CURS NR. 7
Analiză matematică, AIA

9. Mulţimile $\mathbb{R}^n, \overline{\mathbb{R}}^n, n \in \mathbb{N}^*$

9.1. Structuri algebrice pe $\mathbb{R}^n, \overline{\mathbb{R}}^n, n \in \mathbb{N}^*$

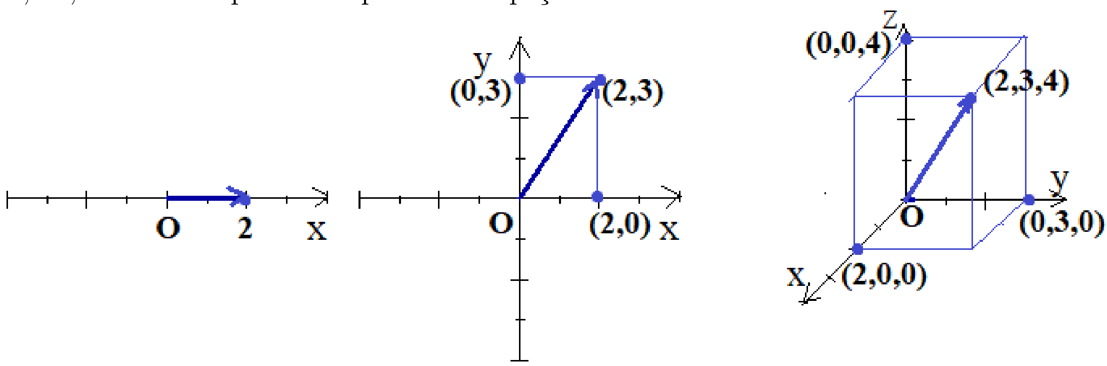
Fie $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Se defineşte $\mathbb{R}^n = \left\{\mathbf{x}; \mathbf{x} = (x_1, ..., x_n), x_i \in \mathbb{R}, \forall i = \overline{1,n}\right\}$.

$\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ se reprezintă geometric prin axa numerelor reale;

$\mathbb{R}^2$ se reprezintă prin multimea punctelor unui plan raportate la un sistem de axe ortogonale, coordonatele (x_1, x_2) renotându-se cu (x, y);

$\mathbb{R}^3$ se reprezintă prin multimea punctelor din spaţiu raportate la un sistem de axe ortogonale, coordonatele (x_1, x_2, x_3) renotându-se cu (x, y, z);

$\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^5, ...$ -nu sunt posibile reprezentări spaţiale clasice.



Se defineşte *egalitatea* a două n-uple prin

$\mathbf{x} = \mathbf{y} \Leftrightarrow [x_1 = y_1, ..., x_n = y_n]$.

Teorema 9.1.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, (\mathbb{R}^n, +, \cdot, \mathbb{R})$ este spaţiu liniar peste $\mathbb{R}$, unde operaţiile standard sunt (adunarea n-uplelor)

$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in (\mathbb{R}^n)^2, (x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$.

(înmulţirea n-uplelor din $\mathbb{R}^n$ cu scalari din câmpul $\mathbb{R}$)

$\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \forall (\alpha, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \alpha \cdot (x_1, ..., x_n) = (\alpha x_1, ..., \alpha x_n)$.

Teorema 9.1.2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, (\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ este spaţiu liniar euclidian, unde produsul scalar standard este

$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \forall \mathbf{x} = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, \forall \mathbf{y} = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n, \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + ... + x_n y_n$.

Observaţia 9.1.1. Numai pentru $n = 1$, $\mathbb{R}^1 = (\mathbb{X}, +, \cdot, \leq, CD)$ este corp comutativ total ordonat. Pentru $n \geq 2$, nu se poate defini pe $\mathbb{R}^n$ o relaţie de ordine totală.

Fie $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Se defineşte $\overline{\mathbb{R}}^n = \left\{\mathbf{x}; \mathbf{x} = (x_1, ..., x_n), x_i \in \overline{\mathbb{R}}, \forall i = \overline{1,n}\right\}$.

9.2. Structuri de convergenţă pe $\mathbb{R}^n, \overline{\mathbb{R}}^n, n \in \mathbb{N}^*$

Teorema 9.2.1. Fie $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Funcţiile

$\|\cdot\|_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \ \|\mathbf{x}\|_1 = |x_1| + ... + |x_n| = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$;

$\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \ \|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + ... + |x_n|^2} = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$;

$\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \ \|\mathbf{x}\|_\infty = \max\{|x_1|, ..., |x_n|\} = \max\{|x_i|; i \in \{1, 2, ..., n\}\}$

sunt norme pe $\mathbb{R}^n$, numite respectiv *norma modul*, *norma euclidiană*, *norma maximum*. Deci

$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$, $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$, $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ sunt spaţii normate. Norma euclidiană este indusă de produsul scalar standard, adică

$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$

Particularizare $n = 1(\|\cdot\|_1 = \|\cdot\|_2 = \|\cdot\|_\infty = |\cdot|), n = 2, n = 3.$

Teorema 9.2.2$^{\bigcirc}$. Fie $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Atunci, pentru $p \in \mathbb{N}^*$, funcţia

$$\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ \|\mathbf{x}\|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + ... + |x_n|^p} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

este o normă pe $\mathbb{R}^n$. Deci $\left(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p\right)$ este spaţiu normat.

Teorema 9.2.3. Fie $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Funcţiile

$$d_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |x_1 - y_1| + ... + |x_n - y_n| = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|;$$

$$d_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + ... + |x_n - y_n|^2} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}};$$

$$d_\infty : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max\{|x_1 - y_1|, ..., |x_n - y_n|\} = \max\{|x_i - y_i|; i \in \{1, ..., n\}\}$$

sunt metrici pe $\mathbb{R}^n$, numite respectiv *metrica modul*, *metrica euclidiană*, *metrica maximum.* Deci $(\mathbb{R}^n, d_1)$, $(\mathbb{R}^n, d_2)$, $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ sunt spaţii metrice. Mai mult, metricele d_1, d_2, d_∞ sunt induse de normele $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$, adică

$d_{1,2,\infty}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_{1,2,\infty}, \forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in (\mathbb{R}^n)^2.$

Particularizare $n = 1(d_1 = d_2 = d_\infty), n = 2, n = 3.$

Teorema 9.2.4$^{\bigcirc}$. Fie $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Pentru $p \in \mathbb{N}^*$, funcţia

$$d_p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ d_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt[p]{|x_1 - y_1|^p + ... + |x_n - y_n|^p} = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_i - y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}};$$

este o metrică pe $\mathbb{R}^n$. Deci $(\mathbb{R}^n, d_p)$ este spaţiu metric. Mai mult, metrica d_p este indusă de norma $\|\cdot\|_p$, adică

$d_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_p, \forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in (\mathbb{R}^n)^2.$

Definiţia 9.2.1. Fie $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ şi $r > 0$. Mulţimea

$S(\mathbf{a}, r) = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_{1,2,\infty} = d_{1,2,\infty}(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = r\right\}$

este *sfera* cu centrul în $\mathbf{a}$ şi de rază r. Mulţimea

$B(\mathbf{a}, r) = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_{1,2,\infty} = d_{1,2,\infty}(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < r\right\}$

este *interiorul sferei* (*sfera deschisă*) cu centrul în $\mathbf{a}$ şi de rază r. Mulţimea

$B'(\mathbf{a}, r) = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_{1,2,\infty} = d_{1,2,\infty}(\mathbf{x}, \mathbf{a}) \leq r\right\}$

este *sfera închisă* cu centrul în $\mathbf{a}$ şi de rază r. Mulţimea

$\left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_{1,2,\infty} = d_{1,2,\infty}(\mathbf{x}, \mathbf{a}) > r\right\}$

este *exteriorul sferei* cu centrul în $\mathbf{a}$ şi de rază r.

În funcţie de ce distanţă se alege se obţine un anume tip sferă.

Exemplul 9.2.1. Se reprezintă grafic sferele $S(\mathbf{a}, r), B(\mathbf{a}, r), B'(\mathbf{a}, r)$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$, corespunzătoare pentru $d_1, d_2, d_\infty(\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty)$ în cazurile $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$.

$\boxed{n = 1.}$ $d_{1,2,\infty} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, d_{1,2,\infty}(x, y) = |x - y|;$

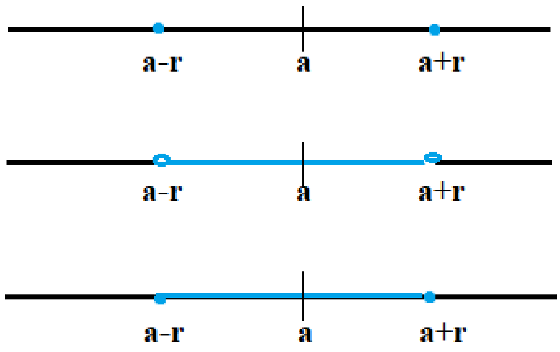
$\|\cdot\|_{1,2,\infty} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \|x\|_{1,2,\infty} = |x|.$

Fie $a \in \mathbb{R}$ şi $r > 0$. Atunci:

$S_{1,2,\infty}(a, r) = \{x \in \mathbb{R}; |x - a| = r\} = \{a - r, a + r\}$-sfera cu centrul în a şi de rază r.

$B_{1,2,\infty}(a, r) = \{x \in \mathbb{R}; |x - a| < r\} =]a - r, a + r[$-interiorul sferei (sfera deschisă) cu centrul în a şi de rază r.

$B'_{1,2,\infty}(a, r) = \{x \in \mathbb{R}; |x - a| \leq r\} = [a - r, a + r]$-sfera închisă cu centrul în a şi de rază r.



$\boxed{n = 2.}$ $d_1 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $d_1((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$;

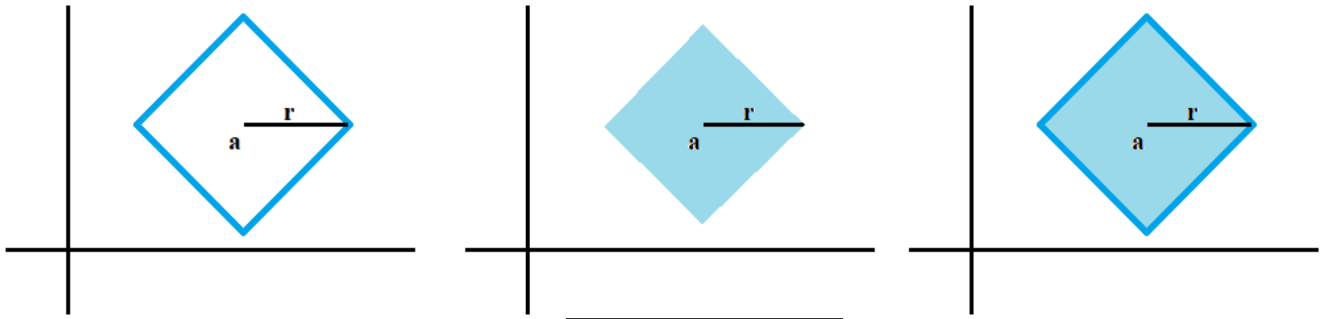
$\|\cdot\|_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\|(x_1, x_2)\|_1 = |x_1| + |x_2|$;

Fie $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ şi $r > 0$. Atunci:

$S_1(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2; |x_1 - a_1| + |x_2 - a_2| = r\}$-sfera cu centrul în $\mathbf{a}$ şi de rază r.

$B_1(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2; |x_1 - a_1| + |x_2 - a_2| < r\}$-interiorul sferei (sfera deschisă) cu centrul în $\mathbf{a}$ şi de rază r.

$B_1'(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2; |x_1 - a_1| + |x_2 - a_2| \leq r\}$-sfera închisă cu centrul în $\mathbf{a}$ şi de rază r.



$d_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $d_2((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2}$;

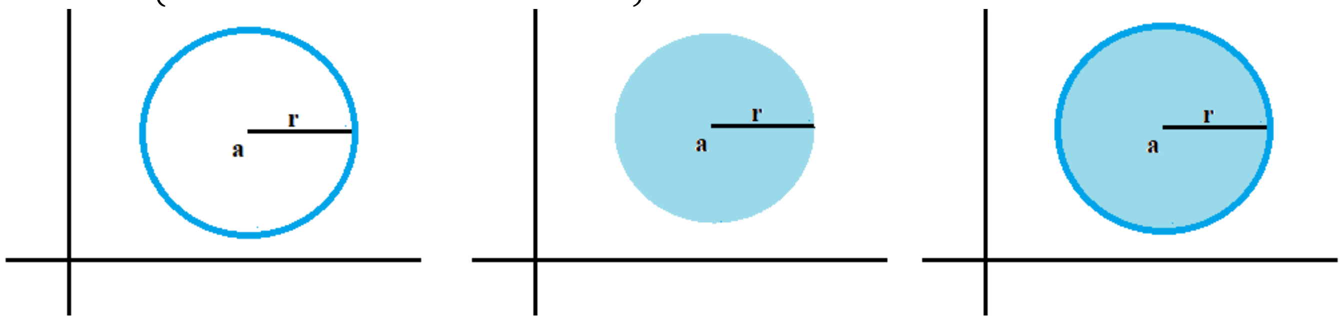
$\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\|(x_1, x_2)\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2}$.

Fie $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ şi $r > 0$. Atunci:

$S_2(\mathbf{a}, r) = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2; \sqrt{|x_1 - a_1|^2 + |x_2 - a_2|^2} = r\right\}$-sfera cu centrul în $\mathbf{a}$ şi de rază r.

$B_2(\mathbf{a}, r) = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2; \sqrt{|x_1 - a_1|^2 + |x_2 - a_2|^2} < r\right\}$-interiorul sferei (sfera deschisă) cu centrul în $\mathbf{a}$ şi de rază r.

$B_2'(\mathbf{a}, r) = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2; \sqrt{|x_1 - a_1|^2 + |x_2 - a_2|^2} \leq r\right\}$-sfera închisă cu centrul în $\mathbf{a}$ şi de rază r.



$d_\infty : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $d_\infty((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|)$;

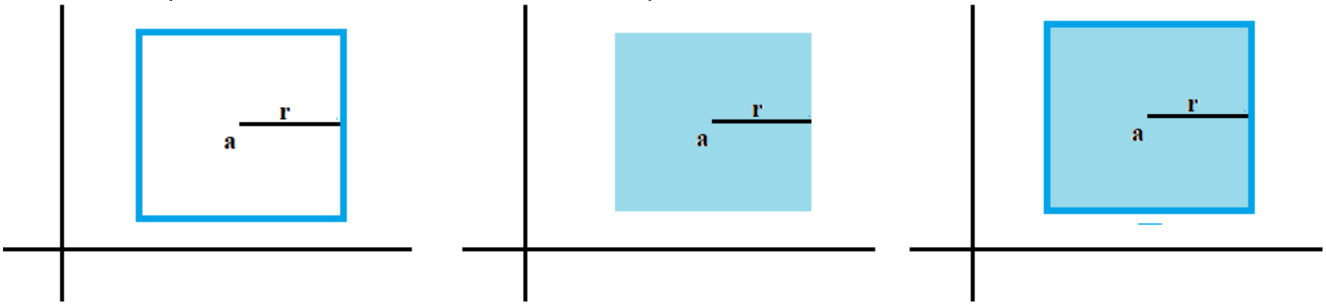
$\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\|(x_1, x_2)\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|)$

Fie $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ şi $r > 0$. Atunci:

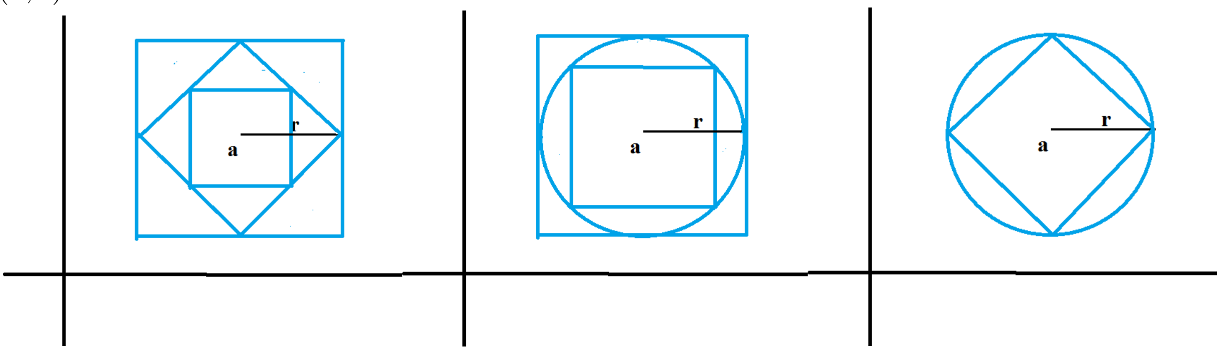
$S_\infty(\mathbf{a}, r) = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2; \max(|x_1 - a_1|, |x_2 - a_2|) = r\right\}$-sfera cu centrul în **a** şi de rază r.

$B_\infty(\mathbf{a}, r) = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2; \max(|x_1 - a_1|, |x_2 - a_2|) < r\right\}$-interiorul sferei (sfera deschisă) cu centrul în **a** şi de rază r.

$B'_\infty(\mathbf{a}, r) = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2; \max(|x_1 - a_1|, |x_2 - a_2|) \leq r\right\}$-sfera închisă cu centrul în **a** şi de rază r.



Teorema 9.2.5. **a)** $d_\infty \leq d_1 \leq n d_\infty$; **b)** $d_\infty \leq d_2 \leq \sqrt{n} d_\infty$; **c)** $d_2 \leq d_1$.
Utilizând inegalităţile anterioare, se arată că $\forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, $\forall r > 0$ au loc
$\mathbf{a}_1$) $B_\infty\left(\mathbf{a}, \frac{r}{n}\right) \subset B_1(\mathbf{a}, r) \subset B_\infty(\mathbf{a}, r)$; $\mathbf{b}_1$) $B_\infty\left(\mathbf{a}, \frac{r}{\sqrt{n}}\right) \subset B_2(\mathbf{a}, r) \subset B_\infty(\mathbf{a}, r)$; $\mathbf{c}_1$) $B_1(\mathbf{a}, r) \subset B_2(\mathbf{a}, r)$.



S-au reprezentat grafic incluziunile în cazul $n = 2$.

Exemplul 9.2.2. Se arată că $\forall \mathbf{a} = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$, $\forall r > 0$ au loc

a) $B_\infty(\mathbf{a}, r) = \prod_{j=1}^{n}]a_j - r, a_j + r[=]a_1 - r, a_1 + r[\times]a_2 - r, a_2 + r[\times ... \times]a_n - r, a_n + r[$

(este un interval deschis n-dimensional centrat în **a** şi de rază r);

b) $B'_\infty(\mathbf{a}, r) = \prod_{j=1}^{n} [a_j - r, a_j + r]$;

(este un interval închis n-dimensional centrat în **a** şi de rază r);

c) $S_\infty(\mathbf{a}, r) = \prod_{j=1}^{n} \{a_j - r, a_j + r\}$.

Exemplul 9.2.3$^{\bigcirc}$. Fie $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Se arată că funcţia

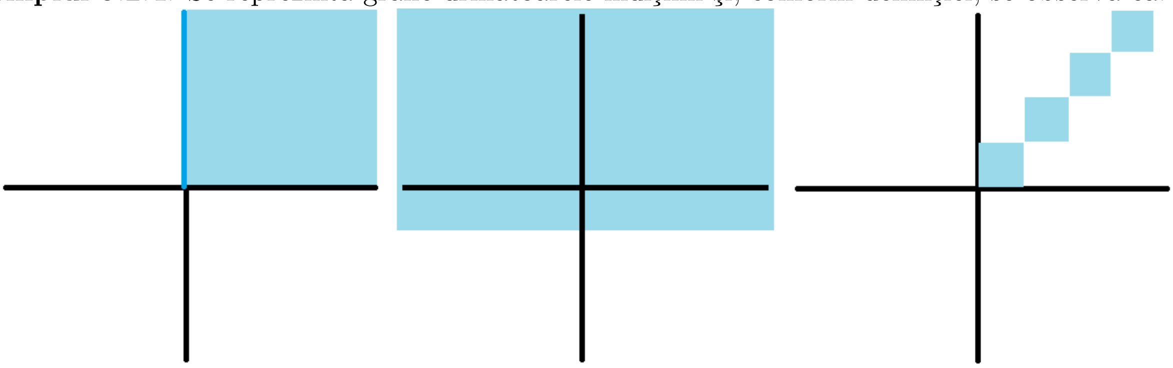
$$d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2^j} \cdot \frac{|x_j - y_j|}{1 + |x_j - y_j|}$$

este o metrică pe $\mathbb{R}^n$, dar nu este indusă de nici o normă de pe $\mathbb{R}^n$.

Definiţia 9.2.2. O mulţime $D \subseteq \mathbb{R}^n$ se numeşte *mulţime deschisă în* $\mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} \text{dacă } D = \emptyset \text{ sau} \\ \text{dacă } D \neq \emptyset \text{ şi } \forall \mathbf{a} \in D, \exists r_{\mathbf{a}} > 0 \text{ a.î. } \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_{1,2,\infty} < r \right\} \subseteq D. \end{cases}$$

Exemplul 9.2.4. Se reprezintă grafic următoarele mulţimi şi, conform definiţiei, se observă că:

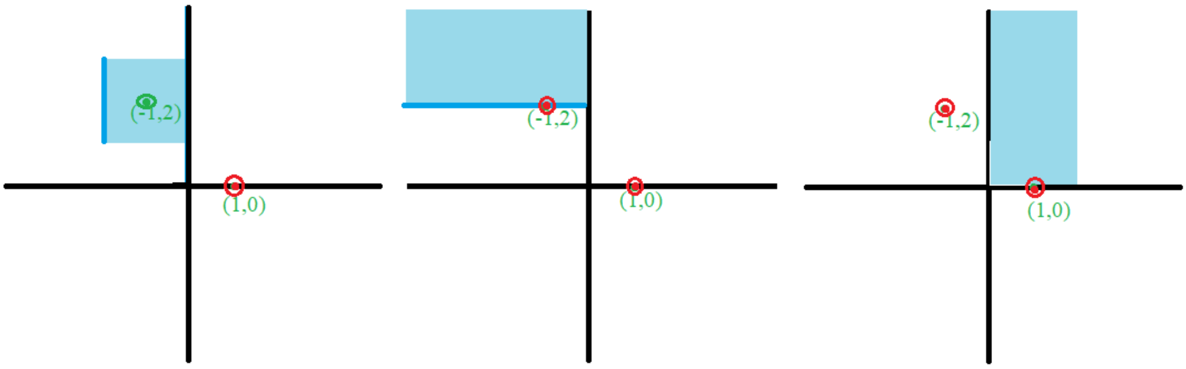


$A = [0, +\infty[\times]0, +\infty[$-nu este mulţime deschisă în $\mathbb{R}^2$;
$B = \mathbb{R} \times]-1, +\infty[$-este mulţime deschisă în $\mathbb{R}^2$;
$C = \bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} (]n, n+1[\times]n, n+1[)$-este mulţime deschisă în $\mathbb{R}^2$.

Teorema 9.2.5. $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T})$ este spaţiu topologic. Topologia $\mathcal{T}$ este formată din toate mulţimile deschise în sensul definiţiei anterioare, şi este indusă şi de d_1, şi de d_2, şi de d_∞. $\mathcal{T}$ se numeşte *topologie uzuală* pe $\mathbb{R}^n$.

Definiţia 9.2.3. O mulţime $V \subseteq \mathbb{R}^n$ se numeşte *vecinătate în* $\mathbb{R}^n$ *a punctului* $a \in \mathbb{R}^n$ dacă
$\exists r > 0$ a.î. $\left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_{1,2,\infty} < r \right\} \subseteq V.$
Se notează cu $\mathcal{V}(\mathbf{a})$ mulţimea tuturor vecinătăţilor punctului $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$.

Exemplul 9.2.5. Se reprezintă grafic următoarele mulţimi şi, conform definiţiei, se observă că:
$A = [-2, 0[\times]1, 3[$-este vecinătate în $\mathbb{R}^2$ a punctului $\mathbf{a} = (-1, 2)$ şi nu este vecinătate în $\mathbb{R}^2$ a punctului $\mathbf{a} = (1, 0)$;
Analog, pe bază de reprezentare grafică, se studiază care dintre următoarele mulţimi



$B =]-\infty, 0[\times [2, +\infty[$; $C =]0, 2[\times \mathbb{R}$;
$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; (x+1)^2 + (y-2)^2 \leq 13 \right\}$;
$E =]-\infty, 0] \times [0, 3]$; $F = [0, +\infty[\times]-\infty, 1]$
sunt vecinătăţi în $\mathbb{R}^2$ ale punctului $\mathbf{a} = (-1, 2)$, respectiv ale punctului $\mathbf{a} = (1, 0)$.

Observaţia 9.2.4. $\left(\overline{\mathbb{R}}^n, \overline{\mathcal{T}}\right)$ este doar spaţiu topologic. *Topologia uzuală* $\overline{\mathcal{T}}$ pe $\overline{\mathbb{R}}^n$ este mulţimea formată din toate mulţimile deschise în $\overline{\mathbb{R}}^n$.
(nu se precizează aici definiţia mulţimii deschise în $\overline{\mathbb{R}}^n$; nici definiţia vecinătăţii unui "punct" din $\overline{\mathbb{R}}^n$).

Exemplul 9.2.6. Se precizează care dintre mulţimile

$A = [0, +\infty] \times]0, +\infty[\,; B =]0, +\infty] \times \overline{\mathbb{R}}; C = \overline{\mathbb{R}} \times]-1, 1[$

sunt deschise în $\overline{\mathbb{R}}^2$. Reprezentare grafică.

Exemplul 9.2.7. Se precizează care dintre mulţimile

$A =]-2, 4[\times \overline{\mathbb{R}}; B = \overline{\mathbb{R}} \times]-\infty, 0[\,; C = \left\{(x, y) \in \overline{\mathbb{R}}^2; x^2 < y\right\};$

$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x + 1)^2 + (y - 2)^2 \leq 13\right\};$

$E =]-\infty, 2] \times [2, +\infty]\,; F = [-2, +\infty] \times [-\infty, 0]$

sunt vecinătăţi în $\overline{\mathbb{R}}^2$ ale "punctului" $\mathbf{a} = (1, +\infty)$, respectiv ale "punctelor" $\mathbf{a} = (+\infty, -\infty)\,, \mathbf{a} = (-1, -\infty)$. Reprezentare grafică.

Definiţia 9.2.4. O mulţime $A \subseteq \mathbb{R}^n$ este *mărginită* dacă poate fi inclusă într-o sferă deschisă:

$\exists a \in \mathbb{R}^n$ şi $\exists r > 0$ astfel încât $A \subseteq \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_{1,2,\infty} < r\right\}$

sau $\exists M > 0$ astfel încât $A \subseteq \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; \|\mathbf{x} - \boldsymbol{\theta}_{R^n}\|_{1,2,\infty} < M\right\}$

sau $\exists M > 0$ astfel încât $\|\mathbf{x}\|_{1,2,\infty} < M, \forall \mathbf{x} \in A.$

Numai pentru $n = 1$, noţiunea de mărginire coincide cu cea dată în $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq, CD)$ cu inf şi sup.

Exemplul 9.2.8. Se studiază mărginirea următoarelor mulţimi din $\mathbb{R}^2$:

$A = [-2, 0[\times]1, 2[\,; B = [0, 1] \times [1, +\infty[\,;$

$C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1\right\}; D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 \leq y\right\}.$

Reprezentare grafică.

Observaţia 9.2.5. Pentru definiţiile punctelor interioare, exterioare, frontieră, aderente, de acumulare, izolate şi a mulţimilor corespunzătoare-A se vedea Spaţii Topologice din Anexa 1.

Exemplul 9.2.9. Se determină $\mathrm{int}_X A$, $\mathrm{fr}_X A$, $\mathrm{ext}_X A$, $\mathrm{ad}_X A$, $\mathrm{ad}_X A$ (A'), $\mathrm{iz}_X A$, $\overline{A}^X$ pentru $A \subset X$, unde $X = \mathbb{R}^2$ este considerat cu topologia uzuală:

a) $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1, x + y < 1, y > 0\right\};$

b) $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1, x + y \leq 1, y \geq 0\right\};$

c) $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1, x + y < 1, y > 0\right\};$

d) $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1, x + y \leq 1, y \geq 0, x < 1\right\}.$

9.3. Şiruri de n -uple reale: mărginire, limite, şiruri Cauchy

Peste tot în această secţiune fie $m \in \mathbb{N}$ un număr natural fixat şi $\mathbb{N}_m = \{m, m + 1, ..., n, ...\}$ $(\mathbb{N}_0 = \mathbb{N}$ şi $\mathbb{N}_1 = \mathbb{N}^*)$.

Definiţia 9.3.1. Se numeşte *şir de n-uple de numere reale* o funcţie

$f : \mathbb{N}_m \to \mathbb{R}^n, f(k) = \left(x_1^k, ..., x_n^k\right).$

$n-$upla $\mathbf{x}^k = \left(x_1^k, ..., x_n^k\right) \in \mathbb{R}^n$ se numeşte *termenul de rang k* al şirului ($k \in \mathbb{N}$ indice de şir**,** $n \in \mathbb{N}_2$ indice de n-uplă). Se notează şirul prin $\left(\mathbf{x}^k\right)_{k \in \mathbb{N}_m}$. Se descrie

$\left(\mathbf{x}^k\right)_{k \in \mathbb{N}_m} : \left(x_1^m, ..., x_n^m\right), \left(x_1^{m+1}, ..., x_n^{m+1}\right), ..., \left(x_1^k, ..., x_n^k\right), ...$

Se numeşte *subşir al şirului* $\left(\mathbf{x}^k\right)_{k \in \mathbb{N}_m}$ restricţia funcţiei f la o submulţime numărabilă a $\mathbb{N}_m$.

Observaţia 2.3.1. Deoarece pentru $n \geq 2$ pe $\mathbb{R}^n$ nu se poate introduce o relaţie de ordine totală, atunci pentru pentru $n \geq 2$ nu există noţiunea de şiruri monotone de n-uple.

Definiţia 9.3.2. Fie $\left(\mathbf{x}^k\right)_{k \in \mathbb{N}_m}$ un şir de n-uple de numere reale. Şirul $\left(\mathbf{x}^k\right)_{k \in \mathbb{N}_m}$ se numeşte şir *mărginit* dacă mulţimea termenilor şirului este mărginită în $\mathbb{R}^n$, adică dacă

$\exists M > 0$ astfel încât $\left\|\mathbf{x}^k\right\|_{1,2,\infty} < M, \forall k \in \mathbb{N}_m.$

(toţi termenii şirului sunt într-o sferă deschisă de centru $\boldsymbol{\theta}_{R^n}$ şi rază M).

Teorema 2.3.1. Fie $\left(\mathbf{x}^k\right)_{k \in \mathbb{N}_m}$ un şir de n-uple de numere reale

$\mathbf{x}^k = \left(x_1^k, ..., x_n^k\right) \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{N}_m$ indice de şir, $n \in \mathbb{N}_2$ indice de n-uplă. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) $\left(\mathbf{x}^k\right)_{k\in\mathbb{N}_m}$ este şir mărginit;

(ii) $\forall j \in \{1, ..., n\}$ şirul $\left(x_j^k\right)_{k\in\mathbb{N}_m}$ este şir mărginit.

Exemplul 9.3.1. Să se studieze mărginirea şirurilor

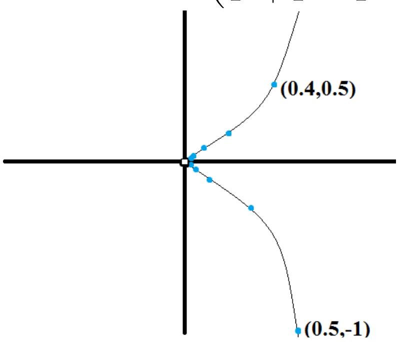
a) $(x_n, y_n) = \left(\frac{n}{n^2+1}, \frac{(-1)^n}{n}\right), \forall n \in \mathbb{N}^*$;**b)** $(x_n, y_n, z_n) = \left((-n)^n, \frac{1}{n^2}, \frac{n^2}{n+1}\right), \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Rezolvare. S-a renotat la exerciţiu indicele de şir cu n.

a) $(x_n, y_n) = \left(\frac{n}{n^2+1}, \frac{(-1)^n}{n}\right), \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Se descrie şirul:

$$((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}^*} : \left(\frac{1}{1^2+1}, \frac{(-1)^1}{1}\right), \left(\frac{2}{2^2+1}, \frac{(-1)^2}{2}\right), ..., \left(\frac{n}{n^2+1}, \frac{(-1)^n}{n}\right), ...$$



Şirul $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ este mărginit dacă:

- sau mulţimea termenilor şirului este mărginită în $\mathbb{R}^2$.
- sau şirurile $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ şi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sunt mărginite.

Aici

$x_n = \frac{n}{n^2+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

-monotonia: $x_{n+1} - x_n = \frac{n+1}{(n+1)^2+1} - \frac{n}{n^2+1} < 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$

$\Rightarrow$şirul este monoton descrescător;

-se reprezintă grafic;

-şirul este mărginit: $0 < x_n \leq \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

$y_n = \frac{(-1)^n}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Deoarece $\mathbb{N} = \{2k; k \in \mathbb{N}^*\} \cup \{2k+1; k \in \mathbb{N}\}$, se explicitează

$$y_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{dacă } n = 2k; k \in \mathbb{N}^* \\ \frac{-1}{n}, & \text{dacă } n = 2k+1; k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

-se studiază monotonia pe subşiruri şi se arată că

$\inf\limits_{n\in\mathbb{N}^*} y_n = -1; \exists \min\limits_{n\in\mathbb{N}^*} y_n = -1 = y_1;$

$\sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} y_n = \frac{1}{2}; \exists \max\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n = \frac{1}{2} = y_2.$

-se reprezintă grafic;

-şirul este mărginit: $-1 \leq y_n \leq \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Atunci şirul $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ este mărginit: $(x_n, y_n) \in \left]0, \frac{1}{2}\right] \times \left[-1, \frac{1}{2}\right], \forall n \in \mathbb{N}^*$
Se interpretează geometric.

Definiţia 9.3.3. Şirul de n-uple de numere reale $\left(\mathbf{x}^k\right)_{k\in\mathbb{N}_m}$ *are limita* $\mathbf{x} \in \left(\overline{\mathbb{R}}\right)^n$, şi se notează $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{x}^k = \mathbf{x}$ sau $\mathbf{x}^k \to \mathbf{x}$, dacă

$\forall V \in \mathcal{V}(x), \exists k_V \in \mathbb{N}_m$ a.î. $\forall k \in \mathbb{N}_m, k \geq k_V \Rightarrow \mathbf{x}^k \in V.$

Teorema 9.3.2. (**de unicitate a limitei unui şir**) Dacă un şir de n-uple de numere reale $\left(\mathbf{x}^k\right)_{k\in\mathbb{N}_m}$ are limită în $\left(\overline{\mathbb{R}}\right)^n$, atunci aceasta este unică.

Definiţia 9.3.4. Şirul de n-uple de numere reale $\left(\mathbf{x}^k\right)_{k\in\mathbb{N}_m}$ *este convergent* dacă are limită în $\mathbb{R}^n$.
Şirul $\left(\mathbf{x}^k\right)_{k\in\mathbb{N}_m}$ *este divergent* dacă sau nu are limită sau are limită şi aceasta este în $\left(\overline{\mathbb{R}}\right)^n \setminus \mathbb{R}^n$.

Teorema 9.3.3. (**de caracterizare a convergenţei unui şir**) $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{x}^k = \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists k_\varepsilon \in \mathbb{N}_m$ astfel încât $\forall k \in \mathbb{N}_m, k \geq k_\varepsilon \Rightarrow \left\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}\right\|_{1,2,\infty} < \varepsilon.$

Teorema 2.3.4. Fie $\left(\mathbf{x}^k\right)_{k\in\mathbb{N}_m}$ un şir de n-uple de numere reale

$\mathbf{x}^k = \left(x_1^k, ..., x_n^k\right) \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{N}_m$ indice de şir, $n \in \mathbb{N}_2$ indice de n-uplă.

Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) $\left(\mathbf{x}^k\right)_{k\in\mathbb{N}_m}$ este are limita $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$;

(ii) $\forall j \in \{1, ..., n\}$ şirul $\left(x_j^k\right)_{k\in\mathbb{N}_m}$ are limita x_j.

În caz de existenţă, $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{x}^k = \left(\lim\limits_{k\to\infty} x_1^k, ..., \lim\limits_{k\to\infty} x_n^k\right)$

Exemplul 9.3.2. Să se studieze limitele şirurilor:

a) $(x_n, y_n) = \left(\dfrac{n}{n^2+1}, \dfrac{(-1)^n}{n}\right), \forall n \in \mathbb{N}^*$;**b)** $(x_n, y_n) = \left(\dfrac{n}{2+(-1)^n}, \dfrac{n^2}{1-n}\right), n \in \mathbb{N}_2$;

c) $(x_n, y_n) = \left(\dfrac{3^n}{n^n}, \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}\right), n \in \mathbb{N}^*$;**d)** $(x_n, y_n, z_n) = \left(\sqrt[n]{n}, \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n, \cos\dfrac{2\pi}{n}\right), n \in \mathbb{N}^*$;

e) $(x_n, y_n, z_n) = \left(\dfrac{1}{n!}, \dfrac{(-1)^n}{n^2}, \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n\right), n \in \mathbb{N}^*$;

f) $(x_n, y_n, z_n) = \left(\dfrac{1}{2n+(-1)^n}, \dfrac{n^2}{n+1}, \dfrac{1}{n} - n\right), n \in \mathbb{N}^*$.

Rezolvare. Am renotat la exerciţiu indicele de şir cu n.
Şirul $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ are limită dacă şirurile $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ şi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ au limită. În acest caz

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} (x_n, y_n) = \left(\lim_{n\to\infty} x_n, \lim_{n\to\infty} y_n\right).}$$

Şirul $((x_n, y_n, z_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ are limită dacă şirurile $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ şi $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ au limită. În acest caz

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} (x_n, y_n, z_n) = \left(\lim_{n\to\infty} x_n, \lim_{n\to\infty} y_n, \lim_{n\to\infty} z_n\right).}$$

a) $(x_n, y_n) = \left(\dfrac{n}{n^2+1}, \dfrac{(-1)^n}{n}\right), \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Se descrie şirul:

$$((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}^*} : \left(\frac{1}{1^2+1}, \frac{(-1)^1}{1}\right), \left(\frac{2}{2^2+1}, \frac{(-1)^2}{2}\right), ..., \left(\frac{n}{n^2+1}, \frac{(-1)^n}{n}\right), ...$$

$x_n = \dfrac{n}{n^2+1}, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0.$

$y_n = \dfrac{(-1)^n}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0.$

Deci $\exists \lim\limits_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (0, 0)$.

Se interpretează geometric.

b) $(x_n, y_n) = \left(\dfrac{n}{2+(-1)^n}, \dfrac{n^2}{1-n}\right), n \in \mathbb{N}_2;$

Se descrie şirul:

$$((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}_2} : \left(\frac{2}{2+(-1)^2}, \frac{2^2}{1-2}\right), \left(\frac{3}{3+(-1)^3}, \frac{3^2}{1-3}\right), ..., \left(\frac{n}{2+(-1)^n}, \frac{n^2}{1-n}\right), ...$$

$x_n = \dfrac{n}{2+(-1)^n}, \forall n \in \mathbb{N}_2.$

Deoarece $\mathbb{N}_2 = \{2k; k \in \mathbb{N}^*\} \cup \{2k+1; k \in \mathbb{N}^*\}$, se explicitează

$$x_n = \begin{cases} \dfrac{n}{3}, & \text{dacă } n = 2k; k \in \mathbb{N}^* \\ \dfrac{n}{1}, & \text{dacă } n = 2k+1; k \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Se trece la limită pe subşiruri

$$\begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{2k}{3} = +\infty; \\ \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k+1} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{2k+1}{1} = +\infty \end{cases} \overset{\mathbb{N}_2=\{2k;k\in\mathbb{N}^*\}\cup\{2k+1;k\in\mathbb{N}^*\}}{\Rightarrow}$$

mulţimea punctelor limită ale şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_2}$ este

$\mathcal{L}\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}_2}\right) = \{+\infty\} \Rightarrow$

$$\begin{cases} \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \liminf\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty \text{ (cel mai mic punct limită)} \\ \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \limsup\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty \text{ (cel mai mare punct limită)} \end{cases} \Rightarrow$$

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty.$

$y_n = \dfrac{n^2}{1-n}, \forall n \in \mathbb{N}_2 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty.$

Deci $\exists \lim\limits_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (+\infty, -\infty)$.

Se interpretează geometric.

c) $(x_n, y_n) = \left(\dfrac{3^n}{n^n}, \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}\right), n \in \mathbb{N}^*;$

Se descrie şirul:

$$((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}^*} : \left(\frac{3^1}{1^1}, 1+\frac{1}{1!}\right), \left(\frac{3^2}{2^2}, 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\right), ..., \left(\frac{3^n}{n^n}, 1+\frac{1}{1!}+...+\frac{1}{n!}\right), ...$$

$x_n = \dfrac{3^n}{n^n}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$

$$\left.\begin{array}{l} 0 < \dfrac{3^n}{n^n} = \left(\dfrac{3}{n}\right)^n < \left(\dfrac{3}{4}\right)^n, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 5; \\ \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3}{4}\right)^n = 0 \end{array}\right\} \overset{\text{Crit. Cleştelui}}{\Rightarrow}$$

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0.$

$y_n = 1 + \dfrac{1}{1!} + ... + \dfrac{1}{n!}, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} y_n = e.$

Deci $\exists \lim\limits_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (0, e)$.

Se interpretează geometric.

d) $(x_n, y_n, z_n) = \left(\sqrt[n]{n}, \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n, \cos\dfrac{2\pi}{n}\right), n \in \mathbb{N}^*;$

Se descrie şirul:

$$((x_n, y_n, z_n))_{n\in\mathbb{N}^*} : \left(\sqrt[1]{1}, \left(1+\tfrac{1}{1}\right)^1, \cos\tfrac{2\pi}{1}\right), \left(\sqrt[2]{2}, \left(1+\tfrac{1}{2}\right)^2, \cos\tfrac{2\pi}{2}\right), ..., \left(\sqrt[n]{n}, \left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n, \cos\tfrac{2\pi}{n}\right), ...$$

$x_n = \sqrt[n]{n}, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1.$

$y_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} y_n = e.$

$z_n = \cos\dfrac{2\pi}{n}, n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} z_n = 1.$

Deci $\exists \lim\limits_{n\to\infty} (x_n, y_n, z_n) = (1, e, 1)$.

Se interpretează geometric.

Teorema 9.3.5. (**operaţii algebrice cu şiruri convergente**) Fie $\left(\mathbf{x}^k\right)_{k\in\mathbb{N}_m}$ şi $\left(\mathbf{y}^k\right)_{k\in\mathbb{N}_m}$ două şiruri de n-uple de numere reale şi $\lambda \in \mathbb{R}$.

a) Dacă şirurile $\left(\mathbf{x}^k\right)_{k\in\mathbb{N}_m}$ şi $\left(\mathbf{y}^k\right)_{k\in\mathbb{N}_m}$ sunt convergente atunci şirurile $\left(\mathbf{x}^k + \mathbf{y}^k\right)_{k\in\mathbb{N}_m}$ şi $\left(\lambda \cdot \mathbf{x}^k\right)_{k\in\mathbb{N}_m}$ sunt convergente. În acest caz

$$\lim_{k\to\infty} \left(\mathbf{x}^k + \mathbf{y}^k\right) = \lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^k + \lim_{k\to\infty} \mathbf{y}^k \text{ şi } \lim_{k\to\infty} \left(\lambda \cdot \mathbf{x}^k\right) = \lambda \cdot \left(\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^k\right).$$

b) Dacă şirul $\left(\mathbf{x}^k\right)_{k\in\mathbb{N}_m}$ este convergent atunci şirul $\left(\left\|\mathbf{x}^k\right\|_{1,2,\infty}\right)_{k\in\mathbb{N}_m}$ este convergent. În acest caz

$$\lim_{k\to\infty} \left\|\mathbf{x}^k\right\|_{1,2,\infty} = \left\|\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^k\right\|_{1,2,\infty}.$$

Teorema 9.3.6. (**criteriul majorării de convergenţă, CS**) Fie $\left(\mathbf{x}^k\right)_{k\in\mathbb{N}_m}$ un şir de n-uple de numere reale. Dacă există un şir $\left(y^k\right)_{k\in\mathbb{N}_m}$ de numere reale pozitive şi o n-uplă $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ astfel încât

$$\begin{cases} \left\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}\right\|_{1,2,\infty} \le y^k, \forall k \in \mathbb{N}_m, k > k_0, \\ \exists \lim\limits_{k\to\infty} y^k = 0 \end{cases}$$

atunci $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{x}^k = \mathbf{x}$.

Definiţia 9.3.4. Şirul de n-uple de numere reale $\left(\mathbf{x}^k\right)_{k\in\mathbb{N}_m}$ este *şir Cauchy* (*şir fundamental*) dacă

$$\forall \varepsilon > 0, \exists k_\varepsilon \in \mathbb{N}_m \text{ astfel încât } \forall p \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{N}_m, k \ge k_\varepsilon \text{ să rezulte } \left\|\mathbf{x}^{k+p} - \mathbf{x}^k\right\|_{1,2,\infty} < \varepsilon.$$

Teorema 9.3.7. (**Criteriul Cauchy de convergenţă a şirurilor de n-uple de nr. reale, CNS**) Şirul de n-uple de numere reale $\left(\mathbf{x}^k\right)_{k\in\mathbb{N}_m}$ este şir convergent $\Leftrightarrow$ este şir Cauchy.

○**9.4**. Serii de n-uple de numere reale

10. Limite de funcţii $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ în $\mathbf{a} \in A'$

Se va studia noţiunea de limită pentru funcţii definite pe mulţimi din $\mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}^*$ cu valori în $\mathbb{R}^p, p \in \mathbb{N}^*$, în următoarele situaţii:

•limita unei funcţii reale de o variabilă reală $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ în $a \in A'$:

$\forall x \in A \subseteq \mathbb{R},\ f(x) = y \in \mathbb{R}$.

•limita unei funcţii cu valori reale de n variabile reale (de fapt cu variabila o n-uplă) (*câmp scalar*) $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}^*$ în $\mathbf{a} \in A'$:

$\forall \mathbf{x} = (x_1, ..., x_n) \in A \subseteq \mathbb{R}^n, f(\mathbf{x}) = f((x_1, ..., x_n)) \overset{\text{convenţie}}{=} f(x_1, ..., x_n) = y \in \mathbb{R}$.

•limita unei funcţii cu valori vectoriale (cu valori p-uple) de o variabilă reală $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$, $p \in \mathbb{N}^*$ în $a \in A'$:

$\forall x \in A \subseteq \mathbb{R}, f(x) = (f_1(x), ..., f_p(x)) = (y_1, ..., y_p) \in \mathbb{R}^p$.

•limita unei funcţii cu valori vectoriale (cu valori p-uple) de n variabile reale (cu variabila o n-uplă) (*câmp vectorial*) $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p,\ n \in \mathbb{N}^*$şi $p \in \mathbb{N}^*$ în $\mathbf{a} \in A'$:

$\forall \mathbf{x} = (x_1, ..., x_n) \in A \subseteq \mathbb{R}^n, f(\mathbf{x}) = f((x_1, ..., x_n)) \overset{\text{convenţie}}{=} f(x_1, ..., x_n) =$
$= (f_1(x_1, ..., x_n), ..., f_p(x_1, ..., x_n)) = (y_1, ..., y_p) \in \mathbb{R}^p$.

Euristică. A. Din tabelul următor (cu valori ale $f(x, y)$), se observă că funcţia

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2}, \text{ unde } D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\},$$

are proprietatea că, dacă (x, y) "se apropie" de $(0, 0)$, atunci şi $f(x, y)$ "se apropie" de numărul 0.

$x \setminus y$	-1.0	-0.5	-0.2	0	0.5	0.2	1.0
-1.0	-0.500	-0.800	-0.962	-1.000	-0.800	-0.962	-0.500
-0.5	-0.100	-0.250	-0.432	-0.500	-0.250	-0.432	-0.100
-0.2	-0.007	-0.027	-0.100	-0.200	-0.100	-0.027	-0.007
0	0.000	0.000	0.000		0.000	0.000	0.000
0.2	0.007	0.027	0.100	0.200	0.100	0.027	0.007
0.5	0.100	0.250	0.432	0.500	0.250	0.432	0.100
1.0	0.500	0.800	0.962	1.000	0.800	0.962	0.500

Din tabelul următor (cu valori ale $f(x, y)$), se observă că funcţia

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \text{ unde } D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\},$$

are proprietatea că, dacă (x, y) "se apropie" de $(0, 0)$, atunci şi $f(x, y)$ "nu se apropie" de niciun număr.

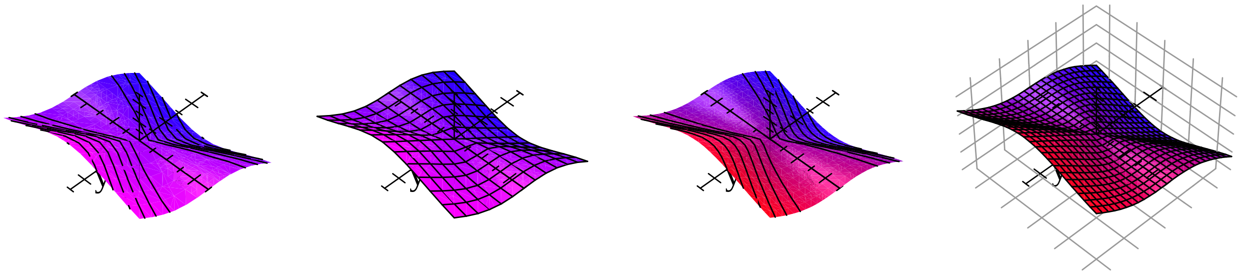
$x \setminus y$	-1.0	-0.5	-0.2	0	0.2	0.5	1.0
-1.0	0.000	0.600	0.923	1.000	0.923	0.600	0.000
-0.5	-0.600	0.000	0.724	1.000	0.724	0.000	-0.600
-0.2	-0.923	-0.724	0.000	1.000	0.000	-0.724	-0.923
0	-1.000	-1.000	-1.000		-1.000	-1.000	-1.000
0.2	-0.923	-0.724	0.000	1.000	0.000	-0.724	-0.923
0.5	-0.600	0.000	0.724	1.000	0.724	0.000	-0.600
1.0	0.000	0.600	0.923	1.000	0.923	0.600	0.000

B. O funcţie $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ are graficul $G_f = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x, y) \in D, z = f(x, y)\right\}$, care se poate reprezenta, cu ajutorul calculatorului, în $\mathbb{R}^3$.

Grafic, se observă că funcţia

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}, f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2}$$

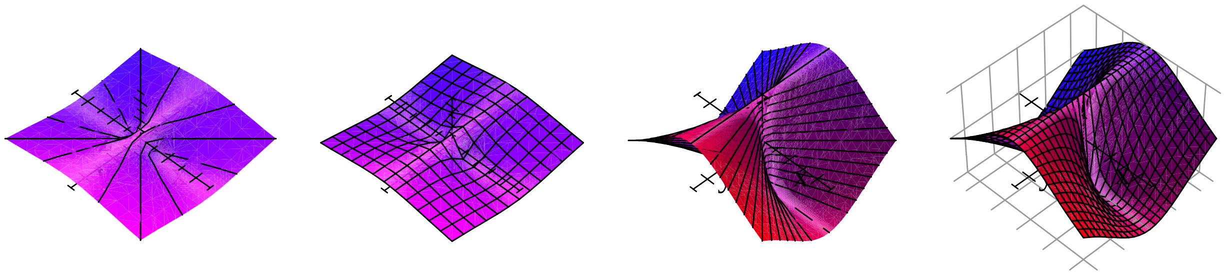
are proprietatea că, dacă (x, y) "se apropie" de $(0, 0)$, atunci şi $f(x, y)$ "se apropie" de 0.



Grafic (cu grafic "mărit în apropiere de" $O(0,0,0)$, reprezentat în fereastra din dreapta), se observă că

$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}, f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

are proprietatea că, dacă (x,y) "se apropie" de $(0,0)$, atunci şi $f(x,y)$ "nu se apropie" de niciun număr, are "oscilaţii" mari raportate la cotă.



Observaţiile anterioare conduc la următoarea definiţie, dată în cazul general:

Definiţia 10.1. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $\mathbf{a} \in A' \subseteq \overline{\mathbb{R}}^n$. Funcţia f are *limita* $\mathbf{l} \in \overline{\mathbb{R}}^p$ *în punctul* $\mathbf{a}$ şi se notează $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}, \mathbf{x}\in A} f(\mathbf{x}) = \mathbf{l}$ dacă

$[\forall V \in \mathcal{V}(\mathbf{l}), \exists U = U_V \in \mathcal{V}(\mathbf{a})$ a.î. $\forall \mathbf{x} \in A \cap U, \mathbf{x} \neq \mathbf{a} \Rightarrow f(\mathbf{x}) \in V]$.

Dacă există, $\mathbf{l} \in \overline{\mathbb{R}}^p$ se numeşte *limita* (*globală a*) *funcţiei* f *în* $\mathbf{a}$.

Teorema 10.1.(**de caracterizare a limitei**) Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $\mathbf{a} = (a_1, ..., a_n) \in A' \cap \mathbb{R}^n$. Sunt echivalente afirmaţiile

(a) (definiţia limitei cu **vecinătăţi** 10.1) $\exists \lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}, \mathbf{x}\in A} f(\mathbf{x}) = \mathbf{l} \in \mathbb{R}^p$

(b) (caracterizarea $\varepsilon - \delta$) $[\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ a.î. $\forall \mathbf{x} = (x_1, ..., x_n) \in A$ cu $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_{\mathbb{R}^n} < \delta$(este suficient $|x_1 - a_1| < \delta, ..., |x_n - a_n| < \delta$), $\mathbf{x} \neq \mathbf{a} \Rightarrow \|f(\mathbf{x}) - \mathbf{l}\|_{\mathbb{R}^p} < \varepsilon]$.

(c) (caracterizarea **cu şiruri**) $[\forall \left(\mathbf{x}^k\right)_{k\in\mathbb{N}_m}$ un şir de n-uple reale din $A \setminus \{\mathbf{a}\}$, cu $\lim\limits_{k\to\infty} \left(x_1^k, ..., x_n^k\right) = (a_1, ..., a_n) \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} f\left(x_1^k, ..., x_n^k\right) = \mathbf{l}]$.

Observaţia 10.1. Se reformulează teorema de caracterizare pentru

A) $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in A', \mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$. Sunt echivalente afirmaţiile

(a) (definiţia limitei cu **vecinătăţi**) $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(a_1,a_2),(x,y)\in A} f(x,y) = l \in \mathbb{R}$

(b) (caracterizarea $\varepsilon - \delta$) $[\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ a.î. $\forall (x,y) \in A \setminus \{\mathbf{a}\}$ cu
$|x - a_1| < \delta$ şi $|y - a_2| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - l| < \varepsilon]$.

(c) (caracterizarea **cu şiruri**) (se renotează cu n indicele de şir)
$[\forall ((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}_m}$ un şir de perechi de numere reale din $A \setminus \{\mathbf{a}\}$, cu
$\lim\limits_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (a_1, a_2) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = l]$

B) $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \in A', \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$. Sunt echivalente afirmaţiile

(a) (definiţia limitei cu **vecinătăţi**) $\exists \lim\limits_{(x,y,z)\to(a_1,a_2,a_3),(x,y)\in A} f(x,y,z) = l \in \mathbb{R}$

(b) (caracterizarea $\varepsilon - \delta$) $[\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ a.î. $\forall (x,y,z) \in A \setminus \{\mathbf{a}\}$, cu $|x - a_1| < \delta, |y - a_2| < \delta, |z - a_3| < \delta \Rightarrow |f(x,y,z) - l| < \varepsilon]$.

(c) (caracterizarea **cu şiruri**) (se renotează cu n indicele de şir) $[\forall ((x_n, y_n, z_n))_{n\in\mathbb{N}_m}$ un şir de triplete de numere reale din $A \setminus \{\mathbf{a}\}$, cu $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n, y_n, z_n) = (a_1, a_2, a_3) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n, z_n) = l]$

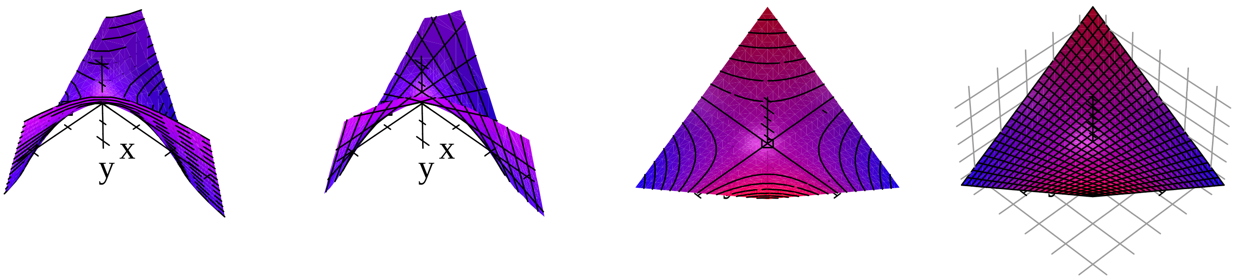
Exemplul 10.1. Să se arate că

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,3)} (3 + 2xy) = 9$;**b)** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y + yx^2}{x^2 + y^2} = 0$;**c)** $\lim\limits_{(x,y,z)\to(1,1,1)} \dfrac{x^3 + y^3 + z^3}{x^2 + y^2 + z^2} = 1$

Rezolvare. a) Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = 3 + 2xy$. Graficul funcţiei,

$$G_f = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; z = 3 + 2xy\right\},$$

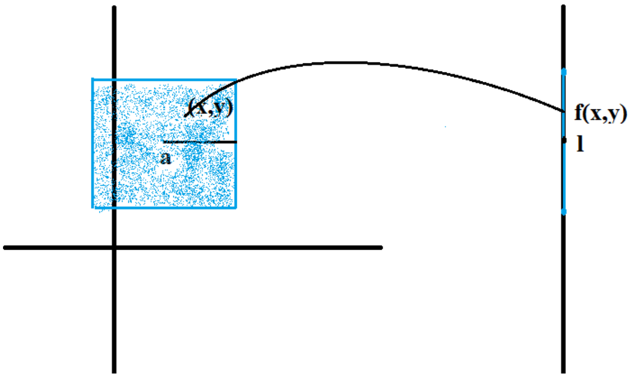
se reprezintă ca o suprafaţă în spaţiu.



Se alege $A = \mathbb{R}^2$ şi se observă că $\mathbf{a} = (1,3) \in A'$.

Se studiază dacă $(x,y) \to (1,3) \Rightarrow f(x,y) \to 9$, adică $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(1,3)} f(x,y) = 9 \Leftrightarrow$

$$[\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ a.î. } \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(1,3)\} \text{ cu } \underbrace{|x - 1| < \delta \text{ şi } |y - 3| < \delta}_{(x,y) \text{ este în o vecinatate a lui } (1,3)} \Rightarrow \underbrace{|f(x,y) - 9| < \varepsilon}_{f(x,y) \text{ este în o vecinătate a lui } 9}].$$



Fie $\forall \varepsilon > 0$. Se caută $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ a.î. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(1,3)\}$ cu $|x - 1| < \delta$ şi $|y - 3| < \delta$ să rezulte

$$|f(x,y) - 9| = |3 + 2xy - 9| = 2|xy - 3| = 2|(x - 1)(y - 3) + 3(x - 1) + (y - 3)| \le$$

$$\le 2(|x - 1| \cdot |y - 3| + 3|x - 1| + |y - 3|) \underset{\text{rămâne } \delta}{\overset{\text{"se scapă" de } x,y}{<}} 2[\delta \cdot \delta + 3\delta + \delta] < \varepsilon.$$

<u>modul 1.</u> Se caută $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ a.î.

$\delta^2 + 4\delta - \frac{\varepsilon}{2} < 0 \Leftrightarrow \delta \in \left]-2 - \sqrt{4 + \frac{\varepsilon}{2}}, -2 + \sqrt{4 + \frac{\varepsilon}{2}}\right[$, adică a.î. $0 < \delta < -2 + \sqrt{4 + \frac{\varepsilon}{2}}$.

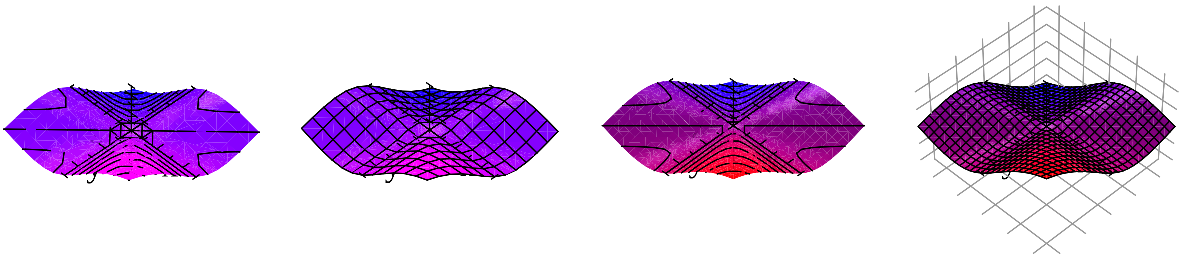
Din Teorema de densitate a $\mathbb{R}$ în $\mathbb{R}$, între numerele reale 0 şi $-2+\sqrt{4+\frac{\varepsilon}{2}}$ există un astfel de δ. Se poate alege, de exemplu, $\delta=\frac{1}{2}\left(-2+\sqrt{4+\frac{\varepsilon}{2}}\right)$.

<u>modul 2.</u> De menţionat că, deoarece $\delta(\varepsilon)$ este "rază" pentru o vecinătate a punctului $(1,3)$, se poate căuta chiar şi $\delta=\delta(\varepsilon)\in\,]0,1[$ a.î.

$2\left[\delta\cdot\delta+3\delta+\delta\right]\overset{\delta^2<\delta,\text{ pentru }\delta\in]0,1[}{<}2\left(\delta+3\delta+\delta\right)=10\delta<\varepsilon.$

Din Teorema de densitate a $\mathbb{R}$ în $\mathbb{R}$, între numerele reale 0 şi $\frac{\varepsilon}{10}$ există un astfel de δ. Se poate alege, de exemplu, $\delta=\min\left\{\frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{10},1\right\}$.q.e.d.

b) Fie $f:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\, f(x,y)=\dfrac{x^2y+xy^2}{x^2+y^2}$, unde $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;(x,y)\neq(0,0)\right\}$.

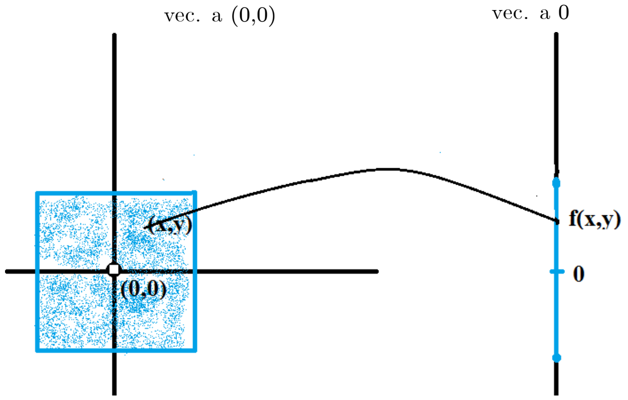


Se alege $A=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}=D$ a.î. $\mathbf{a}=(0,0)\in A'$.

Se studiază dacă $\exists\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y+xy^2}{x^2+y^2}=0\Leftrightarrow$

$[\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$ a.î. $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ cu

$\underbrace{|x-0|<\delta \text{ şi } |y-0|<\delta}_{\text{vec. a }(0,0)}\Rightarrow\underbrace{|f(x,y)-0|<\varepsilon}_{\text{vec. a }0}].$



Fie $\forall\varepsilon>0$. Se caută $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ a.î. $\forall(x,y)\in A\setminus\{(0,0)\}$ cu

$|x-0|<\delta$ şi $|y-0|<\delta$ să rezulte

<u>modul 1.</u>(folosind $\frac{u}{u+v}<1,\forall u>0,v>0$)

$$|f(x,y)-0|=\left|\frac{x^2y+xy^2}{x^2+y^2}-0\right|\le\frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot|y|+\frac{y^2}{x^2+y^2}\cdot|x|\underset{\text{rămâne }\delta}{\overset{\text{"se scapă" de }x,y}{<}}1\cdot\delta+1\cdot\delta<\varepsilon.$$

Deci se caută $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ a.î. $0<2\delta<\varepsilon$. Din Teorema de densitate a $\mathbb{R}$ în $\mathbb{R}$, între numerele reale 0 şi ε există un astfel de δ. Se poate alege, de exemplu, $\delta=\frac{\varepsilon}{4}$.

<u>modul 2.</u>(folosind $u^2+v^2\ge2|u|\cdot|v|,\forall u,v\in\mathbb{R}$)

$$|f(x,y)-0|=\left|\frac{x^2y+xy^2}{x^2+y^2}-0\right|\le\frac{x^2\cdot|y|+|x|\cdot y^2}{x^2+y^2}\le\frac{x^2\cdot|y|+|x|\cdot y^2}{2|x|\cdot|y|}=\frac{1}{2}(|x|+|y|)\underset{\text{rămâne }\delta}{\overset{\text{"se scapă" de }x,y}{<}}$$

$\frac{1}{2}(\delta+\delta)<\varepsilon.$

Deci se caută $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ a.î. $0 < \delta < \varepsilon$. Din Teorema de densitate a $\mathbb{R}$ în $\mathbb{R}$, între numerele reale 0 şi ε există un astfel de δ. Se poate alege, de exemplu, $\delta = \frac{\varepsilon}{2000}$.

c) Fie $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x,y,z) = \dfrac{x^3+y^3+z^3}{x^2+y^2+z^2}$, unde $D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; (x,y,z) \neq (0,0,0)\right\}$.

Se alege $A = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} = D$ a.î. $\mathbf{a} = (1,1,1) \in A'$.

Se studiază dacă $\exists \lim\limits_{(x,y,z)\to(1,1,1)} \dfrac{x+y+z}{x^2+y^2+z^2} = 1 \Leftrightarrow$

$[\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ a.î. $\forall (x,y,z) \in A \setminus \{(1,1,1)\}$ cu

$\underbrace{|x-1| < \delta, |y-1| < \delta \text{ şi } |z-1| < \delta}_{(x,y,z) \text{ este în o vec. a } (1,1,1)} \Rightarrow \underbrace{|f(x,y,z) - 1| < \varepsilon}_{f(x,y,z) \text{ este în o vec. a } 1}]$.

Fie $\forall \varepsilon > 0$. Se caută $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ a.î. $\forall (x,y,z) \in A \setminus \{(1,1,1)\}$ cu $|x-1| < \delta$, $|y-1| < \delta$ şi $|z-1| < \delta$ să rezulte

$$|f(x,y,z) - 1| = \left|\frac{x^3+y^3+z^3}{x^2+y^2+z^2} - 1\right| = \left|\frac{x^2(x-1) + y^2(y-1) + z^2(z-1)}{x^2+y^2+z^2}\right|$$

$$\leq \frac{x^2}{x^2+y^2+z^2}|x-1| + \frac{y^2}{x^2+y^2+z^2}|y-1| + \frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}|z-1|$$

$$\underset{|x-1|<\delta, |y-1|<\delta, |z-1|<\delta}{\overset{\text{"se scapă" de } x,y,z, \text{rămâne } \delta}{<}} 1 \cdot \delta + 1 \cdot \delta + 1 \cdot \delta < \varepsilon.$$

Deci se caută $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ a.î. $0 < 3\delta < \varepsilon$. Din Teorema de densitate a $\mathbb{R}$ în $\mathbb{R}$, între numerele reale 0 şi $\frac{\varepsilon}{3}$ există un astfel de δ. Se poate alege, de exemplu, $\delta = \frac{\varepsilon}{6}$.

$\bigcirc$**Observaţia 10.2**. Pentru $\mathbf{a} \in A', \mathbf{a} \in \left(\overline{\mathbb{R}}\right)^n$ şi $\mathbf{l} \in \left(\overline{\mathbb{R}}\right)^p$, Teorema 1, **(b)**, se poate reformula, utilizând definiţia vecinătăţilor pentru $-\infty, +\infty$ în $\overline{\mathbb{R}}$. De exemplu, pentru $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) =$ ...

a) $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(a_1,a_2),(x,y)\in A} f(x,y) = +\infty \Leftrightarrow$

$[\forall \alpha > 0, \exists \delta = \delta(\alpha) > 0$ a.î. $\forall (x,y) \in A$ cu $0 \lneqq |x - a_1| < \delta, 0 \lneqq |y - a_2| < \delta \Rightarrow f(x,y) > \alpha]$.

b) $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(a_1,a_2),(x,y)\in A} f(x,y) = -\infty \Leftrightarrow$

$[\forall \alpha < 0, \exists \delta = \delta(\alpha) > 0$ a.î. $\forall (x,y) \in A$ cu $0 \lneqq |x - a_1| < \delta, 0 \lneqq |y - a_2| < \delta \Rightarrow f(x,y) < \alpha]$.

c) $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(a_1,-\infty),(x,y)\in A} f(x,y) = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$[\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0, \exists \beta_2 = \beta_2(\varepsilon) < 0$ a.î. $\forall (x,y) \in A$ cu $0 \lneqq |x - a_1| < \delta_1, y < \beta_2 \Rightarrow |f(x,y) - l| < \varepsilon]$.

d) $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,a_2),(x,y)\in A} f(x,y) = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$[\forall \varepsilon > 0, \exists \beta_1 = \beta_1(\varepsilon) > 0, \exists \delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$ a.î. $\forall (x,y) \in A$ cu $x > \beta_1, 0 \lneqq |y - a_2| < \delta_2 \Rightarrow |f(x,y) - l| < \varepsilon]$.

ş.a.m.d.

De menţionat că $\beta_1 = \beta_1(\varepsilon) > 0$ este "mare, spre $+\infty$", iar $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$ este "mic, spre 0".

$\bigcirc$**Observaţia 10.3**. Pentru $\mathbf{a} \in A', \mathbf{a} \in \left(\overline{\mathbb{R}}\right)^n$ şi $\mathbf{l} \in \left(\overline{\mathbb{R}}\right)^p$, Teorema 1, **(c)**, se poate reformula, utilizând definiţia limitei şirurilor în $\left(\overline{\mathbb{R}}\right)^n$. De exemplu, pentru $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) =$ ..., renotând cu n indicele de şir,

a) $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(a_1,a_2),(x,y)\in A} f(x,y) = +\infty \Leftrightarrow [\forall ((x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}_m}$ un şir din $A \setminus \{\mathbf{a}\}$,
cu $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n,y_n) = (a_1,a_2) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n,y_n) = +\infty]$

b) $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(a_1,a_2),(x,y)\in A} f(x,y) = -\infty \Leftrightarrow [\forall ((x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}_m}$ un şir din $A \setminus \{\mathbf{a}\}$,
cu $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n,y_n) = (a_1,a_2) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n,y_n) = -\infty]$.

c) $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(a_1,-\infty),(x,y)\in A} f(x,y) = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow [\forall ((x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}_m}$ un şir din $A \setminus \{\mathbf{a}\}$,

cu $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n,y_n)=(a_1,-\infty)\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n,y_n)=l]$.
d) $\exists\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,a_2),(x,y)\in A}f(x,y)=l\in\mathbb{R}\Leftrightarrow[\forall((x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}_m}$ un şir din $A\setminus\{\mathbf{a}\}$,
cu $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n,y_n)=(+\infty,a_2)\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n,y_n)=l]$. ş.a.m.d.
Teorema 10.2. (**proprietatea de unicitate a limitei**)
Fie $f:A\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$, $\mathbf{a}\in A',\mathbf{a}\in\left(\overline{\mathbb{R}}\right)^n$. Dacă $\exists\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a},\mathbf{x}\in A}f(\mathbf{x})\in\left(\overline{\mathbb{R}}\right)^p$, atunci aceasta este unică.
Corolar 10.1. (**criteriul de inexistenţă a limitei cu şiruri**)
Fie $f:A\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$, $\mathbf{a}\in A',\mathbf{a}\in\left(\overline{\mathbb{R}}\right)^n$. Dacă

$\exists\left(\mathbf{x}^k\right)_{k\in\mathbb{N}_m}$ un şir de n-uple reale din $A\setminus\{\mathbf{a}\}$, cu $\lim\limits_{k\to\infty}\mathbf{x}^k\overset{\text{în }\mathbb{R}^n}{=}\mathbf{a}$,

$\exists\left(\widetilde{\mathbf{x}}^k\right)_{k\in\mathbb{N}_m}$ un şir de n-uple reale din $A\setminus\{\mathbf{a}\}$, cu $\lim\limits_{k\to\infty}\widetilde{\mathbf{x}}^k\overset{\text{în }\mathbb{R}^n}{=}\mathbf{a}$

a.î.

•sau unul din şirurile $\left(f\left(\mathbf{x}^k\right)\right)_{k\in\mathbb{N}_m},\left(f\left(\widetilde{\mathbf{x}}^k\right)\right)_{k\in\mathbb{N}_m}$ nu are limită;

•sau ambele şiruri $\left(f\left(\mathbf{x}^k\right)\right)_{k\in\mathbb{N}_m},\left(f\left(\widetilde{\mathbf{x}}^k\right)\right)_{k\in\mathbb{N}_m}$ au limită, cu

$$\lim_{k\to\infty}f\left(\mathbf{x}^k\right)\overset{\text{în }\mathbb{R}^p}{=}\mathbf{l},\ \lim_{k\to\infty}f\left(\widetilde{\mathbf{x}}^k\right)\overset{\text{în }\mathbb{R}^p}{=}\widetilde{\mathbf{l}}\text{şi } \mathbf{l}\neq\widetilde{\mathbf{l}},$$

atunci $\nexists\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a},\mathbf{x}\in A}f(\mathbf{x})$.

A se vedea Criteriul reformulat pentru $p=1$ şi $n=2,3$ în Seminar.
Definiţia 10.2. Fie $f:A\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$, $\mathbf{a}\in A',\mathbf{a}\in\mathbb{R}^n$. Fie $\mathbf{h}\in\mathbb{R}^n\setminus\{\theta_{\mathbb{R}^n}\}$ o direcţie în $\mathbb{R}^n$. Funcţia f are *limita* $\mathbf{l}\in\mathbb{R}^p$ *în punctul* $\mathbf{a}$ *după direcţia* $\mathbf{h}$ dacă

$[\exists U\in\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(0)$ a.î. $\forall t\in U$ cu $\mathbf{a}+t\mathbf{h}\in A\Rightarrow\lim\limits_{t\to0,t\in U}f(\mathbf{a}+t\mathbf{h})=\mathbf{l}]$.

Dacă există, $\mathbf{l}\in\mathbb{R}^p$ se numeşte *limita funcţiei f în $\mathbf{a}$ după direcţia h.*
Teorema 10.3. Fie $f:A\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ şi $\mathbf{a}\in A',\mathbf{a}\in\mathbb{R}^n$. Dacă $\exists\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a},\mathbf{x}\in A}f(\mathbf{x})=\mathbf{l}\in\mathbb{R}^p$ atunci, pentru $\forall\mathbf{h}\in\mathbb{R}^n\setminus\{\theta_{\mathbb{R}^n}\}$ direcţie în $\mathbb{R}^n$, $\exists\lim\limits_{t\to0}f(\mathbf{a}+t\mathbf{h})=\mathbf{l}\in\mathbb{R}^p$.
Corolar 10.2. (**criteriul de inexistenţă a limitei cu limita după direcţii**)
Fie $f:A\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$, $\mathbf{a}\in A'\subseteq\mathbb{R}^n$. Dacă

• sau $\exists\mathbf{h}\in\mathbb{R}^n\setminus\{\theta_{\mathbb{R}^n}\}$ direcţie în $\mathbb{R}^n$ pentru care $\nexists\lim\limits_{t\to0}f(\mathbf{a}+t\mathbf{h})$;

• sau $\forall\mathbf{h}\in\mathbb{R}^n\setminus\{\theta_{\mathbb{R}^n}\}$ direcţie în $\mathbb{R}^n$, $\exists\lim\limits_{t\to0}f(\mathbf{a}+t\mathbf{h})$, <u>dependentă</u> de $\mathbf{h}$;

atunci $\nexists\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a},\mathbf{x}\in A}f(\mathbf{x})$.
Teorema 10.4. Fie $f:A\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p, f(x_1,...,x_n)=(f_1(x_1,...,x_n),...,f_p(x_1,...,x_n))$ şi $\mathbf{a}\in A',\mathbf{a}\in\left(\overline{\mathbb{R}}\right)^n$. Atunci $\exists\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a},\mathbf{x}\in A}f(\mathbf{x})=\mathbf{l}\in\left(\overline{\mathbb{R}}\right)^p,\mathbf{l}=(l_1,...,l_p)\Leftrightarrow$

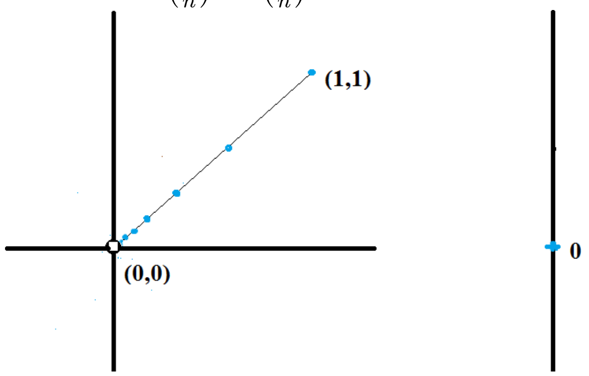
$[\exists\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a},\mathbf{x}\in A}f_i(\mathbf{x})=l_i\in\mathbb{R},\forall i\in\{1,...,p\}]$.

Exemplul 10.2. Să se arate că
a) $\nexists\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$;**b)** $\nexists\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^4-2x^2y+y^2}{x^4+y^2}$;**c)** $\nexists\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x}{x^4+y^2}$.

Rezolvare. a) Fie $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}, f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.
Graficul funcţiei este reprezentat în Euristică.
Fie $A=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Se observă că $a=(0,0)\in A'$, deci are sens studiul limitei.
<u>modul 1.</u> (cu şiruri) Se alege:

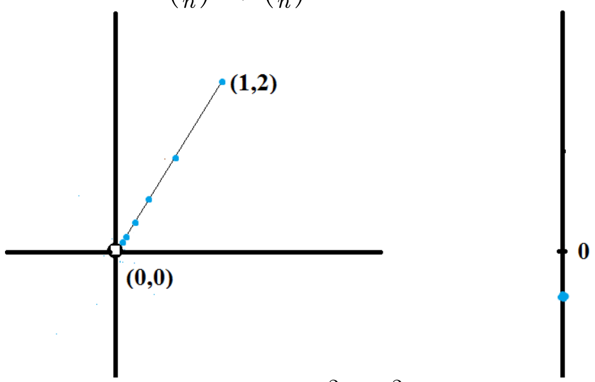
• $(x_n,y_n)=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right),\forall n\in\mathbb{N}^*$ şir de perechi din $A\setminus\{(0,0)\}$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n,y_n)=(0,0)$. Se observă că

$$f(x_n, y_n) = \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2 - \left(\frac{1}{n}\right)^2}{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$



• $(\widetilde{x}_n, \widetilde{y}_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right), \forall n \in \mathbb{N}^*$ şir de perechi din $A \setminus \{(0,0)\}$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} (\widetilde{x}_n, \widetilde{y}_n) = (0,0)$. Se observă că

$$f(\widetilde{x}_n, \widetilde{y}_n) = \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2 - \left(\frac{2}{n}\right)^2}{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2} = \frac{1 - 2^2}{1 + 2^2} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(\widetilde{x}_n, \widetilde{y}_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{-3}{5} = \frac{-3}{5}.$$



Cum $0 \neq \frac{-3}{5} \Rightarrow \nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

Comentariu. Se putea alege şi:

$(\widetilde{x}_n, \widetilde{y}_n) = \left(\frac{1}{n}, 0\right), \forall n \in \mathbb{N}^*$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} f(\widetilde{x}_n, \widetilde{y}_n) = 1 \neq 0$.

$(\widetilde{x}_n, \widetilde{y}_n) = \left(0, \frac{1}{n}\right), \forall n \in \mathbb{N}^*$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} f(\widetilde{x}_n, \widetilde{y}_n) = -1 \neq 0$.

$(\widetilde{x}_n, \widetilde{y}_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right), \forall n \in \mathbb{N}^*$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} f(\widetilde{x}_n, \widetilde{y}_n) = 1 \neq 0$.

Dacă se alegea

$(\widetilde{x}_n, \widetilde{y}_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}\right), \forall n \in \mathbb{N}^*$, cu $\lim\limits_{n\to\infty} f(\widetilde{x}_n, \widetilde{y}_n) = 0 = 0$, nu se putea aplica pentru această funcţie criteriul.

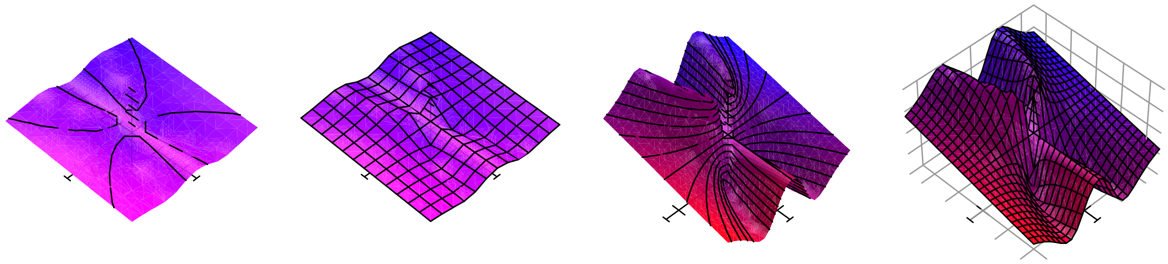
<u>modul 2.</u> (cu limite după direcţii, dacă este posibil) Se alege $\forall \mathbf{h} = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ o direcţie în $\mathbb{R}^2$.

$$\exists? \lim_{t\to 0, t\in U} f((0,0) + t(h_1, h_2)) \overset{\text{convenţie}}{\underset{((\cdot))=(\cdot)}{=}} \lim_{t\to 0, t\in U} f(th_1, th_2) = \lim_{t\to 0, t\in U} \frac{(th_1)^2 - (th_2)^2}{(th_1)^2 + (th_2)^2} =$$

$$= \lim_{t\to 0, t\in U} \frac{h_1^2 - h_2^2}{h_1^2 + h_2^2} = \frac{h_1^2 - h_2^2}{h_1^2 + h_2^2}, \forall (h_1, h_2)$$

$\Rightarrow$există limita funcţiei f în $(0,0)$ după direcţia oarecare $\mathbf{h}$, dar este dependentă de direcţia $\mathbf{h}$ aleasă $\Rightarrow$ *nu* există limita globală a funcţiei f în $(0,0)$.

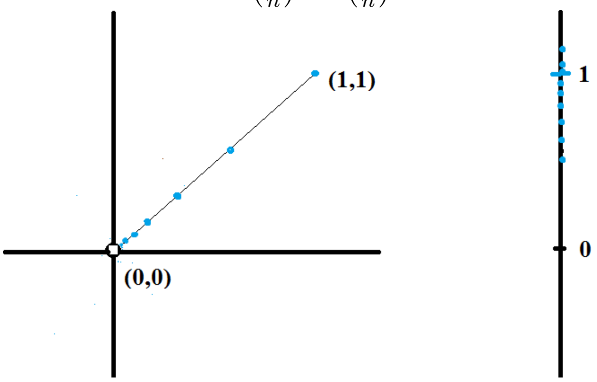
b) Fie $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\dfrac{x^4-2x^2y+y^2}{x^4+y^2}$;



Fie $A=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. se observă că $a=(0,0)\in A'$, deci are sens studiul limitei.
modul 1. (cu şiruri) Se alege

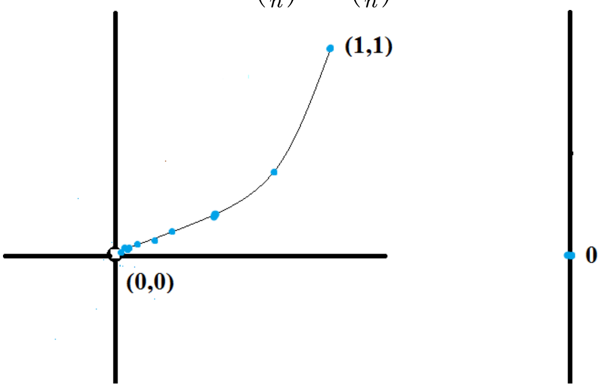
• $(x_n,y_n)=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$ şir de perechi din $A\setminus\{(0,0)\}$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n,y_n)=(0,0)$. Se observă că

$$f(x_n,y_n)=\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^4-2\left(\frac{1}{n}\right)^2\left(\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}\right)^2}{\left(\frac{1}{n}\right)^4+\left(\frac{1}{n}\right)^2}=\frac{1-2n+n^2}{1+n^2}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}f(x_n,y_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-2n+n^2}{1+n^2}=1.$$



• $(\widetilde{x}_n,\widetilde{y}_n)=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n^2}\right)$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$ şir de perechi din $A\setminus\{(0,0)\}$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty}(\widetilde{x}_n,\widetilde{y}_n)=(0,0)$. Se observă că

$$f(\widetilde{x}_n,\widetilde{y}_n)=\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^4-2\left(\frac{1}{n}\right)^2\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{1}{n}\right)^4}{\left(\frac{1}{n}\right)^4+\left(\frac{1}{n}\right)^4}=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}f(\widetilde{x}_n,\widetilde{y}_n)=\lim_{n\to\infty}0=0.$$



Cum $1\neq 0\Rightarrow\nexists\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^4-2x^2y+y^2}{x^4+y^2}$.
modul 2. (cu limite după direcţii, dacă este posibil) Se alege $\forall\mathbf{h}=(h_1,h_2)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ o direcţie

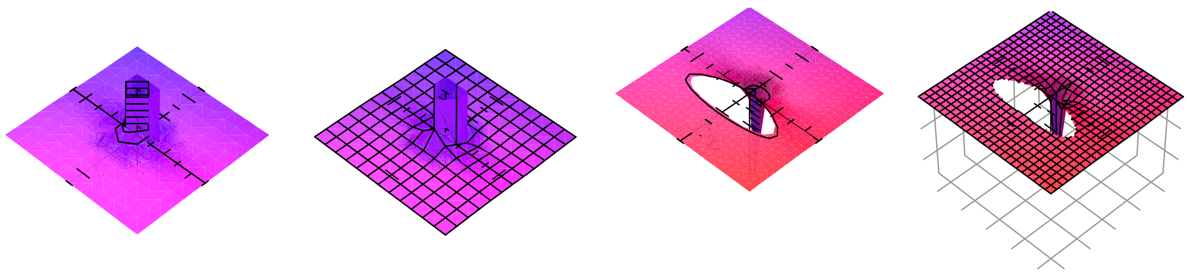
în $\mathbb{R}^2$.

$\exists? \lim\limits_{t\to 0, t\in U} f\left((0,0)+t\left(h_1,h_2\right)\right) \underset{((\cdot))=(\cdot)}{\overset{\text{convenţie}}{=}} \lim\limits_{t\to 0, t\in U} f\left(th_1, th_2\right) = \lim\limits_{t\to 0, t\in U} \dfrac{\left(th_1\right)^4 - 2\left(th_1\right)^2\left(th_2\right) + \left(th_2\right)^2}{\left(th_1\right)^4 + \left(th_2\right)^2} =$

$= \lim\limits_{t\to 0, t\in U} \dfrac{t^2}{t^2} \dfrac{t^2h_1^4 - 2th_1^2h_2 + h_2^2}{t^2h_1^4 + h_2^2} = \dfrac{h_2^2}{h_2^2} = 1, \forall\left(h_1,h_2\right)$

$\Rightarrow$există limita funcţiei f în $(0,0)$ după orice direcţie h, şi are valoarea 1, independentă de direcţie$\Rightarrow$ *se poate* să existe limita globală a funcţiei f în $(0,0)$ şi ar avea valoarea $l=1$. Nu se va putea demonstra cu acea caracterizare $\varepsilon-\delta$ că limita globală există şi ar avea valoarea 1, deci singurul mod de studiu aplicabil aici rămâne modul 1.

c) Fie $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}, f(x,y)=\dfrac{x}{x^4+y^2}$;



Fie $A=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. se observă că $a=(0,0)\in A'$, deci are sens studiul limitei.

modul 2. (cu limite după direcţii, dacă este posibil)

Fie $\forall\mathbf{h}=\left(h_1,h_2\right)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ o direcţie în $\mathbb{R}^2$.

$\exists? \lim\limits_{t\to 0, t\in U} f\left((0,0)+t\left(h_1,h_2\right)\right) \underset{((\cdot))=(\cdot)}{\overset{\text{convenţie}}{=}} \lim\limits_{t\to 0, t\in U} f\left(th_1, th_2\right) = \lim\limits_{t\to 0, t\in U} \dfrac{\left(th_1\right)}{\left(th_1\right)^4 + \left(th_2\right)^2} =$

$= \lim\limits_{t\to 0, t\in U} \dfrac{t}{t^2}\cdot\dfrac{h_1}{t^2\cdot h_1^4+h_2^2}.$

Cum $\lim\limits_{t\to 0, t<0}\dfrac{1}{t}=-\infty$ şi $\lim\limits_{t\to 0, t>0}\dfrac{1}{t}=+\infty\Rightarrow\nexists\lim\limits_{t\to 0, t\in U}\dfrac{1}{t}$.

Deci nu există limitei funcţiei în $(0,0)$ după nici o direcţie din $\mathbb{R}^2$, $\mathbf{h}$ cu $h_1\neq 0$.

$\Rightarrow$nu există limita globală a funcţiei f în $(0,0)$, adică $\nexists\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x}{x^4+y^2}$.

Exemplul 10.3. Să se studieze dacă există $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^3}{x^2+y^2}$.

Rezolvare. Fie $f:D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, f(x,y)=\dfrac{x^3}{x^2+y^2}$, unde $D=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$;

Graficul funcţiei este reprezentat în Euristică.

Fie $A=D$. se observă că $\mathbf{a}=(0,0)\in A'$. Are sens să se studieze dacă $\exists\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$.

Etapa 1. Se intuieşte o valoare posibilă a limitei globale, dacă aceasta ar exista.

Modul 1.-cu şiruri. Se alege un şir

• $\left(x_n,y_n\right)=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right), \forall n\in\mathbb{N}^*$ şir de perechi din $A\setminus\{(0,0)\}$ a.î. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n,y_n\right)=(0,0)$. se observă că

$$f\left(x_n,y_n\right)=\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^3}{\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{1}{n}\right)^2}=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{n^2}{2}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}f\left(x_n,y_n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}=\widetilde{0}.$$

$\Rightarrow$ *se poate* să existe limita globală a funcţiei f în $(0,0)$ şi ar avea valoarea $\widetilde{0}$.

modul 2. cu limite după direcţii. Fie $\forall\mathbf{h}=\left(h_1,h_2\right)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ o direcţie în $\mathbb{R}^2$.

$$\exists? \lim_{t\to 0, t\in U} f\left((0,0)+t\left(h_1,h_2\right)\right) \overset{\text{convenţie}}{\underset{((\cdot))=(\cdot)}{=}} \lim_{t\to 0, t\in U} f\left(th_1, th_2\right) = \lim_{t\to 0, t\in U} \frac{\left(th_1\right)^3}{\left(th_1\right)^2+\left(th_2\right)^2} =$$
$$= \lim_{t\to 0, t\in U} \frac{t^3}{t^2}\frac{h_1^3}{h_1^2+h_2^2} = 0, \forall\left(h_1,h_2\right)$$

$\Rightarrow$există limita funcţiei f în $(0,0)$ după orice direcţie $\mathbf{h}$, şi are valoarea $0 \Rightarrow$ *se poate* să existe limita globală a funcţiei f în $(0,0)$ şi ar avea valoarea $l = \widetilde{0}$.

Etapa 2. Se studiază existenţa limitei funcţiei în $(0,0)$ cu definiţia (caracterizarea $\varepsilon - \delta$).

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 \Leftrightarrow$

$[\forall\varepsilon > 0, \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât, $\forall(x,y) \in A \setminus \{(0,0)\}$ cu $0 < |x-0| < \delta$ şi $0 < |y-0| < \delta$ să rezulte $|f(x,y) - 0| < \varepsilon]$.

Fie $\forall\varepsilon > 0$. Se caută $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât, $\forall(x,y) \in A \setminus \{(0,0)\}$ cu $0 < |x-0| < \delta$ şi $0 < |y-0| < \delta$ să rezulte

$$|f(x,y) - 0| = \left|\frac{x^3}{x^2+y^2} - 0\right| = \frac{x^2}{x^2+y^2}|x| \le 1\cdot|x| \underset{\text{rămâne } \delta}{\overset{\text{"se scapă" de } x,y}{<}} \delta < \varepsilon.$$

Deci se caută $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât $0 < \delta < \varepsilon$. Din Teorema de densitate a $\mathbb{R}$ în $\mathbb{R}$, între numerele reale 0 şi ε există un astfel de δ. Se poate alege, de exemplu, $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$.

Deci $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} = 0$.

Definiţia 10.3. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $f(x_1,x_2,...,x_n) = ...$ o funcţie vectorială cu "n variabile" reale $x_1,x_2,...,x_n$ (variabilă o $n-$uplă).

Dacă pentru f se consideră, de exemplu, $x_2,...,x_n$ fixe, atunci f devine funcţie de o singură variabilă, anume x_1. În acest mod se poate considera f ca funcţie de orice variabilă x_i, celelalte variabile $x_1,...,x_{i-1},x_{i+1},...,x_n$ fiind considerate fixe.

Dacă se va considera *limita parţială a funcţiei f în raport cu variabila x_j* în a_i,

$$\lim_{x_i\to a_i} f(x_1,x_2,...,x_n) = f^*(x_1,...,x_{i-1},a_i,x_{i+1},...,x_n)$$

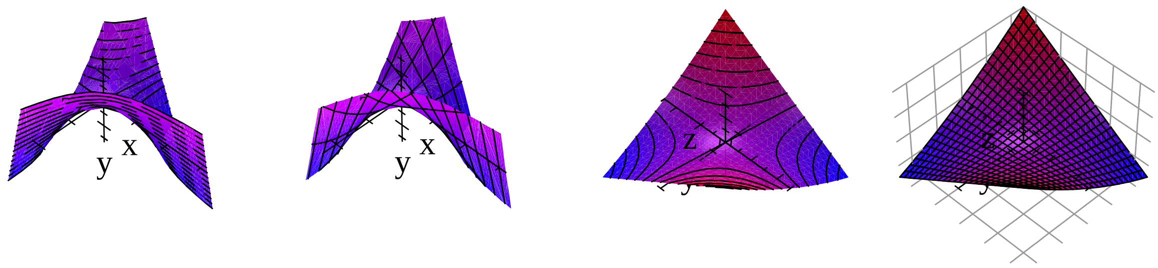
atunci valoarea limitei, $f^*(x_1,...,x_{i-1},a_i,x_{i+1},...,x_n)$, este funcţie de cele $n-1$ variabile, considerate fixe. Pentru noua funcţie f^* se poate considera limita

$$\lim_{x_j\to a_j} f^*(x_1,...,x_{i-1},a_i,x_{i+1},...,x_n) = \lim_{x_j\to a_j}\left(\lim_{x_i\to a_i} f(x_1,x_2,...,x_n)\right),$$

valoarea ultimei limite fiind o funcţie de $n-2$ variabile; aceasta se numeşte *limita iterată* a funcţiei f în ordinea x_i, x_j. Operaţia se poate continua cu toate variabilele lui f.

Exemplul 10.4. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = x^2 + 7xy$. Atunci

$$\lim_{x\to 1} f(x,y) = \lim_{x\to 1}\left(x^2+7xy\right) \overset{x \text{ variabilă de trecere la limită}}{=} 1 + 7y$$
$$\lim_{y\to 3}\left(\lim_{x\to 1} f(x,y)\right) = \lim_{y\to 3}(1+7y) = 22.$$
$$\lim_{y\to 3} f(x,y) = \lim_{y\to 3}\left(x^2+7xy\right) \overset{y \text{ variabilă de trecere la limită}}{=} x^2 + 21x$$
$$\lim_{x\to 1}\left(\lim_{y\to 3} f(x,y)\right) = \lim_{x\to 1}\left(x^2+21x\right) = 22.$$
$$\lim_{(x,y)\to(1,3)} f(x,y) = 22.$$



Teorema 10.5. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ şi $\mathbf{a} \in A', \mathbf{a} \in \left(\overline{\mathbb{R}}\right)^n$. Dacă $\exists \lim\limits_{x \to \mathbf{a}, x \in A} f(x) = \mathbf{l} \in \left(\overline{\mathbb{R}}\right)^p$ şi există o limită iterată $\lim\limits_{x_j \to a_j} \left(\lim\limits_{x_i \to a_i} f(x_1, x_2, ..., x_n) \right)$ atunci există şi limita iterată $\lim\limits_{x_i \to a_i} \left(\lim\limits_{x_j \to a_j} f(x_1, x_2, ..., x_n) \right)$ şi cele două limite iterate sunt egale, şi egale cu limita $\mathbf{l}$.

Observaţia 10.4. Dacă limitele iterate într-un punct există şi sunt egale, nu rezultă că există limita funcţiei în punctul respectiv.

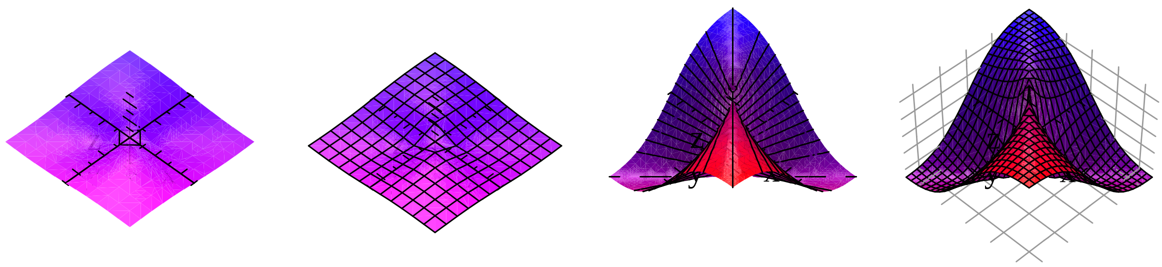
Exemplul 10.5. Să se studieze dacă există limitele iterate şi limita globală în origine pentru funcţia

a) $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$, unde $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

b) $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x}$, unde $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

c) $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$, unde $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$;

Rezolvare. a) $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$, unde $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.



•Limitele iterate în $(0,0)$ sunt

$$\lim_{x \to 0} \left(\lim_{y \to 0} f(x, y) \right) = \lim_{x \to 0} \left(\lim_{y \to 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} \right) \overset{y \text{ este var. de trecere la } \lim}{=} \lim_{x \to 0} (0) \overset{x \text{ este var. de trecere la } \lim}{=} 0,$$

$$\lim_{y \to 0} \left(\lim_{x \to 0} f(x, y) \right) = \lim_{y \to 0} \left(\lim_{x \to 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} \right) \overset{x \text{ este var. de trecere la } \lim}{=} \lim_{y \to 0} (0) \overset{y \text{ este var. de trecere la } \lim}{=} 0.$$

• Limita globală în $(0,0)$. $\exists? \lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$.

Fie $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Se observă că $\mathbf{a} = (0,0) \in A'$. Are sens să se studieze dacă $\exists \lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y)$.

Etapa 1. Se intuieşte o valoare posibilă a limitei globale, dacă aceasta ar exista.

modul 2. cu limite după direcţii. Se studiază existenţa limitei funcţiei în $(0,0)$ cu direcţii.

Fie $\forall \mathbf{h} = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ o direcţie în $\mathbb{R}^2$.

$$\exists? \lim_{t \to 0, t \in U} f((0,0) + t(h_1, h_2)) \underset{((\cdot))=(\cdot)}{\overset{\text{convenţie}}{=}} \lim_{t \to 0, t \in U} f(th_1, th_2) = \lim_{t \to 0, t \in U} \frac{(th_1)(th_2)}{(th_1)^2 + (th_2)^2} =$$

$$= \lim_{t\to 0, t\in U} \frac{t^2}{t^2} \frac{h_1 h_2}{h_1^2 + h_2^2} = \frac{h_1 h_2}{h_1^2 + h_2^2}.$$

Pentru fiecare $\mathbf{h} = (h_1, h_2)$ o direcţie în $\mathbb{R}^2$, obţinem câte o valoare a limitei anterioare. Conform Teoremei 4, era necesar ca limita anterioară sa aibă aceeaşi valoare pentru orice direcţie

$\Rightarrow$nu există limita globală a funcţiei f în $(0,0)$, adică $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

Observaţie. Etapa 1 putea fi completată cu

sau <u>modul 3.</u> Se poate studia existenţa limitei funcţiei în $(0,0)$ cu direcţii particulare, de forma $y = \lambda x, \lambda \in \mathbb{R}^*$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0), y=\lambda x} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0), y=\lambda x} \frac{x(\lambda x)}{x^2 + (\lambda x)^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0), y=\lambda x} \frac{\lambda}{1+\lambda^2} = \frac{\lambda}{1+\lambda^2}.$$

Deoarece limita anterioară nu este un număr independent de λ, ci pentru fiecare pantă λ a dreptei pe care (x,y) se deplasează spre $(0,0)$ obţinem câte o valoare a limitei

$\Rightarrow$nu există limita globală a funcţiei f în $(0,0)$, adică $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

sau <u>modul 4.</u> Se poate studia existenţa limitei funcţiei în $(0,0)$ cu şiruri particulare, care tind la $(0,0)$ pe o dreaptă de pantă $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Se alege

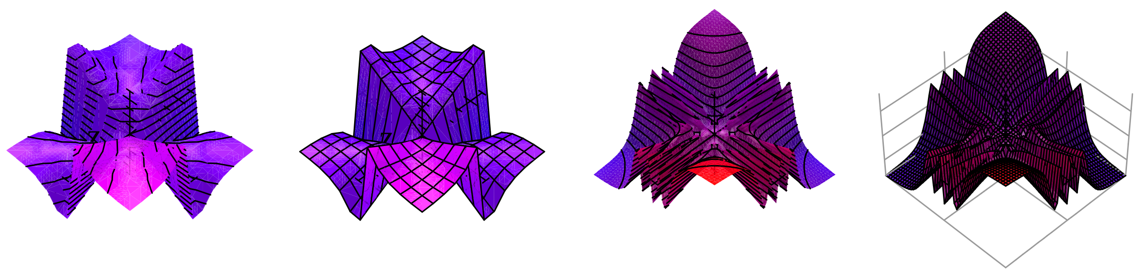
$(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{\lambda}{n}\right), \forall n \in \mathbb{N}^*$ şiruri de perechi din A a.î. $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (0,0)$. se observă că

$$f(x_n, y_n) = \frac{\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{\lambda}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{n}\right)^2} = \frac{\lambda}{1+\lambda^2} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda}{1+\lambda^2} = \frac{\lambda}{1+\lambda^2}.$$

Deoarece limita anterioară nu este un număr independent de λ, ci pentru fiecare şir $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ se obţine câte o valoare a limitei dependentă de panta dreptei pe care şirul se deplasează spre origine

$\Rightarrow$nu există limita globală a funcţiei f în $(0,0)$, adică $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

b) $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x}$, unde $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.



<u>Limitele iterate în $(0,0)$.</u>

$\lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = \lim\limits_{x\to 0} \left(x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x}\right)$-nu există$\Rightarrow \nexists \lim\limits_{y\to 0} \left(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right)$.

$\lim\limits_{y\to 0} f(x,y) = \lim\limits_{y\to 0} \left(x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x}\right)$-nu există$\Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to 0} \left(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right)$.

<u>Limita globală în $(0,0)$.</u>

Se arată direct că $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x}\right) = 0$ cu definiţia (caracterizarea $\varepsilon - \delta$).

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 \Leftrightarrow [\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât, $\forall (x,y) \in A \setminus \{(0,0)\}$ cu $0 < |x-0| < \delta$ şi $0 < |y-0| < \delta$ să rezulte $|f(x,y) - 0| < \varepsilon]$.

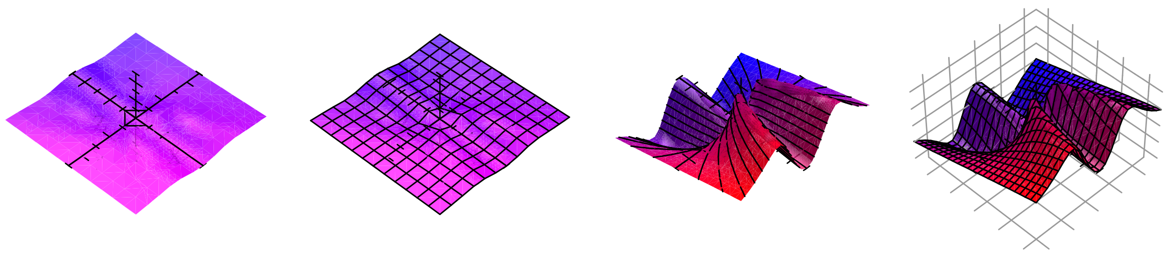
Fie $\forall \varepsilon > 0$. Se caută $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât, $\forall (x,y) \in A \setminus \{(0,0)\}$ cu $0 < |x-0| < \delta$ şi $0 < |y-0| < \delta$ să rezulte

$|f(x,y)-0| = \left|x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right| \leq |x|\cdot\left|\sin\frac{1}{y}\right| + |y|\cdot\left|\sin\frac{1}{x}\right| \leq |x|+|y| \underset{\text{rămâne } \delta}{\overset{\text{"se scapă" de } x,y}{<}} \delta+\delta<\varepsilon.$

Deci se caută $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ astfel încât $0<2\delta<\varepsilon$. Din Teorema de densitate a $\mathbb{R}$ în $\mathbb{R}$, între numerele reale 0 şi ε există un astfel de δ. Se poate alege, de exemplu, $\delta=\frac{\varepsilon}{4}$.

Deci $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right)=0.$

c) $f: D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$, unde $D=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.



Limitele iterate în $(0,0)$.

$$\lim_{x\to0}f(x,y)=\lim_{x\to0}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=0\Rightarrow\lim_{y\to0}\left(\lim_{x\to0}f(x,y)\right)=\lim_{y\to0}0=0.$$

$$\lim_{y\to0}f(x,y)=\lim_{y\to0}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=0\Rightarrow\lim_{x\to0}\left(\lim_{y\to0}f(x,y)\right)=\lim_{x\to0}0=0.$$

Limita globală în $(0,0)$.

Dacă se trece la limită spre $(0,0)$ pe parabole de parametru $m, x^2=my\Rightarrow$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\x^2=my}}f(x,y)=\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\x^2=my}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{y\to0}\frac{(my)\,y}{(my)^2+y^2}=\lim_{y\to0}\frac{m}{m^2+1}=\frac{m}{m^2+1},$$

deci limita este diferită pe parabole diferite$\Rightarrow$limita globală nu există.

○**Exemplul 10.6**. Să se studieze dacă următoarele limite există, şi dacă da, să se determine valoarea lor

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}\dfrac{x^2}{x+y}$; **b)** $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,-\infty)}\dfrac{y^2}{x^2+y^2}$;

Rezolvare. a) $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}\dfrac{x^2}{x+y}$;

Fie $f: D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, f(x,y)=\dfrac{x^2}{x+y}$, unde $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; x+y\neq0\right\}$.

Se alege $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; x+y>0\right\}$ a.î. $\mathbf{a}=(+\infty,+\infty)\in A'$. Are sens să se studieze dacă $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}f(x,y)$.

Etapa 1. Se intuieşte valoarea limitei funcţiei în $(+\infty,+\infty)$ cu şiruri. Fie

$(x_n,y_n)=(n,n), \forall n\in\mathbb{N}^*$ şir de perechi din A a.î. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n,y_n)=(+\infty,+\infty)$. se observă că

$$f(x_n,y_n)=\frac{n^2}{n+n}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}f(x_n,y_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2n}=+\infty.$$

$\Rightarrow$ *se poate* să existe limita funcţiei f în $(+\infty,+\infty)$ şi ar avea valoarea $+\infty$.

În etapa $1'$ s-a arătat că numai pentru *un şir* $((x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ cu limita $(+\infty,+\infty)$ rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n,y_n)=+\infty$, şi nu pentru *toate şirurile* din A, cu limita $(+\infty,+\infty)$. Deci nu se poate aplica Teorema 2 $\Rightarrow$ *nu se poate afirma sigur* că $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} \dfrac{x^2}{x+y} = 0.$

Etapa 2. Se studiază existenţa limitei funcţiei în $(+\infty, +\infty)$ cu definiţia (caracterizarea $\varepsilon - \delta$).

$\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} f(x,y) = +\infty \Leftrightarrow [\forall\alpha > 0, \exists\beta_1 = \beta_1(\varepsilon) > 0,\ \exists\beta_2 = \beta_2(\varepsilon) > 0$,a.î. $\forall(x,y) \in A$ cu $x > \beta_1$ şi $y > \beta_2$ să rezulte $f(x,y) > \alpha]$.

Fie $\forall\alpha > 0$ (mare spre $+\infty$, ca şi "rază" a unei vecinătăţi "punctate" pentru $+\infty$). Se caută $\beta_1 = \beta_1(\varepsilon) > 0$ (mare spre $+\infty$, ca şi "rază" a unei vecinătăţi "punctate" pentru $+\infty$), se caută $\beta_2 = \beta_2(\varepsilon) > 0$ (mare spre $+\infty$, ca şi "rază" a unei vecinătăţi "punctate" pentru $+\infty$), a.î. $\forall(x,y) \in A$ cu $x > \beta_1$ şi $y > \beta_2$ să rezulte

$$f(x,y) = \frac{x^2}{x+y} \underset{\text{rămâne } \delta_1,\beta_2}{\overset{\text{"se scapă" de } x,y}{>}} ... > \alpha.$$

Se intuieşte că

-sau nu se ştie o majorare, înainte de a scrie ... $> \alpha$.

-sau nu există limita globală $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} f(x,y)$.

Etapa 3. Se arată că $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} f(x,y)$ cu şiruri. Se alege

• $(x_n, y_n) = (n, n), \forall n \in \mathbb{N}^*$ şir de perechi din A a.î. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (+\infty, +\infty)$. Se observă că

$$f(x_n, y_n) = \frac{n^2}{n+n} = \frac{n^2}{2n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2n} = +\infty.$$

• $(\widetilde{x}_n, \widetilde{y}_n) = (n, n^2), \forall n \in \mathbb{N}^*$ şir de perechi din A a.î. $\lim\limits_{n\to\infty}(\widetilde{x}_n, \widetilde{y}_n) = (+\infty, +\infty)$. Se observă că

$$f(\widetilde{x}_n, \widetilde{y}_n) = \frac{n^2}{n+n^2} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(\widetilde{x}_n, \widetilde{y}_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n+n^2} = 1.$$

Cum $+\infty \neq 1 \Rightarrow \nexists \lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} \dfrac{x^2}{x+y}$.

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,-\infty)} \dfrac{y^2}{x^2+y^2}$;

Fie$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \dfrac{y^2}{x^2+y^2}$, unde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; (x,y) \neq (0,0)\}$.

Se alege $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x > 0, y < 0\}$ a.î. $\mathbf{a} = (+\infty, -\infty) \in A'$. Are sens să se studieze dacă $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,-\infty)} f(x,y)$.

Etapa 1. Se intuieşte valoarea limitei funcţiei în $(+\infty, -\infty)$ cu şiruri. Fie

$(x_n, y_n) = (n, -n), \forall n \in \mathbb{N}^*$ şir de perechi din A a.î. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (+\infty, -\infty)$. Se observă că

$$f(x_n, y_n) = \frac{(-n)^2}{n^2 + (-n)^2} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2n^2} = \frac{1}{2}.$$

$\Rightarrow$ *se poate* să existe limita funcţiei f în $(+\infty, -\infty)$ şi ar avea valoarea $\dfrac{1}{2}$.

În etapa $1'$ s-a arătat că numai pentru *un şir* $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ cu limita $(+\infty, -\infty)$ rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \dfrac{1}{2}$, şi nu pentru *toate şirurile* din A, cu limita $(+\infty, -\infty)$. Deci nu se poate aplica Teorema 2 $\Rightarrow$ *nu se poate afirma sigur* că $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,-\infty)} \dfrac{y^2}{x^2+y^2} = \dfrac{1}{2}$.

Etapa 2. Se studiază existenţa limitei funcţiei în $(+\infty, -\infty)$ cu definiţia (caracterizarea $\varepsilon - \delta$).

$\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,-\infty)} f(x,y) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow [\forall\varepsilon > 0, \exists\beta_1 = \beta_1(\varepsilon) > 0,\ \exists\beta_2 = \beta_2(\varepsilon) < 0$,a.î. $\forall(x,y) \in A_1$ cu

$x > \beta_1$ şi $y < \beta_2$ să rezulte $\left| f(x,y) - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$].

Fie $\forall \varepsilon > 0$. Se caută $\beta_1 = \beta_1(\varepsilon) > 0$ (mare spre $+\infty$, ca şi "rază" a unei vecinătăţi "punctate" pentru $+\infty$), se caută $\beta_2 = \beta_2(\varepsilon) < 0$ (mic spre $-\infty$, ca şi "rază" a unei vecinătăţi "punctate" pentru $-\infty$), a.î. $\forall (x,y) \in A$ cu $x > \beta_1$ şi $y < \beta_2$ să rezulte

$$\left| f(x,y) - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{y^2}{x^2+y^2} - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} \frac{\left| y^2 - x^2 \right|}{x^2+y^2} \leq \underset{\text{rămâne } \delta_1, \beta_2}{\overset{\text{"se scapă" de } x,y}{<}} \ldots < \varepsilon.$$

Se încearcă $\frac{1}{2} \frac{\left| y^2 - x^2 \right|}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2} \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = \frac{1}{2} < \varepsilon-$contradicţie cu faptul că $\varepsilon > 0$ este o rază oricât de mică pentru o vecinătate a $\frac{1}{2}$, de exemplu $\varepsilon = \frac{1}{7}$.

Se intuieşte că

-sau nu se ştie o majorare, înainte de a scrie ... $< \varepsilon$.

-sau nu există limita globală $\lim\limits_{(x,y) \to (+\infty,-\infty)} f(x,y)$.

Etapa 3. Arătăm că $\nexists \lim\limits_{(x,y) \to (+\infty,-\infty)} f(x,y)$ cu şiruri. Se alege

• $(x_n, y_n) = (n, -n), \forall n \in \mathbb{N}^*$ şir de perechi din A a.î. $\lim\limits_{n \to \infty} (x_n, y_n) = (+\infty, -\infty)$. Se observă că

$$f(x_n, y_n) = \frac{(-n)^2}{n^2 + (-n)^2} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{2n^2} = \frac{1}{2}.$$

• $(\widetilde{x}_n, \widetilde{y}_n) = \left(n^2, -n\right), \forall n \in \mathbb{N}^*$ şir de perechi din A a.î. $\lim\limits_{n \to \infty} (\widetilde{x}_n, \widetilde{y}_n) = (+\infty, -\infty)$. Se observă că

$$f(\widetilde{x}_n, \widetilde{y}_n) = \frac{(-n)^2}{n^4 + (-n)^2} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(\widetilde{x}_n, \widetilde{y}_n) = \lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{n^4 + n^2} = 0.$$

Cum $\frac{1}{2} \neq 0 \Rightarrow \nexists \lim\limits_{(x,y) \to (+\infty,-\infty)} \frac{y^2}{x^2+y^2}$.

○**10′. Limită uniformă**-nu

11. Funcţii $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ continue în $\mathbf{a} \in A$

Se va studia noţiunea continuitate pentru funcţii definite pe mulţimi dintr-un spaţiu $\mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}^*$ cu valori într-un spaţiu $\mathbb{R}^p, p \in \mathbb{N}^*$, în $a \in A$.

Definiţia 11.1. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $\mathbf{a} \in A$.

a) Funcţia f *este continuă în punctul* $\mathbf{a}$ dacă
$[\forall V \in \mathcal{V}(f(\mathbf{a})), \exists W = W_V \in \mathcal{V}(\mathbf{a})$ a.î. $\forall \mathbf{x} \in A \cap W \Rightarrow f(\mathbf{x}) \in V]$.

b) Funcţia f *este continuă pe mulţimea* A dacă este continuă în fiecare $\mathbf{a} \in A$.

Teorema 11.1. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $\mathbf{a} = (a_1, ..., a_n) \in A$. Atunci sunt echivalente afirmaţiile

(a) (**definiţia continuităţii cu vecinătăţi** 4.2.1)

-dacă $\mathbf{a} \in A \cap A', \exists \lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}, \mathbf{x} \in A} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) \in \mathbb{R}^p$

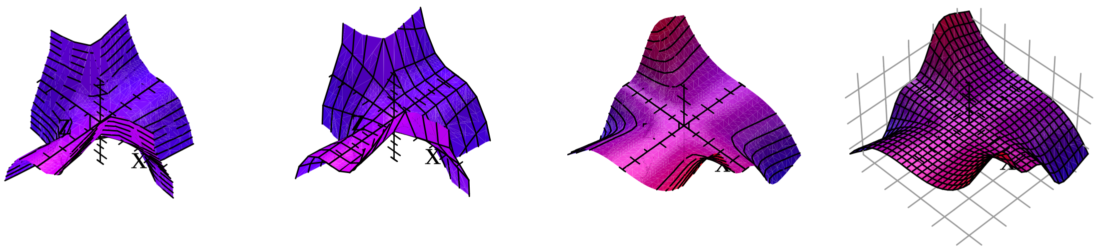
-dacă $\mathbf{a} \in A \setminus A'$ ($\mathbf{a}$ este punct izolat), f este continuă, conform Definiţiei 11.1.

(b) (**caracterizarea** $\varepsilon - \delta$) $[\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ a.î. $\forall \mathbf{x} = (x_1, ..., x_n) \in A$ cu $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_{\mathbb{R}^n} < \delta$(este suficient $|x_1 - a_1| < \delta, ..., |x_n - a_n| < \delta) \Rightarrow \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})\|_{\mathbb{R}^p} < \varepsilon]$.

(c) (**caracterizarea cu şiruri**) $[\forall \left(\mathbf{x}^k\right)_{k \in \mathbb{N}_m}$ un şir de n-uple reale din A, cu $\lim\limits_{k \to \infty} \left(x_1^k, ..., x_n^k\right) = (a_1, ..., a_n) \Rightarrow \lim\limits_{k \to \infty} f\left(x_1^k, ..., x_n^k\right) = f(a_1, ..., a_n)]$.

Exemplul 11.1. Să se studieze dacă următoarele funcţii sunt continue pe $\mathbb{R}^2$

b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y^3}{x^4 + y^2}, & \text{dacă } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{dacă } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$;



Se studiază dacă f este continuă pe $A = \mathbb{R}^2 = \left(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\right) \cup \{(0,0)\}$.

•Pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, care este mulţime deschisă, f este continuă ca fiind obţinută prin operaţii algebrice cu funcţii continue.

•În $a = (0,0) \in A \cap A'$, f este continuă $\overset{\text{Teorema 1}}{\Leftrightarrow} \exists \lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y) = \underbrace{f(0,0)}_{0}$.

Etapa 2. Se studiază existenţa limitei funcţiei în $(0,0)$ cu definiţia (caracterizarea $\varepsilon - \delta$).

$\exists \lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y) = 0 \Leftrightarrow$

$[\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ a.î. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ cu

$\underbrace{|x - 0| < \delta \text{ şi } |y - 0| < \delta}_{\text{vec. a } (0,0)} \Rightarrow \underbrace{|f(x, y) - 0| < \varepsilon}_{\text{vec. a } 0}]$.

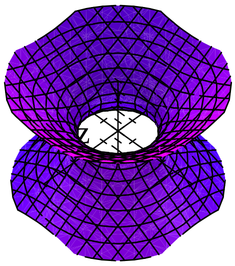
Fie $\forall \varepsilon > 0$. Se caută $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ a.î. $\forall (x, y) \in A \setminus \{(0,0)\}$ cu $|x - 0| < \delta$ şi $|y - 0| < \delta$ să rezulte

$$|f(x, y) - 0| = \left| \frac{x^3 y^3}{x^4 + y^2} - 0 \right| = \frac{|x|^3 |y| y^2}{x^4 + y^2} \leq \frac{y^2}{x^4 + y^2} |x|^3 |y| \underset{\text{rămâne } \delta}{\overset{\text{"se scapă" de } x,y}{<}} 1 \cdot \delta^3 \cdot \delta < \varepsilon.$$

Din Teorema de densitate a $\mathbb{R}$ în $\mathbb{R}$, între numerele reale 0 şi ε există un astfel de δ. Se poate alege, de exemplu, $\delta = \sqrt[4]{\frac{\varepsilon}{2}}$.

Deci $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3y^3}{x^4+y^2} = 0 = f(0,0)$
$\Rightarrow f$ este continuă în $a = (0,0)$.

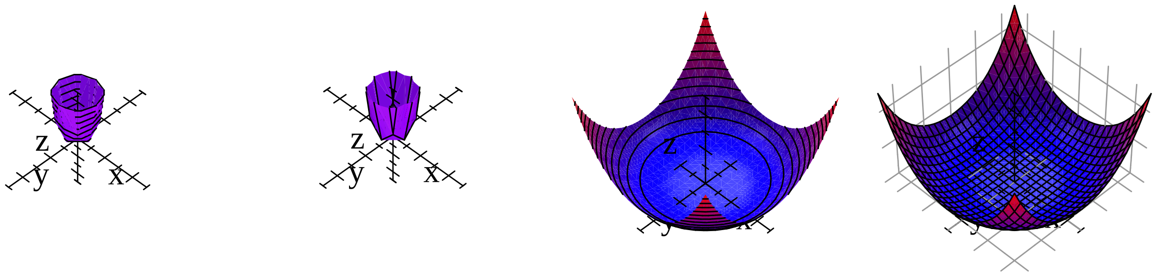
Exemplul 11.2. Să se studieze dacă următoarea funcţie este continuă pe $D \subset \mathbb{R}^2$
$f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2-4}, & \text{dacă } x^2+y^2>4 \\ \pi, & \text{dacă } (x,y)=(0,0) \end{cases}$
unde $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2>4\right\} \cup \{(0,0)\}$.



Se studiază dacă f este continuă pe $A = D$.
•Pe $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2>4\right\}$, care este mulţime deschisă, f este continuă ca fiind obţinută prin operaţii algebrice cu funcţii continue.
•În $a = (0,0) \in A \setminus A'$, adică este punct izolat pentru A, f este continuă prin definiţia cu vecinătăţi. De menţionat că în punctul izolat $a = (0,0)$ nu are sens să se studieze dacă $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Teorema 11.2. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p, f(x_1,...,x_n) = (f_1(x_1,...,x_n),...,f_p(x_1,...,x_n))$ şi $\mathbf{a} \in A$. Atunci
f este continuă în $\mathbf{a} \Leftrightarrow [f_i$ este continuă în $\mathbf{a}, \forall i \in \{1,...,p\}]$.
Teorema 11.3. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to B \subset \mathbb{R}^p, g : B \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, şi $\mathbf{a} \in A$. Dacă f este continuă în $\mathbf{a}$ şi g este continuă în $f(\mathbf{a})$ atunci funcţia compunere $g \circ f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$ este continuă în $\mathbf{a}$.
Definiţia 11.2. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Mulţimea A se numeşte *mulţime compactă în* $\mathbb{R}^n$ dacă orice şir n-uple din A conţine un subşir convergent la o n-uplă din A.
Teorema 11.4. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Mulţimea A este mulţime compactă în $\mathbb{R}^n$ dacă şi numai dacă este mărginită şi închisă.
Corolar 11.1. Sferele închise din $\mathbb{R}^n$ în raport cu orice normă din $\mathbb{R}^n$ sunt mulţimi compacte în $\mathbb{R}^n$.
Teorema 11.4. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ funcţie continuă pe A. Atunci f duce orice mulţime compactă din A într-o mulţime compactă din $\mathbb{R}^p$, adică
$\forall \widetilde{A} \subset A, \widetilde{A}$ compactă în $\mathbb{R}^n \Rightarrow f\left(\widetilde{A}\right)$ este compactă în $\mathbb{R}^p$.
Teorema 11.5. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funcţie continuă pe A. Dacă A este mulţime compactă în $\mathbb{R}^n$, atunci f îşi atinge marginile, adică adică $\exists \min\limits_{x\in A} f(x)$ şi $\exists \max\limits_{x\in A} f(x)$.

Exemplul 11.3. Fie funcţia $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \left(x^2+y^2\right)^2$,
unde $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2 \le 2\right\}$.



Funcţia f este continuă pe D. D este mulţime compactă (e închisă şi mărginită). Se observă că $\inf\limits_{x \in D} f(x,y) = 0$ şi $\sup\limits_{x \in D} f(x,y) = 2^2 = 4$.

Mai mult, infimumul este atins, adică $\exists\,(x,y) = (0,0) \in D$ astfel încât $f(0,0) = 0 \Rightarrow$ $\exists \min\limits_{x \in D} f(x,y) = 0$.

De asemenea, supremumul este atins, adică $\exists\,(x,y) \in D$, (de exemplu toate punctele (x,y) de pe cercul $x^2 + y^2 = 2$) astfel încât $f(x,y) = 4 \Rightarrow$
$\exists \max\limits_{x \in D} f(x,y) = 4$.

Definiţia 11.3. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $f(x_1, x_2, ..., x_n) = ...$
o funcţie vectorială cu "n variabile" reale $x_1, x_2, ..., x_n$ (variabila o $n-$uplă).

Dacă pentru f se consideră, de exemplu, $x_2, ..., x_n$ fixe, atunci f devine funcţie de o singură variabilă, anume x_1. În modul acesta se poate considera f ca funcţie de orice variabilă x_i, celelalte variabile $x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n$ fiind considerate fixe.

Funcţia f este *continuă parţial în raport cu variabila* x_i în a_i dacă funcţia anterioară, cu $x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n$ fiind considerate fixe, este continuă parţial în x_i.

Teorema 11.6. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$. Dacă f este funcţie continuă în $\mathbf{a} = (a_1, ..., a_n) \in A$ atunci ea este continuă în acest punct parţial în raport cu fiecare variabilă în a_i. Reciproc nu.

○11.2. Funcţii care au proprietatea lui Darboux...

○11.3. Funcţii uniform continue pe A. Funcţii Lipschitz pe A. Contracţii pe A...