CURS NR. 5
Analiză matematică, AIA

7.1. Teoria derivabilităţii pentru $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ în $a \in A \cap A'$

De recapitulat din manualul de liceu. Se reamintesc unele noţiuni şi enunţuri (schiţă, fără demonstraţii).

De precizat că A' este mulţimea punctelor de acumulare a mulţimii A.

Derivata de ordinul întâi.

Euristică. Au existat două probleme, una fizică (modelarea matematică a noţiunii intuitive de viteză a unui mobil- a se vedea filmul "Calculus", propus de profesor Eugene Khutoryansky,

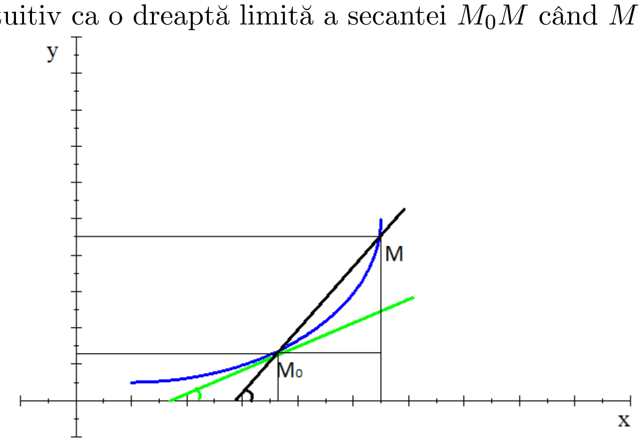
https://www.youtube.com/watch?v=rjLJIVoQxz4 minutele 0-11.38)

şi alta geometrică (determinarea pantei dreptei tangente într-un punct la o curbă plană) care au condus la introducerea noţiunii de derivată.

Geometric: Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuă în $a \in A$, A fiind un interval. Se reprezintă geometric graficul lui f,

$G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \in A \text{ şi } y = f(x)\}$,

şi se notează tot cu G_f reprezentarea sa. Fie $M_0(a, f(a))$ şi $M(x, f(x))$ pe $G_f, x \neq a$. Dreapta tangentă la G_f în M_0 este o dreaptă ce trece prin M_0 şi intersectează G_f doar în M_0, obţinută intuitiv ca o dreaptă limită a secantei M_0M când M tinde la M_0.



Secanta M_0M are panta (coeficientul unghiular)

$\operatorname{tg}\beta = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \Rightarrow$dacă există $m = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$,

atunci $m = \operatorname{tg}\alpha$ este panta dreptei tangente în M_0 la G_f, de ecuaţie

$(d) : y - f(a) = m(x - a)$.

(dacă $m = +\infty$ sau $m = -\infty$, tangenta în M_0 la G_f este verticală).

Definiţia 7.1.1. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in A \cap A'$.

a) Funcţia f *are derivată în punctul* $a \in A \cap A'$ dacă

$\exists \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \overset{\text{not.}}{=} f'(a) \in \overline{\mathbb{R}}$.

b) Funcţia f *este derivabilă în punctul* $a \in A \cap A'$ dacă există limita anterioară şi este finită, $f'(a) \in \mathbb{R}$.

c) Funcţia f *este derivabilă pe mulţimea* $A \cap A'$ dacă este derivabilă în fiecare $a \in A \cap A'$.

Observaţia 7.1.1. Din definiţia 7.1.1, făcând schimbarea de variabilă de trecere la limită $x - a = t \Rightarrow$dacă există $f'(a)$, atunci

$$f'(a) = \lim_{t\to 0, a+t\in A} \frac{f(a+t)-f(a)}{t}.$$

Observaţia 7.1.2. Dacă funcţia f este derivabilă pe mulţimea $A_1 \subset A \cap A'$, atunci se poate defini o funcţie $f' : A_1 \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care asociază fiecărui $x \in A_1$, numărul real $f'(x)$. Această funcţie se numeşte *funcţia derivată a lui* f. Se notează

$$f' = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(f).$$

Exemple de utilizare a operatorului de derivare în

a) Mecanică:

$v = \dfrac{dx}{dt}$, unde v =viteza, x =distanţa, t =timpul;

$a = \dfrac{dv}{dt}$, unde a =acceleraţia, v =viteza, t =timpul;

$F = \dfrac{dW}{dx}$, unde F =forţa, W =energia utilizată, x =distanţa în direcţia forţei;

$F = \dfrac{dp}{dt}$, unde F =forţa, p =impulsul, t =timpul;

$P = \dfrac{dW}{dt}$, unde P =puterea, W =energia utilizată, t =timpul;

$p = \dfrac{dE}{dv}$, unde p =impulsul, E =energia cinetică, v =viteza;

b) Gaze:

$p = \dfrac{dW}{dV}$, unde p =presiunea, W =energia utilizată pentru o expansiune izotermă, V =volumul;

c) Circuite:

$I = \dfrac{dQ}{dt}$, unde I =intensitatea, Q =sarcina electrică, t =timp;

$V = L\dfrac{dI}{dt}$, unde V =tensiunea într-un conductor, L =inductanţa, I =intensitatea, t =timp;

d) Electrostatică:

$E = -\dfrac{dV}{dx}$, unde E =câmpul electric, V =potenţialul, x =distanţa;

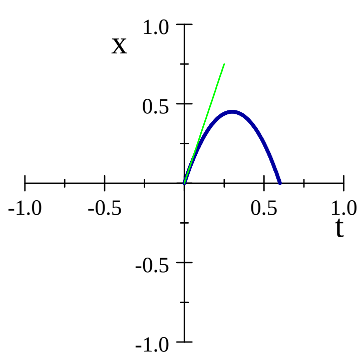
Exemplul 1.7.1. **a)** O minge este aruncată în aer. Înălţimea ei verifică legea $x(t) = 3t - 5t^2$. Să se determine

-viteza iniţială, cu care este aruncată în aer;

-timpul când se întoarce pe pământ;

-viteza finală, când loveşte pământul.

Rezolvare. $x(t) = 3t - 5t^2 \Rightarrow v(t) = \dfrac{dx}{dt}(t) = 3 - 10t.$



-mingea este aruncată în aer la $t = 0$, deci viteza iniţială, cu care este aruncată în aer este

$v(0) = 3(m/s)$. Se observă că dreapta care este tangentă la graficul funcţiei înălţime $x(t)$ în punctul $(t, x) = (0, 0)$ are panta $v(0) = 3 > 0$.

-mingea atinge pământul a doua oară când este la înălţimea $x = 0$, adică

$3t - 5t^2 = 0 \Rightarrow t = 0(s)$ (momentul aruncării) şi $t = \frac{3}{5} = 0.6(s)$ (momentul atingerii solului).

-viteza finală, când coboară şi loveşte pământul este negativă $v(0.6) = -3(m/s)$.

b) O rachetă spaţială se deplasează cu viteza $v(t) = 4t^2 + 10000m/s^2$ până iese din atmosfera Pământului. Să se determine acceleraţia după $2s$.

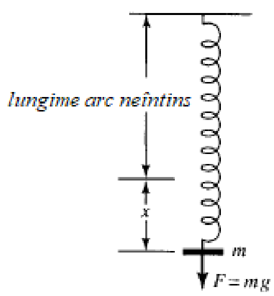
Rezolvare. $v(t) = 4t^2 + 10000 \Rightarrow a(t) = \dfrac{dv}{dt}(t) = 8t$.

Acceleraţia după două secunde este $a(2) = 16(m/s^2)$.

c) Energia stocată într-un arc întins de către greutatea unui corp de masă m, cu lungimea x în plus faţă de lungimea de repaus, este $W(x) = x^2(J)$. Forţa exercitată pentru a ţine întins arcul cu lungimea x este $F = G = mg$, unde m este masa corpului şi $g \simeq 10(m/s^2)$ acceleraţia gravitaţională. Ştiind că arcul este întins cu $0.5m$ şi că $F = \dfrac{dW}{dx}$, să se determine masa corpului ce întinde arcul.

Rezolvare. $W(x) = x^2 \Rightarrow F(x) = \dfrac{dW}{dx}(x) = 2x \Rightarrow F(0,5) = 2 \cdot 0.5 = 1(N)$.

Atunci $mg = 2x \Rightarrow m = \dfrac{2x}{g} \Rightarrow m = \dfrac{2 \cdot 0.5N}{10m/s^2} = 0.1kg$.



Definiţia 7.1.2. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

a) Funcţia f are *are derivată la stânga în punctul* $a \in A \cap A'_s$ dacă

$$\exists \lim_{x \to a, x < a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \overset{\text{not.}}{=} f'_s(a) \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Funcţia f *este derivabilă la stânga în punctul* $a \in A \cap A'_s$ dacă există limita anterioară şi este finită, $f'_s(a) \in \mathbb{R}$.

b) Funcţia f are *are derivată la dreapta în punctul* $a \in A \cap A'_d$ dacă

$$\exists \lim_{x \to a, x > a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \overset{\text{not.}}{=} f'_d(a) \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Funcţia f *este derivabilă la dreapta în punctul* $a \in A \cap A'_d$ dacă există limita anterioară şi este finită, $f'_d(a) \in \mathbb{R}$.

Teorema 7.1.1. (**CNS de existenţă a derivatei cu derivate laterale**)

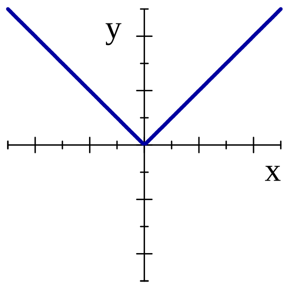
Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in A \cap A'$. Atunci f este derivabilă în $a \in A \cap A'$ şi are derivata $f'(a) \Leftrightarrow$

$[f$ este derivabilă la stânga în $a \in A \cap A'$, cu derivata la stânga $f'_s(a)$, f este derivabilă la dreapta în $a \in A \cap A'$, cu derivata la dreapta $f'_d(a)$ şi $f'_s(a) = f'_d(a) = f'(a)]$.

Teorema 7.1.2. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in A \cap A'$. Dacă f este derivabilă în $a \in A \cap A'$ atunci f este continuă în a.

Observaţia 7.1.3. Există funcţii continue într-un punct care nu sunt derivabile în acel punct.

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=|x|=\begin{cases}-x, & \text{dacă } x<0\\ 0, & \text{dacă } x=0\\ x, & \text{dacă } x>0\end{cases}$



Se observă că f este continuă în $a=0$. Dar

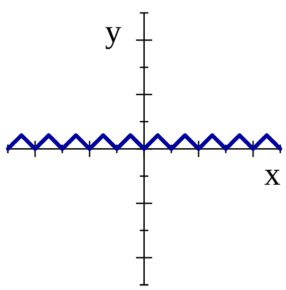
$$\exists \lim_{x\to 0, x<0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0, x<0} \frac{-x-0}{x-0} = -1 = f'_s(0),$$
$$\exists \lim_{x\to 0, x>0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0, x>0} \frac{x-0}{x-0} = 1 = f'_d(0).$$

Mai mult, $f'_s(0)\neq f'_d(0) \Rightarrow f$ nu este derivabilă în $a=0$.

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\min\limits_{k\in\mathbb{Z}}|x-k|$ .Se observă că:

$$f(x)=\begin{cases}x, & \text{dacă } 0<x<\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}, & \text{dacă } x=\frac{1}{2}\\ 1-x, & \text{dacă } \frac{1}{2}<x<1\end{cases}$$

$f(x+1)=f(x), \forall x\in\mathbb{R}$ (f este periodică de perioadă 1).



Se observă că f este continuă în $a=0$. Dar

$$\exists \lim_{x\to 0, x<0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0, x<0} \frac{-x-0}{x-0} = -1 = f'_s(0),$$
$$\exists \lim_{x\to 0, x>0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0, x>0} \frac{x-0}{x-0} = 1 = f'_d(0).$$

Mai mult, $f'_s(0)\neq f'_d(0) \Rightarrow f$ nu este derivabilă în $a=0$.

Analog, în $\forall a=k, k\in\mathbb{Z}$, f este continuă, dar f nu este derivabilă

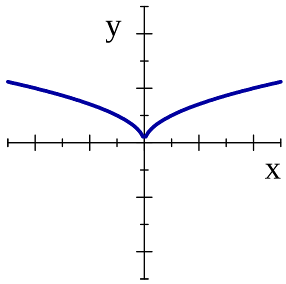
Analog, în $\forall a=k+\frac{1}{2}, k\in\mathbb{Z}$, f este continuă, dar f nu este derivabilă.

Definiţia 7.1.3. Fie $f:A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

a) Funcţia f are punctul $a\in A\cap A'$ drept *punct de întoarcere* dacă f este continuă în a şi $\exists f'_s(a)=+\infty$ şi $\exists f'_d(a)=-\infty$ (sau $\exists f'_s(a)=-\infty$ şi $\exists f'_d(a)=+\infty$).

b) Funcţia f are are punctul $a\in A\cap A'$ drept *punct unghiular* dacă f este continuă în a şi $\exists f'_s(a), \exists f'_d(a)$, cel puţin una din derivatele laterale este finită, şi $f'_s(a)\neq f'_d(a)$.

Exemplul 7.1.2.a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{|x|}=\begin{cases}\sqrt{-x}, & \text{dacă } x<0\\ 0, & \text{dacă } x=0\\ \sqrt{x}, & \text{dacă } x>0\end{cases}$



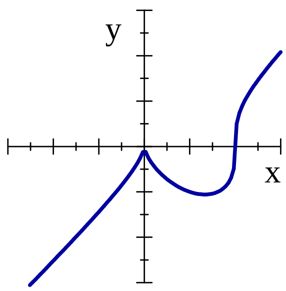
Se observă că f este continuă în $a=0$. Dar

$$\exists \lim_{x\to 0, x<0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0, x<0}\frac{\sqrt{-x}-0}{x-0}\overset{(\sqrt{-x})\cdot(\sqrt{-x})=|x|=-x}{=}\lim_{x\to 0, x<0}\left(-\frac{1}{\sqrt{-x}}\right)=-\infty=f_s'(0),$$

$$\exists \lim_{x\to 0, x>0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0, x>0}\frac{\sqrt{x}-0}{x-0}=+\infty=f_d'(0).$$

Deci $a=0$ este punct de întoarcere pentru f.

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt[3]{x^3-x^2}$



Se observă că f este continuă în $a_1=0$. Dar

$$\exists \lim_{x\to 0, x<0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0, x<0}\frac{\sqrt[3]{x^3-x^2}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0, x<0}\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}=+\infty=f_s'(0),$$

$$\exists \lim_{x\to 0, x>0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0, x>0}\frac{\sqrt[3]{x^3-x^2}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0, x>0}\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}=-\infty=f_d'(0).$$

Deci $a_1=0$ este punct de întoarcere pentru f.

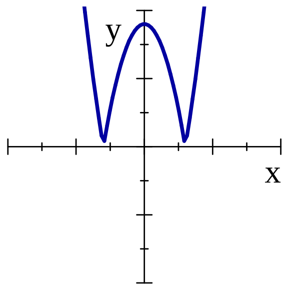
Se observă că f este continuă în $a_2=1$. Dar

$$\exists \lim_{x\to 1, x<1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1, x<1}\frac{\sqrt[3]{x^3-x^2}-0}{x-1}=\lim_{x\to 1, x<1}\sqrt[3]{\frac{x^2}{(x-1)^2}}=+\infty=f_s'(0),$$

$$\exists \lim_{x\to 1, x>1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1, x>1}\frac{\sqrt[3]{x^3-x^2}-0}{x-1}=\lim_{x\to 1, x>1}\sqrt[3]{\frac{x^2}{(x-1)^2}}=+\infty=f_d'(0).$$

Deci $\exists f'(1)=+\infty$, dar f nu este derivabilă în $a_2=1$.(va fi punct de inflexiune).

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\left|x^2-9\right|=\begin{cases}x^2-9, & \text{dacă } x\in\,]-\infty,-3[\,\cup\,]3,+\infty[\\ 0, & \text{dacă } x=3 \text{ sau } x=-3\\ 9-x^2, & \text{dacă } x\in\,]-3,3[\end{cases}$



Se observă că f este continuă în $a_1 = -3$ şi $a_2 = 3$. Dar
$\exists \lim\limits_{x\to-3,x<-3} \dfrac{f(x)-f(-3)}{x-(-3)} = \lim\limits_{x\to-3,x<-3} \dfrac{x^2-9-0}{x-(-3)} = \lim\limits_{x\to-3,x<-3}(x-3) = -6 = f_s'(-3)$,
$\exists \lim\limits_{x\to-3,x>-3} \dfrac{f(x)-f(-3)}{x-(-3)} = \lim\limits_{x\to-3,x>-3} \dfrac{9-x^2-0}{x-(-3)} = \lim\limits_{x\to-3,x>-3}(3-x) = 6 = f_d'(-3)$.
Deci $a_1 = -3$ este punct unghiular pentru f. Analog $a_2 = 3$ este punct unghiular pentru f.

Interpretarea geometrică a derivatei, **puncte unghiulare, puncte de întoarcere**: Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in A \cap A'$. Dacă f este derivabilă în a, atunci există dreapta tangentă în $(a, f(a))$ la graficului funcţiei, iar $f'(a)$ reprezintă panta dreptei tangente. Vezi Euristica şi Definiţia 7.1.3, Observaţia 7.1.3 şi Exemplul 7.1.2, Exemplul 7.1.5.

Monotonia funcţiei f studiată cu derivata-A se vedea Exemplul 7.1.5, manualul de liceu şi Complemente de Matematică.

Teorema 7.1.3. (**operaţii cu funcţii derivabile**) Fie $f, g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcţii derivabile pe mulţimea deschisă A ($A \cap A' = A$). Fie $\alpha \in \mathbb{R}$. Atunci funcţiile $f + g, \alpha f$ şi $f \cdot g$ sunt derivabile pe mulţimea deschisă A şi
a) $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a), \forall a \in A$;
b) $(\alpha \cdot f)'(a) = \alpha f'(a), \forall a \in A$;
c) $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a), \forall a \in A$.
Dacă, în plus, $g(a) \neq 0, \forall a \in A$ atunci funcţia $\dfrac{f}{g}$ este derivabilă pe mulţimea deschisă A şi
d) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{1}{g^2(a)}[f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)], \forall a \in A$.

Teorema 7.1.4. (**operaţii cu funcţii derivabile**) Fie $f_1, f_2, ..., f_n : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcţii derivabile pe mulţimea deschisă A ($A \cap A' = A$). Atunci funcţiile $f_1 + f_2 + ... + f_n$ şi $f_1 \cdot f_2 \cdot ... \cdot f_n$ sunt derivabile pe mulţimea deschisă A şi
a) $(f_1 + f_2 + ... + f_n)'(a) = f_1'(a) + f_2'(a) + ... + f_n'(a), \forall a \in A$;
b) $(f_1 \cdot f_2 \cdot ... \cdot f_n)'(a) = f_1'(a) \cdot f_2(a) \cdot ... \cdot f_n(a) + f_1(a) \cdot f_2'(a) \cdot ... \cdot f_n(a) + ... + f_1(a) \cdot f_2(a) \cdot ... \cdot f_n'(a), \forall a \in A$.

Teorema 7.1.5. (**teorema de derivare a funcţiilor compuse**) Fie $f : \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{J} \subseteq \mathbb{R}$ şi $g : \mathbb{J} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, unde $\mathbb{I}$ şi $\mathbb{J}$ sunt intervale din $\mathbb{R}$. Dacă
(i) f este derivabilă în $a \in \mathbb{I}$
(ii) g este derivabilă în $f(a) \in \mathbb{J}$,
atunci funcţia $g \circ f : \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este derivabilă în a şi
$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$.
Mai mult, dacă f este derivabilă pe $\mathbb{I}$ şi g este derivabilă pe $\mathbb{J}$ atunci $g \circ f$ este derivabilă pe $\mathbb{I}$ şi
$(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'$.

Exemplul 7.1.3. $\left(\ln\left(1+\sin^4(5x)\right)\right)' \underset{(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'}{\overset{u_1(x) = 1 + \sin^4(5x)}{=}} \dfrac{1}{1+\sin^4(5x)}\left(1+\sin^4(5x)\right)' \overset{(f+g)' = f' + g'}{=}$

$$= \frac{1}{1+\sin^4(5x)}\left(1' + \left(\sin^4(5x)\right)'\right) \underset{(u^4)'=4u^3u'}{\overset{u_2(x)=\sin(5x)}{=}} \frac{1}{1+\sin^4(5x)}\left(0 + 4\sin^3(5x)\left(\sin(5x)\right)'\right) \underset{(\sin u)'=(\cos u)u'}{\overset{u_3(x)=5x}{=}}$$
$$= \frac{1}{1+\sin^4(5x)}\left(0 + 4\sin^3(5x)\cdot\cos(5x)\cdot 5\right) = \frac{20\sin^3(5x)\cdot\cos(5x)}{1+\sin^4(5x)}.$$

Teorema 7.1.6. (**teorema de derivare a funcţiei inverse**) Fie $f : \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{J} \subseteq \mathbb{R}$, unde $\mathbb{I}$ şi $\mathbb{J}$ sunt intervale din $\mathbb{R}$. Dacă

(i) f este funcţie bijectivă,

(ii) f este continuă pe $\mathbb{I}$, şi derivabilă în $a \in \mathbb{I}$, cu $f(a) \neq 0$,

atunci funcţia inversă $f^{-1} : \mathbb{J} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ este derivabilă în $b = f(a)$ şi

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)}.$$

Teorema 7.1.7. (**derivatele unor funcţii elementare compuse cu o funcţie derivabilă**): Fie $u : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă pe B, cu $u' : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcţia derivată ataşată. Atunci, subînţelegând argumentele funcţiilor de mai jos, se obţine că:

1°. Pentru $c \in \mathbb{R}$ constantă fixată, $\boxed{c' = 0;}$

2°. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ fixat, $\boxed{(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u';}$

3°. Pentru $r \in \mathbb{R}^*$ fixat şi u a.î. $u > 0$, $\boxed{(u^r)' = ru^{r-1} \cdot u';}$ $\left(\sqrt[n]{v^m} = v^{\frac{m}{n}}\right)$

În particular, pentru u a.î. $u > 0$, $\boxed{\left(u^{-1}\right)' = \frac{-1}{u^2} \cdot u'}$ şi $\boxed{\left(\sqrt{u}\right)' \overset{r=\frac{1}{2}}{=} \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u';}$

4°. Pentru $a > 0, a \neq 1$ fixat, $\boxed{(a^u)' = a^u (\ln a) \cdot u';}$

În particular, $\boxed{(e^u)' = e^u \cdot u';}$

5°. Pentru $a > 0, a \neq 1$ fixat şi pentru u a.î. $u > 0$, $\boxed{(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u';}$

În particular, pentru u a.î. $u > 0$, $\boxed{(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u';}$

6°. $\boxed{(\cos u)' = -(\sin u) \cdot u'; (\sin u)' = (\cos u) \cdot u';}$

Pentru u a.î. $\cos u \neq 0$, $\boxed{(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u';}$ Pentru u a.î. $\sin u \neq 0$, $\boxed{(\operatorname{ctg} u)' = \frac{-1}{\sin^2 u} \cdot u';}$

$\boxed{(\operatorname{ch} u)' = (\operatorname{sh} u) \cdot u'; (\operatorname{sh} u)' = (\operatorname{ch} u) \cdot u';}$

7°. Pentru u a.î. $u^2 < 1$, $\boxed{(\arccos u)' = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u';}$

Pentru u a.î. $u^2 < 1$, $\boxed{(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u';}$

$\boxed{(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'; (\operatorname{arcctg} u)' = \frac{-1}{1+u^2} \cdot u';}$

Teorema 7.1.8. Fie $u : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă pe B a.î. $u > 0$, cu $u' : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcţia derivată ataşată. Fie $v : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă pe B, cu $v' : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcţia derivată ataşată.Atunci, subînţelegând argumentele funcţiilor de mai jos, se obţine că:

$$\boxed{8°. \ (u^v)' = u^v \left(v' \ln u + v\frac{u'}{u}\right).}$$

Exemplul 7.1.4. În cele ce urmează se subînţelege variabila de derivare x şi se derivează formal, pe un domeniu de derivare neprecizat:

1°. **a)** $7' = 0$; **b)** $(\ln 5)' = 0$; **c)** $(\sqrt[3]{\pi})' = 0$.

2°. **a)** $\left(x^{13}\right)' \underset{u'(x)=1}{\overset{u(x)=x}{=}} 13x^{12}$;

b) $\left(\left(x^2+x+1\right)^{2000}\right)' \underset{u'(x)=2x+1}{\overset{u(x)=x^2+x+1}{=}} 2000\left(x^2+x+1\right)^{1999}(2x+1)$.

3°. **a)** $\left(\sqrt[3]{x^2}\right)' \underset{u(x)=x,u'(x)=1}{\overset{r=\frac{2}{3}}{=}} \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$;

b) $\boxed{(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}};}$ **c)** $\boxed{\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2};}$

d) $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^4+1}}\right)' = \left(\left(x^4+1\right)^{\frac{-1}{3}}\right)' \underset{u(x)=x^4+1,u'(x)=4x^3+0}{\overset{r=\frac{-1}{3}}{=}} \frac{-1}{3}\left(x^4+1\right)^{\frac{-1}{3}-1}\left(4x^3\right)$;

e) $\left(\sqrt{x^2+9}\right)' \underset{u(x)=x^2+9,u'(x)=2x+0}{\overset{r=\frac{1}{2}}{=}} \frac{1}{2\sqrt{x^2+9}}\cdot(2x)$;

$\boxed{\left(u^{-1}\right)' = \frac{-1}{u^2}\cdot u'}$

f) $\left(\frac{1}{x^{2000}+1}\right)' = \left(\left(x^{2000}+1\right)^{-1}\right)' \overset{u(x)=x^{2000}+1}{=} \frac{-1}{\left(x^{2000}+1\right)^2}\cdot 2000x^{1999}$;

4°. **a)** $(2^x)' = 2^x(\ln 2)$;**b)** $\left(\left(\frac{\pi}{4}\right)^x\right)' = \left(\frac{\pi}{4}\right)^x \ln\left(\frac{\pi}{4}\right)$;

c) $\boxed{(e^x)' = e^x;}$

d) $\left(3^{5x^2+2x}\right)' \underset{u'(x)=10x+2}{\overset{u(x)=5x^2+2x}{=}} 3^{5x^2+2x}(\ln 3)\cdot(10x+2)$;

e) $\left(e^{x^2}\right)' \underset{u'(x)=2x}{\overset{u(x)=x^2}{=}} e^{x^2}\cdot(2x)$.

5°. **a)** $\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x};}$

b) $\left(\ln\left(x^6+x^3+1\right)\right)' \underset{u'(x)=6x^5+3x^2+0}{\overset{u(x)=x^6+x^3+1}{=}} \frac{1}{x^6+x^3+1}\left(6x^5+3x^2\right)$;

$\boxed{(\log_{10} x)' = \frac{1}{x\ln 10};}$

c) $\left(\log_2\left(x^4+1\right)\right)' = \frac{1}{(x^4+1)\ln 2}\left(4x^3\right)$

6°. **a)** $\boxed{(\cos x)' = -\sin x; (\sin x)' = \cos x;}$

b) $(\cos(7x))' \underset{u'(x)=7}{\overset{u(x)=7x}{=}} -(\sin(7x))\cdot 7$;

c) $(\sin\sqrt{x})' \underset{u'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\overset{u(x)=\sqrt{x}}{=}} (\cos\sqrt{x})\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$;

d) $\boxed{(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x};}$ **e)** $\boxed{(\operatorname{ctg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x};}$

f) $\left(\operatorname{tg} x^4\right)' = \frac{1}{\cos^2 x^4}\cdot\left(4x^3\right)$;

g) $\boxed{(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x; (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x;}$

7°. **a)** $\boxed{(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}};}$ **b)** $\boxed{(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}};}$

c) $\boxed{(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2};}$ **d)** $\boxed{(\operatorname{arcctg} x)' = \dfrac{-1}{1+x^2};}$

e) $\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{x^2}\right)' \underset{u'(x)=-2x^{-3}}{\overset{u(x)=x^{-2}}{=}} \dfrac{1}{1+\left(\frac{1}{x^2}\right)^2} \cdot \left(-2x^{-3}\right).$

8°. **a)** $\left(\left(1+x^2\right)^{3x}\right)' = \left(1+x^2\right)^{3x} \left(3\ln\left(1+x^2\right) + 3x\frac{2x}{1+x^2}\right).$

9°. **a)** $\left(x^2 + \cos(3x+5)\right)' = 2x - (\sin(3x+5)) \cdot 3;$

b) $\left(x^{10} \sin(3x+5)\right)' = 10x^9 \sin(3x+5) + x^{10}(\cos(3x+5)) \cdot 3;$

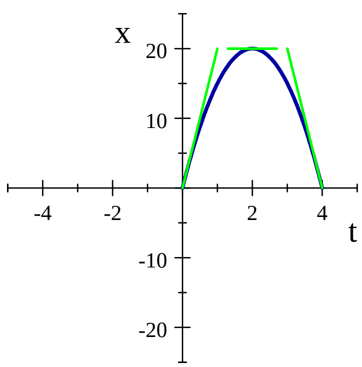
c) $\left(\dfrac{x^2+1}{x^4+9}\right)' = \dfrac{2x\left(x^4+9\right) - \left(x^2+1\right) \cdot 4x^3}{\left(x^4+9\right)^2}.$

Exemplul 7.1.5. a) O minge este aruncată în aer. Viteza acesteia este pozitivă cât timp înălţimea mingii faţă de pământ, $x(t)$, creşte, adică $\dfrac{dx}{dt}(t) > 0$. La un moment dat, mingea începe să coboare spre pământ. Din acel moment înălţimea mingii faţă de pământ, $x(t)$, descreşte şi viteza este negativă, $\dfrac{dx}{dt}(t) < 0$. Pentru a trece de la viteză pozitivă la viteză negativă, mingea trece printr-un punct critic, unde atinge înălţimea maximă şi viteza 0. Dacă mingea are viteza iniţială $20m/s$, cum se determină înălţimea maximă pe care o atinge?

Rezolvare. Se presupune că rezistenţa aerului este neglijabilă şi că legea înălţimii este:

$x(t) = v_0 \cdot t + \dfrac{1}{2}at^2$, unde t este timpul, $v_0 = 20(m/s)$ este viteza iniţială şi $a = -g$ este acceleraţia (presupusă constantă, dată de gravitaţie, $g \simeq 10(m/s^2)$). Atunci:

$x(t) = 20t - 5t^2 \Rightarrow v(t) = \dfrac{dx}{dt}(t) = 20 - 10t.$



Se observă că, deoarece mingea este aruncată în aer la $t = 0$, viteza iniţială cu care este aruncată în aer este, într-adevăr,

$v_0 = v(0) = +20(m/s),$

că mingea atinge pământul a doua oară când înălţimea este $x = 0 \Rightarrow$

$20t - 5t^2 = 0 \Rightarrow t = 0s$ (momentul aruncării) şi $t = 4s$ (momentul atingerii solului)

şi că viteza finală, când loveşte pământul, este

$v(4) = -20(m/s).$

La înălţime maximă, variaţia înălţimii este 0, deci viteza este 0 :

$v(t) = 0 \Rightarrow 20 - 10t = 0 \Rightarrow t = 2(s)$

Înălţimea maximă se atinge după $2s$ de la aruncare, adică

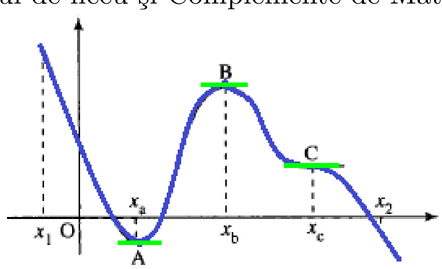
$x(2) = 20 \cdot 2 - 5 \cdot 2^2 = 20(m)$.
Se observă că dreapta care este tangentă la graficul funcţiei înălţime $x(t)$ în punctul $(t,x) = (0,0)$ are panta $v(0) = 20 > 0$, dreapta care este tangentă la graficul funcţiei înălţime $x(t)$ în punctul $(t,x) = (2,20)$ are panta $v(0) = 0$, adică este paralelă cu Ot şi că dreapta care este tangentă la graficul funcţiei înălţime $x(t)$ în punctul $(t,x) = (4,0)$ are panta $v(4) = -20 < 0$.

Punctul $t = 2$ în care $\frac{dx}{dt}(t) = 0$ se numeşte *punct critic* sau *punct staţionar.* Pentru a decide dacă este punct de maxim local, de minim local sau de inflexiune pentru x se studiază tabelul de variaţie a funcţiei $x(t)$ sau se studiază cu o teoremă implicând derivatele de ordin superior. Se observă şi din grafic că $t = 2$ este punct de maxim local, iar $x(2) = 20$ este valoarea maximă locală.

t	0		2		4
$\frac{dx}{dt}(t)$	20	$+++$	0	$---$	-20
$x(t)$	0	$\nearrow\nearrow\nearrow$	20	$\searrow\searrow\searrow$	0

Definiţia 7.1.4.. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $a \in A$.
a) $a \in A$ se numeşte *punct de minim local* pentru f dacă
$\exists V \in \mathcal{V}(a)$ a.î. $f(a) \leq f(x), \forall x \in V \cap A$;
$a \in A$ se numeşte *punct de minim global* pentru f dacă
$f(a) \leq f(x), \forall x \in A$;
b) $a \in A$ se numeşte *punct de maxim local* pentru f dacă
$\exists V \in \mathcal{V}(a)$ a.î. $f(a) \geq f(x), \forall x \in V \cap A$.
$a \in A$ se numeşte *punct de maxim global* pentru f dacă
$f(a) \geq f(x), \forall x \in A$.
c) $a \in A$ se numeşte *punct de extrem local* pentru f dacă a este punct de minim local sau maxim local pentru f.
$a \in A$ se numeşte *punct de extrem global* pentru f dacă a este punct de minim global sau maxim global pentru f.

Interpretarea geometrică a punctelor de extrem relativ: A se vedea Exemplul 7.1.5, manualul de liceu şi Complemente de Matematică



De menţionat că pentru o funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu reprezentarea graficului în figură, punctele A, B, C sunt puncte staţionare sau critice, în care $f'(x) = 0$. Dacă se imaginează că reprezentarea este a unei secţiuni de munte pe care urcă-coboară o maşină de la stânga la dreapta, atunci maşina:

-coboară spre A (f este descrescătoare, are $f'(x) < 0, \forall x \in]x_1, x_a[$);

-staţionează în A, care are abscisa punct de minim (f are $f(x_a)$ valoare minimă local, are $f'(x_a) = 0, f'(x) < 0, \forall x \in]x_1, x_a[$ şi $f'(x) > 0, \forall x \in]x_a, x_b[$);

-urcă de la A spre B (f este crescătoare, are $f'(x) > 0, \forall x \in]x_a, x_b[$);

-staţionează în B, care are abscisa punct de maxim (f are $f(x_b)$ valoare maximă local, are $f'(x_b) = 0$, $f'(x) > 0, \forall x \in]x_a, x_b[$ şi $f'(x) < 0, \forall x \in]x_b, x_c[$);

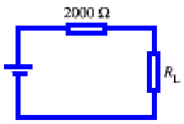
-coboară de la B spre C (f este descrescătoare, are $f'(x) < 0, \forall x \in]x_b, x_c[$);

-staţionează în C, care are abscisa punct de inflexiune-definiţia necesită $f''(x)$ (f are are $f'(x_c)=0,\ f'(x)<0, \forall x \in \left]x_b, x_c\right[$ şi $f'(x)<0, \forall x \in \left]x_c, x_2\right[$);

-coboară de la C (f este descrescătoare, are $f'(x)<0, \forall x \in \left]x_c, x_2\right[$).

Teoremele 7.1.9, 10, 11, 12, 13, 14. (**teoremele Fermat, Rolle, Lagrange, Cauchy, Darboux, l'Hospital**): A se vedea manualul de liceu şi Complemente de Matematică

Exemplul 7.1.5. b) (transfer maxim de putere) Puterea livrată la sarcina rezistivă R_L pentru circuitul din figură este dată de legea



$$P(R_L)=\frac{25R_L}{(2000+R_L)^2} \text{ (provenită din } P(R_L)=\left(\frac{V_{TH}}{R_{TH}+R_L}\right)^2\cdot R_L\text{)}$$

Se arată că puterea maximă livrată are loc pentru $R_L=2000(\Omega)$.

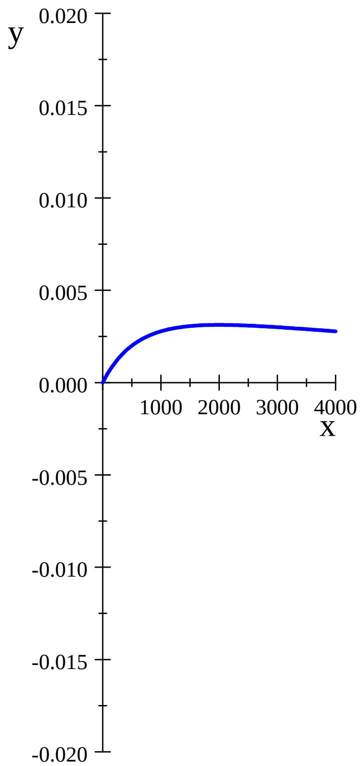
Rezolvare.

Etapa 1. Se determină punctele staţionare (critice) pentru putere, adică cele în care

$$\frac{dP}{dR_L}(R_L)=0 \Leftrightarrow \frac{25(2000+R_L)^2-25R_L\cdot 2(2000+R_L)}{(2000+R_L)^4}=0 \Leftrightarrow \frac{50000-25R_L}{(2000+R_L)^3}=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow R_L=2000.$$

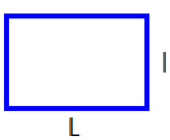
Etapa 2. Se studiază dacă punctul staţionar este de extrem local. Din tabelul de variaţie a funcţiei putere $P(R_L)$ în jurul punctului staţionar, se observă că $R_L=2000$ este punct de maxim local, cu $P(R_L)=3.125\times10^{-3}$ valoarea maximă local.

R_L	0		2000		4000
$\frac{dP}{dR_L}(R_L)$	+	+ + +	0	− − −	−
$P(R_L)$	0	$\nearrow\nearrow\nearrow$	3.125×10^{-3}	$\searrow\searrow\searrow$	2.777×10^{-3}



Prin urmare, s-a verificat că transferul de putere de la o reţea de sursă de curent continuu la o reţea rezistivă este maximă atunci când rezistenţa internă a reţelei de sursă de curent continuu este egală cu rezistenţa la sarcină. $(R_{TH} = R_L)$

c) (arie rectangulară maximă împrejmuită de un gard) Un teren dreptunghiular este înconjurat de un gard de $400m$. Se determină dimensiunile terenului de arie maximă ce poate fi împrejmuit cu acest gard.



Rezolvare. Deoarece perimetrul terenului este $P = 400(m) \Rightarrow$

$2L + 2l = 400 \Leftrightarrow L = 200 - l.$

Atunci aria este dată de legea

$A = l \cdot L \Leftrightarrow A(l) = l(200 - l) = 200l - l^2.$

<u>**Etapa** 1.</u> Se determină punctele staţionare (critice) pentru arie, adică cele în care

$\dfrac{dA}{dl}(l) = 0 \Leftrightarrow 200 - 2l = 0 \Leftrightarrow l = 100.$

<u>**Etapa** 2.</u> Se studiază dacă punctul staţionar este de extrem local. Din tabelul de variaţie a funcţiei arie $A(l)$ în jurul punctului staţionar, se observă că $l = 100$ este punct de maxim local, iar $A(l) = 100^2 m^2$ este valoarea maximă locală.

l	0		100		200
$\dfrac{dA}{dl}(l)$	$+$	$+++$	0	$---$	$-$
$A(l)$	0	$\nearrow\nearrow\nearrow$	100^2	$\searrow\searrow\searrow$	0

Prin urmare, dimensiunile terenului sunt $l = 100(m)$ şi $L = 100(m)$, adică terenul are formă pătrată.

Derivata de ordin superior.

Definiţia 7.1.5. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă pe $A_1 \subset A \cap A'$. Fie $f' : A_1 \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcţia derivată ataşată. Fie $a \in A_1 \cap A_1'$

a) Funcţia f *are derivată de ordin doi în punctul* a dacă

$$\exists \lim_{x\to a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a} \overset{\text{not.}}{=} f''(a) \in \overline{\mathbb{R}}.$$

b) Funcţia f *este derivabilă de ordinul doi în punctul* a dacă există limita anterioară şi este finită, $f''(a) \in \mathbb{R}$.

c) Funcţia f *este derivabilă de ordinul doi pe mulţimea* $A_1 \cap A_1'$ dacă este derivabilă în fiecare $a \in A_1 \cap A_1'$.

Analog se defineşte, dacă există, $f^{(n)}(a), n \in \mathbb{N}_2$.

Observaţia 7.1.4. Dacă funcţia f este derivabilă pe mulţimea $A_2 \subset A_1 \cap A_1'$ atunci se poate defini o funcţie

$$f'' : A_2 \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

care asociază fiecărui $x \in A_2$, numărul real $f''(x)$. Această funcţie se numeşte *funcţia derivată de ordinul doi a lui* f. Se notează

$$f'' = \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2}(f).$$

Analog se defineşte funcţia $f^{(n)}, n \in \mathbb{N}_2$.

Interpretarea geometrică a derivatei de ordinul doi-concavitate, convexitate, puncte de inflexiune: A se vedea manualul de liceu, seminar şi Complemente de Matematică

Interpretarea geometrică a derivatei de ordinul n-puncte de extrem local: A se vedea manualul de liceu.

Teorema 7.1.15. (**operaţii cu derivate de ordin superior**) Fie $f, g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcţii derivabile de ordin $n \in \mathbb{N}^*$ pe mulţimea deschisă A ($A \cap A' = A$). Fie $\alpha \in \mathbb{R}$. Atunci funcţiile $f + g, \alpha f$ şi $f \cdot g$ sunt derivabile de ordin $n \in \mathbb{N}^*$ pe mulţimea deschisă A şi

$$(f+g)^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) + g^{(n)}(a), \forall a \in A;$$

$$(\alpha \cdot f)^{(n)}(a) = \alpha f^{(n)}(a), \forall a \in A;$$

$$(f \cdot g)^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) \cdot g(a) + C_n^1 f^{(n-1)}(a) \cdot g'(a) + C_n^2 f^{(n-2)}(a) \cdot g''(a) + ... + f(a) \cdot g^{(n)}(a), \forall a \in A.$$

Formula lui Taylor.

Definiţia 7.1.6. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in A \cap A'$ şi $V \in \mathcal{V}(a)$. Se presupune că f este o funcţie derivabilă de ordin $n \in \mathbb{N}^*$ pe $V \cap A$, cu $f^{(n)}$ funcţie continuă pe $V \cap A$.

a) Se numeşte *polinom Taylor de ordin n asociat funcţiei f "în jurul" punctului a* polinomul

$$T_{n,a}(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n =$$
$$= f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Se notează tot cu $T_{n,a}(x)$ şi funcţia polinomială ataşată.

b) Se numeşte *rest Taylor de ordin n asociat funcţiei f "în jurul" punctului a* funcţia

$$R_{n,a} : V \cap A \to \mathbb{R}, R_{n,a}(x) = f(x) - T_{n,a}(x).$$

Observaţia 7.1.5. Tipuri de resturi:

a) *Restul Lagrange*: Dacă f este o funcţie derivabilă de ordin $n + 1 \in \mathbb{N}^*$ pe $V \cap A$

$R_{n,a}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \forall x \in V \cap A,$

unde $c_n = a + \theta_n (x-a), \theta_n \in]0,1[$.

b) ş.a.m.d

Definiţia 7.1.7. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in A \cap A'$ şi $V \in \mathcal{V}(a)$. Se presupune că f este o funcţie derivabilă de ordin $n \in \mathbb{N}^*$ pe $V \cap A$, cu $f^{(n)}$ funcţie continuă pe $V \cap A$. În anumite ipoteze suplimentare, are loc *formula lui Taylor de ordin n asociată funcţiei f "în jurul", pe o vecinătate a punctului a* :

$f(x) = T_{n,a}(x) + R_{n,a}(x), \forall x \in V \cap A$, adică

$$f(x) = \underbrace{f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}_{T_{n,a}(x)=f(a)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k} + R_{n,a}(x), \forall x \in V \cap A$$

Definiţia 7.1.8. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $0 \in A \cap A'$ şi $V \in \mathcal{V}(0)$. Se presupune că f este o funcţie derivabilă de ordin $n+1 \in \mathbb{N}^*$ pe $V \cap A$. În anumite ipoteze suplimentare, are loc *formula lui Maclaurin de ordin n asociată funcţiei f*, adică formula lui Taylor cu Restul Lagrange în $a = 0$:

$f(x) = T_{n,0}(x) + R_{n,0}(x), \forall x \in V \cap A$, adică

$$f(x) = \underbrace{f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n}_{T_{n,0}(x)=f(0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\theta_n x)}{(n+1)!}x^{n+1}}_{R_{n,0}(x)}, \forall x \in V \cap A, \text{ unde}$$

$\theta_n \in]0,1[$.

Exemplul 7.1.7. Formula lui Taylor permite o aproximare a funcţiilor transcendente $(e^x, \sin x, \cos x, ...)$ cu funcţii polinomiale. Eroarea de aproximare este dată de modulul restului Taylor.

a) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^x$.

Se observă că, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, f este derivabilă de ordin n pe $\mathbb{R}$, şi în particular în $a = 0$.

$f(x) = e^x$	$f(0) = 1$
$f'(x) = e^x$	$f'(0) = 1$
$f''(x) = e^x$	$f''(0) = 1$
...	...
$f^{(n)}(x) = e^x$	$f^{(n)}(0) = 1$
$f^{(n+1)}(x) = e^x$	$f^{(n+1)}(c_n) = e^{c_n}$

Atunci formula Maclaurin de ordin n ataşată lui f este

$$e^x = \underbrace{1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + ... + \frac{1}{n!}x^n}_{T_{n,0}(x)=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}x^k} + \underbrace{\frac{e^{\theta_n x}}{(n+1)!}x^{n+1}}_{R_{n,0}(x)}, \forall x \in \mathbb{R}, \text{ unde } \theta_n \in]0,1[.$$

Conform formulei anterioare putem aproxima

$e^1 \cong 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + ... + \dfrac{1}{n!}$,

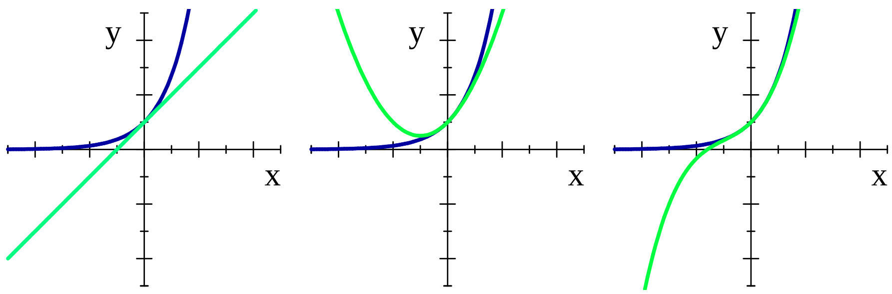
iar eroarea de aproximare comisă se poate evalua cu

$$|R_{n,0}(1)| = \left|\frac{e^{\theta_n x}}{(n+1)!}\right| \overset{\theta_n \in]0,1[}{\leq} \frac{3}{(n+1)!}.$$

Dacă aproximăm e cu polinomul Taylor de ordin $n = 10$ calculat în 1,

$e^1 \cong 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{10!} \simeq 2.7183,$
obţinem că eroarea comisă se poate evalua cu
$|R_{10,0}(1)| = \left|\frac{e^{\theta_{10}x}}{(11)!}\right| \overset{\theta_{10}\in]0,1[}{\leq} \frac{3}{(11)!} = 7.5156 \times 10^{-8}.$
Este o eroare de aproximare "mare", deoarece 1 este "departe" de 0, dar totuşi este o aproximare "controlată" de $R_{10,0}(1)$.

Se reprezintă grafic pe $\mathbb{R}$ funcţia f şi polinoamele Taylor
$T_{1,0}(x) = 1 + \frac{1}{1!}x;$
$T_{2,0}(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2;$
$T_{3,0}(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3$
şi se observă că, într-o vecinătate a lui $x = 0$ se poate aproxima $f(x)$ cu $T_{n,0}(x)$ (graficul polinomului aproape se suprapune peste al lui f).



b) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \cos x$.
Se observă că, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, f este derivabilă de ordin n pe $\mathbb{R}$, şi în particular în $a = 0$.

$f(x) = \cos x$	$f(0) = 1 = \cos 0$
$f'(x) = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$	$f'(0) = 0 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$f''(x) = -\cos x = \cos(x + \pi)$	$f''(0) = -1 = \cos(\pi)$
$f'''(x) = \sin x = \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$	$f'''(0) = 0 = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)$
$f^{(4)}(x) = \cos x = \cos(x + 2\pi)$	$f^{(4)}(0) = 1 = \cos(2\pi)$
...	...
$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$	$f^{(n)}(0) = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$
$f^{(n+1)}(x) = \cos\left(x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right)$	$f^{(n+1)}(c_n) = \cos\left(c_n + \frac{(n+1)\pi}{2}\right)$

Se poate afirma că
$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^{\widetilde{k}} \cos x, & \text{dacă } n = 2\widetilde{k}, \widetilde{k} \in \mathbb{N}^* \\ (-1)^{\widetilde{k}} \sin x, & \text{dacă } n = 2\widetilde{k} + 1, \widetilde{k} \in \mathbb{N} \end{cases}$$
$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} (-1)^{\widetilde{k}}, & \text{dacă } n = 2\widetilde{k}, \widetilde{k} \in \mathbb{N}^* \\ 0, & \text{dacă } n = 2\widetilde{k} + 1, \widetilde{k} \in \mathbb{N} \end{cases}$$
Atunci formula Maclaurin de ordin n ataşată lui f este
$$\cos x = 1 + \frac{0}{1!}x + \frac{-1}{2!}x^2 + ... + \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n!}x^n + \frac{\cos\left(\theta_n x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right)}{(n+1)!}x^{n+1}, \forall x \in \mathbb{R},$$

$$= \underbrace{1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + ... + \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n!}x^n}_{T_{n,0}(x)=1+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{k!}x^k} + \underbrace{\frac{\cos\left(\theta_n x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right)}{(n+1)!}x^{n+1}}_{R_{n,0}(x)}, \forall x \in \mathbb{R}, \text{unde } \theta_n \in \left]0,1\right[.$$

Se poate scrie, renotând $\widetilde{k}$, şi că:

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + ... + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + R(x), \forall x \in \mathbb{R},$$

deci $\cos x$ "se dezvoltă" după puteri pare ale lui x.

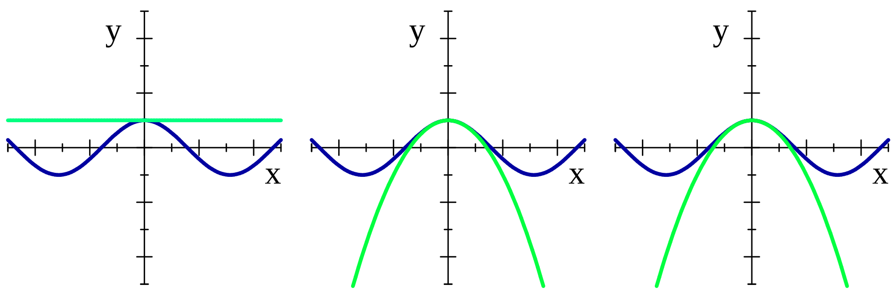
Se reprezintă grafic pe $\mathbb{R}$ funcţia f şi polinoamele Taylor

$T_{1,0}(x) = 1;$

$T_{2,0}(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2;$

$T_{3,0}(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2$

şi se observă că, într-o vecinătate a lui $x = 0$ se poate aproxima $f(x)$ cu $T_{n,0}(x)$ (graficul polinomului aproape se suprapune peste al lui f). A se vedea serii Taylor.



c) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sin x$.

Se observă că, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, f este derivabilă de ordin n pe $\mathbb{R}$, şi în particular în $a = 0$.

$f(x) = \sin x$	$f(0) = 0$
$f'(x) = \cos x$	$f'(0) = 1$
$f''(x) = -\sin x$	$f''(0) = 0$
$f'''(x) = -\cos x$	$f'''(0) = -1$
$f^{(4)}(x) = \sin x$	$f^{(4)}(0) = 0$
...	...
$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$	$f^{(n)}(0) = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$
$f^{(n+1)}(x) = \sin\left(x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right)$	$f^{(n+1)}(c_n) = \sin\left(c_n + \frac{(n+1)\pi}{2}\right)$

Se poate afirma că

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^{\widetilde{k}} \sin x, & \text{dacă } n = 2\widetilde{k}, \widetilde{k} \in \mathbb{N}^* \\ (-1)^{\widetilde{k}} \cos x, & \text{dacă } n = 2\widetilde{k}+1, \widetilde{k} \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } n = 2\widetilde{k}, \widetilde{k} \in \mathbb{N}^* \\ (-1)^{\widetilde{k}}, & \text{dacă } n = 2\widetilde{k}+1, \widetilde{k} \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Atunci formula Maclaurin de ordin n ataşată lui f este

$$\sin x = 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + ... + \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n!}x^n + \frac{\sin\left(\theta_n x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right)}{(n+1)!}x^{n+1}, \forall x \in \mathbb{R},$$

$$= \underbrace{\frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + ... + \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n!}x^n}_{T_{n,0}(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{k!}x^k} + \underbrace{\frac{\sin\left(\theta_n x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right)}{(n+1)!}x^{n+1}}_{R_{n,0}(x)}, \forall x \in \mathbb{R}, \text{ unde } \theta_n \in]0,1[\,.$$

Se poate scrie, renotând $\widetilde{k}$, şi că:

$$\sin x = \frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + ... + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + R(x), \forall x \in \mathbb{R},$$

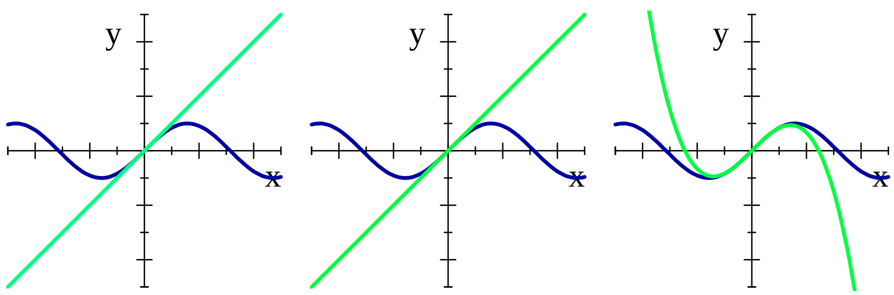
deci $\sin x$ "se dezvoltă" după puteri impare ale lui x.
Se reprezintă grafic pe $\mathbb{R}$ funcţia f şi polinoamele Taylor

$$T_{1,0}(x) = \frac{1}{1!}x;$$

$$T_{2,0}(x) = \frac{1}{1!}x;$$

$$T_{3,0}(x) = \frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3$$

şi se observă că, într-o vecinătate a lui $x = 0$ se poate aproxima $f(x)$ cu $T_{n,0}(x)$ (graficul polinomului aproape se suprapune peste al lui f). A se vedea serii Taylor.



d) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{ch} x$.
Se observă că, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, f este derivabilă de ordin n pe $\mathbb{R}$, şi în particular în $a = 0$.

$f(x) = \operatorname{ch} x$	$f(0) = 1$
$f'(x) = \operatorname{sh} x$	$f'(0) = 0$
$f''(x) = \operatorname{ch} x$	$f''(0) = 1$
...	...
$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \operatorname{ch} x, & \text{dacă } n = 2\widetilde{k}, \widetilde{k} \in \mathbb{N}^* \\ \operatorname{sh} x, & \text{dacă } n = 2\widetilde{k}+1, \widetilde{k} \in \mathbb{N} \end{cases}$	$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } n = 2\widetilde{k}, \widetilde{k} \in \mathbb{N}^* \\ 0, & \text{dacă } n = 2\widetilde{k}+1, \widetilde{k} \in \mathbb{N} \end{cases}$
$f^{(n+1)}(x) = ...$	$f^{(n+1)}(c_n) = ...$

Atunci formula Maclaurin de ordin n ataşată lui f este

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{0}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta_n x)}{(n+1)!}x^{n+1}, \forall x \in \mathbb{R},$$

$$= \underbrace{1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n}_{T_{n,0}(x)=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\theta_n x)}{(n+1)!}x^{n+1}}_{R_{n,0}(x)}, \forall x \in \mathbb{R}, \text{ unde } \theta_n \in]0,1[\,.$$

Se poate scrie şi că:

$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + ... + \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + R(x), \forall x \in \mathbb{R}$,
deci $\operatorname{ch} x$ "se dezvoltă" după puteri pare ale lui x.

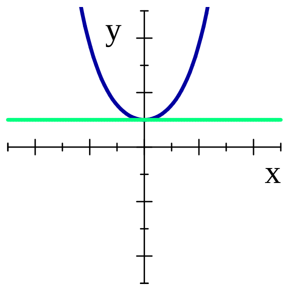
Se reprezintă grafic pe $\mathbb{R}$ funcţia f şi polinoamele Taylor

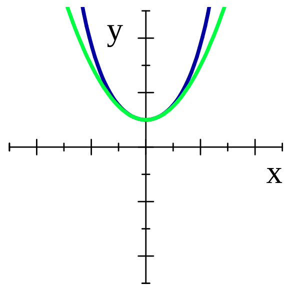
$T_{1,0}(x) = 1$;

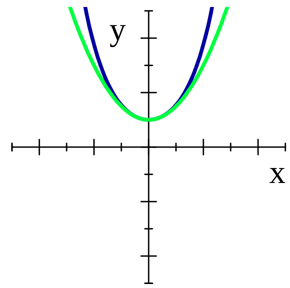
$T_{2,0}(x) = 1 + \frac{1}{2!}x^2$;

$T_{3,0}(x) = 1 + \frac{1}{2!}x^2$

şi se observă că, într-o vecinătate a lui $x = 0$ se poate aproxima $f(x)$ cu $T_{n,0}(x)$ (graficul polinomului aproape se suprapune peste al lui f).







e) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{sh} x$.
Se observă că, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, f este derivabilă de ordin n pe $\mathbb{R}$, şi în particular în $a = 0$.

$f(x) = \operatorname{sh} x$	$f(0) = 0$
$f'(x) = \operatorname{ch} x$	$f'(0) = 1$
$f''(x) = \operatorname{sh} x$	$f''(0) = 0$
...	...
$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \operatorname{sh} x, & \text{dacă } n = 2\widetilde{k}, \widetilde{k} \in \mathbb{N}^* \\ \operatorname{ch} x, & \text{dacă } n = 2\widetilde{k}+1, \widetilde{k} \in \mathbb{N} \end{cases}$	$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } n = 2\widetilde{k}, \widetilde{k} \in \mathbb{N}^* \\ 1, & \text{dacă } n = 2\widetilde{k}+1, \widetilde{k} \in \mathbb{N} \end{cases}$
$f^{(n+1)}(x) = ...$	$f^{(n+1)}(c) = ...$

Atunci formula Maclaurin de ordin n ataşată lui f este

$$\operatorname{sh} x = 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta_n x)}{(n+1)!}x^{n+1}, \forall x \in \mathbb{R},$$
$$= \underbrace{\frac{1}{1!}x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n}_{T_{n,0}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\theta_n x)}{(n+1)!}x^{n+1}}_{R_{n,0}(x)}, \forall x \in \mathbb{R}, \text{ unde } \theta_n \in]0,1[.$$

Se poate scrie şi că:

$\operatorname{sh} x = \frac{1}{1!}x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + ... + \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + R(x), \forall x \in \mathbb{R}$,
deci $\operatorname{sh} x$ "se dezvoltă" după puteri impare ale lui x.

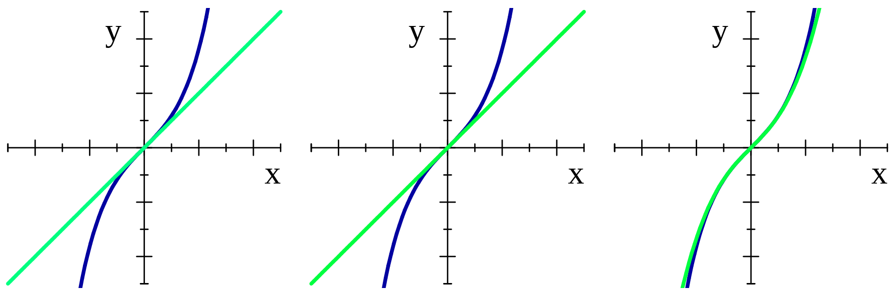
Se reprezintă grafic pe $\mathbb{R}$ funcţia f şi polinoamele Taylor

$T_{1,0}(x) = \frac{1}{1!}x$;

$T_{2,0}(x) = \frac{1}{1!}x$;

$T_{3,0}(x) = \frac{1}{1!}x + \frac{1}{3!}x^3$

şi se observă că, într-o vecinătate a lui $x = 0$ se poate aproxima $f(x)$ cu $T_{n,0}(x)$ (graficul polinomului aproape se suprapune peste al lui f).



f) Fie $f :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}, f(x) = \ln(1 + x)$.
Se observă că, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, f este derivabilă de ordin n pe $]-1, +\infty[$, şi în particular în $a = 0$.

$f(x) = \ln(1 + x)$	$f(0) = 0$
$f'(x) = (1 + x)^{-1}$	$f'(0) = 1$
$f''(x) = -1(1 + x)^{-2}$	$f''(0) = -1$
$f'''(x) = (-1)(-2)(1 + x)^{-3}$	$f'''(0) = (-1)(-2)$
...	...
$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!(1 + x)^{-n}$	$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$
$f^{(n+1)}(x) = (-1)^n n!(1 + x)^{-(n+1)}$	$f^{(n+1)}(c_n) = (-1)^n n!(1 + c_n)^{-(n+1)}$

Atunci formula Maclaurin de ordin n ataşată lui f este

$$f(x) = 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{-1}{2!}x^2 + ... + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}x^n + \frac{(-1)^n n!(1 + \theta_n x)^{-(n+1)}}{(n+1)!}x^{n+1}, \forall x \in]-1, +\infty[,$$

$$= \underbrace{\frac{1}{1}x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + ... + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n}_{T_{n,0}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k} + \underbrace{\frac{(-1)^n(1 + \theta_n x)^{-(n+1)}}{n+1}x^{n+1}}_{R_{n,0}(x)}, \forall x \in]-1, +\infty[, \text{ unde}$$

$\theta_n \in]0, 1[$.

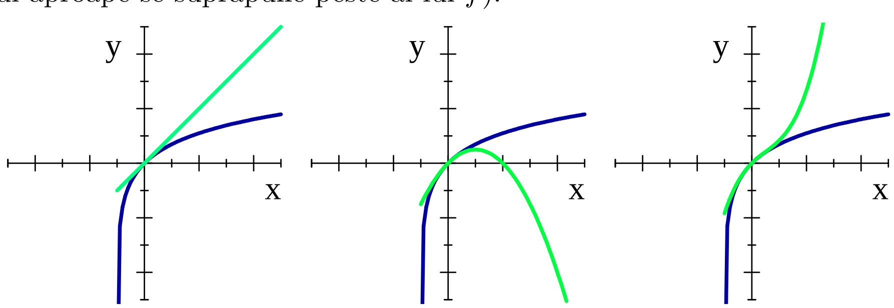
Se reprezintă grafic pe $]-1, +\infty[$ funcţia f şi polinoamele Taylor

$T_{1,0}(x) = \frac{1}{1}x;$

$T_{2,0}(x) = \frac{1}{1}x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3;$

$T_{3,0}(x) = \frac{1}{1}x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$

şi se observă că, într-o vecinătate a lui $x = 0$ se poate aproxima $f(x)$ cu $T_{n,0}(x)$ (graficul polinomului aproape se suprapune peste al lui f).



g) Fie $\alpha \in \mathbb{R}^*$ fixat şi $f :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}, f(x) = (1+x)^{\alpha}$.
Se observă că, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, f este derivabilă de ordin n pe $]-1, +\infty[$, şi în particular în $a = 0$.

$f(x) = (1+x)^{\alpha}$	$f(0) = 1$
$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$	$f'(0) = \alpha$
$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$	$f''(0) = \alpha(\alpha-1)$
$f'''(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3}$	$f'''(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)$
...	...
$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$	$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)$
$f^{(n+1)}(x) = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-n)(1+x)^{\alpha-(n+1)}$	$f^{(n+1)}(c_n) = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-n)(1+c_n)^{\alpha-(n+1)}$

Atunci formula Maclaurin de ordin n ataşată lui f este

$$f(x) = \underbrace{1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n}_{T_{n,0}(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)}{k!}x^k} +$$

$$+ \underbrace{\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n)(1+\theta_n x)^{\alpha-(n+1)}}{(n+1)!}}_{R_{n,0}(x)}, \forall x \in]-1, +\infty[, \text{ unde } \theta_n \in]0, 1[.$$

Se va particulariza $\alpha = n \in \mathbb{N}_2, \alpha = -1, \alpha = \frac{1}{2}$ la serii Taylor.

Exemplul 7.1.8. Să se determine ordinul n al formulei lui Taylor cu rest Lagrange în $a = 1$ şi să se scrie această formulă pentru

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^4 - 6x^2 + 1, & \text{dacă } x \leq 1 \\ 4x^4 - 8x^3, & \text{dacă } x > 1. \end{cases}$$

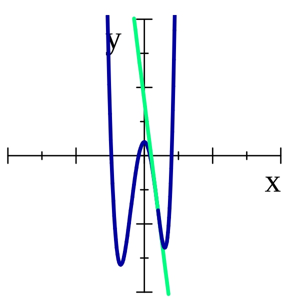
Rezolvare. Conform Exerciţiului 9 din Seminar $\Rightarrow n = 1$ şi formula Taylor cu rest Lagrange este

$$f(x) = \underbrace{-4 + \frac{-8}{1!}(x-1)}_{T_{1,1}(x)} + \underbrace{\frac{f''(c_1)}{2!}(x-1)^2}_{R_{1,1}(x)}, \text{ cu } c_1 = 1 + \theta_1(x-1), \text{ unde } \theta_1 \in]0, 1[.$$

Se reprezintă grafic pe $\mathbb{R}$ funcţia f şi polinomul Taylor

$$T_{1,1}(x) = -4 + \frac{-8}{1!}(x-1)$$

şi se observă că, într-o vecinătate a lui $x = 1$ se poate aproxima $f(x)$ cu $T_{1,1}(x)$ (graficul polinomului aproape se suprapune peste al lui f).



Diferenţiala.

În cele ce urmează fie $A = \mathbb{I}$ interval nevid şi deschis în $\mathbb{R}$ ($\mathbb{I} \cap \mathbb{I}' = \mathbb{I}$).

Definiţia 7.1.9. Fie $f : \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $a \in \mathbb{I}$.

a) Funcţia f este *diferenţiabilă de ordinul* 1 *în* a dacă $\exists c \in \mathbb{R}$ o constantă şi $\alpha : \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă cu $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = \alpha(a) = 0$ astfel încât

$$f(x) - f(a) = c \cdot (x - a) + \alpha(x) \cdot (x - a), \forall x \in \mathbb{I}. \quad (1)$$

b) Funcţia f este *diferenţiabilă de ordinul* 1 *pe mulţimea* $\mathbb{I}$ dacă este diferenţiabilă de ordinul 1 în $\forall a \in \mathbb{I}$.

Teorema 7.1.16. Fie $f : \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $a \in \mathbb{I}$. Funcţia f este diferenţiabilă în a dacă şi numai dacă este derivabilă în a. În acest caz $c = f'(a)$.

Demonstraţie. *Necesitatea.* Se presupune că f este diferenţiabilă în $a \Rightarrow \exists c$ şi $\exists \alpha$ astfel încât să aibă loc (1)

$$f(x) - f(a) = c \cdot (x - a) + \alpha(x) \cdot (x - a), \forall x \in \mathbb{I}$$

Se înmulţeşte egalitatea anterioară cu $\dfrac{1}{x-a}$, pentru $x \neq a$, apoi se trece la limită egalitatea rezultată pentru $x \to a$ şi se obţine că

$$\exists \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} (c + \alpha(x)) = c + 0 \in \mathbb{R},$$

deci f este derivabilă în a şi $f'(a) = c$.

Suficienţa. Se presupune că f este derivabilă în a. Se defineşte

$c = f'(a) \in \mathbb{R}$ şi

$$\alpha : \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \alpha(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a), & \text{dacă } x \in \mathbb{I} \setminus \{a\} \\ 0, & \text{dacă } x = a \end{cases}$$

Se observă ca α este funcţie continuă, cu $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = \alpha(a) = 0$, şi că c şi α verifică (1) $\Rightarrow f$ este diferenţiabilă în a.

Observaţia 7.1.6. Conform Teoremei 7.1.16, dacă f este diferenţiabilă în a, atunci are loc

$$f(x) - f(a) = f'(a) \cdot (x - a) + \alpha(x) \cdot (x - a), \forall x \in \mathbb{I}. \quad (1')$$

Cum $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$, rezultă că $\alpha(x) \cdot (x - a)$ tinde la 0 "mai repede" decât $f'(a) \cdot (x - a)$, atunci când $x \to a$. Deci $f'(a) \cdot (x - a)$ poate fi considerată ca "partea principală" a creşterii lui f (adică a diferenţei $f(x) - f(a)$). Atunci diferenţa $f(x) - f(a)$ se poate aproxima cu $f'(a) \cdot (x - a)$, pentru $x \to a$, adică

$$f(x) - f(a) \simeq f'(a) \cdot (x - a), \forall x \in \mathbb{I},\ x \neq a, x \to a$$

Din relaţia $(1')$, făcând schimbarea de variabilă de trecere la limită $x - a = h \Rightarrow$

$$f(a + h) - f(a) = f'(a) \cdot h + \alpha(a + h) \cdot h, \forall x \in \mathbb{I}.$$

şi deci, pentru $h \to 0$, se poate aproxima

$$f(a + h) - f(a) \simeq f'(a) \cdot h, \forall x = a + h \in \mathbb{I},\ h \neq 0, h \to 0.$$

Deci, dacă f este diferenţiabilă ($\Leftrightarrow$derivabilă) în a, atunci, într-o vecinătate a lui a, funcţia f are o comportare liniară (creşterea lui f se poate aproxima cu o funcţie liniară).

Definiţia 7.1.10. Fie $f : \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă în $a \in \mathbb{I}$. Funcţia liniară

$$T : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ T(h) \overset{\text{not.}}{=} ((df)(a))(h) = f'(a) \cdot h \quad (2)$$

se numeşte *diferenţiala funcţiei* f *de ordinul* 1 *în* a.

Observaţia 7.1.7. Conform Definiţiei 7.1.6. a diferenţialei, cu $h = x - a \Rightarrow$

$$T(x - a) = f'(a) \cdot (x - a) \text{ şi } \alpha(x) = \frac{1}{x - a}(f(x) - f(a) - T(x - a)).$$

Cum $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{x - a}(f(x) - f(a) - T(x - a)) = 0$.

Atunci $f : \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este diferenţiabilă de ordinul 1 în $a \in \mathbb{I}$ dacă

$$\exists T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ astfel încât } \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(f(a + h) - f(a) - T(h)) = 0, \quad (3)$$

Dacă există, funcţia liniară T este chiar diferenţiala funcţiei f de ordinul 1 în a.

Se va folosi această observaţie în definirea diferenţialei pentru $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$.

Observaţia 7.1.8.

a) Se consideră funcţia identitatate $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = x$.

Funcţia g este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $g' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g'(x) = 1$.

Atunci, pentru orice $a = x$ fixat$\overset{(5)}{\Rightarrow}$ $((dg)(x))(h) = g'(x) \cdot h$, adică

$(dx)(h) = h$.

În continuare se face convenţia ca dx să fie funcţia proiecţie a $\mathbb{R}$ pe Ox, $dx = p_1$,

$p_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, p_1(h) = h$,

b) Fie $f : \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenţiabilă în $a \in \mathbb{I}$. Apelând la convenţia anterioară, din

$$((df)(a))(h) = f'(a) \cdot h, \forall h \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

se scrie

$$(df)(a) = \underbrace{f'(a) \cdot dx}_{T}. \tag{5}$$

c) Fie $A = \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ un interval nevid şi deschis. Fie $f : \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenţiabilă pe $\mathbb{I}$; atunci

$$\boxed{(df)(x) = f'(x) \cdot dx, \forall x \in \mathbb{I}.}. \tag{6}$$

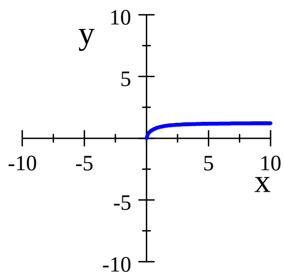
Exemplul 7.1.9**.** Fie

$f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{\operatorname{arctg} x}$.

Să se studieze dacă f este diferenţiabilă pe $]0, +\infty[$. Să se determine

$(df)(x), \forall x \in]0, +\infty[; (df)(1); ((df)(1))(h), \forall h \in \mathbb{R}; ((df)(x))(-3), \forall x \in]0, +\infty[; ((df)(1))(-3)$.

Rezolvare.



$$\exists f' :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{arctg} x}} \cdot \frac{1}{1+x^2}.$$

Deci f este derivabilă pe $]0, +\infty[\Leftrightarrow f$ este diferenţiabilă pe $]0, +\infty[$. În plus, conform (6) $\Rightarrow$

$$(df)(x) = f'(x)\,dx, \forall x \in]0, +\infty[, \text{ adică } (df)(x) = \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{arctg} x}} \cdot \frac{1}{1+x^2}dx, \ \forall x \in]0, +\infty[.$$

Atunci

$$(df)(1) = \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{arctg} 1}} \cdot \frac{1}{1+1^2}dx = \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{\pi}}dx}_{T \text{ pentru } a=1}.$$

$$((df)(1))(h) = \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{\pi}}h}_{T(h) \text{ pentru } a=1}.$$

Conform (4) $\Rightarrow$

$$((df)(x))(-3) = \left(\frac{1}{2\sqrt{\operatorname{arctg} x}} \cdot \frac{1}{1+x^2}\right)(-3), \forall x \in]0, +\infty[$$

$$\Rightarrow ((df)(1))(-3) = \left(\frac{1}{2\sqrt{\operatorname{arctg} 1}} \cdot \frac{1}{1+1^2}\right)(-3) = \frac{-3}{2\sqrt{\pi}}.$$