CURS NR. 2
Analiză matematică, AIA

1.3. Şiruri de numere reale

Un şir este utilizat în reprezentarea digitală a unui semnal după conversia analogic$\Rightarrow$ digital sau în metodele de rezolvare a unei probleme numerice dând un şir de răspunsuri dintre care se alege cel mai "apropiat" de soluţia exactă. Este de menţionat avantajul net superior al comunicaţiilor digitale (CD-player/ discuri de vinil): se pot utiliza filtre şi alte procese tehnice utilizând computere, microprocesoare.

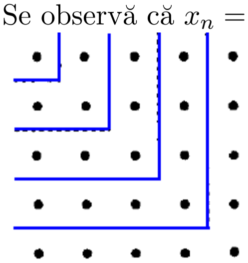
Peste tot în această secţiune fie $m \in \mathbb{N}$ un număr natural fixat şi
$\mathbb{N}_m = \{m, m+1, ..., n, ...\}$ ($\mathbb{N}_0 = \mathbb{N}$ şi $\mathbb{N}_1 = \mathbb{N}^*$).

Definiţia 1.3.1. Se numeşte *şir de numere reale* o funcţie
$f : \mathbb{N}_m \to \mathbb{R}, f(n) = x_n$.
Numărul x_n se numeşte *termenul de rang* n al şirului. Se notează şirul prin $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m}$. Se descrie
$(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m} : x_m, x_{m+1}, ..., x_n, ...$
Se numeşte *subşir al şirului* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m}$ restricţia funcţiei f la o submulţime numărabilă a $\mathbb{N}_m$.

Exemplul 1.3.1. Un şir se poate da prin termenul său general, prin descriere (eventual a unei proprietăţi specifice termenilor şirului) sau prin un număr de termeni şi o relaţie de recurenţă. Relaţiile de recurenţă (ecuaţii cu diferenţe finite) sunt întâlnite în rezolvarea unor probleme de analiză numerică sau pot deriva din modelarea proceselor fizice prin sisteme digitale.

a) Se dă prin descriere şirul pătratelor numerelor naturale nenule $1, 4, 9, 16, 25, ...$ Să se deducă termenul său general şi o relaţie de recurenţă pe care să o verifice.

Se observă că $x_n = n^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$ este formula termenului general.



Mai mult, folosind figura, se deduce:
$x_n = x_{n-1} + n + (n-1), \forall n \in \mathbb{N}_2$-o relaţie de recurenţă de ordin 1.

b) Şirul lui Fibonacci (Leonardo Fibonacci, 1170-1250, Pissa, Italia, a introdus sistemul de numeraţie arab, cu cifra 0). Un exemplu de şir dat prin primii termeni şi o relaţie de recurenţă este şirul lui Fibonacci:

$$\bullet \begin{cases} x_0 = 0, x_1 = 1, \text{-primii doi termeni} \\ \boxed{x_n = x_{n-1} + x_{n-2}, \forall n \in \mathbb{N}_2} \text{-o relaţie de recurenţă liniară de ordin 2.} \end{cases}$$

(provine din problema iepurilor, dar cu $x_1 = 1, x_2 = 1$ iniţiali).

•Prin descriere:
$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} : 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...$

•Se poate determina termenul său general (la EDCO, semestrul al II-lea). Recurenţa este una liniară, de ordin 2, ce se poate rescrie:
$x_n - x_{n-1} - x_{n-2} = 0.$

Se ataşează ecuaţia caracteristică $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ cu $m(\lambda_{1,2}) = 1$. Atunci

$$x_n = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

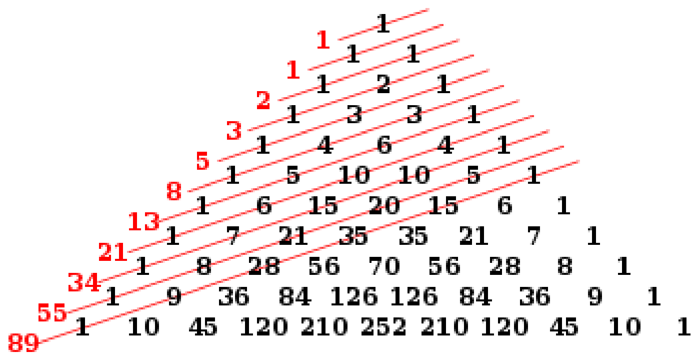
Impunând condiţiile iniţiale $x_0 = 0, x_1 = 1 \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + c_2 \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ c_2 = \dfrac{-1}{\sqrt{5}} \end{cases}.$

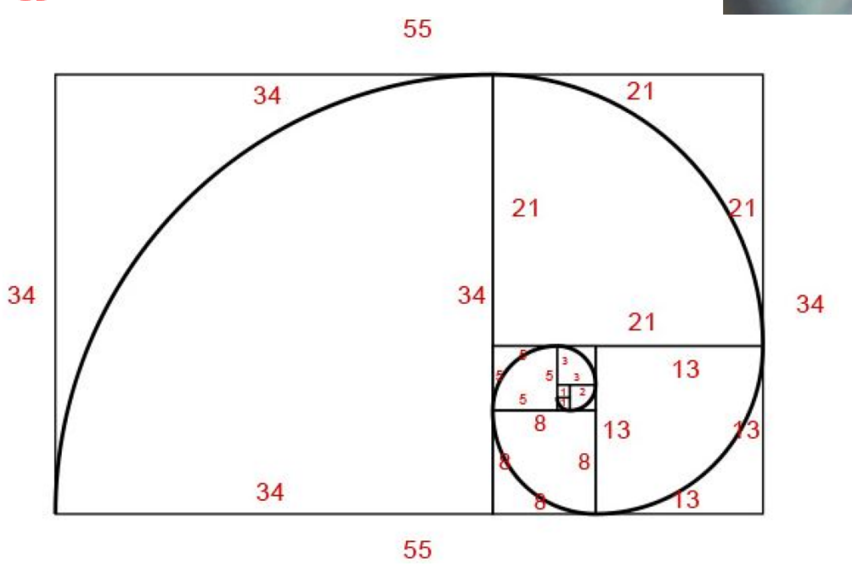
Deci termenul general este:

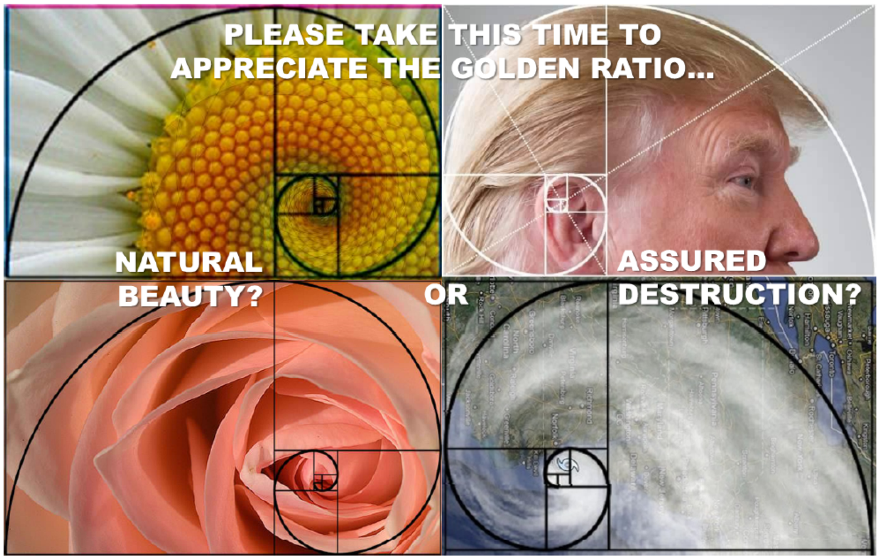
$$\boxed{x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \forall n \in \mathbb{N}.}$$

•De la rangul 7 încolo se observă o proprietate interesantă: raportul dintre un termen şi următorul consecutiv tinde spre $0,618$. Acest număr a fost numit φ (phi), fiind considerat încă din antichitate *raportul de aur* sau *numărul de aur*, datorită întâlnirii frecvente a acestui raport în lumea care ne înconjoară (corpul uman, muzică, plante). Se află în raportul de aur oricare două numere a şi b cu proprietatea

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \varphi.$$







În filmul Nature by Numbers - Cristóbal Vila (2010) https://www.youtube.com/watch?v=tnkLDFpgix4 se observă multiple asocieri între şirul lui Fibonacci şi elemente din natură:

-dispunerea seminţelor în floarea soarelui; dispunerea formelor la ananas, la conurile de brad;

-dispunerea cochiliei unui melc, a formelor-solzi pe aripile unui fluture.

c) (**reprezentarea digitală a semnalelor-**la disciplinele de specialitate). Pentru a obţine reprezentarea digitală a undei sin de frecvenţă unghiulară 3, $f(t) = \sin(3t)$, unde t reprezintă, în general, variabila timp, se alege

$f(n) = x_n = \sin(3n), n \in \mathbb{N}$,

pentru a da un şir de valori. Se determină:

$x_0 = \sin 0 = 0$

$x_1 = \sin 3 = 0,14$

$x_2 = \sin 6 = -0.27$

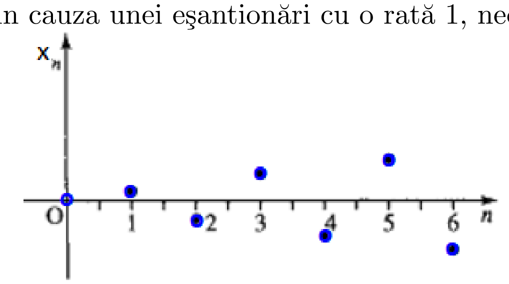
$x_3 = \sin 9 = 0.41$

$x_4 = \sin 12 = -0.53$

$x_5 = \sin 15 = 0.65$

$x_6 = \sin 18 = -0.75$

Reprezentarea grafică a funcţiei-şir în raport cu n nu seamănă cu cea a funcţiei sin. Aceasta din cauza unei eşantionări cu o rată 1, necorespunzătoare.



Semnalele digitale se reprezintă alegând

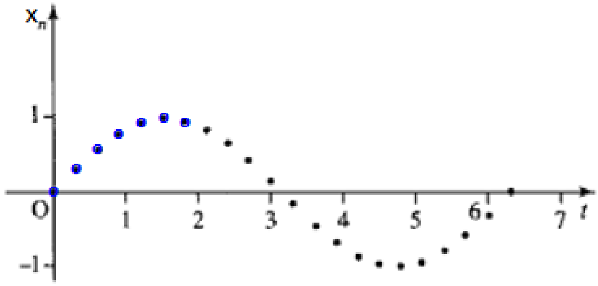
$x_n = \sin(3Tn), n \in \mathbb{N}$, unde $t = Tn$, cu o rată de eşantionare mică, de exemplu $T = 0.1$. Atunci, pentru $x_n = \sin(0.3n), n \in \mathbb{N}$, se determină:

$x_0 = \sin 0 = 0, t = 0$

$x_1 = \sin 0.3 = 0.29, t = 0.1$

$x_2 = \sin 0.6 = 0.56, t = 0.2$

$x_3 = \sin 0.9 = 0.78, t = 0.3$
$x_4 = \sin 1.2 = 0.93, t = 0.4$
$x_5 = \sin 1.5 = 0.99, t = 0.5$
$x_6 = \sin 1.8 = 0.97, t = 0.6$
Reprezentarea grafică a funcţiei-şir în raport cu $t = Tn$ seamănă cu cea a funcţiei sin.



Atunci reprezentarea digitală a funcţiei $f(t) = \sin(3t)$ este
$f(nT) = \sin(3nT), n \in \mathbb{N}$

Dacă are loc o supraeşantionare are loc efectul numit "aliasing", adică în loc să se observe semnalul potrivit, apare unul de frecvenţă mai joasă (fenomen apărut în studiul mişcării roţilor de maşină, in imaginile TV, în grafică pe computer- aspectul zimţat sau dinţat, de ferăstrău, al liniilor curbate sau diagonale pe un monitor cu rezoluţie joasă).

d) Progresii aritmetice -vezi liceu şi Complemente de Matematică;
e) Progresii geometrice - vezi liceu şi Complemente de Matematică.

Definiţia 1.3.2. Şirurile $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ şi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ sunt *egale* dacă
$x_n = y_n, \forall n \in \mathbb{N}_m.$

Observaţia 1.3.1. Se face distincţie între un şir şi mulţimea termenilor săi. De exemplu, fie
$x_n = (-1)^n, \forall n \in \mathbb{N}^*,$
$y_n = (-1)^{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*,$
Şirurile se pot descrie:
$(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} : \underbrace{-1}_{x_1}, \underbrace{1}_{x_2}, \underbrace{-1}_{x_3}, \underbrace{1}_{x_4}, ..., \underbrace{(-1)^n}_{x_n}, ...$
$(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*} : \underbrace{1}_{y_1}, \underbrace{-1}_{y_2}, \underbrace{1}_{y_3}, \underbrace{-1}_{y_4}, ..., \underbrace{(-1)^{n+1}}_{y_n}, ...$
Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ are mulţimea termenilor $A = \{-1, 1\}$, iar şirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ are mulţimea termenilor $B = \{-1, 1\}$. Se observă că $A = B$, dar şirurile nu sunt egale, ca funcţii.

Şiruri monotone

Definiţia 1.3.3. Un şir de numere reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ se numeşte
a) *şir monoton crescător* (*monoton strict crescător*) dacă
$x_n \le x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}_m \, (x_n < x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}_m);$
b) *şir monoton descrescător* (*monoton, strict descrescător*) dacă
$x_n \ge x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}_m \, (x_n > x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}_m).$
c) *şir monoton* (*monoton strict*) dacă este monoton crescător sau monoton descrescător (monoton strict crescător sau monoton strict descrescător).

Observaţia 1.3.2.
a) Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este şir strict crescător atunci $x_1 < x_2 < ... < x_n < ....$
b) Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este şir strict descrescător atunci $x_1 > x_2 > ... > x_n > ....$

Observaţia 1.3.3. Orice subşir al unui şir monoton este un şir monoton. Reciproc nu.

Observaţia 1.3.4. Monotonia unui şir se poate studia cu definiţia; comparând diferenţa dintre doi termeni succesivi cu 0; doar pentru şirurile cu termeni strict pozitivi, comparând raportul dintre doi termeni succesivi cu 1; folosind inducţia matematică.

$\inf\limits_{n\in\mathbb{N}_m} x_n$, $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_m} x_n$, $\min\limits_{n\in\mathbb{N}_m} x_n$, $\max\limits_{n\in\mathbb{N}_m} x_n$, **Şiruri mărginite**

Observaţia 1.3.5. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ un şir de numere reale şi $A=\{x_n; n\in\mathbb{N}_m\}$ mulţimea termenilor şirului. Noţiunile de *minorant*, *majorant* pentru şir sunt cele de minorant, majorant pentru A. Atunci

$\inf A \overset{\text{not.}}{=} \inf\limits_{n\in\mathbb{N}_m} x_n = \underline{x} \in \mathbb{R}$ şi $\nexists \min A \overset{\text{not.}}{=} \min\limits_{n\in\mathbb{N}_m} x_n \Leftrightarrow \begin{cases} \textbf{(i)}\ \forall n\in\mathbb{N}_m, \underline{x} \lneqq x_n \\ \textbf{(ii)}\ \forall\varepsilon>0, \exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}_m : \underline{x} \lneqq x_{n_\varepsilon} < \underline{x}+\varepsilon. \end{cases}$

$\inf A \overset{\text{not.}}{=} \inf\limits_{n\in\mathbb{N}_m} x_n = \underline{x} \in \mathbb{R}$ şi $\exists \min A \overset{\text{not.}}{=} \min\limits_{n\in\mathbb{N}_m} x_n \Leftrightarrow \begin{cases} \textbf{(i)}\ \forall n\in\mathbb{N}_m, \underline{x} \leq x_n \\ \textbf{(ii)}\ \forall\varepsilon>0, \exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}_m : \underline{x} \leq x_{n_\varepsilon} < \underline{x}+\varepsilon. \end{cases}$

$\inf A \overset{\text{not.}}{=} \inf\limits_{n\in\mathbb{N}_m} x_n = -\infty \Leftrightarrow \{\textbf{(i)-(ii)}\ \forall\alpha<0, \exists n_\alpha\in\mathbb{N}_m, x_{n_\alpha}<\alpha.$

$\sup A \overset{\text{not.}}{=} \sup\limits_{n\in\mathbb{N}_m} x_n = \overline{x} \in \mathbb{R}$ şi $\nexists \max A \overset{\text{not.}}{=} \max\limits_{n\in\mathbb{N}_m} x_n \Leftrightarrow \begin{cases} \textbf{(i)}\ \forall n\in\mathbb{N}_m, x_n \lneqq \overline{x} \\ \textbf{(ii)}\ \forall\varepsilon>0, \exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}_m : \overline{x}-\varepsilon < x_{n_\varepsilon} \lneqq \overline{x}. \end{cases}$

$\sup A \overset{\text{not.}}{=} \sup\limits_{n\in\mathbb{N}_m} x_n = \overline{x} \in \mathbb{R}$ şi $\exists \max A \overset{\text{not.}}{=} \max\limits_{n\in\mathbb{N}_m} x_n \Leftrightarrow \begin{cases} \textbf{(i)}\ \forall n\in\mathbb{N}_m, x_n \leq \overline{x} \\ \textbf{(ii)}\ \forall\varepsilon>0, \exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}_m : \overline{x}-\varepsilon < x_{n_\varepsilon} \leq \overline{x}. \end{cases}$

$\sup A \overset{\text{not.}}{=} \sup\limits_{n\in\mathbb{N}_m} x_n = +\infty \Leftrightarrow \{\textbf{(i)-(ii)}\ \forall\alpha>0, \exists n_\alpha\in\mathbb{N}_m, \alpha<x_{n_\alpha}.$

Definiţia 1.3.4. Un şir de numere reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ se numeşte şir *mărginit* dacă mulţimea termenilor şirului este mărginită, adică dacă există $\alpha\in\mathbb{R}$ şi $\beta\in\mathbb{R}$ astfel încât

$\alpha < x_n < \beta, \forall n\in\mathbb{N}_m.$

Observaţia 1.3.6. În Definiţia 1.3.4, dacă $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}_m} x_n \in \mathbb{R}$, se poate alege $\alpha = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}_m} x_n$, iar dacă $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_m} x_n \in \mathbb{R}$, se poate alege $\beta = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}_m} x_n$. Inegalitatea din definiţia şirului mărginit se poate rescrie în funcţie de următoarele situaţii.

$\inf\limits_{n\in\mathbb{N}_m} x_n \in \mathbb{R}, \nexists \min\limits_{n\in\mathbb{N}_m} x_n;\ \sup\limits_{n\in\mathbb{N}_m} x_n \in \mathbb{R}, \nexists \max\limits_{n\in\mathbb{N}_m} x_n \rightsquigarrow \alpha < x_n < \beta;$

$\inf\limits_{n\in\mathbb{N}_m} x_n \in \mathbb{R}, \exists \min\limits_{n\in\mathbb{N}_m} x_n;\ \sup\limits_{n\in\mathbb{N}_m} x_n \in \mathbb{R}, \nexists \max\limits_{n\in\mathbb{N}_m} x_n \rightsquigarrow \alpha \leq x_n < \beta;$

$\inf\limits_{n\in\mathbb{N}_m} x_n \in \mathbb{R}, \nexists \min\limits_{n\in\mathbb{N}_m} x_n;\ \sup\limits_{n\in\mathbb{N}_m} x_n \in \mathbb{R}, \exists \max\limits_{n\in\mathbb{N}_m} x_n \rightsquigarrow \alpha < x_n \leq \beta;$

$\inf\limits_{n\in\mathbb{N}_m} x_n \in \mathbb{R}, \exists \min\limits_{n\in\mathbb{N}_m} x_n;\ \sup\limits_{n\in\mathbb{N}_m} x_n \in \mathbb{R}, \exists \max\limits_{n\in\mathbb{N}_m} x_n \rightsquigarrow \alpha \leq x_n \leq \beta.$

Exemplul 1.3.2. a) Fie şirul constant

$x_n = 2, \forall n\in\mathbb{N}^*.$

Şirul se poate descrie:

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} : \underbrace{2}_{x_1}, \underbrace{2}_{x_2}, \underbrace{2}_{x_3}, \underbrace{2}_{x_4}, ..., \underbrace{2}_{x_n}, ...$

Are mulţimea termenilor $A=\{2\}$, care este mulţime finită şi mărginită, deci $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este şir mărginit.

b) Fie şirul neconstant

$x_n = (-1)^n, \forall n\in\mathbb{N}^*.$

Şirul se poate descrie:

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} : \underbrace{-1}_{x_1}, \underbrace{1}_{x_2}, \underbrace{-1}_{x_3}, \underbrace{1}_{x_4}, ..., \underbrace{(-1)^n}_{x_n}, ...$

Are mulţimea termenilor $A=\{-1,1\}$, care este mulţime finită şi mărginită. Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este şir mărginit.

c) Fie şirul neconstant

$x_n = n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$

Şirul se poate descrie:

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} : \underbrace{1}_{x_1}, \underbrace{2}_{x_2}, \underbrace{3}_{x_3}, \underbrace{4}_{x_4}, ..., \underbrace{n}_{x_n}, ...$

Are mulţimea termenilor $A = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}$, care este mulţime infinită şi nemărginită (este mărginită inferior de 1, dar este nemărginită superior). Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este şir nemărginit.

Exemplul 1.3.3.

a) Fie $x_n = \dfrac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Şirul se poate descrie:

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} : \underbrace{1}_{x_1}, \underbrace{\frac{1}{2}}_{x_2}, \underbrace{\frac{1}{3}}_{x_3}, \underbrace{\frac{1}{4}}_{x_4}, ..., \underbrace{\frac{1}{n}}_{x_n}, ...$

Se vor studia minoranţii, majoranţii, $\inf A$, $\sup A$, $\min A$, $\max A$, mărginirea pentru $A \subseteq \mathbb{R}$ dată prin $A = \left\{\dfrac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

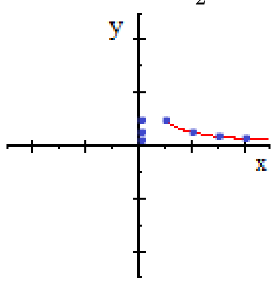
•Se ordonează mulţimea termenilor şirului, $A = \left\{\dfrac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^*\right\}$, apoi se reprezintă pe axă (se reprezintă proiecţia funcţiei $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}, f(n) = \dfrac{1}{n}$ pe axa Oy şi se roteşte axa).

•Se studiază monotonia şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$:

$x_{n+1} - x_n = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n} = -\dfrac{1}{n(n+1)} < 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este şir monoton strict descrescător$\Rightarrow$

$x_1 = 1 > x_2 = \frac{1}{2} > x_3 = \frac{1}{3} > .... > x_n = \frac{1}{n} > ... > 0.$



$\Rightarrow$

•$A_{\leq} =]-\infty, 0]$ este mulţimea tuturor minoranţilor mulţimii A.

•$A_{\geq} = [1, +\infty[$ este mulţimea tuturor majoranţilor mulţimii A.

• $\inf A \overset{\text{Se notează}}{=} \inf\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n = 0$ deoarece:

(i) $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \lneqq x_n$ (0 este un minorant pentru A);

(ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^* : 0 \lneqq x_{n_\varepsilon} < 0 + \varepsilon$ (0 este cel mai mare minorant pentru A). Ultima afirmaţie are loc

•sau "prin densitate": $\forall \varepsilon > 0$. Se caută un $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât

$0 < \frac{1}{n_\varepsilon} < 0 + \varepsilon \Leftrightarrow n_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}.$

Pentru $\frac{1}{\varepsilon}$ număr real dat, conform Proprietăţii lui Arhimede, există măcar un număr natural $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ a.î. $\frac{1}{\varepsilon} < n_\varepsilon$. Se poate alege chiar $n_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$.

•sau "prin atingere": NU; din reprezentarea pe axă se observă că 0 nu este termen de şir.

Cum $0 \notin A$ (0 nu este termen al şirului) $\Rightarrow \nexists \min A \overset{\text{Se notează}}{=} \min\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$.

$\sup A \overset{\text{Se notează}}{=} \sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n = 1$ deoarece

(i) $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n \leq 1$ (1 este un majorant pentru A);

(ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^* : 1 - \varepsilon < x_{n_\varepsilon} \leq 1$ (1 este cel mai mic majorant pentru A). Ultima afirmaţie are loc

•sau "prin densitate": NU; din reprezentarea pe axă se observă că nu este posibilă apropierea de 1 "prin densitate" cu termeni de şir

•sau "prin atingere": Fie $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon = 1 \in \mathbb{N}^* : 1 - \varepsilon < x_1 = 1$.

Cum $1 \in A$ (1 este termen al şirului, $x_1 = 1$) $\Rightarrow \max A \overset{\text{Se notează}}{=} \max\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n = 1$.

•Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este şir mărginit, deoarece
$0 \lneqq x_n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
De menţionat că A este mulţime infinită (numărabilă) şi mărginită.

b) Fie $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Şirul se poate descrie:

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} : \underbrace{-1}_{x_1}, \underbrace{\frac{1}{2}}_{x_2}, \underbrace{\frac{-1}{3}}_{x_3}, \underbrace{\frac{1}{4}}_{x_4}, ..., \underbrace{\frac{(-1)^n}{n}}_{x_n}, ...$$

Se vor studia minoranţii, majoranţii, $\inf A$, $\sup A$, $\min A$, $\max A$, mărginirea pentru $A \subseteq \mathbb{R}$ dată prin $A = \left\{\dfrac{(-1)^n}{n}; n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

•Deoarece $\mathbb{N}^* = \{2k; k \in \mathbb{N}^*\} \cup \{2k+1; k \in \mathbb{N}\}$, se explicitează

$$x_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & \text{dacă } n = 2k; k \in \mathbb{N}^* \\ \dfrac{-1}{n}, & \text{dacă } n = 2k+1; k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

•Se ordonează mulţimea termenilor şirului, $A = \left\{\dfrac{(-1)^n}{n}; n \in \mathbb{N}^*\right\}$, apoi se reprezintă pe axă.

•Se studiază monotonia şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$:

$(x_{2k})_{k\in\mathbb{N}^*} : x_{2k+2} - x_{2k} = \dfrac{1}{2k+2} - \dfrac{1}{2k} = -\dfrac{2}{2k(2k+2)} < 0, \forall k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$
$(x_{2k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ este subşir monoton strict descrescător$\Rightarrow$
$x_2 = \frac{1}{2} > x_4 = \frac{1}{4} > .... > x_{2k} = \frac{1}{2k} > ... > 0$.

$(x_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}} : x_{2k+3} - x_{2k+1} = \dfrac{-1}{2k+3} - \dfrac{-1}{2k+1} = \dfrac{2}{(2k+1)(2k+3)} > 0, \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow$
$(x_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ este subşir monoton strict crescător$\Rightarrow$
$x_1 = -1 < x_3 = \frac{-1}{3} < .... < x_{2k+1} = \frac{-1}{2k+1} < ... < 0$.

Deci $x_1 = -1 < x_3 = \frac{-1}{3} < .... < x_{2k+1} = \frac{-1}{2k+1} < ... < 0 < ... < x_{2k} = \frac{1}{2k} < ... < x_4 = \frac{1}{4} < x_2 = \frac{1}{2}$.
Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ nu este monoton pe ansamblu, este monoton doar pe subşiruri.

•$A_{\leq} =]-\infty, -1]$ este mulţimea tuturor minoranţilor mulţimii A.
$A_{\geq} = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$ este mulţimea tuturor majoranţilor mulţimii A.
• $\inf A = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n = -1$ deoarece:

(i) $\forall n \in \mathbb{N}^*, -1 \leq x_n$ (-1 este un minorant pentru A);

(ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^* : -1 \leq x_{n_\varepsilon} < -1 + \varepsilon$ (-1 este cel mai mare minorant pentru A). Ultima afirmaţie are loc

•sau "prin densitate": NU; din reprezentarea pe axă se observă că nu este posibilă apropierea de -1 "prin densitate" cu termeni de şir

•sau "prin atingere": Fie $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon = 1 \in \mathbb{N}^* : -1 = x_1 < -1 + \varepsilon$.

Cum $-1 \in A$ (-1 este termen al şirului, $x_1 = -1$) $\Rightarrow \min A = \min\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n = -1$.
$\sup A = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n = \frac{1}{2}$ deoarece

(i) $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n \leq \frac{1}{2}$ ($\frac{1}{2}$ este un majorant pentru A);

(ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^* : -\varepsilon < x_{n_\varepsilon} \leq \frac{1}{2}$ ($\frac{1}{2}$ este cel mai mic majorant pentru A). Ultima afirmaţie are loc

•sau "prin densitate": NU; din reprezentarea pe axă se observă că nu este posibilă apropierea de $\frac{1}{2}$ "prin densitate" cu termeni de şir

•sau "prin atingere": Fie $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon = 2 \in \mathbb{N}^* : \frac{1}{2} - \varepsilon < x_2 = \frac{1}{2}$.

Cum $\frac{1}{2} \in A$ ($\frac{1}{2}$ este termen al şirului, $x_2 = \frac{1}{2}$) $\Rightarrow \max A = \max\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n = \frac{1}{2}$.
Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este şir mărginit, deoarece
$-1 \leq x_n \leq \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
De menţionat că A este mulţime infinită (numărabilă) şi mărginită.

Observaţia 1.3.7. Un şir de numere reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ este şir mărginit$\Leftrightarrow$
$\exists M > 0$ a.î. $|x_n| < M, \forall n \in \mathbb{N}_m$.
(toţi termenii şirului sunt într-o sferă deschisă de centru 0 şi rază M).
Observaţia 1.3.8. Un şir de numere reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ este şir nemărginit$\Leftrightarrow$
$\forall M > 0, \exists n_M \in \mathbb{N}_m$ a.î. $|x_{n_M}| \geq M$.

Exemplul 1.3.4. Să se studieze mărginirea şirului
$$x_n = \frac{1}{n^n} \sin \frac{n!\pi}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$
Rezolvare. Deoarece $\exists M = 2 > 0$ astfel încât
$|x_n| = \left|\frac{1}{n^n} \sin \frac{n\pi}{2}\right| = \left|\frac{1}{n^n}\right| \cdot \left|\sin \frac{n\pi}{2}\right| \leq \frac{1}{n^n} \cdot 1 \leq 1 \cdot 1 < 2, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$
şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este mărginit.

Exemplul 1.3.5. Şirul $x_n = 2^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ este nemărginit.
Rezolvare. •Fie $\forall M > 0$. Se caută $n_M \in \mathbb{N}^*$ astfel încât
$|x_{n_M}| = |2^{n_M}| = 2^{n_M} > M$, adică a.î.
$2^{n_M} > M \Leftrightarrow n_M \ln 2 > \ln M \Leftrightarrow n_M > \frac{\ln M}{\ln 2}$.
Conform Proprietăţii lui Arhimede, se găseşte $n_M = \left[\frac{\ln M}{\ln 2}\right] + 1$.
Deci şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este nemărginit.
•Se putea arăta şi că şirul este monoton strict crescător, cu
$\inf\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n = 1; \min\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n = 1$
$\sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n = +\infty$ deoarece {(i)-(ii) $\forall \alpha > 0, \exists n_\alpha \in \mathbb{N}_m, \alpha < 2^{n_\alpha}$, cu $n_\alpha = \left[\frac{\ln \alpha}{\ln 2}\right] + 1$.
Adică şirul este mărginit inferior şi nemărginit superior
$1 \leq x_n < +\infty, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Limita unui şir. Şiruri convergente. Puncte limită.

Definiţia 1.3.5. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ un şir de numere reale. Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ *are limita* $x \in \overline{\mathbb{R}}$ şi se notează $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ sau $x_n \to x$, dacă $[\forall V \in \mathcal{V}(x), \exists n_V \in \mathbb{N}_m$ a.î. $\forall n \in \mathbb{N}_m, n \geq n_V \Rightarrow x_n \in V]$.
Teorema 1.3.1. (**de unicitate a limitei unui şir**) Dacă un şir de numere reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ are limită în $\overline{\mathbb{R}}$, atunci aceasta este unică.
Teorema 1.3.2. (**de caracterizare a limitei unui şir**) Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ un şir de numere reale.
a) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow [\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}_m$ a.î. $\forall n \in \mathbb{N}_m, n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon]$.
b) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty \Leftrightarrow [\forall \alpha > 0, \exists n_\alpha \in \mathbb{N}_m$ a.î. $\forall n \in \mathbb{N}_m, n \geq n_\alpha \Rightarrow x_n > \alpha]$.
c) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty \Leftrightarrow [\forall \alpha < 0, \exists n_\alpha \in \mathbb{N}_m$ a.î. $\forall n \in \mathbb{N}_m, n \geq n_\alpha \Rightarrow x_n < \alpha]$.
Definiţia 1.3.6. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ un şir de numere reale. Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ *este convergent* dacă are limită în $\mathbb{R}$. Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ *este divergent* dacă sau nu are limită sau are limită şi aceasta este $-\infty$ sau $+\infty$.

Exemplul 1.3.6. **a)** Fie şirul constant $x_n = 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Se arată cu teorema de caracterizare că
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow [\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ a.î. $\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |x_n - 2| < \varepsilon]$.
Fie $\forall \varepsilon > 0$, mic spre 0. Se caută $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ a.î. $\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq n_\varepsilon$ să se obţină
$|x_n - 2| = |2 - 2| = 0 < \varepsilon$.
Deci $n_\varepsilon = 1$, adică s-a ales $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ cel mai mic a.î. $0 < \varepsilon$.
b) Fie $x_n = \dfrac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Se arată cu teorema de caracterizare că
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow [\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ a.î. $\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |x_n - 0| < \varepsilon]$.
Fie $\forall \varepsilon > 0$, mic spre 0. Se caută $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ a.î. $\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq n_\varepsilon$ să se obţină
$$|x_n - 0| = \left|\tfrac{1}{n} - 0\right| = \tfrac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \underbrace{\frac{1}{\varepsilon}}_{\text{real, mare spre } +\infty}.$$
Conform proprietăţii lui Arhimede, se alege drept n_ε cel mai mic număr din $\mathbb{N}^*$ cu proprietatea anterioară, adică $n_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$.

Exemplul 1.3.7. Fie $x_n = -2^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Se arată cu teorema de caracterizare că
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty \Leftrightarrow [\forall \alpha < 0, \exists n_\alpha \in \mathbb{N}^*$ a.î. $\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq n_\alpha \Rightarrow x_n < \alpha]$.
Fie $\forall \alpha < 0$, mic spre $-\infty$. Se caută $n_\alpha \in \mathbb{N}^*$ a.î. $\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq n_\alpha$ să se obţină

$$x_n = -2^n < \alpha \Leftrightarrow 2^n > \underbrace{-\alpha}_{>0} \Big| \ln \Rightarrow n \ln 2 > \ln(-\alpha) \Leftrightarrow n > \tfrac{\ln(-\alpha)}{\ln 2}.$$

Conform proprietăţii lui Arhimede, se alege drept n_α cel mai mic număr din $\mathbb{N}^*$ cu proprietatea anterioară, adică $n_\alpha = \left[\frac{\ln(-\alpha)}{\ln 2}\right] + 1$.

Propoziţia 1.3.1. Dacă un şir de numere reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ are limita $x \in \overline{\mathbb{R}}$ atunci orice subşir al său are limita x.
Observaţia 1.3.9. Dacă un şir de numere reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ are un subşir divergent sau două subşiruri convergente către limite diferite atunci acel şir este divergent.
Definiţia 1.3.7. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ un şir de numere reale. Punctul $l \in \overline{\mathbb{R}}$ este *un punct limită al şirului* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ dacă

$\forall V \in \mathcal{V}(l) \Rightarrow x_n \in V$ pentru o infinitate de valori ale n (sau mulţimea $\{n \in \mathbb{N}_m; x_n \in V\}$ este infinită).
Se notează cu $\mathcal{L}\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}\right)$ mulţimea tuturor punctelor limită ale şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$.
Teorema 1.3.3. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ un şir de numere reale. Atunci $\mathcal{L}\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}\right) \neq \emptyset$, adică şirul are cel punţin un punct limită în $\overline{\mathbb{R}}$.
Definiţia 1.3.8. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ un şir de numere reale. Marginea superioară a mulţimii $\mathcal{L}\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}\right)$ se numeşte *limita superioară* a şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ şi se notează $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$ sau $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$ şi marginea inferioară a mulţimii $\mathcal{L}\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}\right)$ se numeşte *limita inferioară* a şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ şi se notează $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$ sau $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$.
Propoziţia 1.3.2. Dacă un şir de numere reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ are limita $x \in \overline{\mathbb{R}}$ atunci $x \in \mathcal{L}\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}\right)$.
Propoziţia 1.3.3. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ un şir de numere reale. Atunci

$l \in \mathcal{L}\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}\right) \Leftrightarrow$ [există un subşir al şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ convergent la l].
Teorema 1.3.4.. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ un şir de numere reale. Atunci

$$\boxed{\exists x = \lim_{n\to\infty} x_n \Leftrightarrow \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = x.}$$

Propoziţia 1.3.4. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ un şir de numere reale. Atunci

$$\boxed{-\infty \le \inf_{n\in\mathbb{N}_m} x_n \le \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n \le \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n \le \sup_{n\in\mathbb{N}_m} x_n \le +\infty}$$

Propoziţia 1.3.5 Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ şi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ două şiruri de numere reale.
a) Dacă $[x_n \le y_n, \forall n \in \mathbb{N}_m]$ atunci $[\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n \le \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} y_n$ şi $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n \le \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} y_n]$;
b) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} (-x_n) = -\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$ şi $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} (-x_n) = -\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$;
c) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n + \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} y_n \le \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} (x_n + y_n) \le \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n + \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} y_n \le \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} (x_n + y_n) \le \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n + \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} y_n$;
d) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n \cdot \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} y_n \le \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} (x_n \cdot y_n) \le \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} (x_n \cdot y_n) \le \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n \cdot \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} y_n$;
e) Dacă $x_n \gneqq 0, \forall n \in \mathbb{N}_m$ atunci

$$\boxed{0 \le \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{x_{n+1}}{x_n} \le \underline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{x_n} \le \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{x_n} \le \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{x_{n+1}}{x_n} \le +\infty.}$$

Exemplul 1.3.8.a) Fie $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
•Deoarece $\mathbb{N}^* = \{2k; k \in \mathbb{N}^*\} \cup \{2k+1; k \in \mathbb{N}\}$, se explicitează

$$x_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & \text{dacă } n = 2k; k \in \mathbb{N}^* \\ \dfrac{-1}{n}, & \text{dacă } n = 2k+1; k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

•Se arată că

$\inf A = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n = -1; \exists \min A = \min\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n = -1 = x_1;$

$\sup A = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n = \frac{1}{2}; \exists \max A = \max\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n = \frac{1}{2} = x_2.$

Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este şir mărginit, deoarece

$-1 \le x_n \le \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$

•Se trece la limită pe subşiruri

$$\begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{2k} = 0; \\ \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k+1} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{-1}{2k+1} = 0 \end{cases} \overset{\mathbb{N}^*=\{2k;k\in\mathbb{N}^*\}\cup\{2k+1;k\in\mathbb{N}\}}{\Rightarrow}$$

$\Rightarrow$mulţimea punctelor limită ale şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este $\mathcal{L}\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\right) = \{0\} \Rightarrow$

$$\begin{cases} \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \liminf\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \text{ (cel mai mic punct limită)} \\ \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \limsup\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \text{ (cel mai mare punct limită)} \end{cases}$$

•Se verifică

$\inf\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n \le \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n \le \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n \le \sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n \ (-1 \le 0 \le 0 \le 1).$

•Deoarece

$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = 0 = 0 = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0.$

b) Fie $x_n = (-1)^n \dfrac{2n+1}{3n}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$

•Deoarece $\mathbb{N} = \{2k; k \in \mathbb{N}^*\} \cup \{2k+1; k \in \mathbb{N}\}$, se explicitează

$$x_n = \begin{cases} \dfrac{2n+1}{3n}, & \text{dacă } n = 2k; k \in \mathbb{N}^* \\ -\dfrac{2n+1}{3n}, & \text{dacă } n = 2k+1; k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

•Se arată că

$\inf\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n = -1; \exists \min\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n = -1 = x_1;$

$\sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n = \frac{5}{6}; \exists \max\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n = \frac{5}{6} = x_2.$

Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este şir mărginit, deoarece

$-1 \le x_n \le \frac{5}{6}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$

•Se trece la limită pe subşiruri

$$\begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{4k+1}{6k} = \frac{2}{3}; \\ \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k+1} = \lim\limits_{k\to\infty} \left(-\frac{4k+3}{6k+4}\right) = -\frac{2}{3} \end{cases} \overset{\mathbb{N}=\{2k;k\in\mathbb{N}^*\}\cup\{2k+1;k\in\mathbb{N}\}}{\Rightarrow}$$

$\Rightarrow$mulţimea punctelor limită ale şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este $\mathcal{L}\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\right) = \left\{-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right\} \Rightarrow$

$$\begin{cases} \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \liminf\limits_{n\to\infty} x_n = -\frac{2}{3} \text{ (cel mai mic punct limită)} \\ \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \limsup\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{2}{3} \text{ (cel mai mare punct limită)} \end{cases}$$

•Se verifică

$\inf\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n \le \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n \le \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n \le \sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n \ (-1 \le -\frac{2}{3} \le \frac{2}{3} \le \frac{5}{6}).$

•Deoarece

$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = -1 \ne 1 = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n \Rightarrow \nexists \lim\limits_{n\to\infty} x_n.$

c) Fie $x_n = (1 + (-1)^n)\, n + \dfrac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
•Deoarece $\mathbb{N} = \{2k; k \in \mathbb{N}^*\} \cup \{2k+1; k \in \mathbb{N}\}$, se explicitează

$$x_n = \begin{cases} 2n + \dfrac{1}{n}, & \text{dacă } n = 2k; k \in \mathbb{N}^* \\ 0 + \dfrac{1}{n}, & \text{dacă } n = 2k+1; k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

•Se arătă la că

$\inf\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n = 0; \nexists \min\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n;$
$\sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n = +\infty.$

•Se trece la limită pe subşiruri

$$\begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = \lim\limits_{k\to\infty} \left(2 \cdot 2k + \dfrac{1}{2k}\right) = +\infty; \\ \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k+1} = \lim\limits_{k\to\infty} \left(\frac{1}{2k+1}\right) = 0 \end{cases} \overset{\mathbb{N}=\{2k;k\in\mathbb{N}^*\}\cup\{2k+1;k\in\mathbb{N}\}}{\Rightarrow}$$

mulţimea punctelor limită ale şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este $\mathcal{L}\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\right) = \{+\infty, 0\} \Rightarrow$

$$\begin{cases} \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \liminf\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \text{ (cel mai mic punct limită)} \\ \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \limsup\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty \text{ (cel mai mare punct limită)} \end{cases}$$

•Se verifică

$\inf\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n \le \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n \le \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n \le \sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n\ (0 \le 0 \le +\infty \le +\infty).$

•Deoarece

$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = 0 \ne +\infty = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n \Rightarrow \nexists \lim\limits_{n\to\infty} x_n.$

d) Fie $x_n = \cos\frac{n\pi}{3}, \forall n \in \mathbb{N}$.
•Se observă că

$x_0 = \cos\frac{0\cdot\pi}{3} = 1; x_1 = \cos\frac{1\cdot\pi}{3} = \frac{1}{2}; x_2 = \cos\frac{2\cdot\pi}{3} = -\frac{1}{2}; x_3 = \cos\frac{3\cdot\pi}{3} = -1;$
$x_4 = \cos\frac{4\cdot\pi}{3} = -\frac{1}{2}; x_5 = \cos\frac{5\cdot\pi}{3} = \frac{1}{2} x_6 = \cos\frac{6\cdot\pi}{3} = 1, \ldots$

Din periodicitatea cu care x_n ia valori în funcţie de n $\Rightarrow$mulţimea punctelor limită ale şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este $\mathcal{L}\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = \left\{1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1\right\} \Rightarrow$

$$\begin{cases} \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \liminf\limits_{n\to\infty} x_n = -1 \text{ (cel mai mic punct limită)} \\ \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \limsup\limits_{n\to\infty} x_n = 1 \text{ (cel mai mare punct limită)} \end{cases}$$

•Deoarece

$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = -1 = 1 = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n \Rightarrow \nexists \lim\limits_{n\to\infty} x_n.$

Şiruri convergente. Operaţii algebrice cu şiruri convergente. Criterii de convergenţă

Teorema 1.3.5. (**operaţii algebrice cu şiruri convergente**) Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ şi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ două şiruri de numere reale şi $\alpha \in \mathbb{R}$.
a) Dacă şirurile $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ şi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ sunt convergente atunci şirurile $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$, $(\alpha x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$, $(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$, $((x_n)^{y_n})_{n\in\mathbb{N}_m}$ sunt convergente. În acest caz

$\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n; \lim\limits_{n\to\infty} (\alpha x_n) = \alpha \left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right);$

$\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right) \cdot \left(\lim\limits_{n\to\infty} y_n\right); \lim\limits_{n\to\infty} ((x_n)^{y_n}) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right)^{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$

b) Dacă şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ este convergent atunci şirul $(|x_n|)_{n\in\mathbb{N}_m}$ este convergent. În acest caz

$\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = \left|\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right|.$

Observaţia 1.3.10. Concluziile din Teorema 1.3.5 au loc şi dacă şirurile $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ şi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ au

limita $-\infty/+\infty$, atunci când operaţiile între $-\infty/+\infty/0/1$ se pot defini, au sens.
Teorema 1.3.6. Orice şir convergent de numere reale este mărginit.
Reciproc nu. (de exemplu $x_n = (-1)^n \frac{n+1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ este mărginit şi nu este convergent).
Teorema 1.3.7. (**Weierstrass**) Orice şir monoton şi mărginit de numere reale este convergent:
a) Orice şir de numere reale monoton crescător şi mărginit superior este convergent şi
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}_m} x_n$.
b) Orice şir de numere reale monoton descrescător şi mărginit inferior este convergent şi
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}_m} x_n$.
Observaţia 1.3.11.
a) Orice şir de numere reale monoton crescător şi nemărginit superior are $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.
b) Orice şir de numere reale monoton descrescător şi nemărginit inferior are $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.
Teorema 1.3.8. **a)** Orice şir mărginit are cel puţin un punct limită în $\mathbb{R}$.
b)(**lema lui Cesaró**) Orice şir mărginit are cel puţin un subşir convergent.

Exemplul 1.3.9. Se studiază convergenţa şirului
$x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
Şirul se poate descrie:
$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} : \underbrace{\frac{1}{2^1+1}}_{x_1}, \underbrace{\frac{1}{2^1+1} + \frac{1}{2^2+1}}_{x_2}, ..., \underbrace{\frac{1}{2^1+1} + \frac{1}{2^2+1} + ... + \frac{1}{2^n+1}}_{x_n}, ...$$
Termenul general nu se poate exprima fără simbolul $\sum$.
•Se studiază monotonia şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$:
$$x_{n+1} - x_n = \left(\frac{1}{2^1+1} + \frac{1}{2^2+1} + ... + \frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^{n+1}+1}\right) - \left(\frac{1}{2^1+1} + \frac{1}{2^2+1} + ... + \frac{1}{2^n+1}\right) =$$
$$= \frac{1}{2^{n+1}+1} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$$
$(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este şir monoton strict crescător$\Rightarrow$
$$x_1 = \frac{1}{3} < x_2 < x_3 < .... < x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k+1} < ...$$
•Se studiază mărginirea şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Deoarece
$$0 < \frac{1}{2^k+1} < \frac{1}{2^k}, \forall k \in \{1, ..., n\}, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 0 < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k+1} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ adică}$$
$$0 < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k+1} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$
Deci $0 < x_n < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$, chiar $\frac{1}{3} < x_n < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$, adică şirul este mărginit (de menţionat că 0 nu este neapărat inf iar 1 nu este neapărat sup din acest tip de studiu).
•Şir monoton şi mărginit $\Rightarrow$ este şir convergent, fără a şti limita (cu metode numerice).
$$\sum_{k=1}^{30} \frac{1}{2^k+1} \simeq 0.764\,50; \sum_{k=1}^{3000} \frac{1}{2^k+1} \simeq 0.764\,50.$$

Teorema 1.3.9. (**criteriul majorării de convergenţă, CS**) Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ un şir de numere reale. Dacă există un şir $(y_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ de numere reale pozitive şi un număr $x \in \mathbb{R}$ astfel încât
$$\begin{cases} |x_n - x| \le y_n, \forall n \in \mathbb{N}_m, n > n_0, \\ \exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0 \end{cases}$$
atunci $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Exemplul 1.3.10. **a)** Fie $x_n = \dfrac{\sin^2 n^n}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Se observă că

$$\left\{\begin{array}{l} |x_n - 0| = \left|\frac{\sin^2 n^n}{n} - 0\right| \le \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \\ \exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \end{array}\right. \overset{\text{Crit. maj.}}{\Rightarrow} \exists \lim_{n\to\infty} \frac{\sin^2 n^n}{n} = 0.$$

b) Fie $k \in \mathbb{N}^*$ fixat şi $x_n = \dfrac{1}{n^k}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Se observă că

$$\left\{\begin{array}{l} |x_n - 0| = \left|\frac{1}{n^k} - 0\right| \le \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \\ \exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \end{array}\right. \overset{\text{Crit. maj.}}{\Rightarrow} \exists \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0.$$ Deci

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^* \text{ fixat} \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0.}$$

c) Fie $x_n = \dfrac{1}{2^n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Se observă că

$$\left\{\begin{array}{l} |x_n - 0| = \left|\frac{1}{2^n} - 0\right| \le \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \\ \exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \end{array}\right. \overset{\text{Crit. maj.}}{\Rightarrow} \exists \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0.$$ Mai mult

$$\boxed{\forall a > 1 \text{ real fixat} \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a^n} = 0.}$$

Mai mult,

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} q^n = \left\{\begin{array}{cl} 0, & \text{dacă } q \in \,]-1,1[\\ 1 & \text{dacă } q = 1 \\ +\infty & \text{dacă } q \in \,]1,+\infty[\\ \nexists & \text{dacă } q \in \,]-\infty,-1] \end{array}\right.}$$

Exemplul 1.3.11. Fie $k \in \mathbb{N}$ fixat şi $a_0, ..., a_k \in \mathbb{R}$, $a_k \ne 0$. Fie $p \in \mathbb{N}$ fixat şi $b_0, ..., b_p \in \mathbb{R}$, $b_p \ne 0$. Atunci

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{a_0 + a_1 n + ... + a_{k-1}n^{k-1} + a_k n^k}{b_0 + b_1 n + ... + b_{p-1}n^{p-1} + b_p n^p} = \left\{\begin{array}{cl} \frac{a_k}{b_p}, & \text{dacă } k = p \\ 0, & \text{dacă } k < p \\ \left(\operatorname{sgn} \frac{a_k}{b_p}\right) \cdot (+\infty) & \text{dacă } k > p \end{array}\right.}$$

În particular:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \left(a_0 + a_1 n + ... + a_{k-1}n^{k-1} + a_k n^k\right) = (\operatorname{sgn} a_k) \cdot (+\infty)}$$

Teorema 1.3.10. (**trecerea la limită în inegalităţi**) Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ şi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ două şiruri de numere reale astfel încât

$x_n \le y_n, \forall n \in \mathbb{N}_m, n \ge n_0$.

Dacă $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in \overline{\mathbb{R}}$ şi $\exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y \in \overline{\mathbb{R}}$ atunci

$x \le y$, adică $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \le \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Observaţia 1.3.12. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ şi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ două şiruri de numere reale astfel încât

$x_n \lneqq y_n, \forall n \in \mathbb{N}_m, n \ge n_0$.

Dacă $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in \overline{\mathbb{R}}$ şi $\exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y \in \overline{\mathbb{R}}$ atunci

$x \le y$, adică $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \le \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Teorema 1.3.11. (**criteriul cleştelui de existenţă a limitei, CS**) Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_m}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ şi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ şiruri de numere reale astfel încât

$a_n \le x_n \le b_n, \forall n \in \mathbb{N}_m, n \ge n_0$.

Dacă $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = x, \exists \lim\limits_{n\to\infty} b_n = x, x \in \overline{\mathbb{R}}$ atunci $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Exemplul 1.3.12. Fie $x_n = \dfrac{n!}{n^n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Se observă că

$$0 \leq \frac{n!}{n^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n}{n \cdot n \cdot ... \cdot n} \leq \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Se alege $a_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0; b_n = \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.
Atunci $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Observaţia 1.3.13. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ un şir de numere reale astfel încât

$$x_n = u_n \cdot v_n, \forall n \in \mathbb{N}_m.$$

Dacă **(i)** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ este şir mărginit; **(ii)** $(v_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ are $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$,
atunci $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Exemplul 1.3.13. Fie $x_n = \dfrac{1}{n}\sin n!, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Se observă că
(i) $u_n = \sin n!, \forall n \in \mathbb{N}^*$ este şir mărginit, deoarece $|u_n| \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$;
(ii) $v_n = \dfrac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ are $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$.
Atunci, conform observaţiei anterioare, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Teorema 1.3.12.

a) Fie $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Atunci $\boxed{\begin{cases} \text{este şir monoton strict crescător;} \\ \text{este şir mărginit: } 2 \leq e_n < 3, \forall n \in \mathbb{N}^*; \\ \text{are } \lim\limits_{n\to\infty} e_n = e \\ \text{verifică } e_n < e, \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}}$

b) Fie $e_n^1 = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Atunci $\boxed{\begin{cases} \text{este şir monoton strict descrescător şi mărginit;} \\ \text{are } \lim\limits_{n\to\infty} e_n^1 = e \\ \text{verifică } e_n < e < e_n^1, \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}}$

c) Fie $E_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Atunci $\boxed{\begin{cases} (E_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ este şir monoton crescător şi mărginit;} \\ \text{are } \lim\limits_{n\to\infty} E_n = e \\ e_n < E_n < e < e_n^1, \forall n \in \mathbb{N}^*; \\ E_n - e_n > \frac{1}{2n}, \forall n \in \mathbb{N}_2. \end{cases}}$

Toate formulele anterioare se păstrează pentru
•n înlocuit cu u_n ce are proprietatea $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$;
•$\frac{1}{n}$ înlocuit cu u_n ce are proprietatea $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.
$\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ înlocuit cu
$\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} (1+u_n)^{\frac{1}{u_n}} = e,}$ numai dacă $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$

Exemplul 1.3.14. Fie $x_n = (-1)^n \left(1 + \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\right)^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Se studiază dacă şirul este divergent sau convergent.
•Deoarece $\mathbb{N} = \{2k; k \in \mathbb{N}^*\} \cup \{2k+1; k \in \mathbb{N}\}$, se explicitează

$$x_n = \begin{cases} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n, & \text{dacă } n = 2k; k \in \mathbb{N}^* \\ -\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, & \text{dacă } n = 2k+1; k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

•Se trece la limită pe subşiruri:

$$\begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = \lim\limits_{k\to\infty} \left(1-\frac{1}{2k}\right)^{2k} = \lim\limits_{k\to\infty} \left(\left(1+\underbrace{\frac{-1}{2k}}_{u_k}\right)^{\frac{2k}{-1}}\right)^{(-1)} = \frac{1}{e}; \\ \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k+1} = \lim\limits_{k\to\infty} -\left(\left(1+\frac{1}{2k+1}\right)^{2k+1}\right) = -e \end{cases} \quad \overset{\mathbb{N}=\{2k;k\in\mathbb{N}^*\}\cup\{2k+1;k\in\mathbb{N}\}}{\Rightarrow}$$

mulţimea punctelor limită ale şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este $\mathcal{L}\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\right) = \left\{-e, \frac{1}{e}\right\} \Rightarrow$

$$\begin{cases} \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \liminf\limits_{n\to\infty} x_n = -e \text{ (cel mai mic punct limită)} \\ \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \limsup\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{e} \text{ (cel mai mare punct limită)} \end{cases}$$

•Deoarece $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = -e \neq \frac{1}{e} = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n \Rightarrow \nexists \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.
Deci şirul este divergent.

Exemplul 1.3.15. Se foloseşte $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n)^{y_n} = \left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right)^{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$, dacă se poate defini operaţia, şi se calculează

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3n^2-n+1}{5n^2-2}\right)^{\frac{2n^2-1}{3n}} = \left(\frac{3}{5}\right)^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2-1}{3n}} = 0;$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{5n^2-4}{4n^2-n+1}\right)^{\frac{-4n}{n^2-1}} = \left(\frac{5}{4}\right)^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-4n}{n^2-1}} = \left(\frac{5}{4}\right)^0 = 1;$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{7n^2-4}{4n^2-n+1}\right)^{\frac{n^2-1}{6n}} = \left(\frac{7}{4}\right)^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{6n}} = +\infty;$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{4n^2-5}{4n^2-n+1}\right)^{\frac{n^2-1}{n}} = 1^{+\infty}-$ nu se atribuie nici un sens, procedând ca anterior; Atunci

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{4n^2-5}{4n^2-n+1}\right)^{\frac{n^2-1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\left(\frac{4n^2-5}{4n^2-n+1}-1\right)\right)^{\frac{n^2-1}{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\left(1+\frac{n-6}{4n^2-n+1}\right)^{\frac{4n^2-n+1}{n-6}}\right)^{\frac{n^2-1}{n}\frac{n-6}{4n^2-n+1}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{n}\frac{n-6}{4n^2-n+1}}$$

$$= e^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{e}$$

Teorema 1.3.13. (**Cesaro-Stolz**) Fie $(u_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ şi $(v_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ două şiruri de numere reale. Dacă
(i) $(v_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ este monoton strict crescător şi nemajorat,
(ii) există $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}-u_n}{v_{n+1}-v_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$,
atunci există $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l$.

Observaţie a) Dacă un şir are termenul general definit printr-o sumă cu un număr de termeni depinzând de indexul de şir n, atunci nu se poate trece la limită în sumă termen cu termen. De exemplu:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}}_{3\text{ termeni}}\right)=0+0+0=0,\text{ dar}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+...+\frac{1}{n}}_{n+1\text{ termeni}}\right)=\lim_{n\to\infty}\tfrac{n+1}{n}=1.$$

b) Dacă un şir are termenul general definit printr-un produs cu un număr de factori depinzând de indexul de şir n, atunci nu se poate trece la limită în produs factor cu factor. De exemplu:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{3\text{ factori}}\right)=1\cdot 1\cdot 1=1,\text{ dar}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{n+1\text{ factori}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^{n+1}=e.$$

Exemplul 1.3.16. Să se determine, dacă există, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

Rezolvare. Se consideră

$u_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}},\forall n\in\mathbb{N}^*$ şi

$v_n=\sqrt{n},\forall n\in\mathbb{N}^*$.

(i) $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este monoton strict crescător deoarece

$v_{n+1}-v_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}>0,\forall n\in\mathbb{N}^*$

şi este nemajorat deoarece

$\sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*}v_n=\lim\limits_{n\to\infty}v_n=+\infty$.

(ii) $$\frac{u_{n+1}-u_n}{v_{n+1}-v_n}=\frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n+1}}\cdot\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{n+1-n}=1+\sqrt{\frac{n}{n+1}}$$

$\Rightarrow\exists\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}-u_n}{v_{n+1}-v_n}=2$.

Atunci, conform Teoremei Cesaro-Stolz$\Rightarrow\exists\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=2$.

Consecinţa 1.3.1. Fie $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un şir de numere reale.

Dacă $\exists\lim\limits_{n\to\infty}u_n=u\in\overline{\mathbb{R}}$, atunci $\exists\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_1+...+u_n}{n}=u$.

Demonstraţie. Se aplică Teorema Cesaro-Stolz şirurilor

$s_n=u_1+...+u_n,\forall n\in\mathbb{N}^*$ şi $y_n=n,\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Exemplul 1.3.17. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+...+\sqrt[n]{n}}{n}=1$,

deoarece $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1}$ şi se aplică Consecinţa 1.3.1.

Consecinţa 1.3.2. Fie $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un şir de numere reale strict pozitive.

Dacă $\exists \lim\limits_{n\to\infty} u_n = u \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_1 \cdot ... \cdot u_n} = u$.
Demonstraţie. Se consideră şirul

$$\ln \sqrt[n]{u_1 \cdot ... \cdot u_n} = \frac{\ln u_1 + ... + \ln u_n}{n}.$$

Se aplică Teorema Cesaro-Stolz şirurilor

$S_n = \ln u_1 + ... + \ln u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ şi

$v_n = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$

şi se obţine că $\lim\limits_{n\to\infty} \ln \sqrt[n]{u_1 \cdot ... \cdot u_n} = \ln a$, de unde rezultă concluzia.

Exemplul 1.3.18. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\ln 2 \cdot \ln 3 \cdot ... \cdot \ln(n+1)} = +\infty$,
deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} (\ln(n+1)) = +\infty$ şi se aplică Consecinţa 1.3.2.

Consecinţa 1.3.3. Fie $(u_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ un şir de numere reale strict pozitive.
Dacă $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$.
Demonstraţie. Se scrie $\sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{\frac{u_1}{1} \cdot \frac{u_2}{u_1} \cdot ... \cdot \frac{u_n}{u_{n-1}}}$.
Se aplică Consecinţa 1.3.2 şirului $z_n = \frac{u_n}{u_{n-1}}$, $\forall n \in \mathbb{N}_2$ şi se obţine rezultatul.

Exemplul 1.3.19. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} = \frac{1}{4}$.

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$

$(n+1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n \cdot (n+1) = n! \cdot (n+1)$

$(2n)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n \cdot (n+1) \cdot ... \cdot (n+n)$

$(2n+1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n \cdot (n+1) \cdot ... \cdot (n+n)(n+n+1)$

$(2n+2)! = (2n)!(2n+1)(2n+2)$

Se aplică Consecinţa 1.3.3 pentru $u_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(n+1)(n+1)}{(2n+1)(2n+2)} \Rightarrow \exists l = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{4}.$$

Se deduce că: $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} = l = \frac{1}{4}$.

LIMITE STANDARD

1°. Fie $k \in \mathbb{N}$ fixat şi $a_0, ..., a_k \in \mathbb{R}$, $a_k \neq 0$. Atunci:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(a_0 + a_1 n + ... + a_{k-1}n^{k-1} + a_k n^k\right) = (\operatorname{sgn} a_k)\cdot(+\infty).}$$

2°. Fie $k \in \mathbb{N}$ fixat şi $a_0, ..., a_k \in \mathbb{R}$, $a_k \neq 0$. Fie $p \in \mathbb{N}$ fixat şi $b_0, ..., b_p \in \mathbb{R}$, $b_p \neq 0$. Atunci:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{a_0 + a_1 n + ... + a_{k-1}n^{k-1} + a_k n^k}{b_0 + b_1 n + ... + b_{p-1}n^{p-1} + b_p n^p} = \begin{cases} \frac{a_k}{b_p}, & \text{dacă } k = p \\ 0, & \text{dacă } k < p \\ \left(\operatorname{sgn}\frac{a_k}{b_p}\right)\cdot(+\infty), & \text{dacă } k > p \end{cases}}$$

3°. $\boxed{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1}$

Fie $a \in \mathbb{R}, a > 0$ fixat. Atunci: $\boxed{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1}$

4°. $$\boxed{\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, & \text{dacă } q \in\,]-1,1[\\ 1 & \text{dacă } q = 1 \\ +\infty & \text{dacă } q \in\,]1,+\infty[\\ \nexists & \text{dacă } q \in\,]-\infty,-1] \end{cases};}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{q^n}{n} = \begin{cases} 0, & \text{dacă } q \in [-1,1] \\ +\infty, & \text{dacă } q \in\,]1,+\infty[\\ \nexists & \text{dacă } q \in\,]-\infty,-1[\end{cases};}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{q^n}{n!} = 0, \text{ dacă } q \in \mathbb{R}}$$

5°.Fie $k \in \mathbb{N}_2$ fixat. Atunci: $\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{q^n}{n^k} = +\infty, \quad \text{dacă } q \in\,]1,+\infty[}$

Fie $k \in \mathbb{N}$ fixat. Atunci: $\boxed{\lim_{n\to\infty} q^n \cdot n^k = 0, \quad \text{dacă } q \in\,]0,1[}$

Fie $k \in \mathbb{N}$ fixat. Atunci: $\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^k} = 0}$

Observaţie: Toate formulele anterioare **se păstrează** pentru
- $\bullet n$ înlocuit cu u_n ce are proprietatea $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$;
- $\bullet \frac{1}{n}$ înlocuit cu u_n ce are proprietatea $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Observaţie: Toate formulele din Teorema 5.1.12. (**limitele unor funcţii elementare**) **se păstrează** pentru
- $\bullet x$ înlocuit cu u_n ce are proprietatea $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$;
- $\bullet x$ înlocuit cu u_n ce are proprietatea $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$;
- $\bullet x$ înlocuit cu u_n ce are proprietatea $\lim_{n\to\infty} u_n = a$;

Observaţie: Toate formulele din Teorema 5.1.13. (**limitele remarcabile**) **se păstrează** pentru
- $\bullet x$ înlocuit cu u_n ce are proprietatea $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$;
- $\bullet x$ înlocuit cu u_n ce are proprietatea $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

EXEMPLE:

1°. **a)** $\lim_{n\to\infty}\left(2n^3 - 2n^2 + 1\right) = +\infty$;**b)** $\lim_{n\to\infty}\left(-2n^5 + 2n^2 + 1\right) = -\infty$;

2°. **a)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{3n-1}=\dfrac{2}{3}$;**b)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-n^3}{5n^3+2n^2+1}=\dfrac{-1}{5}$;**c)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^3}{5n^7+2n^2+1}=0$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2-n}{4n^2+1}=0$;**e)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-n^3}{2n^2+1}=-\infty$;**f)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\pi n^2}{2n+1}=+\infty$;

3°. **a)** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2}{e}}=1$; **b)** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{7}=1$.

4°. **a)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{\pi}\right)^n=0$; **b)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n2^n}{e^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{-2}{e}\right)^n=0$;**c)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{e}\right)^n=+\infty$; **d)** $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\nexists$;

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{-4}{\pi}\right)^n\nexists$;**f)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}=0$; **g)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n2^n}{e^n n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{-2}{e}\right)^n\cdot\frac{1}{n}=0$;

h) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{e}\right)^n\frac{1}{n}=+\infty$; **i)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{-4}{\pi}\right)^n\nexists$.**j)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{e^n}\frac{1}{n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{e}\right)^n\cdot\frac{1}{n!}=0$; **k)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7^n}{n!}=0$.

5°. **a)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n}{n^4}=+\infty$; **b)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4^n}{e^n n^5}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4}{e}\right)^n\cdot\frac{1}{n^5}=+\infty$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{e^n}n^3=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{e}\right)^n\cdot n^3=0$;**d)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^5}{5^n}=0$;**e)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n^3}=0$.

○Şiruri Cauchy. Criteriul Cauchy de convergenţă.

Definiţia 1.3.9. Şirul de numere reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ este *şir Cauchy* (*şir fundamental*) dacă

$[\forall\varepsilon>0,\exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}_m$ a.î. $\forall p\in\mathbb{N}^*,\forall n\in\mathbb{N}_m,n\geq n_\varepsilon$ să rezulte $|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon]$.

Teorema 1.3.14. (**Criteriul Cauchy de convergenţă a şirurilor de nr. reale, CNS**) Şirul de numere reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ este şir convergent $\Leftrightarrow$ este şir Cauchy.

Observaţia 1.3.14. Şirul de numere reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ NU este *şir Cauchy* (*şir fundamental*) dacă

$[\exists\varepsilon_0>0$ a.î. $\forall n\in\mathbb{N}_m,\exists p_n\in\mathbb{N}^*$ şi $\exists\widetilde{n}_n\in\mathbb{N}_m,\widetilde{n}_n\geq n$ să rezulte $\left|x_{\widetilde{n}_n+p_n}-x_{\widetilde{n}_n}\right|\geq\varepsilon_0]$.

Exemplul 1.3.21. Se dă şirul definit prin $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k},\forall n\in\mathbb{N}^*$. Să se tragă concluziile asupra naturii şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, utilizând Criteriul lui Cauchy şi monotonia.

Rezolvare. Şirul cu termenul general

$x_n=1+...+\frac{1}{n},\forall n\in\mathbb{N}^*$

se poate descrie

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}:\underbrace{1}_{x_1},\underbrace{1+\frac{1}{2}}_{x_2},\underbrace{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}_{x_3},...,\underbrace{1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}}_{x_n},...\ .$$

•Se verifică dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este şir Cauchy, adică dacă

$[\forall\varepsilon>0,\exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}_m$ a.î. $\forall p\in\mathbb{N}^*,\forall n\in\mathbb{N}^*,n\geq n_\varepsilon\Rightarrow|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon]$.

Fie $\forall\varepsilon>0$. Se caută $n_\varepsilon\in\mathbb{N}^*$ a.î. $\forall p\in\mathbb{N}^*,\forall n\in\mathbb{N}^*,n\geq n_\varepsilon$ să se obţină

$$|x_{n+p}-x_n|=\left|\left(1+...+\tfrac{1}{n}+\tfrac{1}{n+1}...+\tfrac{1}{n+p}\right)-\left(1+...+\tfrac{1}{n}\right)\right|=\tfrac{1}{n+1}+...+\tfrac{1}{n+p}\ \underset{\frac{1}{n+k}<\frac{1}{n+1},\forall k=\overline{2,p}}{\overset{n+k>n+1,\forall k=\overline{2,p}}{<}}$$

$$<\tfrac{1}{n+1}+...+\tfrac{1}{n+1}=\tfrac{p}{n+1}<\varepsilon,\text{ adică }\tfrac{p}{n+1}<\varepsilon\Leftrightarrow n>\tfrac{p-\varepsilon}{\varepsilon}.$$

S-a găsit $n_{p,\varepsilon}=\left[\frac{p-\varepsilon}{\varepsilon}\right]+1$. S-a găsit n depinzând nu numai de ε, ci şi de p. Nu s-a reuşit majorarea $\frac{p}{n+1}<\frac{c}{n+1}<\varepsilon$ cu c o constantă (deoarece mulţimea numerelor narurale nu este mărginită, încât $p<c,\forall p\in\mathbb{N}^*$), şi astfel nu s-a reuşit găsirea n depinzând doar de ε.

Se intuieşte că:

-sau că s-a majorat în paşii intermediari prea tare,

-sau chiar că şirul nu este şir Cauchy.

•Se verifică dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ NU este şir Cauchy, adică dacă

$[\exists\varepsilon_0>0$ a.î. $\forall n\in\mathbb{N}^*,\exists p_n\in\mathbb{N}^*$ şi $\exists\widetilde{n}_n\in\mathbb{N}^*,\widetilde{n}_n\geq n\Rightarrow\left|x_{\widetilde{n}_n+p_n}-x_{\widetilde{n}_n}\right|\geq\varepsilon_0]$.

Se caută $\varepsilon_0=$ ...astfel încât $\forall n\in\mathbb{N}^*$ să existe $p_n\in\mathbb{N}^*$ (se încearcă $p_n=n$) şi să existe $\widetilde{n}_n\in\mathbb{N}^*,\widetilde{n}_n\geq n$ (se încearcă $\widetilde{n}_n=n$) astfel încât

$|x_{n+n}-x_n| = \left|\left(1+...+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}...+\frac{1}{n+n}\right)-\left(1+...+\frac{1}{n}\right)\right| =$

$= \frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{n+n} \underset{\frac{1}{n+k}\geq\frac{1}{n+n},\forall k=\overline{1,n}}{\overset{n+k\leq n+n,\forall k=\overline{1,n}}{\geq}} \frac{1}{n+n}+...+\frac{1}{n+n} = \frac{n}{n+n} = \frac{1}{2}.$

Încercările sunt bune, se găseşte şi $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$.

$\Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ NU este şir Cauchy

$\overset{\text{Criteriul Cauchy}}{\Rightarrow} (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ NU este şir convergent, este divergent.

•Dar $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este şir de numere pozitive, monoton crescător

$x_{n+1}-x_n = \left(1+...+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)-\left(1+...+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} > 0, \forall n\in\mathbb{N}^*.$

• $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ fiind şir monoton strict crescător şi divergent$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Exemplul 1.3.22. Să se utilizeze Criteriul lui Cauchy de convergenţă a şirurilor reale pentru studiul convergenţei şirului $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Rezolvare.$x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}, \forall n\in\mathbb{N}^*$. Şirul cu termenul general

$x_n = \frac{1}{1^2}+...+\frac{1}{n^2}, \forall n\in\mathbb{N}^*$

se poate da şi prin enumerare

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} : \underbrace{\frac{1}{1^2}}_{x_1}, \underbrace{\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}_{x_2}, \underbrace{\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}_{x_3}, ..., \underbrace{\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{n^2}}_{x_n}, ...$$

•Se verifică dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este şir Cauchy, adică dacă

$[\forall\varepsilon>0, \exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}^*$ a.î. $\forall p\in\mathbb{N}^*, \forall n\in\mathbb{N}^*, n\geq n_\varepsilon$ să rezulte $|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon]$.

Fie $\forall\varepsilon>0$. Căutăm $n_\varepsilon\in\mathbb{N}^*$ a.î. $\forall p\in\mathbb{N}^*, \forall n\in\mathbb{N}^*, n\geq n_\varepsilon$ să rezulte

$|x_{n+p}-x_n| = \left|\left(\frac{1}{1^2}+...+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}...+\frac{1}{(n+p)^2}\right)-\left(\frac{1}{1^2}+...+\frac{1}{n^2}\right)\right| = \frac{1}{(n+1)^2}...+\frac{1}{(n+p)^2}$

Dacăse majorează în sensul

$\underset{\frac{1}{n+k}<\frac{1}{n+1},\forall k=\overline{2,p}}{\overset{n+k>n+1,\forall k=\overline{2,p}}{<}} \frac{1}{(n+1)^2}+...\frac{1}{(n+1)^2} = \frac{p}{(n+1)^2} < \varepsilon;$

atunci, din $\frac{p}{(n+1)^2}<\varepsilon$ se va găsi $n_{\varepsilon,p}$ şi nu n_ε. Se intuieşte că sau că s-a majorat în paşii intermediari prea tare, sau chiar că şirul nu este şir Cauchy.

Se încearcă să se majoreze în sensul următor (încât să se obţină sumă telescopică)

$\frac{1}{(n+1)^2}...+\frac{1}{(n+p)^2} \underset{\frac{1}{n+k}<\frac{1}{n+k-1},\forall k=\overline{1,p}}{\overset{n+k>n+k-1,\forall k=\overline{1,p}}{<}} \frac{1}{n(n+1)}...+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)} = \sum\limits_{k=1}^{p}\frac{1}{(n+k-1)(n+k)} =$

$= \sum\limits_{k=1}^{p}\left(\frac{1}{n+k-1}-\frac{1}{n+k}\right) \underset{\text{cu sume finite}}{\overset{\text{operaţii algebrice}}{=}} \sum\limits_{k=1}^{p}\frac{1}{n+k-1} - \sum\limits_{k=1}^{p}\frac{1}{n+k} =$

$= \left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{n+p-1}\right)-\left(\frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{n+p-1}+\frac{1}{n+p}\right) =$

$= \frac{1}{n}-\frac{1}{n+p} \overset{\text{scăpăm de } p, \text{ rămâne } n}{<} \frac{1}{n}<\varepsilon$,adică $\frac{1}{n}<\varepsilon \Leftrightarrow n>\frac{1}{\varepsilon}$.

Se găseşte $n_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1 \Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este şir Cauchy

$\overset{\text{Criteriul Cauchy}}{\Rightarrow} (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este şir convergent.

Observaţia 1.3.16. Şirul $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}, \forall n\in\mathbb{N}^*$ are proprietatea că

$$\begin{cases} \text{dacă } \alpha > 1, \text{ atunci este şir Cauchy} \Longrightarrow \text{este şir convergent} \\ \text{dacă } \alpha \leq 1, \text{ atunci nu este şir Cauchy} \Longrightarrow \\ \qquad \left.\begin{array}{l} \Rightarrow \text{este şir divergent} \\ \text{este monoton crescător} \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty. \end{cases}$$

Exemplul 1.3.23. Pentru şirul definit prin

$x_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{\sin^2(k+1)}{3^k}, \forall n \in \mathbb{N}$

să se studieze convergenţa cu Criteriul lui Cauchy.

Rezolvare. Şirul cu termenul general

$x_n = \frac{\sin^2 1}{3^0} + \frac{\sin^2 2}{3^1} + ... + \frac{\sin^2(n+1)}{3^n}, \forall n \in \mathbb{N}$

se poate da şi prin enumerare

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \underbrace{\frac{\sin^2 1}{3^0}}_{x_1}, \underbrace{\frac{\sin^2 1}{3^0} + \frac{\sin^2 2}{3^1}}_{x_2}, ... \,.$$

• $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este şir de numere pozitive, monoton crescător

$$x_{n+1} - x_n = \left(\frac{\sin^2 1}{3^0} + \frac{\sin^2 2}{3^1} + ... + \frac{\sin^2(n+1)}{3^n} + \frac{\sin^2(n+2)}{3^{n+1}}\right) -$$
$$- \left(\frac{\sin^2 1}{3^0} + \frac{\sin^2 2}{3^1} + ... + \frac{\sin^2(n+1)}{3^n}\right) = \frac{\sin^2(n+2)}{3^{n+1}} > 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

•Mărginirea sau chiar limita acestui şir sunt greoi de studiat, deoarece termenul sau general al acestui şir se exprimă greoi fără simbolul $\sum$

•Se verifică dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este şir Cauchy, adică dacă

$\forall\varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_\varepsilon$ să rezulte $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$.

Fie $\forall\varepsilon > 0$. Căutăm $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_\varepsilon$ să rezulte

$$|x_{n+p} - x_n| =$$
$$= \left|\left(\frac{\sin^2 1}{3^0} + \frac{\sin^2 2}{3^1} + ... + \frac{\sin^2(n+1)}{3^n} + \frac{\sin^2(n+2)}{3^{n+1}} ... + \frac{\sin^2(n+p+1)}{3^{n+p}}\right) - \left(\frac{\sin^2 1}{3^0} + \frac{\sin^2 2}{3^1} + ... + \frac{\sin^2(n+1)}{3^n}\right)\right| \leq$$
$$\leq \left|\frac{\sin^2(n+2)}{3^{n+1}}\right| ... + \left|\frac{\sin^2(n+p+1)}{3^{n+p}}\right| \leq \frac{1}{3^{n+1}} + ... + \frac{1}{3^{n+p}} = \frac{1}{3^{n+1}} \cdot \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^p - 1}{\frac{1}{3} - 1}$$
$$= \frac{1}{2\cdot 3^n}\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^p\right] \overset{\text{scăpăm de } p, \text{ rămâne } n}{<} \frac{1}{2\cdot 3^n} \cdot 1 < \frac{1}{3^n} < \varepsilon,$$

adică $\frac{1}{3^n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln 3}$.

Se găseşte $n_\varepsilon = \left[\frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln 3}\right] + 1. \Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este şir Cauchy

$\overset{\text{Criteriul Cauchy}}{\Rightarrow} (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este şir convergent.