CURS NR. 4
Analiză matematică, AIA

A se studia Trigonometrie-din Anexa 2 şi de la Complemente de Matematică

A se studia Funcţii $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ elementare: **funcţia polinomială, funcţia raţională, funcţia putere, funcţia radical, funcţia logaritm, funcţia exponenţială, funcţii trigonometrice, funcţii hiperbolice. Definiţii, grafice şi lecturi grafice (intersecţia cu axele, monotonie, semn). Ecuaţii şi inecuaţii ataşate, sisteme de ecuaţii şi inecuaţii-**din Anexa 4 şi de la Complemente de Matematică

5.1. Limite de funcţii $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ în $a \in A'$

De recapitulat din manualele de liceu.

Se reamintesc unele noţiuni şi enunţuri (schiţă, fără demonstraţii).

De menţionat că A' este mulţimea punctelor de acumulare a mulţimii A, în $\overline{\mathbb{R}}$.

Definiţia 5.1.1. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in A' \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Funcţia f are *limita* $l \in \overline{\mathbb{R}}$ *în punctul* a şi se notează $\lim\limits_{x \to a, x \in A} f(x) = l$ dacă

$[\forall V \in \mathcal{V}(l), \exists U = U_V \in \mathcal{V}(a)$ a.î. $\forall x \in A \cap U, x \neq a \Rightarrow f(x) \in V]$.

Dacă există, $l \in \overline{\mathbb{R}}$ se numeşte *limita (globală a) funcţiei* f *în* a. Se notează şi $l = l(a)$.

Teorema 5.1.1.(criteriul-CNS în limbaj $\varepsilon - \delta$ de existenţă a limitei)

Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Atunci

a) $\exists \lim\limits_{x \to -\infty, x \in A} f(x) = -\infty, -\infty \in A' \Leftrightarrow$

$[\forall \alpha < 0, \exists \beta = \beta(\alpha) < 0$ a.î. $\forall x \in A$ cu $x < \beta \Rightarrow f(x) < \alpha]$.

b) $\exists \lim\limits_{x \to a, x \in A} f(x) = -\infty, a \in A', a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$[\forall \alpha < 0, \exists \delta = \delta(\alpha) > 0$ a.î. $\forall x \in A$ cu $|x - a| < \delta, x \neq a \Rightarrow f(x) < \alpha]$.

c) $\exists \lim\limits_{x \to +\infty, x \in A} f(x) = -\infty, +\infty \in A' \Leftrightarrow$

$[\forall \alpha < 0, \exists \beta = \beta(\alpha) > 0$ a.î. $\forall x \in A$ cu $\beta < x \Rightarrow f(x) < \alpha]$.

d) $\exists \lim\limits_{x \to -\infty, x \in A} f(x) = l, -\infty \in A', l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$[\forall \varepsilon > 0, \exists \beta = \beta(\varepsilon) < 0$ a.î. $\forall x \in A$ cu $x < \beta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon]$.

e) $\exists \lim\limits_{x \to a, x \in A} f(x) = l, a \in A', a \in \mathbb{R}, l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$[\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ a.î. $\forall x \in A$ cu $|x - a| < \delta, x \neq a \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon]$.

f) $\exists \lim\limits_{x \to +\infty, x \in A} f(x) = l, +\infty \in A', l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$[\forall \varepsilon > 0, \exists \beta = \beta(\varepsilon) > 0$ a.î. $\forall x \in A$ cu $\beta < x \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon]$.

g) $\exists \lim\limits_{x \to -\infty, x \in A} f(x) = +\infty, -\infty \in A' \Leftrightarrow$

$[\forall \alpha > 0, \exists \beta = \beta(\alpha) < 0$ a.î. $\forall x \in A$ cu $x < \beta \Rightarrow \alpha < f(x)]$.

h) $\exists \lim\limits_{x \to a, x \in A} f(x) = +\infty, a \in A', a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

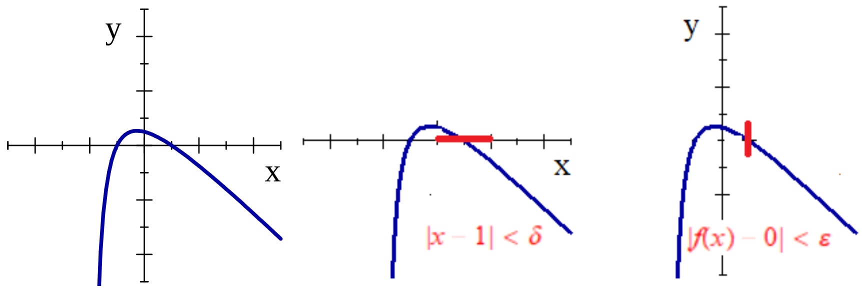
$[\forall \alpha > 0, \exists \delta = \delta(\alpha) > 0$ a.î. $\forall x \in A$ cu $|x - a| < \delta, x \neq a \Rightarrow \alpha < f(x)]$.

i) $\exists \lim\limits_{x \to +\infty, x \in A} f(x) = +\infty, +\infty \in A' \Leftrightarrow$

$[\forall \alpha > 0, \exists \beta = \beta(\alpha) > 0$ a.î. $\forall x \in A$ cu $\beta < x \Rightarrow \alpha < f(x)]$.

Exemplul 5.1.1. Se arată că $\exists \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1 - x^2}{x + 2} = 0$.

Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1-x^2}{x+2}, D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.
Se alege $A \subseteq D$, $A =]-2, +\infty[$ a.î. $a = 1 \in A'$.



Se studiază dacă $[x \to 1 \Rightarrow f(x) \to 0]$, adică $\exists \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x^2}{x+2} = 0 \Leftrightarrow$

$[\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ a.î. $\forall x \in A$ cu $\underbrace{|x-1| < \delta}_{x \text{ este în o vecinatate a lui } 1} \Rightarrow \underbrace{|f(x) - 0| < \varepsilon}_{f(x) \text{ este în ovecinătate a lui } 0}]$.

Fie $\forall \varepsilon > 0$. Se caută $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ a.î. $\forall x \in A$ cu $|x-1| < \delta$ să rezulte

$$|f(x) - 0| = \left| \frac{1-x^2}{x+2} - 0 \right| = \left| \frac{x+1}{x+2} \right| |x-1| \overset{\text{pentru } x>-2}{\leq} 1 \cdot |x-1| \underset{\text{rămâne } \delta}{\overset{\text{"scăpăm" de } x}{<}} \delta < \varepsilon.$$

Deci se caută $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ a.î. $0 < \delta < \varepsilon$. Din Teorema de densitate a $\mathbb{R}$ în $\mathbb{R}$, între numerele reale 0 şi ε există un astfel de δ. Se poate alege, de exemplu, $\delta = \frac{1}{2}\varepsilon$.

Teorema 5.1.2. (**criteriul-CNS de existenţă a limitei cu şiruri**)
Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in A' \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ şi $l \in \overline{\mathbb{R}}$. Atunci $\exists \lim\limits_{x\to a, x\in A} f(x) = l \Leftrightarrow$

$[\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ un şir de numere reale din $A \setminus \{a\}$, cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l]$.

Definiţia 5.1.2. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

a) Funcţia f are *limita la stânga* $l_s \in \overline{\mathbb{R}}$ *în punctul* $a \in A'_s$ şi se notează
$\lim\limits_{x\to a, x<a, x\in A} f(x) = l_s$ dacă

$[\forall V \in \mathcal{V}(l_s), \exists U = U_V \in \mathcal{V}(a)$ a.î. $\forall x \in A \cap U, x \neq a, x < a \Rightarrow f(x) \in V]$.

b) Funcţia f are *limita la dreapta* $l_s \in \overline{\mathbb{R}}$ *în punctul* $a \in A'_d$ şi se notează
$\lim\limits_{x\to a, x>a, x\in A} f(x) = l_d$ dacă

$[\forall V \in \mathcal{V}(l_d), \exists U = U_V \in \mathcal{V}(a)$ a.î. $\forall x \in A \cap U, x \neq a, x > a \Rightarrow f(x) \in V]$.

Se notează şi

$l_s(a) = \lim\limits_{\substack{x\to a \\ x<a}} f(x) = \lim\limits_{x\nearrow a} f(x) = f(a-0); l_d(a) = \lim\limits_{\substack{x\to a \\ x>a}} f(x) = \lim\limits_{x\searrow a} f(x) = f(a+0)$.

Propoziţia 5.1.1. (**de caracterizare a existenţei limitelor laterale cu şiruri**)
Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

a) Fie $a \in A'_s$ şi $l_s(a) \in \overline{\mathbb{R}}$. Atunci $\exists \lim\limits_{x\to a, x<a, x\in A} f(x) = l_s(a) \Leftrightarrow$

$[\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ un şir de numere reale din $A \setminus \{a\}$, cu $x_n < a, \forall n \in \mathbb{N}_m$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l_s(a)]$.

b) Fie $a \in A'_d$ şi $l_d(a) \in \overline{\mathbb{R}}$. Atunci $\exists \lim\limits_{x\to a, x>a, x\in A} f(x) = l_d(a) \Leftrightarrow$

$[\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ un şir de numere reale din $A \setminus \{a\}$, cu $x_n > a, \forall n \in \mathbb{N}_m$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l_d(a)]$.

Teorema 5.1.3. (**criteriul-CNS de existenţă a limitei cu limite laterale**)

Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in A'$, $a \in \mathbb{R}$ şi $l(a) \in \overline{\mathbb{R}}$. Atunci $\exists \lim\limits_{x\to a, x\in A} f(x) = l(a) \Leftrightarrow$
$[\exists \lim\limits_{x\to a, x<a, x\in A} f(x) = l_s(a)$, $\exists \lim\limits_{x\to a, x>a, x\in A} f(x) = l_d(a)$ şi $l_s(a) = l_d(a) = l(a)]$.

Exemplul 5.1.2. a) Fie *funcţia Dirichlet*:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in \mathbb{Q} \\ -1, & \text{dacă } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

În nici un punct $a \in \mathbb{R}$, funcţia nu are nici limită la stânga, nici limită la dreapta.

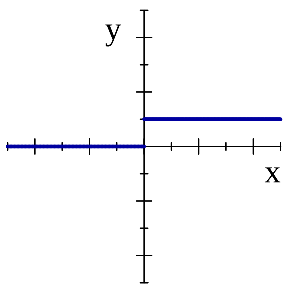
b) Fie *funcţia Heaviside* (*treapta unitate*):

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x < 0 \\ 1, & \text{dacă } x \geq 0 \end{cases}$$

În punctele $a \in]-\infty, 0[$ funcţia are limită $l(a) = \lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

În punctele $a \in]0, +\infty[$ funcţia are limită $l(a) = \lim\limits_{x\to a} f(x) = 1$.

În punctul $a = 0$ funcţia are limita la stânga $l_s(0) = \lim\limits_{x\to 0, x<0} f(x) = 0$ şi limita la dreapta $l_d(0) = \lim\limits_{x\to 0, x>0} f(x) = 1$. Cum $l_s(0) \neq l_d(0)$, atunci f nu are limită în $a = 0$.



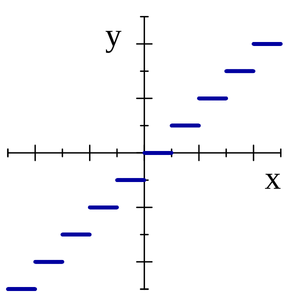
Exemplul 5.1.3. Fie *funcţia parte întreagă*:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = [x]$, unde $[x] = n \in \mathbb{Z}$, dacă $n \leq x < n+1$, adică

$$f(x) = \begin{cases} \ldots \\ -1, & \text{dacă } -1 \leq x < 0 \\ 0, & \text{dacă } 0 \leq x < 1 \\ 1, & \text{dacă } 1 \leq x < 2 \\ 2, & \text{dacă } 2 \leq x < 3 \\ \ldots \end{cases}$$

În punctele $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ funcţia are limită $l(a) = \lim\limits_{x\to a} f(x) = n$, dacă $n < a < n+1$.

În punctele $a = n \in \mathbb{Z}$ funcţia are limita la stânga $l_s(a) = \lim\limits_{x\to n, x<n} f(x) = n-1$ şi limita la dreapta $l_d(a) = \lim\limits_{x\to n, x>n} f(x) = n$. Cum $l_s(a) \neq l_d(a)$, atunci f nu are limită în punctele $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

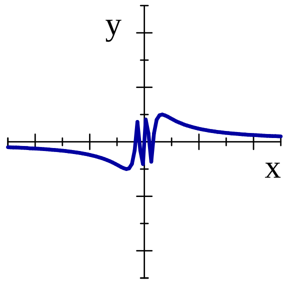


Exemplul 5.1.4. Fie funcţia:

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x} & \text{dacă } x\neq 0\\ 0, & \text{dacă } x=0\end{cases}$$

În punctele $a\in\left]-\infty,0\right[\cup\left]0,+\infty\right[$ funcţia are limită $l(a)=\lim\limits_{x\to a} f(x)=\sin\frac{1}{a}$.

În punctul $a=0$ funcţia nu are limită nici la stânga şi nici la dreapta.



Teorema 5.1.4. (**proprietatea de unicitate a limitei**)
Fie $f:A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $a\in A'\subseteq\overline{\mathbb{R}}$. Dacă $\exists\lim\limits_{x\to a,x\in A} f(x)$ atunci aceasta este unică.

Corolar 5.1.1. (**criteriul de inexistenţă a limitei cu şiruri**)
Fie $f:A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $a\in A'\subseteq\overline{\mathbb{R}}$. Dacă

$\exists\,(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ un şir de numere reale din $A\setminus\{a\}$, cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$,

$\exists\,(\widetilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ un şir de numere reale din $A\setminus\{a\}$, cu $\lim\limits_{n\to\infty}\widetilde{x}_n=a$

astfel încât

•sau unul din şirurile $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}_m},(f(\widetilde{x}_n))_{n\in\mathbb{N}_m}$ nu are limită

•sau ambele şiruri $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}_m},(f(\widetilde{x}_n))_{n\in\mathbb{N}_m}$ au limită, cu

$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=l_1,\ \lim\limits_{n\to\infty} f(\widetilde{x}_n)=l_2$ şi $l_1\neq l_2$,

atunci $\nexists\lim\limits_{x\to a,x\in A} f(x)$.

Exemplul 5.1.5. Se arată că $\nexists\lim\limits_{x\to+\infty}\cos x$. Într-adevăr, fie

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\cos x$.

Se alege $A=\mathbb{R}$ a.î. $a=+\infty\in A'$. Se observă că

$\exists x_n=0+2n\pi,\forall n\in\mathbb{N}$ un şir de numere reale din $A\setminus\{a\}$, cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$,

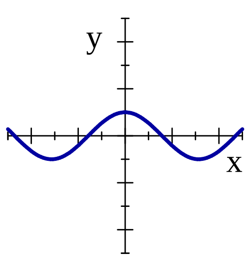
$\exists\widetilde{x}_n=\frac{\pi}{2}+2n\pi,\forall n\in\mathbb{N}$ un şir de numere reale din $A\setminus\{a\}$, cu $\lim\limits_{n\to\infty}\widetilde{x}_n=+\infty$.

Mai mult,

$f(x_n)=\cos(0+2n\pi)=\cos 0=1,\forall n\in\mathbb{N}$ este un şir de numere reale cu $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=1$,

$f(\widetilde{x}_n)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)=\cos\frac{\pi}{2}=0,\forall n\in\mathbb{N}$ este un şir de numere reale cu $\lim\limits_{n\to\infty} f(\widetilde{x}_n)=0$.

Cum $1\neq 0\Rightarrow\nexists\lim\limits_{x\to+\infty}\cos x$.



Interpretarea geometrică a limitei-asimptote: **I.** Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in A' \cap \mathbb{R}$.
a) Dreapta $x = a$ se numeşte *asimptotă verticală la stânga pentru* f dacă
$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = +\infty$ / $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = -\infty$.
b) Dreapta $x = a$ se numeşte *asimptotă verticală la dreapta pentru* f dacă
$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = +\infty$ / $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = -\infty$.
II. a) Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $-\infty \in A'$. Dreapta $y = mx + n$ se numeşte *asimptotă oblică spre* $-\infty$ *a funcţiei* f dacă există şi sunt finite limitele
$m = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$ şi $n = \lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - mx)$ (adică $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - mx - n) = 0$).
b) Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $+\infty \in A'$. Dreapta $y = mx + n$ se numeşte *asimptotă oblică spre* $+\infty$ *a funcţiei* f dacă există şi sunt finite limitele
$m = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ şi $n = \lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - mx)$ (adică $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - mx - n) = 0$).
III. a) Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $-\infty \in A'$. Dreapta $y = n$ se numeşte *asimptotă orizontală spre* $-\infty$ *a funcţiei* f dacă există şi este finită limita
$n = \lim\limits_{x \to -\infty} (f(x))$ (adică $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - n) = 0$).
b) Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $+\infty \in A'$. Dreapta $y = n$ se numeşte *asimptotă orizontală spre* $+\infty$ *a funcţiei* f dacă există şi este finită limita
$n = \lim\limits_{x \to +\infty} (f(x))$ (adică $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - n) = 0$).

Observaţie: a) Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ o funcţie raţională. Atunci:

-f admite asimptote verticale dacă polinomul Q are rădăcini reale; asimptotele verticale sunt dreptele $x = a_k$, $k \in \{1, 2, ..., q\}$, unde a_k sunt cele q rădăcini reale distincte;

-f admite asimptotă oblică dacă $\operatorname{grad} P = 1 + \operatorname{grad} Q$; asimptota oblică este $y = mx + n$, unde $mx + n$ este câtul împărţirii lui P la Q;

-f admite asimptotă orizontală dacă $\operatorname{grad} P \leq \operatorname{grad} Q$; asimptota verticală este $y = n$, unde $n = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$.

b) O funcţie f nu poate admite simultan asimptotă oblică şi asimptotă orizontală spre $-\infty / +\infty$.

Exemple: a) Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3x + 4}{2x + 3}$.

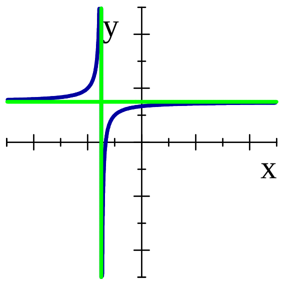
$A = \left]-\infty, -\frac{3}{2}\right[\cup \left]-\frac{3}{2}, +\infty\right[$ în $\mathbb{R}$; $A' = [-\infty, +\infty] = \overline{\mathbb{R}}$.

$\lim\limits_{\substack{x \to \frac{-3}{2} \\ x < \frac{-3}{2}}} \frac{3x + 4}{2x + 3} = \frac{3 \cdot \frac{-3}{2} + 4}{0_-} = +\infty \Rightarrow$ dreapta $x = \frac{-3}{2}$ este asimptotă verticală la stânga (spre $+\infty$).

$\lim\limits_{\substack{x \to \frac{3}{2} \\ x > \frac{-3}{2}}} \frac{3x + 4}{2x + 3} = \frac{3 \cdot \frac{-3}{2} + 4}{0_+} = -\infty \Rightarrow$ dreapta $x = \frac{-3}{2}$ este asimptotă verticală la dreapta (spre $-\infty$).

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3x + 4}{2x + 3} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x\left(3 + \frac{4}{x}\right)}{x\left(2 + \frac{3}{x}\right)} = \frac{3}{2} \Rightarrow$ dreapta $y = \frac{3}{2}$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x + 4}{2x + 3} = \frac{3}{2} \Rightarrow$ dreapta $y = \frac{3}{2}$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$.



b) Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2+2x+3}{2x+3}$.

$A = \left]-\infty, -\frac{3}{2}\right[\cup \left]-\frac{3}{2}, +\infty\right[$ în $\mathbb{R}$; $A' = [-\infty, +\infty] = \overline{\mathbb{R}}$.

$\lim\limits_{\substack{x \to \frac{-3}{2} \\ x < \frac{-3}{2}}} \dfrac{x^2+2x+3}{2x+3} = \dfrac{\left(\frac{-3}{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{-3}{2} + 3}{0_-} = -\infty \Rightarrow$ dreapta $x = \frac{-3}{2}$ este asimptotă verticală la stânga (spre $-\infty$).

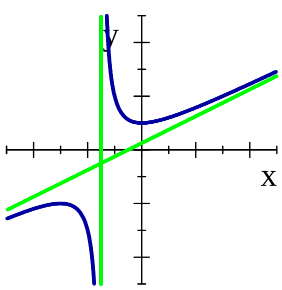
$\lim\limits_{\substack{x \to \frac{3}{2} \\ x > \frac{-3}{2}}} \dfrac{x^2+2x+3}{2x+3} = \dfrac{\left(\frac{-3}{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{-3}{2} + 3}{0_+} = +\infty \Rightarrow$ dreapta $x = \frac{-3}{2}$ este asimptotă verticală la dreapta (spre $+\infty$).

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2+2x+3}{2x+3} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}{x\left(2+\frac{3}{x}\right)} = \dfrac{1}{2}(-\infty)^{2-1} = -\infty \Rightarrow$nu există asimptotă orizontală spre $-\infty$.

$m = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2+2x+3}{x(2x+3)} = \dfrac{1}{2}$; $n = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x^2+2x+3}{2x+3} - \frac{1}{2}x\right) = \dfrac{1}{4} \Rightarrow$ dreapta $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4}$ este asimptotă oblică spre $-\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+2x+3}{2x+3} = +\infty \Rightarrow$nu există asimptotă orizontală spre $+\infty$.

$m = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+2x+3}{x(2x+3)} = \dfrac{1}{2}$; $n = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2+2x+3}{2x+3} - \frac{1}{2}x\right) = \dfrac{1}{4} \Rightarrow y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4}$ este asimptotă oblică spre $+\infty$.



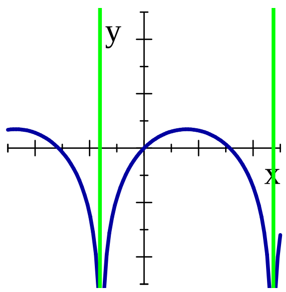
A se vedea Seminar şi Complemente de Matematică pentru alte exemple.

Teorema 5.1.5. (**trecerea la limită sub modul**)
Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in A' \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Dacă $\exists \lim\limits_{x \to a, x \in A} f(x) = l$ atunci $\exists \lim\limits_{x \to a, x \in A} |f|(x)$ şi $\lim\limits_{x \to a, x \in A} (|f|(x)) = |l|$, adică $\lim\limits_{x \to a, x \in A} (|f|(x)) = \left|\lim\limits_{x \to a, x \in A} f(x)\right|$.

Teorema 5.1.6. (**trecerea la limită în inegalităţi**) Fie $f, g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in A' \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Dacă

(i) $\exists U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $f(x) \leq g(x), \forall x \in U \cap A, x \neq a$,

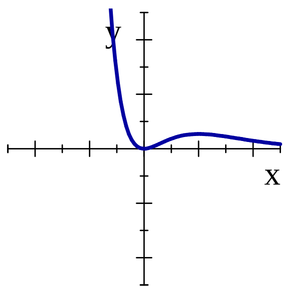
(ii) $\exists \lim\limits_{x\to a, x\in A} f(x), \exists \lim\limits_{x\to a, x\in A} g(x)$,
atunci $\lim\limits_{x\to a, x\in A} f(x) \leq \lim\limits_{x\to a, x\in A} g(x)$.
Teorema 5.1.7. (**trecerea la limită în compunerea de funcţii**) Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}$ şi $g : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Fie $a \in A' \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Dacă
(i) $\exists \lim\limits_{x\to a, x\in A} f(x) = b$, $b \in B' \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ şi $f(x) \neq b$ pentru $x \neq a$,
(ii) $\exists \lim\limits_{y\to b, y\in B} g(y) = c$
atunci $\exists \lim\limits_{x\to a, x\in A} (g \circ f)(x) = c$.
Exemplul 5.1.6. $\lim\limits_{x\to 0} (\ln(1+\sin x)) = \ln\left(\lim\limits_{x\to 0} (1+\sin x)\right) = \ln 1 = 0$.
Reprezentarea graficului pentru $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \ln(1+\sin x)$:



○**Teorema 5.1.8**. (**criteriul-CNS Cauchy-Bolzano de existenţă a limitei**) Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in A' \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Atunci funcţia f are limită finită, $\exists \left(\lim\limits_{x\to a, x\in A} f(x)\right) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$
$[\forall \varepsilon > 0, \exists U = U_\varepsilon \in \mathcal{V}(a)$ a.î. $\forall x' \in A \cap U, x' \neq a, \forall x'' \in A \cap U, x'' \neq a \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon]$.
Teorema 5.1.9. (**criteriul-CS Weierstrass de existenţă a limitei**) Fie $f, g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in A' \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Dacă
(i) $\exists l \in \mathbb{R}$ şi $\exists U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $|f(x) - l| \leq g(x), \forall x \in U \cap A, x \neq a$,
(ii) $\exists \lim\limits_{x\to a, x\in A} g(x) = 0$,
atunci $\exists \lim\limits_{x\to a, x\in A} f(x) = l$.
Teorema 5.1.10. (**criteriul-CS cleştelui de existenţă a limitei**) Fie $f, g, h : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in A' \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Dacă
(i) $\exists U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $g(x) \leq f(x) \leq h(x), \forall x \in U \cap A, x \neq a$,
(ii) $\exists \lim\limits_{x\to a, x\in A} g(x) = l$, $\exists \lim\limits_{x\to a, x\in A} h(x) = l$
atunci $\exists \lim\limits_{x\to a, x\in A} f(x) = l$.
Propoziţia 5.1.2. (**criteriu-CS de existenţă a limitei**) Fie $f, g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in A' \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Dacă
(i) $\exists U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $g(x) \leq f(x), \forall x \in U \cap A, x \neq a$,
(ii) $\exists \lim\limits_{x\to a, x\in A} g(x) = +\infty$
atunci $\exists \lim\limits_{x\to a, x\in A} f(x) = +\infty$.
Exemplul 5.1.7. Fie $\boxed{\forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0}$ dat. Atunci

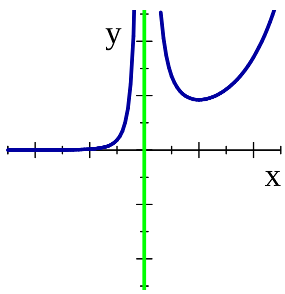
a) $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^\alpha}{e^x} = 0.}$ Ex: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\sqrt[3]{x})^{\frac{2}{7}}}{e^{\sqrt[3]{x}}} \underset{\lim\limits_{x\to 0} u(x)=0}{\overset{u(x)=\sqrt[3]{x}}{=}} 0, \alpha = \frac{2}{7}$.

Reprezentarea graficului pentru $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{x^2}{e^x}$:



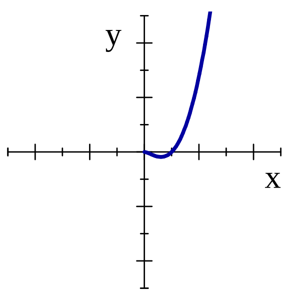
b) $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha} = +\infty.}$ Ex: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{2x}}{\sqrt{2x}} \underset{\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=+\infty}{\overset{u(x)=2x}{=}} +\infty, \alpha = \frac{1}{2}$.

Reprezentarea graficului pentru $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{e^x}{x^2}$:



c) $\boxed{\lim\limits_{x\to 0, x>0} x^\alpha \ln x = 0.}$ Ex: $\lim\limits_{x\to 0, x>0} \sqrt[3]{x} \ln x = 0, \alpha = \frac{1}{3}$.

Reprezentarea graficului pentru $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, f(x) = x^2 \ln x$:



Demonstraţie. b) Într-adevăr, fie $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{e^x}{x^\alpha}$.

Cum $e^z > z, \forall z \in \mathbb{R}$, atunci

$$f(x) = \frac{e^x}{x^\alpha} = \left(\frac{e^{\frac{x}{2\alpha}}}{x^{\frac{\alpha}{2\alpha}}}\right)^{2\alpha} > \left(\frac{\frac{x}{2\alpha}}{x^{\frac{1}{2}}}\right)^{2\alpha} = \left(\frac{1}{2\alpha}\right)^{2\alpha} x^\alpha, \forall x \in]0, +\infty[\,.$$

Dar $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2\alpha}\right)^{2\alpha} x^\alpha = +\infty \overset{\text{Prop. 5.1.2}}{\Rightarrow} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Propoziţia 5.1.3. (**criteriu-CS de existenţă a limitei**) Fie $f, g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ a \in A' \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Dacă

(i) $\exists U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $f(x) \le g(x), \forall x \in U \cap A, x \ne a$,

(ii) $\exists \lim\limits_{x\to a, x\in A} g(x) = -\infty$
atunci $\exists \lim\limits_{x\to a, x\in A} f(x) = -\infty$.

Teorema 5.1.11. (**operaţii cu limite de funcţii**) Fie $f, g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in A' \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Se presupune că $\exists \lim\limits_{x\to a, x\in A} f(x)$, $\exists \lim\limits_{x\to a, x\in A} g(x)$. Atunci

$1°$. Funcţia sumă $f+g$, dacă are sens, are limită în a şi
$\lim\limits_{x\to a, x\in A} (f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to a, x\in A} f(x) + \lim\limits_{x\to a, x\in A} g(x)$. Nu se atribuie sens dacă:
a) $\lim\limits_{x\to a, x\in A} f(x) = +\infty$ şi $\lim\limits_{x\to a, x\in A} g(x) = -\infty$.b) $\lim\limits_{x\to a, x\in A} f(x) = -\infty$ şi $\lim\limits_{x\to a, x\in A} g(x) = +\infty$.

$2°$. Funcţia diferenţă $f-g$, dacă are sens, are limită în a şi
$\lim\limits_{x\to a, x\in A} (f(x)-g(x)) = \lim\limits_{x\to a, x\in A} f(x) - \lim\limits_{x\to a, x\in A} g(x)$. Nu se atribuie sens dacă:
a) $\lim\limits_{x\to a, x\in A} f(x) = +\infty$ şi $\lim\limits_{x\to a, x\in A} g(x) = +\infty$.b) $\lim\limits_{x\to a, x\in A} f(x) = -\infty$ şi $\lim\limits_{x\to a, x\in A} g(x) = -\infty$.

$3°$. Funcţia produs $f\cdot g$, dacă are sens, are limită în a şi
$\lim\limits_{x\to a, x\in A} (f(x)\cdot g(x)) = \left(\lim\limits_{x\to a, x\in A} f(x)\right)\cdot\left(\lim\limits_{x\to a, x\in A} g(x)\right)$. Nu se atribuie sens dacă:
a) $\lim\limits_{x\to a, x\in A} f(x) = 0$ şi $\lim\limits_{x\to a, x\in A} g(x) = \pm\infty$.b) $\lim\limits_{x\to a, x\in A} f(x) = \pm\infty$ şi $\lim\limits_{x\to a, x\in A} g(x) = 0$.

$4°$. Funcţia cât $\dfrac{f}{g}$, dacă are sens, are limită în a şi
$\lim\limits_{x\to a, x\in A} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{\lim\limits_{x\to a, x\in A} f(x)}{\lim\limits_{x\to a, x\in A} g(x)}$. Nu se atribuie sens dacă:
a) $\lim\limits_{x\to a, x\in A} f(x) = 0$ şi $\lim\limits_{x\to a, x\in A} g(x) = 0$.b) $\lim\limits_{x\to a, x\in A} f(x) = \pm\infty$ şi $\lim\limits_{x\to a, x\in A} g(x) = \pm\infty$.

$5°$. Funcţia putere f^g, dacă are sens, are limită în a şi
$\lim\limits_{x\to a, x\in A} (f(x))^{g(x)} = \left(\lim\limits_{x\to a, x\in A} f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to a, x\in A} g(x)}$. Nu se atribuie sens dacă:
a) $\lim\limits_{x\to a, x\in A} f(x) = 0$ şi $\lim\limits_{x\to a, x\in A} g(x) = 0$.b) $\lim\limits_{x\to a, x\in A} f(x) = 1$ şi $\lim\limits_{x\to a, x\in A} g(x) = \pm\infty$.
c) $\lim\limits_{x\to a, x\in A} f(x) = \pm\infty$ şi $\lim\limits_{x\to a, x\in A} g(x) = 0$.

Teorema 5.1.12. (**limitele unor funcţii elementare-**cu interpretări pe reprezentările grafice din Anexa 4)

$1°$. Funcţii polinomiale. Fie $a_0, ..., a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$ şi
$P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $P(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$. Atunci
$\boxed{\lim\limits_{x\to a} P(x) = P(a), \text{ dacă } a \in \mathbb{R};}$ $\boxed{\lim\limits_{x\to +\infty} P(x) = a_n \cdot (+\infty)^n}$; $\boxed{\lim\limits_{x\to -\infty} P(x) = a_n \cdot (-\infty)^n}$

$2°$. Funcţii raţionale. Fie $a_0, ..., a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$ şi $b_0, ..., b_m \in \mathbb{R}$, $b_m \neq 0$
$\dfrac{P}{Q} : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\dfrac{P}{Q}(x) = \dfrac{a_0 + a_1 x + ... + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + ... + b_{m-1}x^{n-1} + b_m x^m}$. Atunci

$$\boxed{\lim\limits_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}, \text{ dacă } a \in \mathbb{R} \text{ a.î. } Q(a) \neq 0.}$$

$$\boxed{\lim\limits_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)} \text{se calculează cu } l_s(a), l_d(a), \text{ dacă } a \in \mathbb{R} \text{ a.î. } Q(a) = 0 \text{ şi } P(a) \neq 0.}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\begin{cases}\frac{a_n}{b_m}, & \text{dacă } m=n\\ 0, & \text{dacă } n<m\\ \left(\frac{a_n}{b_m}\right)(+\infty)^{n-m} & \text{dacă } n>m\end{cases};\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\begin{cases}\frac{a_n}{b_m}, & \text{dacă } m=n\\ 0, & \text{dacă } n<m\\ \left(\frac{a_n}{b_m}\right)(-\infty)^{n-m} & \text{dacă } n>m\end{cases}$$

3°. Funcţia radical.

$\boxed{\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{a},}$ pentru $n=2k, k\in\mathbb{N}^*$, dacă $a\in[0,+\infty[$.

$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[n]{x}=+\infty,}$ pentru $n=2k, k\in\mathbb{N}^*$.

$\boxed{\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{a},}$ pentru $n=2k+1, k\in\mathbb{N}^*$, dacă $a\in\mathbb{R}$.

$\boxed{\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sqrt[n]{x}=\pm\infty,}$ pentru $n=2k+1, k\in\mathbb{N}^*$.

4°. Funcţia putere

$\boxed{\lim\limits_{x\to a}x^r=a^r,}$ pentru $r\in\mathbb{R}$, dacă $a\in]0,+\infty[$.

$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}x^r=+\infty;\ \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}x^r=0,}$ pentru $r\in\mathbb{R}, r>0$;

$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}x^r=0,\ \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}x^r=0,}$ pentru $r\in\mathbb{R}, r<0$.

Comentariu: Folosind funcţia ln de mai jos$\Rightarrow$

$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}x^r=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{r\ln x}=e^{r(+\infty)},}$ pentru $r\in\mathbb{R}$, $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}x^r=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}e^{r\ln x}=e^{r(-\infty)},}$ pentru $r\in\mathbb{R}$.

5°. Funcţia exponenţială

$\boxed{\lim\limits_{x\to a}q^x=q^a,}$ pentru $q\in\mathbb{R}, q>0, q\neq1$, dacă $a\in\mathbb{R}$.

$\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}q^x=0;\ \lim\limits_{x\to+\infty}q^x=+\infty;\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^n}{q^x}=0, n\in\mathbb{Z}^*,}$ pentru $q\in\mathbb{R}, q>1$.

$\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}q^x=+\infty;\ \lim\limits_{x\to+\infty}q^x=0,}$ pentru $q\in\mathbb{R}, 0<q<1$.

6°. Funcţia logaritmică

$\boxed{\lim\limits_{x\to a}\log_q x=\log_q a,}$ pentru $q\in\mathbb{R}, q>0, q\neq1$, dacă $a\in]0,+\infty[$.

$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\log_q x=+\infty;\ \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\log_q x=-\infty,}$ pentru $q\in\mathbb{R}, q>1$.

$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\log_q x}{x^r}=0, r>0;\ \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}x^r\left(\log_q x\right)=0, r>0,}$ pentru $q\in\mathbb{R}, q>1$,

$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\log_q x=-\infty;\ \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\log_q x=+\infty,}$ pentru $q\in\mathbb{R}, 0<q<1$.

7°. Funcţii trigonometrice şi funcţii hiperbolice

$\boxed{\lim\limits_{x\to a}(\sin x)=\sin a,}$ dacă $a\in\mathbb{R}$. $\boxed{\nexists\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin x),\nexists\lim\limits_{x\to-\infty}(\sin x).}$

$\boxed{\lim\limits_{x\to a}(\cos x)=\cos a,}$ dacă $a\in\mathbb{R}$. $\boxed{\nexists\lim\limits_{x\to+\infty}(\cos x),\nexists\lim\limits_{x\to-\infty}(\cos x).}$

$\boxed{\lim\limits_{x\to a}\operatorname{tg}x=\operatorname{tg}a,}$ dacă $a\in\mathbb{R}$, $a\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$. $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\x<\frac{\pi}{2}}}\operatorname{tg}x=+\infty,\ \lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\x>\frac{\pi}{2}}}\operatorname{tg}x=-\infty.}$

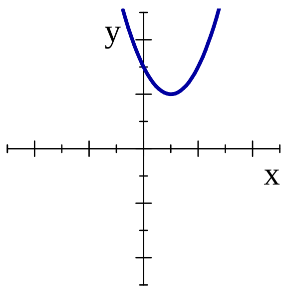
$\boxed{\lim\limits_{x\to a}(\operatorname{ctg} x)=\operatorname{ctg} a,}$ dacă $a\in\mathbb{R},\ a\neq k\pi, k\in\mathbb{Z}.$ $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}(\operatorname{ctg} x)=-\infty,\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(\operatorname{ctg} x)=+\infty.}$

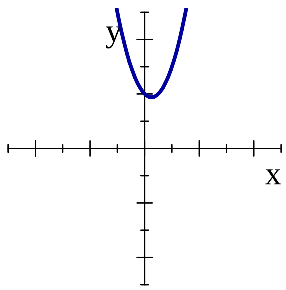
$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}(\operatorname{arcctg} x)=0,\ \lim\limits_{x\to-\infty}(\operatorname{arcctg} x)=\pi.}$ $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}(\operatorname{arctg} x)=\frac{\pi}{2},\ \lim\limits_{x\to-\infty}(\operatorname{arctg} x)=-\frac{\pi}{2}.}$

Observaţie: $\boxed{\text{Toate formulele au loc cu } x \text{ înlocuit cu } u(x) \text{ cu limita corespunzătoare.}}$

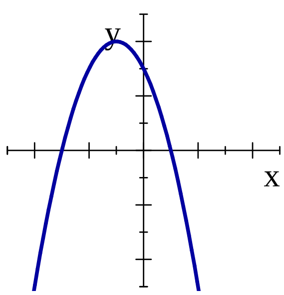
Exemple cu interpretări grafice:

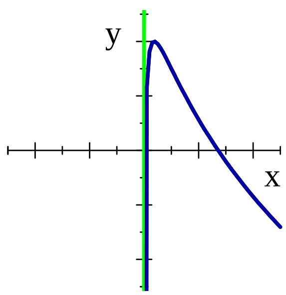
1°. **a)** $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2-2x+3\right)=1^2-2\cdot 1+3=2;$**b)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x^2-x+2\right)=+\infty;$





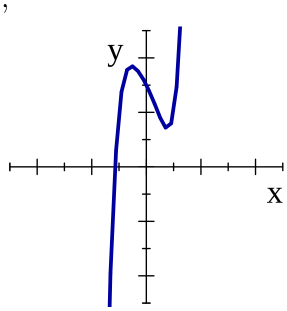
c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^2-2x+3\right)=-\infty;$**d)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-(\ln x)^2-2(\ln x)+3\right)\underset{\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=\infty}{\overset{u(x)=\ln x}{=}}-\infty;$





e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x^2-2x+3\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2\left(2-\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)=(-\infty)^2\cdot(2-0+0)=+\infty;$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x^5-x^2-2x+3\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^5\left(2-\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{2}{x^4}+\dfrac{3}{x^5}\right)=(-\infty)^5\cdot(2-0-0+0)=-\infty;$

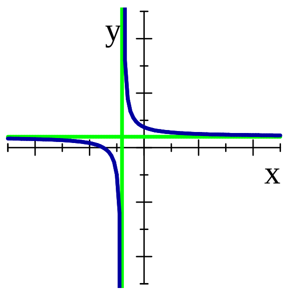


g) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2x^2-2x+3\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2\left(-2-\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)=(-\infty)^2\cdot(-2-0+0)=-\infty;$

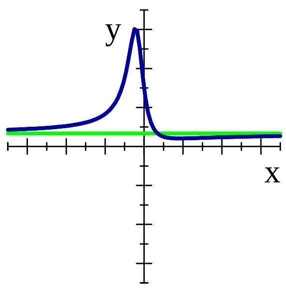
h) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2x^5-x^2-2x+3\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^5\left(-2-\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{2}{x^4}+\dfrac{3}{x^5}\right)=(-\infty)^5\cdot(-2-0-0+0)=+\infty;$

2°. **a)** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x+3}{5x+4}=\dfrac{2\cdot 3+3}{5\cdot 3+4}=\dfrac{9}{19}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+3}{5x+4}=\dfrac{2}{5}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+3}{5x+4}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\left(2+\frac{3}{x}\right)}{x\left(5+\frac{4}{x}\right)}=\dfrac{2}{5}$;

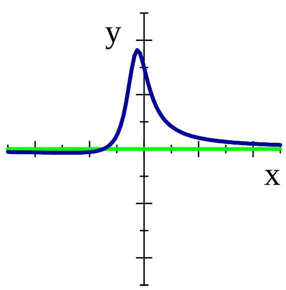
$\lim\limits_{\substack{x\to\frac{-4}{5}\\ x<\frac{-4}{5}}}\dfrac{2x+3}{5x+4}=\dfrac{2\cdot\frac{-4}{5}+3}{0_-}=-\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{-4}{5}\\ x>\frac{-4}{5}}}\dfrac{2x+3}{5x+4}=\dfrac{2\cdot\frac{-4}{5}+3}{0_+}=+\infty$;



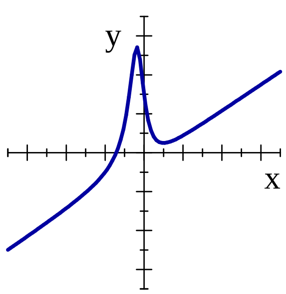
b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-2x+3}{3x^2+2x+1}=\dfrac{2\cdot 1^2-2\cdot 1+3}{3\cdot 1^2+2\cdot 1+1}=\dfrac{1}{2}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2-2x+3}{3x^2+2x+1}=\dfrac{2}{3}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2-2x+3}{3x^2+2x+1}=\dfrac{2}{3}$



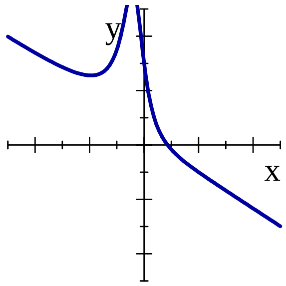
c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+3}{3x^2+2x+1}=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+3}{3x^2+2x+1}=0$;



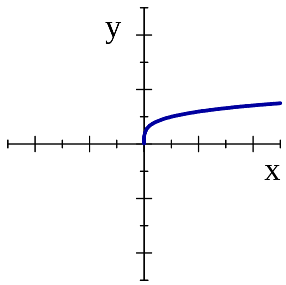
d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3-2x+3}{3x^2+2x+1}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3-2x+3}{3x^2+2x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3\left(2-\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}\right)}{x^2\left(3+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=(-\infty)\cdot\frac{2}{3}=-\infty$;



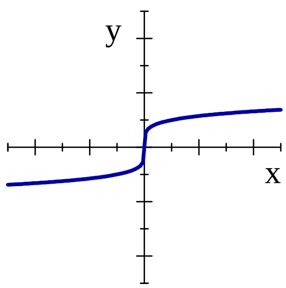
e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x^3-2x+3}{3x^2+2x+1}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x^3-2x+3}{3x^2+2x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3\left(-2-\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}\right)}{x^2\left(3+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=$
$=(-\infty)\cdot\frac{-2}{3}=+\infty$;



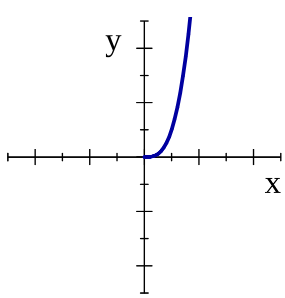
3°. **a)** $\lim\limits_{x\to2}\sqrt[4]{x}=\sqrt[4]{2}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[4]{x}=+\infty$;



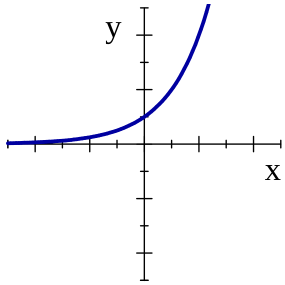
b) $\lim\limits_{x\to-2}\sqrt[5]{x}=\sqrt[5]{-2}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[5]{x}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[5]{x}=-\infty$;



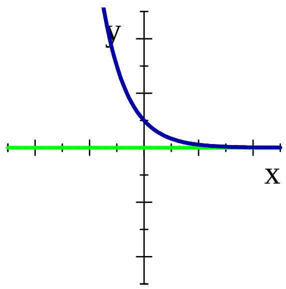
4°.**a)** $\lim\limits_{x\to7}x^\pi=7^\pi$; $\lim\limits_{x\to+\infty}x^\pi=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\pi\ln x}=e^{\pi(+\infty)}=+\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}x^\pi=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}e^{\pi\ln x}=e^{\pi(-\infty)}=0.$



5°. **a)** $\lim\limits_{x\to 7} 2^x = 2^7$; $\lim\limits_{x\to -\infty} 2^x = 0$, $\lim\limits_{x\to +\infty} 2^x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^7}{2^x} = 0, n = 7 \in \mathbb{Z}$

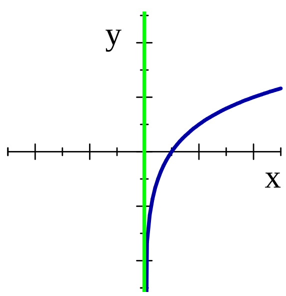


b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x = 0$.

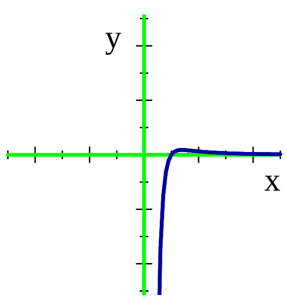


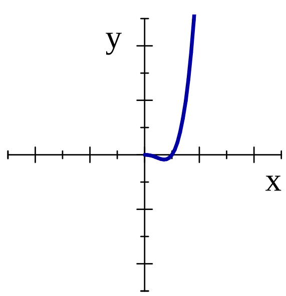
c) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\frac{7\pi}{2000}\right)^x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{7\pi}{2000}\right)^x = 0$.

6°. **a)** $\lim\limits_{x\to 7} (\log_2 x) = \log_2 7$, $\lim\limits_{x\to +\infty} (\log_2 x) = +\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (\log_2 x) = -\infty$,

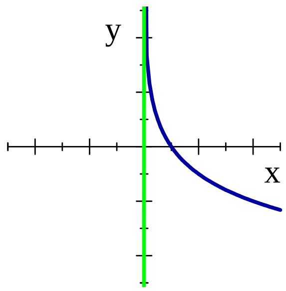


b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\log_2 x}{x^3} = 0, r = 3 > 0$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^3 (\log_2 x) = 0, r = 3 > 0$,

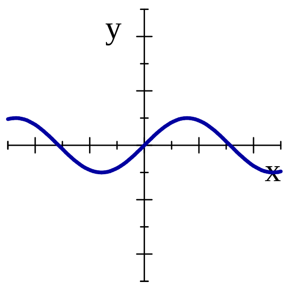


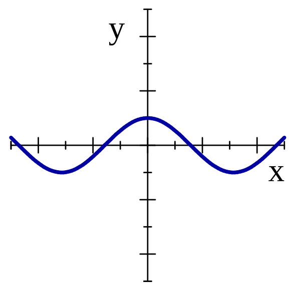


c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\log_{\frac{1}{2}} x\right) = -\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(\log_{\frac{1}{2}} x\right) = +\infty$.

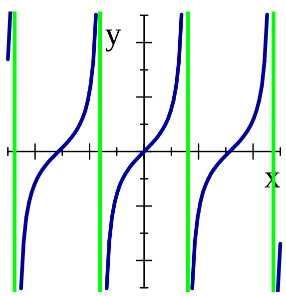


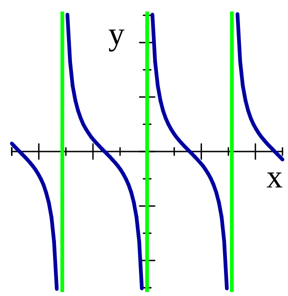
7°. **a)** $\begin{cases} \lim\limits_{x\to\pi}(\sin x) = \sin\pi = 0; \\ \nexists \lim\limits_{x\to+\infty}(\sin x), \nexists \lim\limits_{x\to-\infty}(\sin x). \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0}(\cos x) = \cos 0 = 1; \\ \nexists \lim\limits_{x\to+\infty}(\cos x), \nexists \lim\limits_{x\to-\infty}(\cos x). \end{cases}$



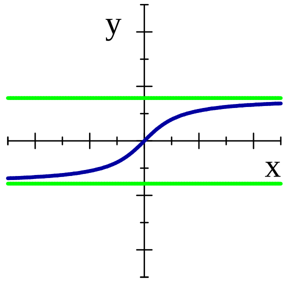


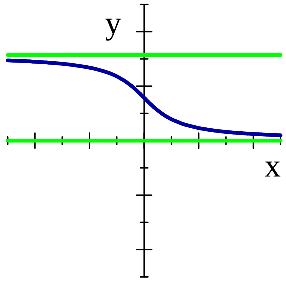
c) $\begin{cases} \lim\limits_{x\to\pi} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\pi = 0; \\ \lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2} \\ x<\frac{\pi}{2}}} \operatorname{tg} x = +\infty, \lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2} \\ x>\frac{\pi}{2}}} \operatorname{tg} x = -\infty. \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{ctg} x) = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = 1; \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x<0}}(\operatorname{ctg} x) = -\infty, \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}}(\operatorname{ctg} x) = +\infty. \end{cases}$





e) $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}(\operatorname{arctg} x) = \frac{\pi}{2}, \\ \lim\limits_{x\to-\infty}(\operatorname{arctg} x) = -\frac{\pi}{2}. \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}(\operatorname{arcctg} x) = 0, \\ \lim\limits_{x\to-\infty}(\operatorname{arcctg} x) = \pi. \end{cases}$





Teorema 5.1.13. (**limite remarcabile**)

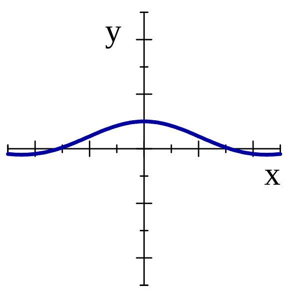
1°. $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1;\ \lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin u(x)}{u(x)}=1,\ \text{dacă}\ \lim\limits_{x\to a}u(x)=0.}$

$\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}=1;\ \lim\limits_{x\to a}\dfrac{\operatorname{tg} u(x)}{u(x)}=1,\ \text{dacă}\ \lim\limits_{x\to a}u(x)=0.}$

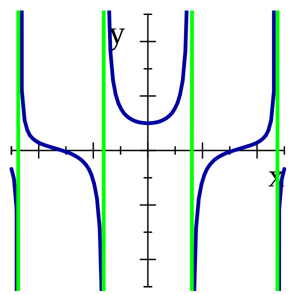
$\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1;\ \lim\limits_{x\to a}\dfrac{\arcsin u(x)}{u(x)}=1,\ \text{dacă}\ \lim\limits_{x\to a}u(x)=0.}$

$\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}=1;\ \lim\limits_{x\to a}\dfrac{\operatorname{arctg} u(x)}{u(x)}=1,\ \text{dacă}\ \lim\limits_{x\to a}u(x)=0.}$

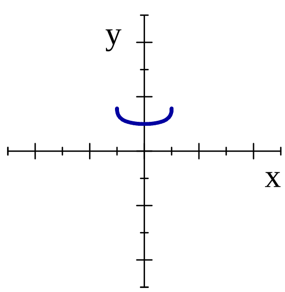
$f:A\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$:



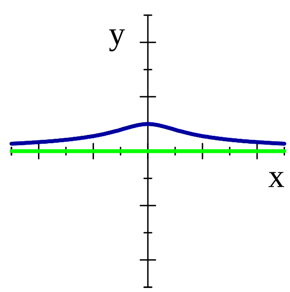
$f:A\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$:



$f:A\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{\arcsin x}{x}$:

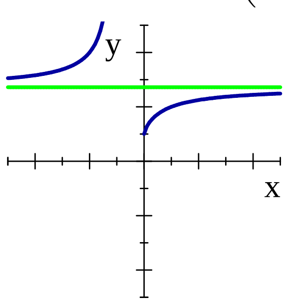


$f:A\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}$:



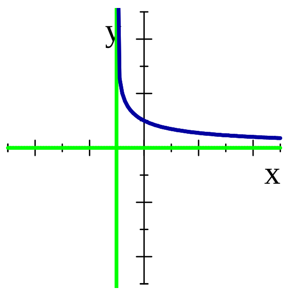
2°. $\boxed{\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e;\ \lim\limits_{x\to a}\left(1+\dfrac{1}{u(x)}\right)^{u(x)}=e,\ \text{dacă}\ \lim\limits_{x\to a}u(x)=+\infty.}$

$f:A\to\mathbb{R}, f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}$:



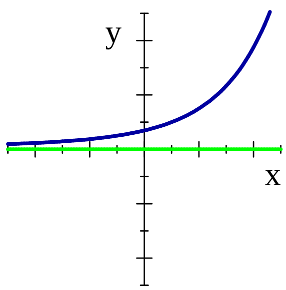
3°. $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1;\ \lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln(1+u(x))}{u(x)}=1,\text{ dacă }\lim\limits_{x\to a}u(x)=0.}$

$f:A\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$:



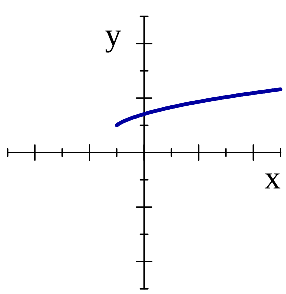
4°. $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a,\ a>0;\ \lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^{u(x)}-1}{u(x)}=\ln a,\ a>0,\text{ dacă }\lim\limits_{x\to a}u(x)=0.}$

$f:A\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{2^x-1}{x}$:

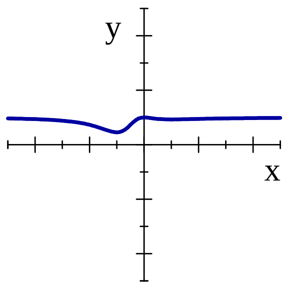


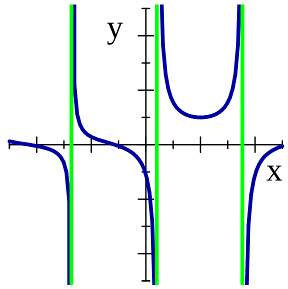
5°. $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^r-1}{x}=r,\ r\in\mathbb{R};\ \lim\limits_{x\to a}\dfrac{(1+u(x))^r-1}{u(x)}=r,\ r\in\mathbb{R},\text{ dacă }\lim\limits_{x\to a}u(x)=0.}$

$f:A\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{(1+x)^{\sqrt{2}}-1}{x}$:

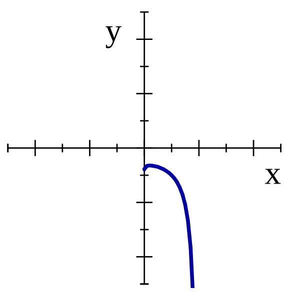


Exemple: 1°. **a)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin\frac{2x}{x^2+x+1}}{\frac{2x}{x^2+x+1}}=1$; **b)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\operatorname{tg}(x-2)}{x-2}=1$;

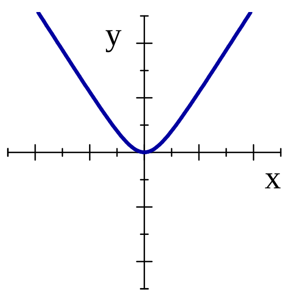




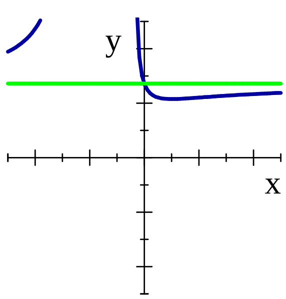
c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\arcsin(x-1)}{x^2-3x+2} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\arcsin(x-1)}{x-1} \cdot \dfrac{x-1}{(x-1)(x-2)} = 1 \cdot \frac{1}{1-2} = -1;$

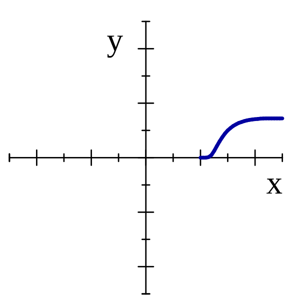


d) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1.$

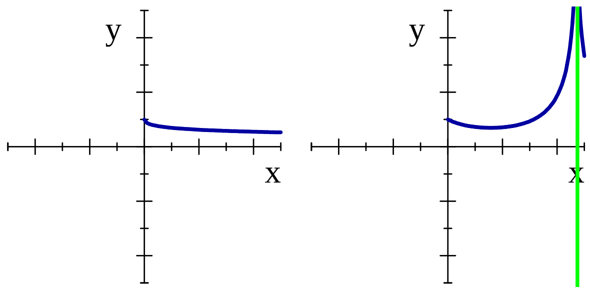


2°. **a)** $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1 + \dfrac{2x}{x^2+x+1}\right)^{\dfrac{x^2+x+1}{2x}} = e$; **b)** $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} (1+(x-3))^{\dfrac{1}{x-3}} = e.$



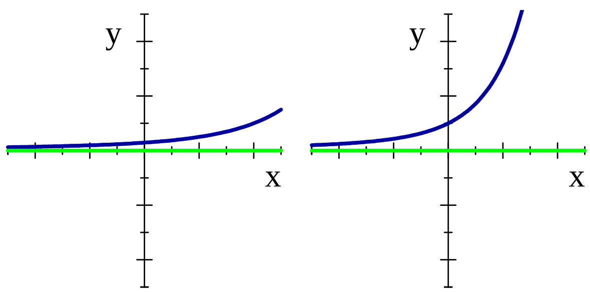


3°. **a)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = 1.$ **b)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\ln(1+\sin x)}{\sin x} = 1$



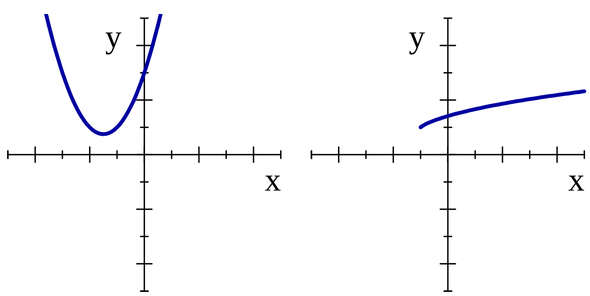
c) $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x>4}} \dfrac{\ln(x-3)}{x-4} = \lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x>4}} \dfrac{\ln(1+(x-4))}{x-4} = 1.$

4°. **a)** $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} \dfrac{2^{x-3}-1}{x-3} = \ln 2;$ **b)** $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x}-1}{x} = \ln e = 1}$



c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^{x-x^2}-1}{x-x^2} = \ln e = 1;$**d)** $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(2^{\frac{1}{x}}-1\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}} = \ln 2;$

5°. **a)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^3-1}{x} = 3;$ **b)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{(1+x)^{\sqrt{2}}-1}{x} = \sqrt{2};$



c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{(1+\sqrt{x})^7-1}{\sqrt{x}} = 7;$ **d)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\left(1+\frac{1}{\ln x}\right)^{\frac{3}{2}}-1}{\frac{1}{\ln x}} = \frac{3}{2}.$

6.1. Funcţii $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue în $a \in A$

De recapitulat din manualul de liceu.

Se reamintesc unele noţiuni şi enunţuri (schiţă, fără demonstraţii).

Definiţia 6.1.1. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in A$.

a) Funcţia f *este continuă în punctul* a dacă

$[\forall V \in \mathcal{V}(f(a)), \exists U = U_V \in \mathcal{V}(a)$ a.î. $\forall x \in A \cap U \Rightarrow f(x) \in V]$.

b) Funcţia f este *continuă pe mulţimea* A dacă este continuă în fiecare punct a al mulţimii A.

Observaţia 6.1.1. De menţionat câteva deosebiri între definiţia limitei unei funcţii într-un punct şi definiţia continuităţii funcţiei într-un punct:

a) În definiţia limitei unei funcţii într-un punct a se impune $x \neq a$, în definiţia continuităţii nu.

b) În definiţia limitei unei funcţii într-un punct a, $a \in A'$ (este punct de acumulare pentru A), dar a nu aparţine în mod necesar mulţimii A. De exemplu, dacă $A =]a, b[\,, a$ şi b finite, se poate pune problema existenţei limitei în a şi în b, dar nu se poate pune problema continuităţii în aceste puncte. Iar dacă $A =]-\infty, +\infty[\,$, se poate pune problema existenţei limitei în $-\infty$ şi în ∞, dar nu se poate pune problema continuităţii în aceste puncte.

c) Dacă a este punct izolat în A, problema limitei nu se poate pune, dar problema continuităţii se poate pune.

Teorema 6.1.1. (**legătura dintre continuitate şi existenţa limitei**)

Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $a \in A$. Atunci f este continuă în $a \Leftrightarrow$

-dacă $a \in A \cap A', \exists \lim\limits_{x \to a, x \in A} f(x) = f(a) \in \mathbb{R}$;

-dacă $a \in A \setminus A'$, adică este punct izolat, f este continuă (deoarece se verifică Definiţia).

Teorema 6.1.2.(**criteriul-CNS în limbaj $\varepsilon - \delta$ de continuitate**)

Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $a \in A$. Atunci f este continuă în $a \Leftrightarrow$

$[\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ a.î. $\forall x \in A$ cu $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon]$.

Teorema 6.1.3. (**criteriul-CNS de continuitate cu şiruri**)

Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $a \in A$. Atunci f este continuă în $a \Leftrightarrow$

$[\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}_m}$ un şir de numere reale din A, cu $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(a)]$.

Definiţia 6.1.2. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in A$.

a) Punctul a este *punct de continuitate a funcţiei* f, dacă f este continuă în punctul a.

b) Punctul a este *punct de discontinuitate a funcţiei* f, dacă f nu este continuă în punctul a

c) Punctul a este *punct de discontinuitate de speţa întâi a funcţiei* f, dacă f este are limite laterale finite în a şi diferite sau are limite laterale finite şi egale dar diferite de $f(a)$.

d) Punctul a este *punct de discontinuitate de speţa a doua a funcţiei* f, dacă a este punct de discontinuitate pentru f care nu este de speţa întâi (în acest caz cel puţin una din limitele laterale nu există sau este infinită).

Exemplul 6.1.1. a) Fie *funcţia Dirichlet*:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in \mathbb{Q} \\ -1, & \text{dacă } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

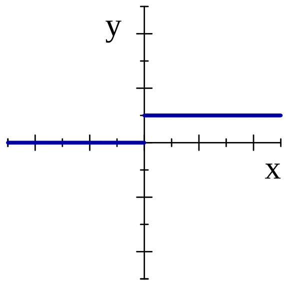
În niciun punct $a \in \mathbb{R}$, funcţia f nu este continuă.

b) Fie *funcţia Heaviside*:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x < 0 \\ 1, & \text{dacă } x \geq 0 \end{cases}$$

În punctele $a \in]-\infty, 0[\,$, respectiv $a \in]0, +\infty[$ funcţia este continuă.

În punctul $a = 0$ funcţia este discontinuă, deoarece are limita la stânga $\lim\limits_{x \to 0, x < 0} f(x) = 0$ şi limita la dreapta $\lim\limits_{x \to 0, x > 0} f(x) = 1$, cu $0 \neq 1$. Acest punct de discontinuitate este de speţa întâi.

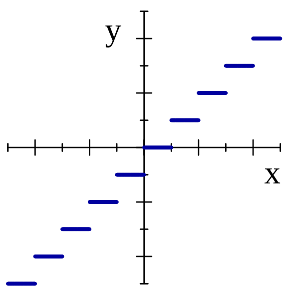


Exemplul 6.1.2. Fie *funcţia parte întreagă*:

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=[x]$.

În punctele $a\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ funcţia este continuă $\lim\limits_{x\to a} f(x)=n=f(a)$, dacă $n<a<n+1$.

În punctele $a=n\in\mathbb{Z}$ funcţia nu este continuă deoarece are are limita la stânga $\lim\limits_{x\to n,x<n} f(x)=n-1$ şi limita la dreapta $\lim\limits_{x\to n,x>n} f(x)=n$. Aceste puncte de discontinuitate sunt de speţa întâi.

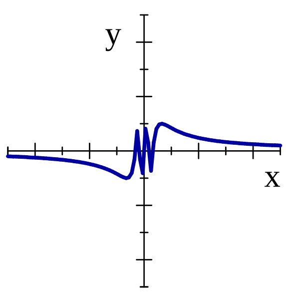


Exemplul 6.1.3. Fie funcţia:

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x} & \text{dacă } x\neq 0\\ 0, & \text{dacă } x=0\end{cases}$

În punctele $a\in\,]-\infty,0[\,\cup\,]0,+\infty[$ funcţia este continuă deoarece $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\sin\frac{1}{a}=f(a)$.

În punctul $a=0$ funcţia nu are limită la stânga şi nici la dreapta, $a=0$ este punct de discontinuitate de speţa a doua.



Definiţia 6.1.3. Fie $f:A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Fie $\widetilde{a}\in A'$ un punct de acumulare astfel încât $\widetilde{a}\notin A$ şi $\exists\lim\limits_{x\to\widetilde{a},x\in A} f(x)=l(\widetilde{a})\in\mathbb{R}$. Funcţia

$\widetilde{f}:A\cup\{\widetilde{a}\}\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ \widetilde{f}(x)=\begin{cases}f(x) & \text{dacă } x\in A\\ l(\widetilde{a}) & \text{dacă } x=\widetilde{a}\end{cases}$

se numeşte *prelungirea funcţiei* f *prin continuitate în punctul* $\widetilde{a}$.

Exemplul 6.1.4. Fie funcţia:

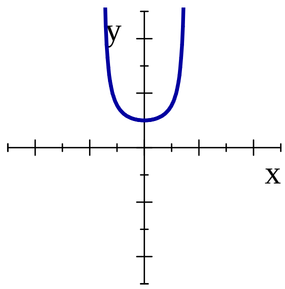
$$f : \left]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x}.$$

Cum $0 \in \left(\left]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\}\right)'$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = 1 \Rightarrow f$ se poate prelungi prin continuitate în $\widetilde{a} = 0$.

Prelungirea funcţiei f,

$$\widetilde{f} : \left]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right[\subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \widetilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} & \text{dacă } x \in \left]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\} \\ 1 & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

este continuă pe $\left]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right[$.



Teorema 6.1.4. (**operaţii cu funcţii continue în punct**) Fie $f, g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in A$. Se presupune că funcţiile f şi g sunt continue în a. Atunci

1°. Funcţia sumă $f + g$ este continuă în a. Mai mult, $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, funcţia $\alpha f + \beta g$ este continuă în a.

2°. Funcţia modul $|f|$ este continuă în a.

3°. Funcţia produs $f \cdot g$, dacă este definită, este continuă în a.

4°. Funcţia cât $\dfrac{f}{g}$, dacă este definită, este continuă în a.

5°. Funcţia putere f^g, dacă este definită, este continuă în a.

6°. Funcţiile $\max(f, g)$, $\min(f, g)$ sunt continue în a.

Teorema 6.1.5. (**operaţii cu funcţii continue pe o mulţime**) Fie $f, g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se presupune că funcţiile f şi g sunt continue pe A. Atunci

1°. Funcţia sumă $f + g$ este continuă pe A. Mai mult, $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, funcţia $\alpha f + \beta g$ este continuă pe A.

2°. Funcţia modul $|f|$ este continuă pe A.

3°. Funcţia produs $f \cdot g$, dacă este definită, este continuă pe A.

4°. Funcţia cât $\dfrac{f}{g}$, dacă este definită, este continuă pe A.

5°. Funcţia putere f^g, dacă este definită, este continuă pe A.

6°. Funcţiile $\max(f, g)$, $\min(f, g)$ sunt continue pe A.

Funcţiile continue pe un interval au proprietatea importantă că nu pot trece de la o valoare la alta fără a trece prin toate valorile intermediare, adică dacă iau două valori diferite atunci iau toate valorile cuprinse între ele. Această proprietate a funcţiilor continue se numeşte proprietatea lui Darboux.

○**Definiţia 6.1.3**. Fie $f : \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, unde $\mathbb{I}$ este un interval. Funcţia f are *proprietatea lui Darboux pe* $\mathbb{I}$ dacă, oricare ar fi punctele $a, b \in \mathbb{I}$, $a < b$, şi oricare ar fi numărul λ cuprins între $f(a)$ şi $f(b)$, există un punct c_λ cuprins între a şi b astfel încât $f(c_\lambda) = \lambda$.

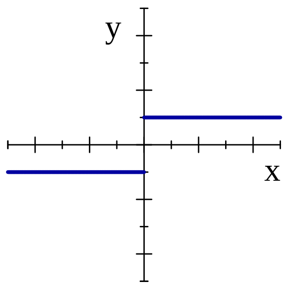
○**Teorema 6.1.6**. (**Cauchy-Weierstrass-Bolzano**) Fie $f : \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, unde $\mathbb{I}$ este un interval.

Dacă f este continuă pe $\mathbb{I}$, atunci f are proprietatea lui Darboux pe $\mathbb{I}$.

$\bigcirc$**Observaţia 6.1.3**. Condiţia ca funcţia să fie definită pe un interval este esenţială. Dacă funcţia este definită pe o mulţime care este o reuniune de intervale disjuncte, este posibil ca funcţia să ia valori diferite, dar să nu aibă nici o valoare intermediară. De exemplu, funcţia

$$f :]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[\to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} -1, & \text{dacă } x < 0 \\ 1, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$$

este continuă pe domeniul ei de definiţie, ia numai valorile -1 şi 1 şi nu mai ia nici-o valoare intermediară.



$\bigcirc$**Observaţia 6.1.4**. Proprietatea lui Darboux nu este o caracteristică numai a funcţiilor continue. Darboux a dat un exemplu de funcţie care are această proprietate şi care nu este continuă în nici un punct. Fie un exemplu de funcţie discontinuă într-un punct şi care are proprietatea lui Darboux:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}.$$

Teorema 6.1.7. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $a \in A$. Dacă $f(a) \neq 0$ şi f este continuă în a, atunci există $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât

$$f(x) \cdot f(a) > 0, \forall x \in A \cap U.$$

Teorema 6.1.8. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $a \in A$. Dacă f este continuă în a, atunci există $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât f să fie mărginită pe U.

Teorema 6.1.9. Fie $f : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dacă f este continuă pe $[a,b]$ şi ia valori de semne contrare în capetele, atunci există cel puţin un $c, a < c < b$ astfel încât $f(c) = 0$.

Demonstraţie. Afirmaţia teoremei rezultă folosind Teorema Cauchy-Weierstass-Bolzano.

Teorema 6.1.10. Fie $f : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dacă f este continuă pe $[a,b]$, atunci f este mărginită pe $[a,b]$.

Teorema 6.1.11. (**Teorema lui Weierstrass**) Fie $f : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dacă f este continuă pe $[a,b]$, atunci f îşi atinge marginile pe $[a,b]$, adică $\exists \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ şi $\exists \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $a \in A$. De precizat că f este continuă pe mulţimea A dacă f este continuă în fiecare punct $a \in A$, adică

$$[\forall a \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon, a) > 0 \text{ a.î. } \forall x \in A \text{ cu } |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon].$$

Definiţia 6.1.4. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Funcţia f *este uniform continuă pe mulţimea* A dacă

$$[\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ a.î. } .\forall x', x'' \in A \text{ cu } |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon].$$

Din punct de vedere **geometric**, a spune că f este uniform continuă pe A înseamnă că, dacă Se alege pe axa Ox un interval $\mathbb{I}$ de lungime $< \delta$ oarecare în A, imaginea sa $f(\mathbb{I})$ are lungimea $< \varepsilon$.

Exemplul 6.1.5. Fie funcţia

$$f : [1,3] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2.$$

Funcţia f este uniform continuă pe $[1,3]$. Într-adevăr:

Fie $\varepsilon > 0$. Se caută $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ a.î. $\forall x', x'' \in [1,3]$ cu $|x' - x''| < \delta$ să rezulte

$$|f(x') - f(x'')| = \left|(x')^2 - (x'')^2\right| = |x' + x''| \cdot |x' - x''| \leq$$
$$\leq (|x'| + |x''|)\,|x' - x''| \overset{x',x'' \in [1,3]}{\leq} (3+3)\,|x' - x''| \underset{\text{rămâne } \delta}{\overset{\text{scap de } x',x'',}{<}} 6\delta < \varepsilon$$

Deci se caută δ astfel încât

$$0 < \delta < 6\varepsilon.$$

Din Teorema de densitate a $\mathbb{R}$ în $\mathbb{R}$, între numerele reale 0 şi 6ε există un astfel de δ. Se poate alege, de exemplu, $\delta = \frac{1}{2}6\varepsilon = 3\varepsilon$.

Observaţia 6.1.5. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Funcţia f *nu este uniform continuă pe* A dacă

$[\exists\,(x'_n)_{n\in\mathbb{N}_m}, \exists\,(x''_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ şiruri de numere reale din A, cu $\lim\limits_{n\to\infty} |x'_n - x''_n| = 0$, dar $\lim\limits_{n\to\infty} |f(x'_n) - f(x''_n)|$ sau nu există sau este $\neq 0]$.

De exemplu funcţia

$$f : (0,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin\frac{1}{x}$$

nu este uniform continuă pe $]0,1]$. Într-adevăr, se alege

$$x'_n = \frac{1}{\left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi},\ n \in \mathbb{N} \text{ şi } x''_n = \frac{1}{\left(2n + \frac{3}{2}\right)\pi}, n \in \mathbb{N},$$

şiruri din $(0,1]$ cu

$$\lim_{n\to\infty} |x'_n - x''_n| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{\left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi} - \frac{1}{\left(2n + \frac{3}{2}\right)\pi}\right| = 0, \text{ dar}$$
$$\lim_{n\to\infty} |f(x'_n) - f(x''_n)| = \lim_{n\to\infty} \left|\sin\left(2n + \tfrac{1}{2}\right)\pi - \sin\left(2n + \tfrac{3}{2}\right)\pi\right| = \lim_{n\to\infty} 2 = 2.$$

Teorema 6.1.12. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dacă f este uniform continuă pe A, atunci f este continuă pe A.

Teorema 6.1.13. (**Teorema lui Cantor**) Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dacă A este mulţime compactă în $\mathbb{R}$ (mărginită şi închisă) f este funcţie continuă pe A, atunci f este uniform continuă pe A.