

CURS NR. 3

Analiză matematică, AIA

1.4. Serii de numere reale

Peste tot în această secțiune fie $m \in \mathbb{N}$ un număr natural fixat și $\mathbb{N}_m = \{m, m+1, \dots, n, \dots\}$ ($\mathbb{N}_0 = \mathbb{N}$ și $\mathbb{N}_1 = \mathbb{N}^*$).

Definiția 1.4.1. Fie

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m} : x_m, x_{m+1}, \dots, x_n, \dots$$

un șir de numere reale. Acestui șir i se atașează *șirul sumelor parțiale*

$$(s_n)_{n \in \mathbb{N}_m} : \underbrace{x_m}_{s_m}, \underbrace{x_m + x_{m+1}}_{s_{m+1}}, \dots, \underbrace{x_m + x_{m+1} + \dots + x_n}_{s_n}, \dots$$

cu termenul general

$$s_n = \sum_{k=m}^n x_k, \forall n \in \mathbb{N}_m.$$

a) Se numește *serie de numere reale*, cu termenul general x_n , perechea de șiruri $((x_n)_{n \in \mathbb{N}_m}, (s_n)_{n \in \mathbb{N}_m})$.

b) Seria de numere reale cu termenul general x_n se numește *convergentă* dacă șirul sumelor parțiale $(s_n)_{n \in \mathbb{N}_m}$ este convergent și *divergentă* dacă șirul sumelor parțiale $(s_n)_{n \in \mathbb{N}_m}$ este divergent.

c) Seria de numere reale cu termenul general x_n are *suma* s dacă $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s \in \overline{\mathbb{R}}$. În acest caz se scrie

$$x_m + x_{m+1} + \dots + x_n + \dots = s \text{ sau } \sum_{n=m}^{\infty} x_n = s.$$

Convenție. Se notează seria de numere reale cu termenul general x_n cu $\sum_{n=m}^{\infty} x_n$.

Exemplul 1.4.1. Să se studieze, utilizând definiția, natura și suma următoarelor serii de numere reale:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$;

Termenul general al seriei este:

$$x_n = \frac{1}{2^n}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ adică}$$

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} : \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \underbrace{\frac{1}{2^n}}_{x_n}, \dots$$

Șirul sumelor parțiale are termenul general:

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ adică}$$

$$(s_n)_{n \in \mathbb{N}^*} : \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{4}, \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}, \dots, \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n}}_{s_n}, \dots$$

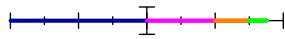
Se determină limita șirului $(s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, dacă există:

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow$$

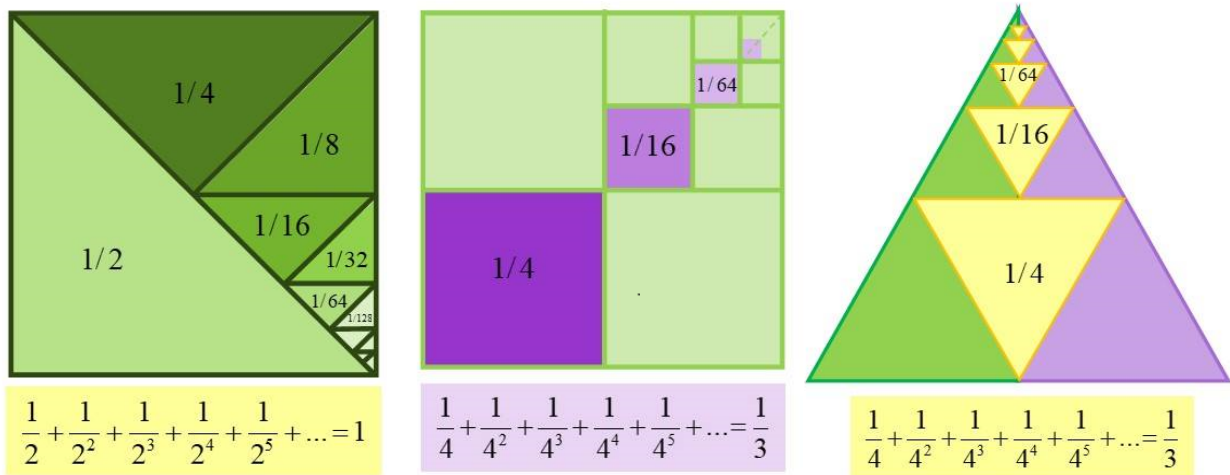
$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 1 \in \mathbb{R}.$$

Atunci seria este convergentă și are suma $s = 1$. Se scrie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1, \text{ adică } \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = 1.$$



A se urmări documentarul în patru părți "Istoria Matematicii", produs de BBC, comentat de **Marcus du Sautoy**, profesor de matematică la Universitatea Oxford din Marea Britanie. Acolo distanța unitate este parcursă de un matematician indian din Kerala cu barca, întâi jumătate, apoi jumătate din jumătate ș.a.m.d. Pe unele platforme de matematică distractivă apar și interpretări ale sumelor de serii legate de arii.



Inițiator în teoria seriilor ar fi fost matematicianul grec Arhimede, care a calculat aria subgraficului unui arc de parabolă prin însumarea unei serii infinite (astăzi integrala) și care a dat o aproximare remarcabilă pentru π . Matematicienii indieni din Kerala au studiat seriile infinite, în jurul anului 1350. Începând din secolul al XVII-lea, James Gregory, Brook Taylor și Leonhard Euler au dezvoltat teoria.

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$;

Termenul general al seriei este

$$x_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}, \forall n \in \mathbb{N}, \text{ adică}$$

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} : \frac{1}{1 \cdot 2}, \frac{1}{2 \cdot 3}, \frac{1}{3 \cdot 4}, \dots, \underbrace{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}_{x_n}, \dots$$

Șirul sumelor parțiale are termenul general:

$$s_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)(k+2)}, \forall n \in \mathbb{N}, \text{ adică}$$

$$(s_n)_{n \in \mathbb{N}} : \frac{1}{1 \cdot 2}, \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3}, \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4}, \dots, \underbrace{\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)}}_{s_n}, \dots$$

Se determină limita șirului $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$, dacă există:

$$s_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) \begin{array}{l} \text{operații algebrice} \\ \text{cu sume finite} \end{array} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+2} =$$

$$= \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n+1} \right) - \left(\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) = 1 - \frac{1}{n+2} \Rightarrow$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 1 \in \mathbb{R}.$$

Atunci seria este convergentă și are suma $s = 1$. Se scrie

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 1}, \text{ adică } \boxed{\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots = 1}.$$

Comentariu. Conform c), se observă că:

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}}_{(C),=1} \neq \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}}_{(D),=\infty} - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+2}}_{(D),=\infty}$$

Operațiile algebrice cu serii sunt precizate în Teorema 1.4.1 și posibil de efectuat între serii convergente sau care au sume pentru care, în urma adunării, conduc la determinare.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n};$

Termenul general al seriei este:

$$x_n = \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ adică}$$

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} : \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \underbrace{\frac{1}{n}}_{x_n}, \dots$$

Șirul sumelor parțiale are termenul general:

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ adică}$$

$$(s_n)_{n \in \mathbb{N}^*} : \frac{1}{1}, \frac{1}{1} + \frac{1}{2}, \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \dots, \underbrace{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}}_{s_n}, \dots$$

Se determină limita șirului $(s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. La "Șiruri Cauchy" s-a demonstrat că șirul $(s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ nu este șir Cauchy, deci este divergent. Deoarece este strict crescător \Rightarrow

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty \Rightarrow$$

seria este divergentă și are suma $s = \infty$. Se scrie

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty}, \text{ adică } \boxed{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = \infty}.$$

Seria se numește *serie armonică*, deoarece fiecare termen, începând cu al doilea, este media armonică a termenilor vecini.



Curiozitate amuzantă: "Un matematician organizează o loterie în care câștigul este o sumă infinită de bani. Precizează că metoda de ridicare a câștigului de către "fericit" este: 1€ în prima

săptămână de la câștig, $\frac{1}{2}$ € în a doua săptămână, $\frac{1}{3}$ € în a treia săptămână ș.a.m.d. Câștigătorul nu va trăi mai mult de încă 100 de ani, adică 5200 de săptămâni, adică va ridica doar 5200€,

$\sum_{n=1}^{5200} \frac{1}{n} = 9.1337$ € și nu un câștig infinit! Matematicianul este cel care câștigă în urma organizării loteriei!"

$$\sum_{n=1}^{5200} \frac{1}{n} = 9.1337 \text{ și } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty \text{ cu Scientific WorkPlace}$$

S-ar putea raționa că suma seriei armonice ar fi un număr finit, deoarece, pe măsură ce se adaugă din ce în ce mai mulți termeni, se adaugă din ce în ce mai puțin la total. Și printr-un program implementat pe un anumit calculator s-ar putea obține o sumă finită. Calculatoarele mai vechi gestionau numere până la o anumită dimensiune, 10^{100} , și considerau $\frac{1}{10^{100}+1} \simeq 0$. Un astfel

de calculator spunea că suma seriei armonice ar fi $\sum_{n=1}^{10^{100}} \frac{1}{n} = 230.84$, dacă programul era lăsat să

ruleze suficient de mult. Cu toate acestea, seria armonică diverge- suma crește fără a fi mărginită, rezultat demonstrat în urmă cu 600 de ani de un matematician francez medieval, Nichole Oresme. Din acest motiv, în aproximarea sumelor de serii numerice folosind programe pe calculator, se studiază întâi convergența seriei (folosind criterii, de exemplu), apoi se rulează programul. Astăzi,

programe-interfețe precum Scientific WorkPlace afișează $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ instantaneu.

Numele provine de la greci. Pitagora a studiat notele emise de corzi ciupite (analog clape) la diferite lungimi. A constatat armonie în legătură cu notele emise la lungimile $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ care sunt în medie armonică $\frac{2}{\frac{1}{1} + \frac{1}{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{2}$. Aceste note sunt fundamentale pentru teoria pitagoreică a armoniei, legată de lungimile de coardă, de cvinta perfectă și de octave. Tot Pitagora a denumit cubul cu 6 vârfuri, 8 fețe și 12 muchii, precum și octaedrul cu 6 fețe, 8 vârfuri și 12 muchii "corpuri armonice", deoarece $\frac{2}{\frac{1}{6} + \frac{1}{12}} = 8$.

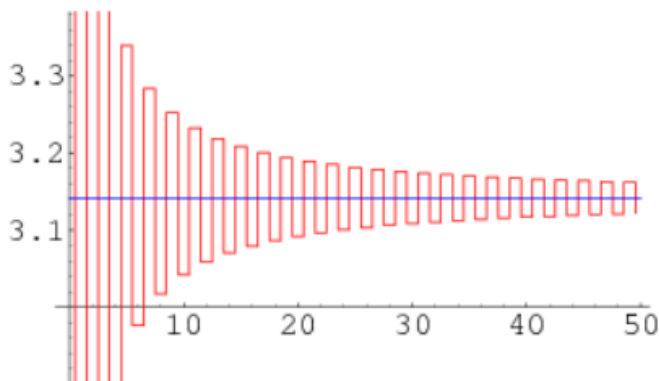
Seria armonică este cea care este utilizată și pentru a răspunde câte căderi record de ploaie au avut loc în ultimii 100 de ani, de când sunt înregistrări meteorologice; și în studiul blocajelor în trafic; și în testarea rezistenței la ruperea grinzilor de lemn; și în amestecarea aleatoare a cărților de joc într-un cazino sau într-un joc pe calculator; și în transferul de combustibil de la un jeep la altul pentru a traversa deșertul. A se vedea "In perfect harmony", de John H. Webb, pe

<https://plus.maths.org/content/perfect-harmony>

Unele serii armonice generalizate sau alternante generalizate au sume finite. Gregory și Taylor au arătat că

$$4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \pi. \quad (\text{utilizată pentru scrierea numărului } \pi \text{ cu un număr mare de zecimale})$$

exacte înainte de era calculatorului; a se vedea și <https://ro.wikipedia.org/wiki/Pi>



Sunt și alte serii armonice cu sume finite

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \text{și} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2,}$$

ale căror sume se vor descoperi folosind serii Fourier, respectiv serii Taylor.

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n};$

Termenul general al seriei este:

$$x_n = \ln \frac{n+1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Șirul sumelor parțiale are termenul general:

$$s_n = \sum_{k=1}^n \ln \frac{k+1}{k}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Se determină limita șirului $(s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, dacă există:

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^n \ln \frac{k+1}{k} = \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln(k)) \stackrel{\substack{\text{operații algebrice} \\ \text{cu sume finite}}}{=} \sum_{k=1}^n \ln(k+1) - \sum_{k=1}^n \ln(k) = \\ &= (\ln 2 + \dots + \ln n + \ln(n+1)) - (\ln 1 + \ln 2 + \dots + \ln n) = \ln(n+1) - \ln 1 \Rightarrow \\ \lim_{n \rightarrow \infty} s_n &= +\infty. \end{aligned}$$

Atunci seria este divergentă și are suma $s = +\infty$. Se scrie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n} = +\infty.$$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n;$

Termenul general al seriei este:

$$x_n = (-1)^n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Șirul sumelor parțiale are termenul general:

$$s_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Se determină limita șirului $(s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, dacă există:

$$s_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k = \begin{cases} 0, & \text{dacă } n = 2\tilde{k}; \tilde{k} \in \mathbb{N}^* \\ -1, & \text{dacă } n = 2\tilde{k} + 1; \tilde{k} \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\nexists \lim_{n \rightarrow \infty} s_n.$$

Atunci seria este divergentă și nu are sumă.

Seria geometrică. Fie $q \in \mathbb{R}$. Seria geometrică $\sum_{n=m}^{\infty} q^n$ este

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{convergentă, cu suma } s = q^m \frac{1}{1-q}, & \text{dacă } q \in]-1, 1[\\ \text{divergentă, cu suma } s = +\infty, & \text{dacă } q \in [1, +\infty[\\ \text{divergentă și nu are sumă,} & \text{dacă } q \in]-\infty, -1]. \end{array} \right.$$

Pentru $m = 0$, convenția este să se noteze $1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^n$, adică

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \text{ dacă } q \in]-1, 1[\text{ sau } 1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots = \frac{1}{1-q}, \text{ dacă } q \in]-1, 1[$$

Demonstrație. Fie $q \in \mathbb{R}$.

Termenul general al seriei este

$$x_n = q^n, \forall n \in \mathbb{N}_m, \text{ adică } (x_n)_{n \in \mathbb{N}_m} : q^m, q^{m+1}, \dots, \underbrace{q^n}_{x_n}, \dots$$

Șirul sumelor parțiale are termenul general

$$s_n = \sum_{k=m}^n q^k, \forall n \in \mathbb{N}_m, \text{ adică } (s_n)_{n \in \mathbb{N}_m} : q^m, q^m + q^{m+1}, q^m + q^{m+1}, \dots, \underbrace{q^m + q^{m+1} + \dots + q^n}_{s_n}, \dots$$

Se determină limita șirului $(s_n)_{n \in \mathbb{N}_m}$, dacă există

$$s_n = \sum_{k=m}^n q^k = \begin{cases} q^m \frac{q^{n-m+1} - 1}{q - 1}, & \text{dacă } q \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ n - m + 1, & \text{dacă } q = 1. \end{cases}$$

Deoarece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} 0, & \text{dacă } q \in]-1, 1[\\ 1 & \text{dacă } q = 1 \\ +\infty & \text{dacă } q \in [1, +\infty[\\ \nexists & \text{dacă } q \in]-\infty, -1] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{dacă } q \in]-1, 1[, \text{ atunci } \exists \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = q^m \frac{1}{1-q} \\ \text{dacă } q = 1, \text{ atunci } \exists \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty \\ \text{dacă } q \in [1, +\infty[, \text{ atunci } \exists \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty \\ \text{dacă } q \in]-\infty, -1], \text{ atunci } \nexists \lim_{n \rightarrow \infty} s_n. \end{cases}$$

Exemple. $q = -\frac{1}{2}, m = 0$. Seria geometrică $1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-\frac{1}{2})^n$ este (C) și

$$1 + \frac{-1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^n}{2^n} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{-1}{2}}.$$

$q = \frac{\pi}{2}, m = 0$. Seria geometrică $1 + \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{\pi}{2})^n$ este (D) și

$$1 + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{4} + \dots + \frac{\pi^n}{2^n} + \dots = +\infty.$$

$q = -\sqrt{2}, m = 0$. Seria geometrică $1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-\sqrt{2})^n$ este (D) și nu are sumă.

Exemple. Folosind seria geometrică, să se scrie $0,0(2)$ ca fracție.

Se observă că

$$0,0(2) = 0,02 + 0,002 + 0,0002 + \dots, \underbrace{00\dots0}_n 2 + \dots,$$

adică se poate scrie ca suma unei serii geometrice cu rația $q = 0,1$ și primul termen $x_1 = 0,02$.
Atunci

$$0,0(2) = 0,02 \cdot \frac{1}{1-0,1} = \frac{2}{90}.$$

Teorema 1.4.1. (operații algebrice cu serii convergente) Fie $\sum_{n=m}^{\infty} x_n$ și $\sum_{n=m}^{\infty} y_n$ două serii de numere reale și $\alpha \in \mathbb{R}$. Dacă seriile $\sum_{n=m}^{\infty} x_n$ și $\sum_{n=m}^{\infty} y_n$ sunt convergente atunci seriile $\sum_{n=m}^{\infty} (x_n + y_n)$

și $\sum_{n=m}^{\infty} \alpha(x_n)$ sunt convergente. În acest caz

$$\sum_{n=m}^{\infty} (x_n + y_n) = \sum_{n=m}^{\infty} x_n + \sum_{n=m}^{\infty} y_n \text{ și } \sum_{n=m}^{\infty} \alpha(x_n) = \alpha \sum_{n=m}^{\infty} x_n.$$

Propoziția 1.4.1. Dacă se schimbă ordinea unui număr finit de termeni ai unei serii de numere reale, atunci se obține o nouă serie de numere reale, care are aceeași natură (convergentă sau divergentă) cu seria inițială. În caz de convergență, suma noii serii este egală cu suma seriei inițiale.

Dacă se schimbă ordinea unui număr infinit de termeni, rezultatul anterior nu se mai păstrează.

Propoziția 1.4.2. Dacă se adăugă / se suprimă un număr finit de termeni ai unei serii de numere reale, atunci se obține o nouă serie de numere reale, care are aceeași natură (convergentă sau divergentă) cu seria inițială. În caz de convergență, suma noii serii este egală cu suma seriei inițiale la care se adună / se scade suma termenilor adăugați / suprimați.

Observația 1.4.1. Există serii pentru care șirul sumelor parțiale nu poate fi exprimat fără simbolul \sum sau pentru care $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ nu poate fi determinată prin metode elementare. Se va studia natura acestor serii utilizând criterii (criteriile oferă natura, dar nu și suma seriei).

○ **Teorema 1.4.2. (Criteriul general CNS al lui Cauchy pentru serii).** Seria de numere reale

$\sum_{n=m}^{\infty} x_n$ este convergentă dacă și numai dacă

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}_m \text{ astfel încât } \forall p \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}_m, n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |x_{n+1} + \dots + x_{n+p}| < \varepsilon.$$

Teorema 1.4.3.

a) **CN de convergență.** Dacă seria de numere reale $\sum_{n=m}^{\infty} x_n$ este convergentă, atunci $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Reciproc nu.

b) **CS de divergență.** Dacă $\nexists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ sau $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq 0$, atunci seria de numere reale $\sum_{n=m}^{\infty} x_n$ este divergentă. Reciproc nu.

Observația 1.4.2. La Exemplul 1.4.1, punctul c) cu $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n}$ se observă că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, dar seria este divergentă. Condiția $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ este numai condiție necesară de convergență, nu și suficientă.

Exemplul 1.4.2. Să se studieze natura seriei

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + (-1)^n}{2};$

Termenul general al seriei este:

$$x_n = \frac{1+(-1)^n}{2}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$x_n = \begin{cases} 1, & \text{dacă } n = 2\tilde{k}; \tilde{k} \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{dacă } n = 2\tilde{k} + 1; \tilde{k} \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Cum $\nexists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n (\neq 0)$ ^{CS de divergență} \Rightarrow seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{2}$ este divergentă.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \pi^n \cdot \frac{1}{e^n + 1};$

Termenul general al seriei este:

$$x_n = \pi^n \cdot \frac{1}{e^n + 1}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Șirul sumelor parțiale este:

$$s_n = \sum_{k=1}^n \pi^k \cdot \frac{1}{e^k + 1}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Nu se poate exprima s_n fără simbolul $\sum \Rightarrow$ nu se va aplica definiția în studiul convergenței seriei.

Cum $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi^n \cdot \frac{1}{e^n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{e}\right)^n \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{e^n}} = +\infty \neq 0$ ^{CS de divergență} \Rightarrow

seria $\sum_{n=1}^{\infty} \pi^n \cdot \frac{1}{e^n + 1}$ este divergentă.

Definiția 1.4.2. Seria de numere reale $\sum_{n=m}^{\infty} x_n$ se numește *serie cu termeni pozitivi* (cu termeni strict pozitivi) dacă

$$x_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}_m (x_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}_m).$$

Definiția 1.4.3. Seria de numere reale $\sum_{n=m}^{\infty} x_n$ se numește *absolut convergentă* dacă seria $\sum_{n=m}^{\infty} |x_n|$ este convergentă.

Teorema 1.4.4. Dacă seria de numere reale $\sum_{n=m}^{\infty} x_n$ este absolut convergentă atunci este convergentă.

Definiția 1.4.4. Seria de numere reale $\sum_{n=m}^{\infty} x_n$ se numește *semiconvergentă* dacă este convergentă și nu este absolut convergentă.

Observația 1.4.3. Se vor enunța criteriile pentru serii cu termeni pozitivi (chiar strict pozitivi).

Dacă o serie de numere reale $\sum_{n=m}^{\infty} x_n$ este cu termeni oarecare, atunci se atașează seria modulelor

$\sum_{n=m}^{\infty} |x_n|$, care este o serie cu termeni pozitivi. Se aplică criteriile seriei $\sum_{n=m}^{\infty} |x_n|$, și, în caz că se

obține convergență, se deduce că seria cu termeni oarecare $\sum_{n=m}^{\infty} x_n$ este absolut convergentă.

○**Teorema 1.4.4. (Criteriul monotoniei, CNS).** Fie seria de numere reale $\sum_{n=m}^{\infty} x_n$ cu termeni pozitivi, $x_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}_m$. Seria este convergentă dacă și numai dacă șirul sumelor parțiale $(s_n)_{n \in \mathbb{N}_m}$ este mărginit superior (de menționat că dacă seria este cu termeni pozitivi, atunci șirul sumelor parțiale este un șir cu

termeni pozitivi și monoton crescător).

Teorema 1.4.5. (Criteriul comparației cu inegalități, CS). Fie seriile de numere reale

$$\sum_{n=m}^{\infty} x_n \text{ și } \sum_{n=m}^{\infty} y_n, \text{ cu termeni pozitivi.}$$

a) Dacă

$$\underbrace{0 \leq x_n \leq y_n, \forall n \in \mathbb{N}_m,}_{\text{în plus}}$$

și dacă seria $\sum_{n=m}^{\infty} y_n$ este convergentă, atunci seria $\sum_{n=m}^{\infty} x_n$ este convergentă.

b) Dacă

$$0 \leq y_n \leq x_n, \forall n \in \mathbb{N}_m$$

și dacă seria $\sum_{n=m}^{\infty} y_n$ este divergentă, atunci seria $\sum_{n=m}^{\infty} x_n$ este divergentă.

○ **Teorema 1.4.5'. (Criteriul comparației cu raport, CS).** Fie seriile de numere reale $\sum_{n=m}^{\infty} x_n$ și

$$\sum_{n=m}^{\infty} y_n, \text{ cu termeni strict pozitivi.}$$

a) Dacă

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \frac{y_{n+1}}{y_n}, \forall n \in \mathbb{N}_m,$$

și dacă seria $\sum_{n=m}^{\infty} y_n$ este convergentă atunci seria $\sum_{n=m}^{\infty} x_n$ este convergentă.

b) Dacă

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} \geq \frac{x_{n+1}}{x_n}, \forall n \in \mathbb{N}_m$$

și dacă seria $\sum_{n=m}^{\infty} y_n$ este divergentă atunci seria $\sum_{n=m}^{\infty} x_n$ este divergentă.

Seria armonică generalizată. Fie $\alpha \in \mathbb{R}$. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ este divergentă dacă $\alpha \leq 1$ și convergentă

(chiar absolut convergentă) dacă $\alpha > 1$.

○ **Demonstrație.** Fie $\alpha \in \mathbb{R}$. Termenul general al seriei este

$$x_n = \frac{1}{n^\alpha}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Șirul sumelor parțiale are termenul general

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Nu se poate exprima s_n fără simbolul $\sum \Rightarrow$ nu se va aplica definiția în studiul convergenței seriei.

$$\bullet \text{Cum } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} +\infty, & \text{dacă } \alpha < 0, \\ 0, & \text{dacă } \alpha > 0, \\ 1, & \text{dacă } \alpha = 0. \end{cases}$$

CS de divergență \Rightarrow Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ este divergentă pentru $\alpha \leq 0$.

• Rămâne să se studieze natura seriei pentru $\alpha > 0$.

–Pentru $\boxed{\alpha = 1}$ **seria armonică** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă deoarece șirul sumelor parțiale este divergent

(a se vedea Exemplul 1.4.1, c)) sau direct, cu Criteriul Cauchy de la serii.

–Pentru $\boxed{0 < \alpha < 1} \Rightarrow n^\alpha < n, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \frac{1}{n^\alpha} > \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Se aplică criteriul comparației cu seria

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ și rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ este divergentă.

–Pentru $\boxed{\alpha > 1}$, se utilizează că

•Șirul $(s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este șir monoton crescător, deoarece

$$s_{n+1} - s_n = \frac{1}{(n+1)^\alpha} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*. \text{ Atunci } s_n \leq s_{2^n}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

•Se arată că șirul $(s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este șir mărginit. Într-adevăr

$$\begin{aligned} 0 < s_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \leq s_{2^n} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \underbrace{\left(\frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} \right)}_{2 \text{ termeni}} + \\ &+ \underbrace{\left(\frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha} + \frac{1}{8^\alpha} \right)}_{2^2 \text{ termeni}} + \dots + \underbrace{\left(\frac{1}{(2^{n-1}+1)^\alpha} + \dots + \frac{1}{(2^{n-1}+2^{n-1})^\alpha} \right)}_{2^{n-1} \text{ termeni}} < \\ &< 1 + \frac{1}{2^\alpha} + 2 \cdot \frac{1}{2^\alpha} + 4 \cdot \frac{1}{4^\alpha} + \dots + 2^{n-1} \cdot \frac{1}{(2^{n-1})^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \frac{1}{(2^2)^{\alpha-1}} + \dots + \frac{1}{(2^{n-1})^{\alpha-1}} = \\ &= 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}} + \frac{1}{(2^{\alpha-1})^2} + \dots + \frac{1}{(2^{\alpha-1})^{n-1}} \right) = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{2^{\alpha-1}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{(2^{\alpha-1})^{n-1}}}{1 - \frac{1}{2^{\alpha-1}}} < \\ &< 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{2^{\alpha-1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{\alpha-1}}}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

\Rightarrow șirul $(s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este mărginit.

•Deoarece șirul $(s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este monoton crescător și mărginit, rezultă că este convergent \Rightarrow pentru

$\alpha > 1$, seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ este convergentă.

Exemple. Fie $\alpha = 1$. Seria armonică

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} / 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots \text{este } (D).$$

Fie $\alpha = -\frac{3}{2}$. Seria armonică generalizată

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\sqrt{n} / 1 + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3} + \dots + n\sqrt{n} + \dots \text{este } (D).$$

Fie $\alpha = \frac{1}{2}$. Seria armonică generalizată

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} / 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots \text{este } (D).$$

Fie $\alpha = \frac{3}{2}$. Seria armonică generalizată

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} / 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{n\sqrt{n}} + \dots \text{este } (AC).$$

Fie $\alpha = 2$. Seria armonică generalizată

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} / 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots \text{este } (AC).$$

Exemplul 1.4.3. Să se studieze natura următoarelor serii de numere reale

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+n^2+n+1};$$

Etapa 1. Se studiază dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Termenul general al seriei este

$$x_n = \frac{1}{n^3+n^2+n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \Rightarrow$ seria *poate fi* convergentă.

Etapa 2. Se studiază natura și suma seriei cu definiția.

Șirul sumelor parțiale este

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3+k^2+k+1}, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$$

Nu se va aplica definiția în studiul convergenței seriei.

Etapa 3. Se studiază natura seriei aplicând criteriul.

• Criteriul comparației cu inegalități. Deoarece șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ are termeni pozitivi și

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq \frac{1}{n^3+n^2+n+1} \leq \frac{1}{n^3}, \forall n \in \mathbb{N}^*. \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \text{ este serie convergentă} \\ \text{ca și serie armonică cu } \alpha = 7 > 1 \end{array} \right\} \text{C. comparației } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+n^2+n+1} \text{ este serie convergentă.}$$

$$\text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \sqrt{n+1}};$$

Etapa 1. Se studiază dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Termenul general al seriei este

$$x_n = \frac{1}{2^n \sqrt{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \Rightarrow$ seria *poate fi* convergentă.

Etapa 2. Se studiază natura seriei și suma ei cu definiția. Șirul sumelor parțiale este

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k \sqrt{k+1}}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Nu se va aplica definiția în studiul convergenței seriei.

Etapa 3. Se studiază natura seriei aplicând criteriul.

○ modul 1. Criteriul Cauchy pentru serii. Se verifică dacă

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^* \text{ astfel încât } \forall p \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |x_{n+1} + \dots + x_{n+p}| < \varepsilon.$$

$$\text{Fie } \forall \varepsilon > 0. \text{ Se caută } n_\varepsilon \in \mathbb{N}^* \text{ astfel încât } \forall p \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq n_\varepsilon \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} |x_{n+1} + \dots + x_{n+p}| &= \left| \frac{1}{2^{n+1} \sqrt{n+2}} + \dots + \frac{1}{2^{n+p} \sqrt{n+p+1}} \right| = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \dots + \frac{1}{2^{n+p}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n+p+1}} \leq \\ &\leq \frac{1}{2^{n+1}} \cdot 1 + \dots + \frac{1}{2^{n+p}} \cdot 1 = \frac{1}{2^{n+1}} + \dots + \frac{1}{2^{n+p}} = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{(\frac{1}{2})^{p-1}}{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2^n} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^p\right) < \end{aligned}$$

$$\text{scăpăm de } p, \text{ rămâne } n < \frac{1}{2^n} \cdot 1 < \varepsilon,$$

$$\text{adică } \frac{1}{2^n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln \frac{1}{2}}. \text{ Se găsește } n_\varepsilon = \left[\frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln \frac{1}{2}} \right] + 1.$$

$$\Rightarrow \text{este verificat Criteriul Cauchy} \Rightarrow \text{seria } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \sqrt{n+1}} \text{ este convergentă.}$$

modul 2. Criteriul comparației cu inegalități. Deoarece șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ are termeni pozitivi,

Se încearcă:

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq \frac{1}{2^n \sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n}}, \forall n \in \mathbb{N}^* \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ este serie divergentă} \\ \text{ca și serie armonică cu } \alpha = \frac{1}{2}. \end{array} \right\} \text{C. comparației} \Rightarrow \text{nu se poate afirma dacă seria este convergentă sau divergentă.}$$

Se încearcă:

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq \frac{1}{2^n \sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{2^n}, \forall n \in \mathbb{N}^* \\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ este serie convergentă} \\ \text{ca și serie geometrică cu } q = \frac{1}{2} \in]-1, 1[\end{array} \right\} \text{C. comparației} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \sqrt{n+1}} \text{ este serie convergentă.}$$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} \cos n^n;$

Etapa 1. Se studiază dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Termenul general al seriei este

$$x_n = \underbrace{\frac{1}{5^n} \cos n^n}_{\rightarrow 0 \text{ mărginit}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \Rightarrow$ seria poate fi convergentă.

Etapa 2. Se studiază natura seriei și suma ei cu definiția. Șirul sumelor parțiale este

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{5^k} \cos k^k, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Nu se va aplica definiția în studiul convergenței seriei.

Etapa 3. Se studiază natura seriei aplicând criteriul.

○ modul 1. Criteriul Cauchy pentru serii. Se verifică dacă

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^* \text{ astfel încât } \forall p \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |x_{n+1} + \dots + x_{n+p}| < \varepsilon.$$

$$\text{Fie } \forall \varepsilon > 0. \text{ Se caută } n_\varepsilon \in \mathbb{N}^* \text{ astfel încât } \forall p \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq n_\varepsilon \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} |x_{n+1} + \dots + x_{n+p}| &= \left| \frac{1}{5^{n+1}} \cos (n+1)^{n+1} + \dots + \frac{1}{5^{n+p}} \cos (n+p)^{n+p} \right| \leq \\ &\leq \left| \frac{1}{5^{n+1}} \cos (n+1)^{n+1} \right| + \dots + \left| \frac{1}{5^{n+p}} \cos (n+p)^{n+p} \right| = \\ &\leq \frac{1}{5^{n+1}} \left| \cos (n+1)^{n+1} \right| + \dots + \frac{1}{5^{n+p}} \left| \cos (n+p)^{n+p} \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{5^{n+1}} + \dots + \frac{1}{5^{n+p}} = \frac{1}{5^{n+1}} \cdot \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^p - 1}{\frac{1}{5} - 1} = \frac{1}{4 \cdot 5^n} \left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^p\right) < \\ &\text{scăpăm de } p, \text{ rămâne } n \frac{1}{4 \cdot 5^n} \cdot 1 < \frac{1}{5^n} < \varepsilon, \end{aligned}$$

$$\text{adică } \frac{1}{5^n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln 5}. \text{ Se găsește } n_\varepsilon = \left[\frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln 5} \right] + 1.$$

\Rightarrow este verificat Criteriul Cauchy \Rightarrow seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} \cos n^n$ este convergentă.

modul 2. Criteriul comparației cu inegalități. Deoarece șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ are și termeni pozitivi și termeni negativi \Rightarrow nu se poate aplica direct Criteriul comparației. Se va studia absoluta convergență a seriei cu termeni oarecare $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} \cos n^n$, adică se va studia dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{5^n} \cos n^n \right|$ este

convergentă.

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq \left| \frac{1}{5^n} \cos n^n \right| \leq \frac{1}{5^n}, \forall n \in \mathbb{N}^* \\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n \text{ este serie convergentă} \\ \text{ca și serie geometrică cu } q = \frac{1}{5} \in]-1, 1[\end{array} \right\} \text{C. comparației} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{5^n} \cos n^n \right| \text{ este serie convergentă} \Rightarrow$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} \cos n^n$ este serie absolut convergentă.

○ **Teorema 1.4.6. (Criteriul comparației cu limită, forma tare, CS).** Fie seriile de numere

reale $\sum_{n=m}^{\infty} x_n$ și $\sum_{n=m}^{\infty} y_n$ cu termeni strict pozitivi astfel încât

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = l \in [0, +\infty]$$

- a) Dacă $0 < l < +\infty$ atunci cele două serii au aceeași natură;
 b) Dacă $l = 0$ și seria $\sum_{n=m}^{\infty} y_n$ este convergentă atunci seria $\sum_{n=m}^{\infty} x_n$ este convergentă;
 c) Dacă $l = +\infty$ și seria $\sum_{n=m}^{\infty} y_n$ este divergentă atunci seria $\sum_{n=m}^{\infty} x_n$ este divergentă.

○ **Teorema 1.4.6'. (Criteriul comparației cu limită, forma slabă, CS).** Fie seriile de numere

reale $\sum_{n=m}^{\infty} x_n$ și $\sum_{n=m}^{\infty} y_n$ cu termeni strict pozitivi astfel încât

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = l \in [0, +\infty]$$

- a) Dacă $\exists \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = l^* \in [0, +\infty[$ atunci
- dacă $\sum_{n=m}^{\infty} y_n$ este convergentă atunci seria $\sum_{n=m}^{\infty} x_n$ este convergentă;
 - dacă $\sum_{n=m}^{\infty} x_n$ este divergentă atunci seria $\sum_{n=m}^{\infty} y_n$ este divergentă;
- b) Dacă $\exists \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = l_* \in]0, +\infty]$ atunci
- dacă $\sum_{n=m}^{\infty} x_n$ este convergentă atunci seria $\sum_{n=m}^{\infty} y_n$ este convergentă;
 - dacă $\sum_{n=m}^{\infty} y_n$ este divergentă atunci seria $\sum_{n=m}^{\infty} x_n$ este divergentă;
- c) Dacă $0 < \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} < +\infty$ atunci $\sum_{n=m}^{\infty} x_n$ au aceeași natură $\sim \sum_{n=m}^{\infty} y_n$.

○ **Exemplul 1.4.3.** Să se studieze natura următoarelor serii de numere reale

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n^2}$;

Etapa 1. Se studiază dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Termenul general al seriei este

$$x_n = \sin \frac{1}{n^2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \Rightarrow$ seria poate fi convergentă.

Etapa 2. Cu definiția-NU

Etapa 3. Se studiază natura seriei aplicând criteriul.

Criteriul comparației cu limită. Deoarece șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este cu termeni strict pozitivi și

$$\left. \begin{array}{l} \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = 1 \in]0, +\infty[\\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ este serie convergentă} \\ \text{ca și serie armonică cu } \alpha = 2 \end{array} \right\} \text{C. comparației } \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n^2} \text{ este serie convergentă.}$$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 - n^2 + 11}$;

Etapa 1. Se studiază dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Termenul general al seriei este

$$x_n = \frac{1}{n^3 - n^2 + 11}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \Rightarrow$ seria *poate fi* convergentă.

Etapa 2. Cu definiția-NU

Etapa 3. Se studiază natura seriei aplicând criteriul.

Criteriul comparației cu limită. Deoarece șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este cu termeni strict pozitivi și

$$\left. \begin{array}{l} \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^3 - n^2 + 11}}{\frac{1}{n^2}} = 0 \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ este serie convergentă} \\ \text{ca și serie armonică cu } \alpha = 2 \end{array} \right\} \text{C. comparației } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 - n^2 + 11} \text{ este serie convergentă.}$$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$;

Etapa 1. Se studiază dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Termenul general al seriei este

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \Rightarrow$ seria *poate fi* convergentă.

Etapa 2. Cu definiția-NU

Etapa 3. Se studiază natura seriei aplicând criteriul.

Criteriul comparației cu limită. Deoarece șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este cu termeni strict pozitivi și

$$\left. \begin{array}{l} \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\frac{1}{n}} = +\infty \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ este serie divergentă} \\ \text{ca și serie armonică cu } \alpha = 1 \end{array} \right\} \text{C. comparației } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \text{ este serie divergentă.}$$

○ **Teorema 1.4.7. (Criteriul în α , CS).** Fie seria de numere reale $\sum_{n=m}^{\infty} x_n$ cu termeni pozitivi.

a) Dacă $\exists \alpha > 1$ a.î. $0 \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (n^\alpha \cdot x_n) < +\infty$ atunci $\sum_{n=m}^{\infty} x_n$ este convergentă;

b) Dacă $\exists \alpha \leq 1$ a.î. $0 < \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (n^\alpha \cdot x_n) \leq +\infty$ atunci $\sum_{n=m}^{\infty} x_n$ este divergentă.

○ **Teorema 1.4.8. (Criteriul de condensare Cauchy).** Fie seria de numere reale $\sum_{n=m}^{\infty} x_n$, cu termeni pozitivi $x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}_m$. Dacă șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m}$ este monoton descrescător, atunci

$$\sum_{n=m}^{\infty} x_n \text{ are aceeași natură } \sim \sum_{n=m}^{\infty} 2^n x_{2^n}.$$

Teorema 1.4.9. (Criteriul raportului-D'Alembert, forma slabă, CS). Fie seria de numere reale $\sum_{n=m}^{\infty} x_n$, cu termeni strict pozitivi $x_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}_m$.

a) Dacă $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$, atunci seria $\sum_{n=m}^{\infty} x_n$ este convergentă.

b) Dacă $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} > 1$, atunci seria $\sum_{n=m}^{\infty} x_n$ este divergentă.

c) Dacă $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1$, sau $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq 1$ atunci nu se poate preciza natura seriei.

Dacă $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$, atunci criteriul anterior se numește **forma tare**.

Exemplul 1.4.4. Să se studieze natura următoarelor serii de numere reale

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!};$

Etapa 1. Se studiază dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Termenul general al seriei este

$$x_n = \frac{3^n}{n!}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \Rightarrow$ seria *poate fi* convergentă.

Etapa 2. Cu definiția-NU

Etapa 3. Se studiază natura seriei aplicând criteriul.

Criteriul raportului, forma tare. Deoarece șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este cu termeni strict pozitivi și

$$\left. \begin{aligned} \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n+1} = 0 < 1 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{C. raportului} \\ \text{forma tare} \end{array} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!} \text{ este serie convergentă.}$$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} n! \left(\frac{2}{n}\right)^n;$

Etapa 3. Se studiază natura seriei aplicând criteriul.

Criteriul raportului, forma tare. Deoarece șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este cu termeni strict pozitivi și

$$\left. \begin{aligned} \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)! \left(\frac{2}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{2}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{2}{e} < 1 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{C. raportului} \\ \text{forma tare} \end{array} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n! \left(\frac{2}{n}\right)^n$$

este serie convergentă.

Teorema 1.4.10 (Criteriul rădăcinii-Cauchy-Hadamard, forma slabă, CS). Fie seria de numere reale $\sum_{n=m}^{\infty} x_n$, cu termeni strict pozitivi $x_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}_m$.

a) Dacă $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} < 1$ atunci seria $\sum_{n=m}^{\infty} x_n$ este convergentă.

b) Dacă $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} > 1$ atunci seria $\sum_{n=m}^{\infty} x_n$ este divergentă.

c) Dacă $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = 1$ atunci nu se poate preciza natura seriei.

Dacă $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n}$ atunci criteriul anterior se numește **forma tare**.

Observația 1.4.2. Dacă $\sum_{n=m}^{\infty} x_n$ este o serie cu termeni oarecare și $\sum_{n=m}^{\infty} |x_n|$ este divergentă pe baza criteriului raportului sau criteriului rădăcinii atunci $\sum_{n=m}^{\infty} x_n$ este divergentă.

Exemplul 1.4.5. Să se studieze natura următoarelor serii de numere reale

a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{(3+\frac{1}{n})^n};$

Etapa 1. Se studiază dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Termenul general al seriei este

$$x_n = \frac{n^2}{(3+\frac{1}{n})^n}, \forall n \in \mathbb{N}_2$$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \Rightarrow$ seria *poate fi* convergentă.

Etapa 2. Cu definiția-NU

Etapa 3. Se studiază natura seriei aplicând criteriul.

Criteriul rădăcinii, forma tare. Deoarece șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este cu termeni strict pozitivi și

$$\left. \begin{aligned} \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{(3+\frac{1}{n})^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^2}{3+\frac{1}{n}} = \frac{1}{3} < 1 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{C. rădăcinii} \\ \text{forma tare} \end{array} \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{(3+\frac{1}{n})^n} \text{ este serie convergentă.}$$

b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(3+(-1)^n)^n};$

Etapa 1. Se studiază dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Termenul general al seriei este

$$x_n = \frac{1}{(3+(-1)^n)^n}, \forall n \in \mathbb{N}_2.$$

Deoarece $\mathbb{N} = \{2\tilde{k}; \tilde{k} \in \mathbb{N}^*\} \cup \{2\tilde{k} + 1; \tilde{k} \in \mathbb{N}^*\}$, se explicitează:

$$x_n = \begin{cases} \frac{1}{4^{\tilde{k}}}, & \text{dacă } n = 2\tilde{k}; \tilde{k} \in \mathbb{N}^* \\ \frac{1}{2^{\tilde{k}}}, & \text{dacă } n = 2\tilde{k} + 1; \tilde{k} \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Se determină:

$$\left\{ \begin{aligned} \lim_{\tilde{k} \rightarrow \infty} x_{2\tilde{k}} &= \lim_{\tilde{k} \rightarrow \infty} \frac{1}{4^{2\tilde{k}}} = 0; \\ \lim_{\tilde{k} \rightarrow \infty} x_{2\tilde{k}+1} &= \lim_{\tilde{k} \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{2\tilde{k}+1}} = 0. \end{aligned} \right. \Rightarrow \mathcal{L}((x_n)_{n \in \mathbb{N}_2}) = \{0\} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= 0 \end{aligned} \right. \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \Rightarrow \text{seria } \textit{poate fi} \text{ convergentă.}$$

Etapa 2. Cu Definiția-NU.

Etapa 3. Se studiază natura seriei aplicând criteriul.

Criteriul raportului.

$$x_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}_2.$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{1}{(3+(-1)^{n+1})^{n+1}}}{\frac{1}{(3+(-1)^n)^n}} = \frac{(3+(-1)^n)^n}{(3+(-1)^{n+1})^{n+1}} = \begin{cases} \frac{4^n}{2^{n+1}} = 2^{n-1}, & \text{dacă } n = 2\tilde{k}; \tilde{k} \in \mathbb{N}^* \\ \frac{2^n}{4^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+2}}, & \text{dacă } n = 2\tilde{k} + 1; \tilde{k} \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Se determină

$$\left\{ \begin{aligned} \lim_{\tilde{k} \rightarrow \infty} u_{2\tilde{k}} &= +\infty; \\ \lim_{\tilde{k} \rightarrow \infty} u_{2\tilde{k}+1} &= 0. \end{aligned} \right. \Rightarrow \mathcal{L}\left(\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)_{n \in \mathbb{N}_2}\right) = \{+\infty, 0\} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 0 \\ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = +\infty \end{array} \right. \Rightarrow \nexists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

Cum $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = +\infty > 1$ și $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 0 < 1 \Rightarrow$ seria $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(3+(-1)^n)^n}$ nu se poate studia cu criteriul raportului.

Criteriul rădăcinii.

$$x_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\sqrt[n]{x_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{(3+(-1)^n)^n}} = \frac{1}{(3+(-1)^n)} = \begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{dacă } n = 2\tilde{k}; \tilde{k} \in \mathbb{N}^* \\ \frac{1}{2}, & \text{dacă } n = 2\tilde{k} + 1; \tilde{k} \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Se determină

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{\tilde{k} \rightarrow \infty} v_{2\tilde{k}} = \frac{1}{4}; \\ \lim_{\tilde{k} \rightarrow \infty} v_{2\tilde{k}+1} = \frac{1}{2}. \end{array} \right. \Rightarrow \mathcal{L} \left((\sqrt[n]{x_n})_{n \in \mathbb{N}_2} \right) = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = \frac{1}{4} \\ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = \frac{1}{2} \end{array} \right. \Rightarrow \nexists \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n}.$$

Cum $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ seria $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(3+(-1)^n)^n}$ este convergentă.

Teorema 1.4.11 (Criteriul Raabe-Duhamel, forma slabă, CS). Fie seria de numere reale

$\sum_{n=m}^{\infty} x_n$, cu termeni strict pozitivi $x_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}_m$.

a) Dacă $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) > 1$, atunci seria $\sum_{n=m}^{\infty} x_n$ este convergentă.

b) Dacă $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) < 1$, atunci seria $\sum_{n=m}^{\infty} x_n$ este divergentă.

c) Dacă $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) \leq 1$ sau $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) \geq 1$ atunci nu se poate preciza natura seriei.

Dacă $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right)$ atunci criteriul anterior se numește **forma tare**.

Exemplul 1.4.6. Să se studieze natura următoarelor serii de numere reale

a) $\sum_{n=1}^{\infty} a^{\sqrt{n}}, a > 0;$

Etapa 1. Se studiază dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Termenul general al seriei este

$$x_n = a^{\sqrt{n}}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \begin{cases} 0, & \text{dacă } 0 < a < 1 \\ 1, & \text{dacă } a = 1 \\ +\infty, & \text{dacă } a > 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{dacă } a \geq 1, \text{ atunci seria este divergentă} \\ \text{dacă } a \in]0, 1[, \text{ atunci seria poate fi convergentă} \end{cases}$$

Etapa 2. Cu Definiția-NU.

Etapa 3. Se aplică criteriul atunci când $a \in]0, 1[$.

Criteriul raportului. Deoarece șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este cu termeni strict pozitivi și

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = a^{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = a^{\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \stackrel{a \in]0,1[}{=} 1 \Rightarrow$ Nu se poate preciza natura seriei.

Criteriul rădăcinii. Deoarece șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este cu termeni strict pozitivi și

$$\sqrt[n]{|x_n|} = a^{\frac{\sqrt{n}}{n}}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x_n|} \stackrel{a \in]0,1[}{=} 1 \Rightarrow$ Nu se poate preciza natura seriei.

Criteriul lui Raabe-Duhamel. Deoarece șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este cu termeni strict pozitivi și

$$n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) = n \left(a^{-\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} - 1 \right) = n \left(a^{\frac{-1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}} - 1 \right), \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$$

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(a^{\frac{-1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}} - 1 \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{\frac{-1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}} - 1}{\frac{-1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}} \cdot \frac{-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = (\ln a) (-\infty) \stackrel{a \in]0,1[}{=} +\infty > 1$$

\Rightarrow seria este convergentă.

Concluzii:

-dacă $a \in]0, 1[\Rightarrow$ seria $\sum_{n=1}^{\infty} a^{\sqrt{n}}$ este convergentă.

-dacă $a \geq 1 \Rightarrow$ seria $\sum_{n=1}^{\infty} a^{\sqrt{n}}$ este divergentă.

○ **Teorema 1.4.12 (Criteriul Bertrand, forma slabă, CS).** Fie seria de numere reale $\sum_{n=m}^{\infty} x_n$,

cu termeni strict pozitivi $x_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}_m$.

a) Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right) \ln n > 1$ atunci $\sum_{n=m}^{\infty} x_n$ este convergentă;

b) Dacă $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right) \ln n < 1$ atunci seria $\sum_{n=m}^{\infty} x_n$ este divergentă;

c) Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right) \ln n \leq 1$ sau $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right) \ln n \geq 1$ atunci nu se poate preciza natura seriei.

Dacă $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right) \ln n$ atunci criteriul anterior se numește **forma tare**.

○ **Teorema 1.4.13 (Criteriul logaritmic, CS).** Fie seria de numere reale $\sum_{n=m}^{\infty} x_n$, cu termeni

strict pozitivi $x_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}_m$ a.î.

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{1}{x_n}}{\ln n} = l.$$

a) Dacă $l > 1$ atunci $\sum_{n=m}^{\infty} x_n$ este convergentă;

b) Dacă $l < 1$ atunci seria $\sum_{n=m}^{\infty} x_n$ este divergentă;

c) Dacă $l = 1$ atunci nu se poate preciza natura seriei.

Teorema 1.4.14 (Criteriul Abel, CS). Fie seria de numere reale $\sum_{n=m}^{\infty} \alpha_n u_n$. Dacă

(i) șirul $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}_m}$ este monoton (descrescător) și mărginit;

(ii) seria $\sum_{n=m}^{\infty} u_n$ este convergentă,

atunci seria $\sum_{n=m}^{\infty} \alpha_n u_n$ este convergentă.

Teorema 1.4.15. (Criteriul Dirichlet, CS). Fie seria de numere reale $\sum_{n=m}^{\infty} \alpha_n u_n$. Dacă

(i) șirul $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}_m}$ este monoton descrescător cu $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$;

(ii) seria $\sum_{n=m}^{\infty} u_n$ are șirul sumelor parțiale $s_n^u = \sum_{k=m}^n u_k, \forall n \in \mathbb{N}_m$ șir mărginit,

atunci seria $\sum_{n=m}^{\infty} \alpha_n u_n$ este convergentă.

Exemplul 1.4.7. Să se studieze natura următoarelor serii de numere reale

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin an}{n^\alpha}, a \in \mathbb{R}^*$ este fixat și $\alpha > 0$ este fixat;

Etapa 1. Se studiază dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Termenul general al seriei este

$$x_n = \frac{1}{\underbrace{n^\alpha}_{\rightarrow 0} \underbrace{\sin an}_{\text{mărginit}}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \Rightarrow$ seria poate fi convergentă.

Etapa 2. Se studiază natura seriei și suma ei cu definiția. Șirul sumelor parțiale este

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \sin ak, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Nu se va aplica definiția în studiul convergenței seriei.

Etapa 3. Se studiază natura seriei aplicând criteriile. Seria este cu termeni oarecare.

Criteriul Dirichlet. Se aleg:

(i) $\alpha_n = \frac{1}{n^\alpha}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Se observă că șirul $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este monoton descrescător cu $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$.

(ii) $u_n = \sin an, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Se studiază dacă șirul sumelor parțiale

$$s_n^u = \sum_{k=1}^n \sin ak, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

este șir mărginit. Se determină s_n^u .

Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Se notează $A_n = \sum_{k=1}^n \cos ak$ și $B_n = \sum_{k=1}^n \sin ak$. Atunci

$$\begin{aligned} A_n + iB_n &= \sum_{k=1}^n \cos ak + i \sum_{k=1}^n \sin ak = \sum_{k=1}^n (\cos ak + i \sin ak) = \\ &= \sum_{k=1}^n (\cos a + i \sin a)^k = (\cos a + i \sin a) \frac{(\cos a + i \sin a)^n - 1}{(\cos a + i \sin a) - 1} = \\ &= (\cos a + i \sin a) \frac{(\cos an + i \sin an) - 1}{(\cos a + i \sin a) - 1} = (\cos a + i \sin a) \frac{i) 2 \sin^2 \frac{an}{2} - i 2 \sin \frac{an}{2} \cos \frac{an}{2}}{2 \sin^2 \frac{a}{2} - i 2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}} = \\ &= (\cos a + i \sin a) \frac{\sin \frac{an}{2} (\cos \frac{an}{2} + i \sin \frac{an}{2})}{\sin \frac{a}{2} (\cos \frac{a}{2} + i \sin \frac{a}{2})} = \frac{\sin \frac{an}{2}}{\sin \frac{a}{2}} \left(\cos \left(a + \frac{an}{2} - \frac{a}{2} \right) + i \sin \left(a + \frac{an}{2} - \frac{a}{2} \right) \right). \end{aligned}$$

Deci $A_n = \frac{\sin \frac{an}{2}}{\sin \frac{a}{2}} \cos \left(\frac{an+a}{2} \right)$ și $B_n = \frac{\sin \frac{an}{2}}{\sin \frac{a}{2}} \sin \left(\frac{an+a}{2} \right)$.

Atunci $\exists M = \frac{1}{|\sin \frac{a}{2}|} > 0$ astfel încât

$$|s_n^u| = \left| \frac{\sin \frac{an}{2}}{\sin \frac{a}{2}} \sin \left(\frac{an+a}{2} \right) \right| \leq \frac{1}{|\sin \frac{a}{2}|}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$\Rightarrow (s_n^u)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este șir mărginit.

Conform Criteriului Dirichlet, seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin an}{n^\alpha}$ este convergentă.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) \sin n;$

Indicație. $\alpha_n = \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right), \forall n \in \mathbb{N}^*; u_n = \sin n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{3^n};$

Indicație. $\alpha_n = \frac{1}{3^n}, \forall n \in \mathbb{N}^*; u_n = \cos n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$

În acest caz se poate aplica criteriul comparației cu inegalități pentru $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos n}{3^n} \right|.$

Teorema 1.4.16 (Criteriul Leibniz, CS). Fie șirul de numere reale $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_m}$ cu $a_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}_m.$

Dacă șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_m}$ este monoton descrescător cu $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, atunci seria alternantă $\sum_{n=m}^{\infty} (-1)^n a_n$ este

convergentă. Rezultatul este valabil și pentru seria alternantă $\sum_{n=m}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n.$

Seria armonică alternantă generalizată. Fie $\alpha \in \mathbb{R}.$ Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ este divergentă dacă

$\alpha \leq 0$ și convergentă dacă $\alpha > 0.$ Mai mult, pentru $\alpha \in]0, 1]$ seria este semiconvergentă, iar pentru $\alpha > 1$ seria este absolut convergentă.

Exemple. Fie $\alpha = -\frac{3}{2}.$ Seria armonică alternantă generalizată

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n\sqrt{n} / -1 + 2\sqrt{2} - 3\sqrt{3} + \dots + (-1)^n n\sqrt{n} + \dots \text{este } (D).$$

Fie $\alpha = 1.$ Seria armonică alternantă

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} / -1 + \frac{1}{2} + \frac{-1}{3} + \dots + \frac{(-1)^n}{n} + \dots \text{este } (SC).$$

Fie $\alpha = \frac{1}{2}.$ Seria armonică alternantă generalizată

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} / -1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dots \text{este } (SC).$$

Fie $\alpha = \frac{3}{2}.$ Seria armonică alternantă generalizată

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} / -1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{3\sqrt{3}} + \dots + \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + \dots \text{este } (AC).$$

Fie $\alpha = 2.$ Seria armonică generalizată

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} / -1 + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{(-1)^n}{n^2} + \dots \text{este } (AC).$$

Exemplul 1.4.8. Să se studieze natura următoarelor serii de numere reale

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2^n};$$

Etapa 1. Se studiază dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Termenul general al seriei este

$$x_n = \underbrace{(-1)^n}_{\text{mărginit}} \cdot \underbrace{\frac{n}{2^n}}_{\rightarrow 0}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \Rightarrow$ seria *poate fi* convergentă.

Etapa 2. Cu definiția-NU.

Etapa 3. Se studiază natura seriei aplicând criterii.

Criteriul Leibniz. Șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este șir alternant, adică

$$x_n = (-1)^n \underbrace{\frac{n}{2^n}}_{a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

și, mai mult, $x_n = (-1)^n \cdot a_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$, unde

$$\begin{cases} a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \\ (a_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ este șir monoton descrescător} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \end{cases} \stackrel{\text{C. Leibniz}}{\Rightarrow} \text{seria } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2^n} \text{ este convergentă.}$$

$$\text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2 + 4n + 5};$$

Etapa 1. Se studiază dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Termenul general al seriei este

$$x_n = \underbrace{(-1)^{n+1}}_{\text{mărginit}} \cdot \underbrace{\frac{1}{n^2 + 4n + 5}}_{\rightarrow 0}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \Rightarrow$ seria *poate fi* convergentă.

Etapa 2. Cu definiția-NU.

Etapa 3. Se studiază natura seriei aplicând criterii.

Criteriul Leibniz. Șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este șir alternant, adică

$$x_n = (-1)^{n+1} \underbrace{\frac{1}{n^2 + 4n + 5}}_{a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

și, mai mult, $x_n = (-1)^n \cdot a_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$, unde

$$\begin{cases} a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \\ (a_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ este șir monoton descrescător} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \end{cases} \stackrel{\text{C. Leibniz}}{\Rightarrow} \text{seria } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2 + 4n + 5} \text{ este convergentă.}$$

Este chiar absolut convergentă (seria modulelor se studiază cu criteriul comparației).

$$\text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\arctg \frac{1}{n}}{\cos \frac{1}{n}};$$

Etapa 1. Se studiază dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Termenul general al seriei este

$$x_n = \underbrace{(-1)^n}_{\text{mărginit}} \cdot \underbrace{\frac{\arctg \frac{1}{n}}{\cos \frac{1}{n}}}_{\rightarrow 0}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \Rightarrow$ seria *poate fi* convergentă.

Etapa 2. Cu definiția-NU.

Etapa 3. Se studiază natura seriei aplicând criterii.

Criteriul Leibniz. Șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este șir alternant, adică

$$x_n = (-1)^n \underbrace{\frac{\arctg \frac{1}{n}}{\cos \frac{1}{n}}}_{a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Se observă că

$$0 < \frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}^* \xrightarrow{\text{arctg e crescătoare pe }]0,1]} \Rightarrow 0 < \arctg \frac{1}{n} < \frac{\pi}{4}, \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ și}$$

$$0 < \frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}^* \xrightarrow{\text{cos e descrescătoare pe }]0,1]} \Rightarrow \cos 0 > \cos \frac{1}{n} > \cos 1 > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Mai mult

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \xrightarrow{\text{arctg e crescătoare pe }]0,1]} \Rightarrow \arctg \frac{1}{n+1} < \arctg \frac{1}{n} \text{ și}$$

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \xrightarrow{\text{cos e descrescătoare pe }]0,1]} \Rightarrow \cos \frac{1}{n+1} > \cos \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{1}{\cos \frac{1}{n+1}} < \frac{1}{\cos \frac{1}{n}}$$

și deci

$$a_n > a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Deci $x_n = (-1)^n \cdot a_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$, unde

$$\begin{cases} a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \\ (a_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ este șir monoton descrescător} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{C. Leibniz}} \text{seria } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\arctg \frac{1}{n}}{\cos \frac{1}{n}} \text{ este convergentă.}$$