CURS NR. 14
Analiză matematică, AIA

$^{\bigcirc}$**10**. Integrale triple

10.1. **Domenii de integrare în $\mathbb{R}^3$**

Definiţia 1. O mulţime $E \subset \mathbb{R}^3$ are *măsura Lebesgue nulă* (sau *este neglijabilă în sens Lebesgue*), şi notăm $m(E) = 0$, dacă

$\forall \varepsilon > 0$, există o familie finită sau numărabilă de interioare de paralelipipede $\{]a_i, b_i[\times]c_i, d_i[\times]u_i, v_i[\,; i \in \mathbb{I}$-mulţime de indici$\}$ a.î.

$E \subset \bigcup\limits_i]a_i, b_i[\times]c_i, d_i[\times]u_i, v_i[$ şi $\sum\limits_i \sqrt{(b_i - a_i)^2 + (c_i - d_i)^2 + (u_i - v_i)^2} < \varepsilon$.

Definiţia 2. O mulţime $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ se numeşte *domeniu de integrare spaţial* dacă

(i) Ω este mulţime mărginită în $\mathbb{R}^3$;

(ii) $m(\operatorname{Fr}\Omega) = 0$.

Observaţia 1. Se poate arăta că: dacă

$\bullet \Omega \subset \mathbb{R}^3$ este mulţime mărginită în $\mathbb{R}^3$ şi

$\bullet \operatorname{Fr}\Omega$ este o suprafaţă simplă (injectivă), închisă netedă pe porţiuni,

atunci $m(\operatorname{Fr}\Omega) = 0$, adică Ω este domeniu de integrare.

Definiţia 3. Fie Ω_1 şi Ω_2 domenii de integrare din $\mathbb{R}^3$ cu proprietatea că $\operatorname{int}\Omega_1 \cap \operatorname{int}\Omega_1 = \emptyset$ şi $\Omega_1 \cup \Omega_2$ este tot domeniu de integrare. Se numeşte *juxtapunerea domeniului* Ω_1 *cu domeniul* Ω_2 domeniul $\Omega_1 \cup \Omega_2$.

10.2. Integrale triple proprii

Definiţia 1. $\mathcal{I}_f = \iiint_\Omega f(x,y,z)\, dxdydz-$ vezi curs

Teorema 1.(**de reducere a unei integrale triple la integrale duble şi integrale Riemann**)

a) Fie

$\bullet \Omega = \Omega_{xyz} = [a,b] \times [c,d] \times [u,v] = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; a \le x \le b, c \le y \le d, u \le z \le v\right\}$ un paralelipiped cu interior, cu laturile paralele cu planele de coordonate; îl numim şi *domeniu compact simplu în raport cu toate axele*;

$\bullet f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă.

Atunci $f \in \mathcal{R}(\Omega)$ şi $\iiint_\Omega f(x,y,z)\, dxdydz = \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_u^v f(x,y,z)\, dz\right) dy\right) dx$

sau $\iiint_\Omega f(x,y,z)\, dxdydz = \int_c^d \left(\int_u^v \left(\int_a^b f(x,y,z)\, dx\right) dz\right) dy$

sau $\iiint_\Omega f(x,y,z)\, dxdydz = \int_u^v \left(\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y,z)\, dy\right) dx\right) dz$

ş.a.m.d.

b) Fie

$\bullet \Omega = \Omega_z = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; (x,y) \in D, f_1(x,y) \le z \le f_2(x,y)\right\}$, unde $f_1, f_2 : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sunt funcţii continue; îl numim şi *domeniu compact simplu în raport cu Oz*;

$\bullet f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă.

Atunci $f \in \mathcal{R}(\Omega)$ şi $\iiint_\Omega f(x,y,z)\, dxdydz = \iint_D \left(\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x,y,z)\, dz\right) dxdy$.

c) Fie

$\bullet \Omega = \Omega_x = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; (y,z) \in D, g_1(y,z) \le x \le g_2(y,z)\right\}$, unde $g_1, g_2 : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sunt funcţii continue; îl numim şi *domeniu compact simplu în raport cu Ox*;

•$f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă.
Atunci $f \in \mathcal{R}(\Omega)$ şi $\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz = \iint_D \left(\int_{g_1(y,z)}^{g_2(y,z)} f(x,y,z)\,dx\right) dydz.$

d) Fie
•$\Omega = \Omega_y = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; (z,x) \in D, h_1(z,x) \le y \le h_2(y,z)\right\}$, unde $h_1, h_2 : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sunt funcţii continue; îl numim şi *domeniu compact simplu în raport cu Oy*;
•$f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă.
Atunci $f \in \mathcal{R}(\Omega)$ şi $\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz = \iint_D \left(\int_{h_1(z,x)}^{h_2(z,x)} f(x,y,z)\,dy\right) dzdx.$

Observaţia 2. a) Fie
$\Omega = \Omega_z = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; (x,y) \in D, f_1(x,y) \le z \le f_2(x,y)\right\}$, un domeniu compact simplu în raport cu Oz, unde $f_1, f_2 : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sunt funcţii continue. Precizăm că D este proiecţia ortogonală a domeniului Ω_z pe planul xOy; mai mult, este un domeniu plan de integrare. Se observă că frontiera domeniului este alcătuită din suprafeţele

$(S_1) \begin{cases} (x,y) \in D \\ z = f_1(x,y) \end{cases}$, numită *baza inferioară a domeniului*;

$(S_2) \begin{cases} (x,y) \in D \\ z = f_2(x,y) \end{cases}$, numită *baza superioară a domeniului*;

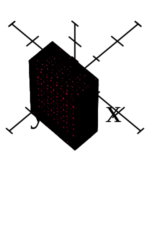
$(S_{\text{lat}}) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; (x,y) \in \text{Fr}(D), f_1(x,y) \le z \le f_2(x,y)\right\}$ este o porţiune din o suprafaţă cilindrică; această suprafaţă cilindrică are generatoarele paralele cu Oz şi drept curbă directoare $\text{Fr}(D)$ (aceasta este o curbă închisă netedă pe porţiuni).

Menţionăm că, dacă ducem o paralelă la Oz prin un punct $(x,y) \in D$, aceasta intersectează baza inferioară a domeniului în un punct $(x,y,f_1(x,y))$ şi baza superioară a domeniului în un punct $(x,y,f_2(x,y))$.

b), c) Analog se pot face comentarii pentru domenii simple în raport cu Ox, cu Oy.

Exerciţiul 1. Să se calculeze
a) $\iiint_\Omega \dfrac{1}{(x+y+z)^2}\,dxdydz,$
unde Ω este paralelipipedul cu interior mărginit de planele $x = 1, x = 2, y = 0, y = 2, z = 0, z = 3$.

Rezolvare.
<u>etapa 1.</u> Studiem domeniul
•Reprezentăm grafic domeniul



$x = 1, x = 2$ sunt plane paralele cu yOz
$y = 0$ este planul zOx, $y = 2$ e plan paralel cu zOx
$z = 0$ este planul xOy, $z = 3$ e plan paralel cu xOy

•Studiem dacă Ω este domeniu de integrare. Este, deoarece

$\begin{cases} \text{-}\Omega \text{ este mulţime mărginită, } \Omega = [1,2] \times [0,2] \times [0,3] \\ \text{- Fr}\,\Omega \text{ este suprafaţă simplă, închisă, netedă pe 6 porţiuni.} \end{cases}$

etapa 2. Studiem integrantul f.

$f:\Omega\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\ f(x,y,z)=\dfrac{1}{(x+y+z)^2}$.

f este câmp scalar bine definit şi continuu pe Ω.

etapa 3. Determinăm $\mathcal{I}=\iiint_\Omega \dfrac{1}{(x+y+z)^2}dxdydz$, aplicând Teorema de reducere.

modul 1. Se observă că Ω este paralelipipedul cu interior cu planele paralele cu planele de coordonate

$$\Omega=\Omega_{xyz}=[1,2]\times[0,2]\times[0,3]=$$
$$=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;1\le x\le 2,0\le y\le 2,0\le z\le 3\right\}$$

Conform Teoremei de reducere, a)$\Rightarrow$

modul 1.1. $$\mathcal{I}=\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz=\int_1^2\left(\int_0^2\left(\underbrace{\int_0^3\frac{1}{(x+y+z)^2}dz}_{\mathcal{I}(x,y)}\right)dy\right)dx$$

$$\mathcal{I}(x,y)=\int_0^3\frac{1}{(x+y+z)^2}dz=\int_0^3(x+y+z)^{-2}\frac{\partial}{\partial z}(x+y+z)\,dz=$$
$$\overset{z\text{ este var.}}{\underset{\text{de integrare}}{=}}\left(\frac{(x+y+z)^{-1}}{-1}\right)\Bigg|_{z=0}^{z=3}=-\frac{1}{x+y+3}+\frac{1}{x+y}$$

$$\mathcal{I}=\int_1^2\left(\underbrace{\int_0^2\left(-\frac{1}{x+y+3}+\frac{1}{x+y}\right)dy}_{\mathcal{I}(x)}\right)dx$$

$$\mathcal{I}(x)=\int_0^2\left(-\frac{1}{x+y+3}+\frac{1}{x+y}\right)dy\overset{y\text{ este var.}}{\underset{\text{de integrare}}{=}}$$
$$=(-\ln(x+y+3)+\ln(x+y))|_{y=0}^{y=2}=-\ln(x+5)+\ln(x+2)+\ln(x+3)-\ln(x)$$
$$\mathcal{I}=\int_1^2(-\ln(x+5)+\ln(x+2)+\ln(x+3)-\ln(x))\,dx\overset{x\text{ este var.}}{\underset{\text{de integrare}}{=}}$$
$$=[2\ln(x+2)-x\ln x+3\ln(x+3)-5\ln(x+5)+x\ln(x+2)+x\ln(x+3)-x\ln(x+5)]_{x=1}^{x=2}=$$
$$=5\ln 5-3\ln 3-2\ln 2+6\ln 6-7\ln 7.$$

Am folosit că

$\int\ln(x+p)\,dx=p\ln(p+x)-x+x\ln(p+x)+c,\forall x\in[1,2],p\in\{0,2,3,5\},c\in\mathbb{R}.$

modul 1.2. $$\mathcal{I}=\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz=\int_0^2\left(\int_0^3\left(\underbrace{\int_1^2\frac{1}{(x+y+z)^2}dx}_{\mathcal{I}(y,z)}\right)dz\right)dy$$

$$\mathcal{I}(y,z)=\int_1^2\frac{1}{(x+y+z)^2}dx=\int_1^2(x+y+z)^{-2}\frac{\partial}{\partial x}(x+y+z)\,dx=$$
$$\overset{x\text{ este var.}}{\underset{\text{de integrare}}{=}}\left(\frac{(x+y+z)^{-1}}{-1}\right)\Bigg|_{x=1}^{x=2}=-\frac{1}{2+y+z}+\frac{1}{1+y+z}$$

$$\mathcal{I}=\int_0^2\left(\underbrace{\int_0^3\left(-\frac{1}{2+y+z}+\frac{1}{1+y+z}\right)dz}_{\mathcal{I}(x)}\right)dy$$

$\mathcal{I}(x) = \int_0^3 \left(-\frac{1}{2+y+z} + \frac{1}{1+y+z} \right) dz =$

$\underset{\text{de integrare}}{\overset{z \text{ este var.}}{=}} \left(-\ln(2+y+z) + \ln(1+y+z) \right)\Big|_{z=0}^{z=3} =$

$= -\ln(y+5) + \ln(y+4) + \ln(y+2) - \ln(y+1)$.

$\mathcal{I} = \int_0^2 \left(-\ln(y+5) + \ln(y+4) + \ln(y+2) - \ln(y+1) \right) dy =$

$\underset{\text{de integrare}}{\overset{y \text{ este var.}}{=}} (2\ln(y+2) - \ln(y+1) + 4\ln(y+4) - 5\ln(y+5) - y\ln(y+1) +$

$+ y\ln(y+2) + y\ln(y+4) - y\ln(y+5))\Big|_{y=0}^{y=2} =$

$= 5\ln 5 - 3\ln 3 - 2\ln 2 + 6\ln 6 - 7\ln 7$

Am folosit că

$\int \ln(x+p)\, dx = p\ln(p+x) - x + x\ln(p+x) + c, \forall y \in [0,2], p \in \{1,2,4,5\}$,

$c \in \mathbb{R}$.

modul 1.3.

$$\mathcal{I} = \iiint_\Omega f(x,y,z)\, dxdydz = \int_0^3 \left(\int_1^2 \left(\underbrace{\int_0^2 \frac{1}{(x+y+z)^2} dy}_{\mathcal{I}(x,y)} \right) dx \right) dz \text{ ş.a.m.d.}$$

Exerciţiul 2.Calculaţi integrala triplă:

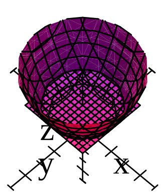
$\mathcal{I} = \iiint_\Omega \left(x^2 + y^2 \right) dxdydz$,

unde domeniul de integrare Ω este mulţimea din planul euclidian tridimensional $Oxyz$ mărginită de suprafeţele: paraboloidul de rotaţie cu axa de rotaţie Oz şi vârful în origine, de ecuaţie $z = \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$, şi de planul $z = 2$, paralel cu planul Oxy.

Rezolvare. etapa 1. Studiem domeniul

•Reprezentăm grafic domeniul

$\Omega = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3; \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right) \le z \le 2 \right\}$



•Studiem dacă Ω este domeniu de integrare. Este, deoarece

$\begin{cases} \text{-}\Omega \text{ este mulţime mărginită, } D \subsetneq [-2,2] \times [-2,2] \times [0,2] \\ \text{-}\operatorname{Fr}\Omega \text{ este o suprafaţă simplă, închisă, netedă.pe porţiuni} \end{cases}$

etapa 2. Studiem integrantul f.

$f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x^2 + y^2$.

f este câmp scalar bine definit şi continuu pe Ω.

etapa 3. Încercăm să determinăm $\mathcal{I} = \iiint_\Omega \left(x^2 + y^2 \right) dxdy$, aplicând Teorema de reducere.

modul 1. Se observă că Ω nu este paralelipiped cu interior, cu feţele paralele cu planele de coordonate.-

NU

<u>modul 2.</u> Studiem dacă Ω este domeniu compact simplu în raport cu Oz.

$$\Omega = \Omega_z = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3; (x,y) \in D = D_{xy}, \underbrace{\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)}_{z\text{-ul unui punct de pe paraboloid}} \leq z \leq \underbrace{2}_{z\text{-ul din pl. } z=2} \right\},$$

unde

$D = pr_{xOy}\Omega_z = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; (x,y) \in D, \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right) \leq 2\right\}.$

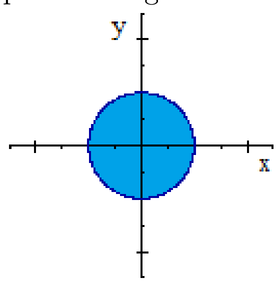
Conform Teoremei de reducere$\Rightarrow$

$$\mathcal{I} = \iiint_\Omega \left(x^2+y^2\right) dxdydz = \iint_D \left(\underbrace{\int_{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}^{2} \left(x^2+y^2\right) dz}_{\mathcal{I}(x,y)} \right) dxdy =$$

$$\overset{z \text{ este var.}}{\underset{\text{de integrare}}{=}} \iint_D \left(\underbrace{\left(x^2+y^2\right) z\Big|_{z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)}^{z=2}}_{\mathcal{I}(x,y)} \right) dxdy = \iint_D \left(\left(x^2+y^2\right)\left(2-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)\right)\right) dxdy$$

Calculăm integrala dublă anterioară:

•Reprezentăm grafic domeniul



•$x^2+y^2=4$ este cercul cu centrul $O\,(0,0)$ şi raza 2

$x^2+y^2 \leq 4 \Rightarrow ...$

Deci D este iteriorul unui cerc reunit cu cercul.

•Studiem dacă D este domeniu de integrare. Este, deoarece

$$\begin{cases} \text{-}D \text{ este mulţime mărginită, } D \subsetneq [0,2]\times[0,2] \\ \text{- Fr } D \text{ este curbă simplă, închisă, netedă.} \end{cases}$$

•Studiem integrantul g.

$g : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ g\,(x,y) = \left(x^2+y^2\right)\left(2-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)\right).$

g este câmp scalar bine definit şi continuu pe D.

•Direct, studiind forma integrantului şi forma domeniului (x^2+y^2 apare şi în legea de asociere a g şi în ecuaţiile curbei ce mărgineşte D), facem o schimbare de variabile legată de coordonate polare.

Reprezentăm din nou D în xOy.

Fie (x,y) coordonatele carteziene a unui punct M din D. Fie coordonatele polare ale M :

$$\begin{cases} \rho = \operatorname{dist}(O,M) \\ \theta = \mu\left(\widehat{Ox,\overrightarrow{OM}}\right) \end{cases}, \text{ cu } \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ \theta = \rho\sin\theta \end{cases}$$

Observăm, având în vedere interpretarea geometrică, că

(x,y) parcurge $D \Leftrightarrow (\rho,\theta)$ parcurge D_s,

unde $D_s = \left\{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi\right\} = [0,2]\times[0,2\pi]$

Alături de reprezentarea domeniului D, reprezentăm D_s în $\rho O_s\theta$.

Alegem

$$F : D_s \subset \mathbb{R}^2 \to D \subset \mathbb{R}^2, F(\rho,\theta) = \left(\underbrace{\rho\cos\theta}_{x(\rho,\theta)}, \underbrace{\rho\sin\theta}_{y(\rho,\theta)} \right).$$

Observăm că F este difeomorfism pe $D_s \setminus \operatorname{Fr} D_s$, adică

-F este de clasă $\mathcal{C}^1$ pe $D_s \setminus \operatorname{Fr} D_s$

-$\det J_F(\rho,\theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho}(\rho,\theta) & \frac{\partial x}{\partial \theta}(\rho,\theta) \\ \frac{\partial y}{\partial \rho}(\rho,\theta) & \frac{\partial y}{\partial \theta}(\rho,\theta) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \cos\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho \neq 0, \forall (\rho,\theta) \in D_s \setminus \operatorname{Fr} D_s.$

Atunci F^{-1} duce bijectiv şi bicontinuu domeniul de integrare D în D_s, care este tot domeniu de integrare. Mai mult

$\mathcal{I} = \iint_D \left(\left(x^2+y^2\right)\left(2 - \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)\right)\right) dxdy = \iint_{D_s} \left(\rho^2\left(2-\frac{1}{2}\rho^2\right)\right)|\rho|\, d\rho d\theta =$

$= \iint_{D_s} \left(2\rho^3 - \frac{1}{2}\rho^5\right) d\rho d\theta.$

$D_s = \left\{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2; 0 \le \rho \le 2, 0 \le \theta \le 2\pi\right\} = [0,2] \times [0,2\pi]$

este un dreptunghi cu interior, cu laturile paralele cu axele de coordonate $O_s\rho, O_s\theta$.

Folosim Teorema de reducere $\Rightarrow$

$$\mathcal{I} = \iint_{D_s} \left(2\rho^3 - \tfrac{1}{2}\rho^5\right) d\rho d\theta = \int_0^2 \left(\underbrace{\int_0^{2\pi} \left(2\rho^3 - \frac{1}{2}\rho^5\right) d\theta}_{\mathcal{I}(\rho)} \right) d\rho =$$

$$\underset{\text{de integrare}}{\overset{\theta \text{ este var.}}{=}} \int_0^2 \left(\left(2\rho^3 - \tfrac{1}{2}\rho^5\right)\cdot\theta\right)\Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\rho =$$

$$= \int_0^2 2\pi\left(2\rho^3 - \tfrac{1}{2}\rho^5\right) d\rho =$$

$$\underset{\text{de integrare}}{\overset{\rho \text{ este var.}}{=}} 2\pi\left(2\frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^6}{2\cdot 6}\right)\Bigg|_{\rho=0}^{\rho=2} = 2\pi\left(8 - \tfrac{16}{3}\right).$$

Teorema 2.(o interpretare geometrică a unei integrale triple) Fie Ω un domeniu de integrare din $\mathbb{R}^3$. Atunci Ω are volum şi

$\operatorname{vol}(\Omega) = \iiint_\Omega 1 \cdot dxdydz.$

Teorema 4.(de schimbare de "variabile" de integrare în integrala triplă) Fie Ω un domeniu de integrare din $\mathbb{R}^3$, fie $\Omega_s \subset \mathbb{R}^3$. Fie

$F : \Omega_s \subset \mathbb{R}^3 \to \Omega \subset \mathbb{R}^3$

$(u,v,w) \in \Omega_s \rightsquigarrow F(u,v,w) = (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$

o funcţie bijectivă. Dacă F este difeomorfism pe $\Omega_s \setminus \operatorname{Fr}\Omega_s$, adică

-F este de clasă $\mathcal{C}^1$ pe $\Omega_s \setminus \operatorname{Fr}\Omega_s$

-$\det J_F(u,v,w) \neq 0, \forall (u,v,w) \in \Omega_s \setminus \operatorname{Fr}\Omega_s$

atunci F^{-1} duce bijectiv şi bicontinuu domeniul de integrare Ω în Ω_s, care este tot domeniu de integrare. Fie $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ o funcţie. Dacă $f \in \mathcal{R}(\Omega)$ atunci $f \circ F \in \mathcal{R}(\Omega_s)$ şi are loc

$\iiint_\Omega f(x,y,z)\, dxdydz = \iiint_{\Omega_s} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))\, |\det J_F(u,v,w)|\, dudvdw.$

Exerciţiul 3. Să se calculeze integrala triplă:

$\mathcal{I} = \iiint_\Omega (x+y+z)\, dxdydz,$

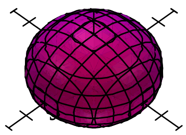
unde domeniul de integrare Ω este mulţimea din planul euclidian tridimensional $Oxyz$ mărginită de sfera $x^2+y^2+z^2-R^2=0$.

Rezolvare.

etapa 1. Studiem domeniul

•Reprezentăm grafic domeniul

$\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\right\}$



•Studiem dacă Ω este domeniu de integrare. Este, deoarece

$$\begin{cases} \text{-}\Omega \text{ este mulţime mărginită, } \Omega \subsetneq [-R, R] \times [-R, R] \times [-R, R] \\ \text{- Fr}\,\Omega \text{ este o suprafaţă simplă, închisă, netedă} \end{cases}$$

etapa 2. Studiem integrantul f.

$f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x, y, z) = x + y + z.$

f este câmp scalar bine definit şi continuu pe Ω.

etapa 3. Încercăm să determinăm $\mathcal{I} = \iiint_\Omega (x + y + z)\, dxdy$, aplicând Teorema de reducere.

modul 1. Se observă că Ω nu este paralelipiped cu interior, cu feţele paralele cu planele de coordonate.-NU

modul 2. Studiem dacă Ω este domeniu compact simplu în raport cu Oz.

$$\Omega = \Omega_z =$$

$$= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x, y) \in D = D_{xy},\quad \underbrace{-\sqrt{R^2 - ((x^2 + y^2))}}_{z\text{-ul unui p. de pe calota inferioara}} \leq z \leq \underbrace{-\sqrt{R^2 - ((x^2 + y^2))}}_{z\text{-ul unui p. de pe calota sup}} \right\},$$

unde

$D = pr_{xOy}\Omega_z = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x, y) \in D, x^2 + y^2 \leq R^2\right\}.$

Conform Teoremei de reducere$\Rightarrow$

$$\mathcal{I} = \iiint_\Omega (x + y + z)\, dxdydz = \iint_D \left(\underbrace{\int_{-\sqrt{R^2-((x^2+y^2))}}^{\sqrt{R^2-((x^2+y^2))}} (x + y + z)\, dz}_{\mathcal{I}(x,y)} \right) dxdy = ..$$

Din cauza integrantului, integralele ce apar din teorema de reducere sunt greu de calculat $\Rightarrow$ NU apelăm la acest mod.

modul 3. Studiem dacă Ω este domeniu compact simplu în raport cu Oy-este. Din cauza integrantului, integralele ce apar din teorema de reducere sunt greu de calculat $\Rightarrow$ NU apelăm la acest mod.

modul 4. Studiem dacă Ω este domeniu compact simplu în raport cu Ox-este. Din cauza integrantului, integralele ce apar din teorema de reducere sunt greu de calculat $\Rightarrow$ NU apelăm la acest mod.

etapa 4. Determinăm $\mathcal{I} = \iiint_\Omega (x + y + z)\, dxdy$, aplicând Teorema de schimbare de "variabile".

Studiind forma integrantului şi forma domeniului ($x^2 + y^2 + z^2$ apare în ecuaţia suprafeţei ce mărgineşte Ω), facem o schimbare de variabile legată de coordonate polare. Reprezentăm din nou

Ω în $Oxyz$:

Fie (x,y) coordonatele carteziene a unui punct M din Ω. Fie coordonatele M :

$$\begin{cases} \rho = \operatorname{dist}(O,M) \\ \theta = \mu\left(\widehat{\overrightarrow{OM},\, \overrightarrow{k}}\right) \\ \varphi = \mu\left(\widehat{\overrightarrow{OM_1},\, \overrightarrow{i}}\right), \overrightarrow{OM_1} = pr_{xOy}\overrightarrow{OM} \end{cases}, \text{ cu } \begin{cases} x = \rho\sin\theta\cos\varphi \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi \\ z = \rho\cos\theta \end{cases}$$

Observăm, având în vedere interpretarea geometrică, că

(x,y,z) parcurge $\Omega \Leftrightarrow (\rho,\theta,\varphi)$ parcurge Ω_s,

unde

$$\Omega_s = \left\{(\rho,\theta,\varphi) \in \mathbb{R}^3; 0 \le \rho \le R, 0 \le \theta \le \pi, 0 \le \varphi \le 2\pi\right\} = [0,R] \times [0,\pi] \times [0,2\pi].$$

Alături de reprezentarea domeniului Ω, reprezentăm Ω_s în $O_s\rho\theta\varphi$.

Alegem

$F : \Omega_s \subset \mathbb{R}^3 \to \Omega \subset \mathbb{R}^3$,

$$(\rho,\theta,\varphi) \in \Omega_s \rightsquigarrow F(\rho,\theta,\varphi) = \left(\underbrace{\rho\sin\theta\cos\varphi}_{x(\rho,\theta,\varphi)}, \underbrace{\rho\sin\theta\sin\varphi}_{y(\rho,\theta,\varphi)}, \underbrace{\rho\cos\theta}_{z(\rho,\theta,\varphi)}\right).$$

Observăm că F este difeomorfism pe $\Omega_s \setminus \operatorname{Fr}\Omega_s$, adică

-F este de clasă $\mathcal{C}^1$ pe $\Omega_s \setminus \operatorname{Fr}\Omega_s$

$$\text{-}\det J_F(\rho,\theta,\varphi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial\rho}(\rho,\theta,\varphi) & \frac{\partial x}{\partial\theta}(\rho,\theta,\varphi) & \frac{\partial x}{\partial\varphi}(\rho,\theta,\varphi) \\ \frac{\partial y}{\partial\rho}(\rho,\theta,\varphi) & \frac{\partial y}{\partial\theta}(\rho,\theta,\varphi) & \frac{\partial y}{\partial\varphi}(\rho,\theta,\varphi) \\ \frac{\partial z}{\partial\rho}(\rho,\theta,\varphi) & \frac{\partial z}{\partial\theta}(\rho,\theta,\varphi) & \frac{\partial z}{\partial\varphi}(\rho,\theta,\varphi) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = \rho^2\sin\theta \ne 0, \forall(\rho,\theta,\varphi) \in \Omega_s \setminus \operatorname{Fr}\Omega_s.$$

Atunci F^{-1} duce bijectiv şi bicontinuu domeniul de integrare Ω în Ω_s, care este tot domeniu de integrare. Mai mult

$\mathcal{I} = \iiint_\Omega 1dxdydz = \iiint_{\Omega_s} 1\left|\rho^2\sin\theta\right| d\rho d\theta d\varphi = \iiint_{\Omega_s} \rho^2\sin\theta d\rho d\theta d\varphi.$

$$\Omega_s = \left\{(\rho,\theta,\varphi) \in \mathbb{R}^3; 0 \le \rho \le R, 0 \le \theta \le \pi, 0 \le \varphi \le 2\pi\right\} = [0,R] \times [0,\pi] \times [0,2\pi]$$

este un paralelipiped cu interior, cu planele paralele cu planele de coordonate $O_s\rho\theta, O_s\theta\varphi, O_s\varphi\rho$.

Folosim Teorema de reducere $\Rightarrow$

$\mathcal{I} = \iiint_{\Omega_s} (\rho\sin\theta\cos\varphi + \rho\sin\theta\sin\varphi + \rho\cos\theta)\rho^2\sin\theta d\rho d\theta d\varphi =$

$$= \int_0^R \left(\underbrace{\int_0^\pi \left(\underbrace{\int_0^{2\pi} \left(\rho^3\sin^2\theta\cos\varphi + \rho^3\sin^2\theta\sin\varphi + \rho^3\sin\theta\cos\theta\right) d\varphi}_{\mathcal{I}(\rho,\theta)}\right) d\theta}_{\mathcal{I}(\rho)}\right) d\rho =$$

$$\overset{\varphi \text{ este var.}}{\underset{\text{de integrare}}{=}} \int_0^R \left(\underbrace{\int_0^{\pi} \left(\rho^3 \sin^2\theta \sin\varphi - \rho^3 \sin^2\theta \cos\varphi + \varphi\rho^3 \sin\theta\cos\theta\right)\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} d\theta}_{\mathcal{I}(\rho)} \right) d\rho$$

$$= \int_0^R \left(\underbrace{\int_0^{\pi} \left(2\pi\rho^3 \sin\theta\cos\theta\right) d\theta}_{\mathcal{I}(\rho)} \right) d\rho$$

$$\overset{\theta \text{ este var.}}{\underset{\text{de integrare}}{=}} \int_0^R \left(\underbrace{\pi\rho^3 \left(\sin^2\theta\right)\Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi}}_{\mathcal{I}(\rho)} \right) d\rho = \int_0^R 0 d\rho \overset{\rho \text{ este var.}}{\underset{\text{de integrare}}{=}} 0$$

Exerciţiul 4. Să se calculeze integrala triplă:

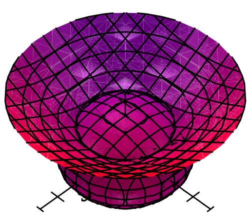
$$\mathcal{I} = \iiint_\Omega \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dxdydz,$$

unde domeniul de integrare Ω este mulţimea din planul euclidian tridimensional $Oxyz$, situat în semiplanul superior $z \geq 0$, ce conţine o porţiune din semiaxa pozitivă Oz şi este delimitat de sferele $x^2+y^2+z^2=1$ $x^2+y^2+z^2=9$, şi de conul cu vârful în origine $z=\sqrt{x^2+y^2}$

Rezolvare.

etapa 1. Studiem domeniul

•Reprezentăm grafic domeniul



Intersectăm conul cu sferele în Ω

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ z=\sqrt{x^2+y^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=\frac{1}{2} \\ z=\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \text{ e un cerc în planul } z=\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ paralel cu } xOy.$$

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=9 \\ z=\sqrt{x^2+y^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=\frac{9}{2} \\ z=\frac{3}{\sqrt{2}} \end{cases} \text{ e un cerc în planul } z=\frac{3}{\sqrt{2}} \text{ paralel cu } xOy.$$

•Studiem dacă Ω este domeniu de integrare. Este, deoarece

$$\begin{cases} \text{-}\Omega \text{ este mulţime mărginită, } D \subsetneq \left[-\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right] \times \left[-\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right] \times \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 3\right] \\ \text{- Fr}\,\Omega \text{ este o suprafaţă simplă, închisă, netedă pe porţiuni} \end{cases}$$

etapa 2. Studiem integrantul f.

$$f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

f este câmp scalar bine definit şi continuu pe Ω.

etapa 3. Încercăm să determinăm $\mathcal{I} = \iiint_\Omega \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dxdy$, aplicând Teorema de reducere.

modul 1. Se observă că Ω nu este paralelipiped cu interior, cu feţele paralele cu planele de coordonate.- NU

modul 2. Studiem dacă Ω este domeniu compact simplu în raport cu Oz-nu, este doar juxtapunere

$$\Omega = \Omega_z^1 \cup ... =$$

$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3; (x,y) \in D^1 = D^1_{xy}, \underbrace{\frac{3}{\sqrt{2}}}_{z\text{-ul din planul cercului cu } r=\frac{3}{\sqrt{2}}} \le z \le \underbrace{\sqrt{9-(x^2+y^2)}}_{z\text{-ul de pe sfera cu } r=3} \right\} \cup ...$$

unde

$$D^1 = pr_{xOy}\Omega_z^1 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2 \le \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 \right\} ...$$

Din cauza integrantului, integralele ce apar din teorema de reducere sunt greu de calculat $\Rightarrow$ NU apelăm la acest mod.

modul 3. Studiem dacă Ω este domeniu compact simplu în raport cu Oy.Din cauza integrantului, integralele ce apar din teorema de reducere sunt greu de calculat $\Rightarrow$ NU apelăm la acest mod.

modul 4. Studiem dacă Ω este domeniu compact simplu în raport cu Ox. Din cauza integrantului, integralele ce apar din teorema de reducere sunt greu de calculat $\Rightarrow$ NU apelăm la acest mod.

etapa 4. Determinăm $\mathcal{I} = \iiint_\Omega \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dxdy$, aplicând Teorema de schimbare de "variabile".

Studiind forma integrantului şi forma domeniului ($x^2+y^2+z^2$ apare şi în legea de asociere a f, şi în ecuaţiile suprafeţelor ce mărginesc Ω), facem o schimbare de variabile legată de coordonate polare. Reprezentăm din nou Ω în $Oxyz$.

Fie (x,y) coordonatele carteziene a unui punct M din Ω. Fie coordonatele M :

$$\begin{cases} \rho = \operatorname{dist}(O,M) \\ \theta = \mu\left(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{k}}\right) \\ \varphi = \mu\left(\widehat{\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{i}}\right), \overrightarrow{OM}_1 = pr_{xOy}\overrightarrow{OM} \end{cases}, \text{ cu } \begin{cases} x = \rho\sin\theta\cos\varphi \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi \\ z = \rho\cos\theta \end{cases}$$

Observăm, având în vedere interpretarea geometrică, că

(x,y,z) parcurge $\Omega \Leftrightarrow (\rho,\theta,\varphi)$ parcurge Ω_s,

unde

$$\Omega_s = \left\{(\rho,\theta,\varphi) \in \mathbb{R}^3; 1 \le \rho \le 3, 0 \le \theta \le \pi, \tfrac{\pi}{4} \le \varphi \le \tfrac{3\pi}{4}\right\}$$
$$= [1,3] \times [0,\pi] \times \left[\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{3\pi}{4}\right].$$

Alături de reprezentarea domeniului Ω, reprezentăm Ω_s în $O_s\rho\theta\varphi$.

Alegem

$F : \Omega_s \subset \mathbb{R}^3 \to \Omega \subset \mathbb{R}^3$,

$$(\rho,\theta,\varphi) \in \Omega_s \rightsquigarrow F(\rho,\theta,\varphi) = \left(\underbrace{\rho\sin\theta\cos\varphi}_{x(\rho,\theta,\varphi)}, \underbrace{\rho\sin\theta\sin\varphi}_{y(\rho,\theta,\varphi)}, \underbrace{\rho\cos\theta}_{z(\rho,\theta,\varphi)} \right).$$

Observăm că F este difeomorfism pe $\Omega_s \setminus \operatorname{Fr}\Omega_s$, adică

-F este de clasă $\mathcal{C}^1$ pe $\Omega_s \setminus \operatorname{Fr}\Omega_s$

$$\text{-det}\, J_F(\rho,\theta,\varphi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho}(\rho,\theta,\varphi) & \frac{\partial x}{\partial \theta}(\rho,\theta,\varphi) & \frac{\partial x}{\partial \varphi}(\rho,\theta,\varphi) \\ \frac{\partial y}{\partial \rho}(\rho,\theta,\varphi) & \frac{\partial y}{\partial \theta}(\rho,\theta,\varphi) & \frac{\partial y}{\partial \varphi}(\rho,\theta,\varphi) \\ \frac{\partial z}{\partial \rho}(\rho,\theta,\varphi) & \frac{\partial z}{\partial \theta}(\rho,\theta,\varphi) & \frac{\partial z}{\partial \varphi}(\rho,\theta,\varphi) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = \rho^2\sin\theta \neq 0, \forall(\rho,\theta,\varphi)\in\Omega_s\setminus \operatorname{Fr}\Omega_s.$$

Atunci F^{-1} duce bijectiv şi bicontinuu domeniul de integrare Ω în Ω_s, care este tot domeniu de integrare. Mai mult

$\mathcal{I} = \iiint_\Omega \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dxdydz = \iiint_{\Omega_s} \frac{1}{\rho}\left|\rho^2\sin\theta\right| d\rho d\theta d\varphi = \iiint_{\Omega_s} \rho^2 \sin\theta d\rho d\theta d\varphi.$

$\Omega_s = \left\{(\rho,\theta,\varphi)\in\mathbb{R}^3; 1\le\rho\le 3, 0\le\theta\le\pi, \frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{3\pi}{4}\right\}$
$= [1,3]\times[0,\pi]\times\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$

este un paralelipiped cu interior, cu planele paralele cu planele de coordonate $O_s\rho\theta, O_s\theta\varphi, O_s\varphi\rho$.

Folosim Teorema de reducere $\Rightarrow$

$\mathcal{I} = \iiint_{\Omega_s} \rho\sin\theta d\rho d\theta d\varphi =$

$$= \int_1^3 \left(\underbrace{\int_0^\pi \left(\underbrace{\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (\rho\sin\theta)\, d\varphi}_{\mathcal{I}(\rho,\theta)} \right) d\theta}_{\mathcal{I}(\rho)} \right) d\rho \overset{\varphi \text{ este var.}}{\underset{\text{de integrare}}{=}} \int_1^3 \left(\underbrace{\int_0^\pi (\rho\sin\theta)\cdot \varphi\Big|_{\varphi=\frac{\pi}{4}}^{\varphi=\frac{3\pi}{4}} d\theta}_{\mathcal{I}(\rho)} \right) d\rho$$

$$= \int_1^3 \left(\underbrace{\int_0^\pi \left(\frac{\pi}{2}\rho\sin\theta\right) d\theta}_{\mathcal{I}(\rho)} \right) d\rho \overset{\theta \text{ este var.}}{\underset{\text{de integrare}}{=}} \int_1^3 \left(\underbrace{\frac{\pi}{2}\rho(-\cos\theta)\Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi}}_{\mathcal{I}(\rho)} \right) d\rho =$$

$$= \int_1^3 \pi\rho d\rho \overset{\rho \text{ este var.}}{\underset{\text{de integrare}}{=}} \frac{\pi}{2}(9-1) = 4\pi.$$

Exerciţiul 5. Să se determine volumul elipsoidului care are ecuaţia

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1,$

unde a,b,c sunt constante reale pozitive.

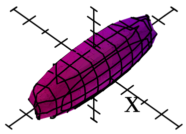
Rezolvare. Anticipăm că, dacă există,

$\operatorname{vol}(\Omega) = \iiint_\Omega 1dxdy = \mathcal{I}.$

<u>etapa 1.</u> Studiem domeniul

•Reprezentăm grafic domeniul

$\Omega = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3; \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1\right\}$



•Studiem dacă Ω este domeniu de integrare. Este, deoarece

$$\begin{cases} \text{-}\Omega \text{ este mulţime mărginită, } D \subsetneq [-a,a] \times [-b,b] \times [-c,c] \\ \text{- Fr}\,\Omega \text{ este o suprafaţă simplă, închisă, netedă.} \end{cases}$$

etapa 2. Studiem integrantul f.

$f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = 1$.

f este câmp scalar bine definit şi continuu pe Ω.

etapa 3. Încercăm să determinăm $\mathcal{I} = \iiint_\Omega 1dxdy$, aplicând Teorema de reducere.

modul 1. Se observă că Ω nu este paralelipiped cu interior, cu feţele paralele cu planele de coordonate.-NU

modul 2. Studiem dacă Ω este domeniu compact simplu în raport cu Oz-este. Din cauza integrantului, integralele ce apar din teorema de reducere sunt greu de calculat $\Rightarrow$ NU apelăm la acest mod.

modul 3. Studiem dacă Ω este domeniu compact simplu în raport cu Oy-este. Din cauza integrantului, integralele ce apar din teorema de reducere sunt greu de calculat $\Rightarrow$ NU apelăm la acest mod.

modul 4. Studiem dacă Ω este domeniu compact simplu în raport cu Ox-este. Din cauza integrantului, integralele ce apar din teorema de reducere sunt greu de calculat $\Rightarrow$ NU apelăm la acest mod.

etapa 4. Determinăm $\mathcal{I} = \iiint_\Omega 1dxdy$, aplicând Teorema de schimbare de "variabile".

Studiind forma integrantului şi forma domeniului ($\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}$ apare în ecuaţia suprafeţei ce mărgineşte Ω), facem o schimbare de variabile legată de coordonate polare. Reprezentăm din nou Ω în $Oxyz$.

Fie (x,y) coordonatele carteziene a unui punct M din Ω. Fie coordonatele M :

$$\begin{cases} \rho = \operatorname{dist}(O,M) \\ \theta = \mu\left(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{k}}\right) \\ \varphi = \mu\left(\widehat{\overrightarrow{OM}_1, \overrightarrow{i}}\right), \overrightarrow{OM}_1 = pr_{xOy}\overrightarrow{OM} \end{cases}, \text{ cu } \begin{cases} x = a\rho\sin\theta\cos\varphi \\ y = b\rho\sin\theta\sin\varphi \\ z = c\rho\cos\theta \end{cases}$$

Observăm, având în vedere interpretarea geometrică, că

(x,y,z) parcurge $\Omega \Leftrightarrow (\rho,\theta,\varphi)$ parcurge Ω_s,

unde

$$\Omega_s = \left\{(\rho,\theta,\varphi) \in \mathbb{R}^3; 0 \le \rho \le 1, 0 \le \theta \le \pi, 0 \le \varphi \le 2\pi\right\} = [0,1] \times [0,\pi] \times [0,2\pi].$$

Alături de reprezentarea domeniului Ω, reprezentăm Ω_s în $O_s\rho\theta\varphi$.

Alegem

$F : \Omega_s \subset \mathbb{R}^3 \to \Omega \subset \mathbb{R}^3$,

$$(\rho,\theta,\varphi) \in \Omega_s \rightsquigarrow F(\rho,\theta,\varphi) = \left(\underbrace{a\rho\sin\theta\cos\varphi}_{x(\rho,\theta,\varphi)}, \underbrace{b\rho\sin\theta\sin\varphi}_{y(\rho,\theta,\varphi)}, \underbrace{c\rho\cos\theta}_{z(\rho,\theta,\varphi)} \right).$$

Observăm că F este difeomorfism pe $\Omega_s \setminus \operatorname{Fr}\Omega_s$, adică

-F este de clasă $\mathcal{C}^1$ pe $\Omega_s \setminus \operatorname{Fr}\Omega_s$

$$\text{-}\det J_F(\rho,\theta,\varphi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial\rho}(\rho,\theta,\varphi) & \frac{\partial x}{\partial\theta}(\rho,\theta,\varphi) & \frac{\partial x}{\partial\varphi}(\rho,\theta,\varphi) \\ \frac{\partial y}{\partial\rho}(\rho,\theta,\varphi) & \frac{\partial y}{\partial\theta}(\rho,\theta,\varphi) & \frac{\partial y}{\partial\varphi}(\rho,\theta,\varphi) \\ \frac{\partial z}{\partial\rho}(\rho,\theta,\varphi) & \frac{\partial z}{\partial\theta}(\rho,\theta,\varphi) & \frac{\partial z}{\partial\varphi}(\rho,\theta,\varphi) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a\sin\theta\cos\varphi & a\rho\cos\theta\cos\varphi & -a\rho\sin\theta\sin\varphi \\ b\sin\theta\sin\varphi & b\rho\cos\theta\sin\varphi & b\rho\sin\theta\cos\varphi \\ c\cos\theta & -c\rho\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = abc\rho^2\sin\theta \neq 0,$$

$\forall (\rho,\theta,\varphi) \in \Omega_s \setminus \operatorname{Fr}\Omega_s$.

Atunci F^{-1} duce bijectiv şi bicontinuu domeniul de integrare Ω în Ω_s, care este tot domeniu de integrare. Mai mult

$\mathcal{I} = \iiint_\Omega 1dxdydz = \iiint_{\Omega_s} 1\left|abc\rho^2\sin\theta\right| d\rho d\theta d\varphi = abc\iiint_{\Omega_s} \rho^2\sin\theta d\rho d\theta d\varphi$.

$\Omega_s = \left\{(\rho,\theta,\varphi) \in \mathbb{R}^3; 0 \le \rho \le 1, 0 \le \theta \le \pi, 0 \le \varphi \le 2\pi\right\} =$

$= [0,1] \times [0,\pi] \times [0,2\pi]$

este un paralelipiped cu interior, cu planele paralele cu planele de coordonate $O_s\rho\theta, O_s\theta\varphi, O_s\varphi\rho$.

Folosim Teorema de reducere $\Rightarrow$

$\operatorname{vol}(\Omega) = \mathcal{I} = abc\iiint_{\Omega_s} \rho^2\sin\theta d\rho d\theta d\varphi =$

$$= abc\int_0^1 \left(\underbrace{\int_0^\pi \left(\underbrace{\int_0^{2\pi} \rho^2\sin\theta d\varphi}_{\mathcal{I}(\rho,\theta)} \right) d\theta}_{\mathcal{I}(\rho)} \right) d\rho =$$

$$\overset{\varphi \text{ este var.}}{\underset{\text{de integrare}}{=}} abc\int_0^1 \left(\underbrace{\int_0^\pi \left(\rho^2(\sin\theta)\cdot\varphi\right)\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} d\theta}_{\mathcal{I}(\rho)} \right) d\rho = abc\int_0^1 \left(\underbrace{\int_0^\pi 2\pi\rho^2(\sin\theta)\,d\theta}_{\mathcal{I}(\rho)} \right) d\rho$$

$$\overset{\theta \text{ este var.}}{\underset{\text{de integrare}}{=}} abc\int_0^1 \left(\underbrace{2\pi\rho^2(-\cos\theta)\Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi}}_{\mathcal{I}(\rho)} \right) d\rho = abc\int_0^1 \left(4\pi\rho^2\right) d\rho$$

$$\overset{\rho \text{ este var.}}{\underset{\text{de integrare}}{=}} 4\pi abc\,\frac{\rho^3}{3}\Big|_{\rho=0}^{\rho=1} = \frac{4\pi abc}{3}.$$

○11. Integrala de suprafaţă

...

○**12**. Formule integrale