}}^{2\sqrt{1 - \frac{y^2}{9}}} 1 dx \right)}_{\mathcal{I}(y)} dy \stackrel{x \text{ este var. de integrare}}{=} \int_{-3}^3 \left((x) \Big|_{x=-2\sqrt{1 - \frac{y^2}{9}}}^{x=2\sqrt{1 - \frac{y^2}{9}}} \right) dy = \\ &= \int_{-3}^3 \left(4\sqrt{1 - \frac{y^2}{9}} \right) dy = \frac{4}{3} \int_{-3}^3 \left(\sqrt{9 - y^2} \right) dy \stackrel{y \text{ este var. de integrare}}{=} \frac{4}{3} \left(y\sqrt{9 - y^2} + 9 \arcsin \frac{y}{3} \right) \Big|_{y=-3}^{y=3} = \end{aligned}$$

6π .

etapa 4. Se calculează integrala \mathcal{I} , aplicând Teorema de schimbare de "variabile".

Studiind forma integrantului și forma domeniului ($\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2}$ apare în ecuația curbei ce mărginește D), se face o schimbare de variabile legată de coordonate polare generalizate.

Fie (x, y) coordonatele carteziene a unui punct M din $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} \leq 1 \right\}$. Fie coordonatele polare generalizate ale M :

$$\begin{cases} \rho = \text{parametru} \\ \theta = \mu \left(Ox, \widehat{OM} \right) \end{cases}, \text{ cu } \begin{cases} x = 2\rho \cos \theta \\ y = 3\rho \sin \theta \end{cases}$$

Se observă, având în vedere interpretarea geometrică, că

$$(x, y) \text{ parcurge } D \Leftrightarrow (\rho, \theta) \text{ parcurge } D_s,$$

unde $D_s = \left\{ (\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi \right\} = [0, 1] \times [0, 2\pi]$. Alături de reprezentarea domeniului D în xOy , se reprezintă D_s în $\rho O_s \theta$.

$$\text{Se alege } F : D_s \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow D \subseteq \mathbb{R}^2, F(\rho, \theta) = \left(\underbrace{2\rho \cos \theta}_{x(\rho, \theta)}, \underbrace{3\rho \sin \theta}_{y(\rho, \theta)} \right).$$

Se observă că F este difeomorfism pe $D_s \setminus \text{Fr } D_s$, chiar dacă nu se știe D_s , adică

$-F$ este de clasă \mathcal{C}^1 pe \mathbb{R}^2 chiar, deci și pe $D_s \setminus \text{Fr } D_s$

$$-\det J_F(\rho, \theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho}(\rho, \theta) & \frac{\partial x}{\partial \theta}(\rho, \theta) \\ \frac{\partial y}{\partial \rho}(\rho, \theta) & \frac{\partial y}{\partial \theta}(\rho, \theta) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \cos \theta & -2\rho \sin \theta \\ 3 \cos \theta & 3\rho \sin \theta \end{vmatrix} = 2 \cdot 3\rho \neq 0, \forall (\rho, \theta) \in D_s \setminus \text{Fr } D_s.$$

Atunci F^{-1} duce bijectiv și bicontinuu domeniul de integrare D în D_s , care este tot domeniu de integrare.

$$\mathcal{I} = \iint_D 1 dx dy = \iint_{D_s} 1 |2 \cdot 3\rho| d\rho d\theta = 6 \iint_{D_s} \rho d\rho d\theta$$

$$D_s = \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\} = [0, 1] \times [0, 2\pi]$$

este un dreptunghi cu interior, cu laturile paralele cu axele de coordonate $O_s u, O_s v$.

Folosind Teorema de reducere, a) \Rightarrow

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= 6 \iint_{D_s} \rho d\rho d\theta = 6 \int_0^1 \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} \rho d\theta \right)}_{\mathcal{I}(\rho)} d\rho \stackrel{\substack{\theta \text{ este var.} \\ \text{de integrare}}}{=} 6 \int_0^1 (\rho \cdot \theta) \Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\rho = \\ &= 6 \int_0^1 \rho \cdot (2\pi) d\rho \stackrel{\substack{\rho \text{ este var.} \\ \text{de integrare}}}{=} 12\pi \cdot \frac{\rho^2}{2} \Big|_{\rho=0}^{\rho=1} = 6\pi. \end{aligned}$$

Modul cu Corolar a). aria $(D) = \iint_D 1 dx dy = \frac{1}{2} \int_{FrD} [-y dx + x dy]$.

etapa 1. Se studiază curba

• Se parametrizează un reprezentant al curbei, deoarece aceasta nu este dată parametric.

$$\begin{aligned} \text{Im } \gamma &= \left[\widehat{AB\bar{A}'B'A} \right] : \begin{cases} x(t) = 2 \cos t \\ y(t) = 3 \sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi], \text{ adică} \\ \gamma : [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma(t) = \begin{pmatrix} \underbrace{2 \cos t}_{x(t)} \\ \underbrace{3 \sin t}_{y(t)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

• Se studiază dacă γ este curbă netedă. Este, deoarece

$$\begin{cases} \exists \gamma' : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma'(t) = \begin{pmatrix} \underbrace{-2 \sin t}_{x'(t)} \\ \underbrace{3 \cos t}_{y'(t)} \end{pmatrix} \\ \gamma' \text{ - este continuă pe } [0, 2\pi] \text{ și } (x'(t))^2 + (y'(t))^2 \neq 0, \forall t \end{cases}$$

etapa 2. Se studiază forma diferențială ω

$$\omega(x, y) = \underbrace{\frac{-y}{2}}_{P(x,y)} dx + \underbrace{\frac{x}{2}}_{Q(x,y)} dy.$$

Coefficienții formei diferențiale, $P, Q : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sunt câmpuri scalare continue cu $D = \mathbb{R}^2$ și $\text{Im } \gamma \subseteq D$.

etapa 3. Se determină $\mathcal{I} = \frac{1}{2} \int_{\gamma} (-y) dx + x dy$, aplicând Teorema de reducere, caz $n = 2$.

$$\begin{aligned} \begin{cases} x(t) = 2 \cos t \\ y(t) = 3 \sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi] &\Rightarrow \begin{cases} dx(t) = (-2 \sin t) dt \\ dy(t) = (3 \cos t) dt \end{cases}, t \in [0, 2\pi]. \\ \mathcal{I} = \frac{1}{2} \int_{\gamma} (-y) dx + x dy &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ((-3 \sin t)(-2 \sin t) + (2 \cos t)(3 \cos t)) dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (6 \sin^2 t + 6 \cos^2 t) dt = 6\pi. \end{aligned}$$

Modul cu Corolar b). aria $(D) = \iint_D 1 dx dy = \int_{FrD} (0 dx + x dy)$.

etapa 1. Se studiază curba-ca la modul Corolar b)

etapa 2. Se studiază forma diferențială ω

$$\omega(x, y) = \underbrace{0}_{P(x,y)} dx + \underbrace{x}_{Q(x,y)} dy.$$

Coefficienții formei diferențiale, $P, Q : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sunt câmpuri scalare continue cu $D = \mathbb{R}^2$ și $\text{Im } \gamma \subseteq D$.

etapa 3. Se determină $\mathcal{I} = \int_{\gamma} 0 dx + x dy$, aplicând Teorema de reducere, caz $n = 2$.

$$\begin{aligned} \begin{cases} x(t) = 2 \cos t \\ y(t) = 3 \sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi] &\Rightarrow \begin{cases} dx(t) = (-2 \sin t) dt \\ dy(t) = (3 \cos t) dt \end{cases}, t \in [0, 2\pi] \\ \mathcal{I} = \int_{\gamma} 0 dx + x dy &= \int_0^{2\pi} (0 + (2 \cos t)(3 \cos t)) dt = \int_0^{2\pi} (6 \cos^2 t) dt = 6\pi. \end{aligned}$$

b) Fie $\mathcal{I} = \iint_D \left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \right) dx dy$

Modul cu integrala dublă direct.

etapa 1. Se studiază domeniul D -ca la **a**).

etapa 2. Se studiază integrantul f .

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}.$$

f este câmp scalar bine definit și continuu pe D .

etapa 3. Se calculează integrala \mathcal{I} , aplicând T1.

modul 1. Se observă că D nu este dreptunghi cu interior, cu laturile paralele cu axele.-NU

modul 2. $D = D_y$ ca la **a**), dar integralele ce apar de calculat din Teoremei de reducere, b) sunt greu de calculat.

modul 3. $D = D_x$ ca la **a**), dar integralele ce apar de calculat din Teoremei de reducere, c) sunt greu de calculat.

etapa 4. Se calculează integrala \mathcal{I} , aplicând Teorema de schimbare de "variabile".

Studiind forma integrantului și forma domeniului ($\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2}$ apare atât în legea de asociere a lui f , cât și în ecuația curbei ce mărginește D), se face o schimbare de variabile legată de coordonate polare generalizate. Se face schimbarea de coordonate de la **a**) \Rightarrow

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \iint_D \left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \right) dx dy = \iint_{D_s} \left(\frac{(\rho \cos \theta)^2}{4} + \frac{(\rho \sin \theta)^2}{9} \right) |2 \cdot 3\rho| d\rho d\theta = 6 \iint_{D_s} \rho^3 d\rho d\theta = \\ &= 6 \int_0^1 \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} \rho^3 d\theta \right)}_{\mathcal{I}(\rho)} d\rho \stackrel{\substack{\theta \text{ este var.} \\ \text{de integrare}}}{=} 6 \int_0^1 (\rho^3 \cdot \theta) \Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\rho = 6 \int_0^1 \rho^3 \cdot (2\pi) d\rho \stackrel{\substack{\rho \text{ este var.} \\ \text{de integrare}}}{=} \\ &= 12\pi \cdot \frac{\rho^4}{4} \Big|_{\rho=0}^{\rho=1} = 3\pi. \end{aligned}$$

Modul cu Formula Riemann-Green aplicată în sens indirect.

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right) dx dy = \int_{FrD} (P(x, y) dx + Q(x, y) dy). \text{ Aici}$$

$$\mathcal{I} = \iint_D \left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \right) dx dy = \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} (?) - \frac{\partial}{\partial y} (?) \right) dx dy.$$

Se poate alege $P(x, y) = \frac{-1}{9} \cdot \frac{y^3}{3}$ și $Q(x, y) = \frac{1}{4} \cdot \frac{x^3}{3}$.

Atunci

$$\mathcal{I} = \iint_D \left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \right) dx dy = \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x^3}{12} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{-y^3}{27} \right) \right) dx dy = \int_{FrD} \left(\left(\frac{-y^3}{27} \right) dx + \left(\frac{x^3}{12} \right) dy \right)$$

etapa 1. Se studiază curba-ca la **a**).

etapa 2. Se studiază forma diferențială ω

$$\omega(x, y) = \underbrace{\frac{-y^3}{27} dx}_{P(x, y)} + \underbrace{\frac{x^3}{12} dy}_{Q(x, y)}.$$

Coefficienții formei diferențiale, $P, Q : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sunt câmpuri scalare continue cu $D = \mathbb{R}^2$ și $\text{Im } \gamma \subseteq D$.

etapa 3. Se determină $\mathcal{I} = \int_{\gamma} \left(\left(\frac{-y^3}{27} \right) dx + \left(\frac{x^3}{12} \right) dy \right)$, aplicând Teorema de reducere, caz $n = 2$.

$$\begin{cases} x(t) = 2 \cos t \\ y(t) = 3 \sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi] \Rightarrow \begin{cases} dx(t) = (-2 \sin t) dt \\ dy(t) = (3 \cos t) dt \end{cases}, t \in [0, 2\pi].$$

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= \int_{\gamma} (-y) dx + x dy = \int_0^{2\pi} \left(\left(\frac{-(3 \sin t)^3}{27} \right) (-2 \sin t) + \left(\frac{(2 \cos t)^3}{12} \right) (3 \cos t) \right) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (2 \sin^4 t + 2 \cos^4 t) dt = 3\pi.\end{aligned}$$