CURS NR. 8
Analiză matematică, AIA

12. Teoria diferenţiabilităţii pentru $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ în $a \in A \cap A'$

Se va studia noţiunea diferenţiabilitate pentru funcţii definite pe mulţimi dintr-un spaţiu $\mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}^*$ cu valori într-un spaţiu $\mathbb{R}^p, p \in \mathbb{N}^*$, în $a \in A \cap A'$.

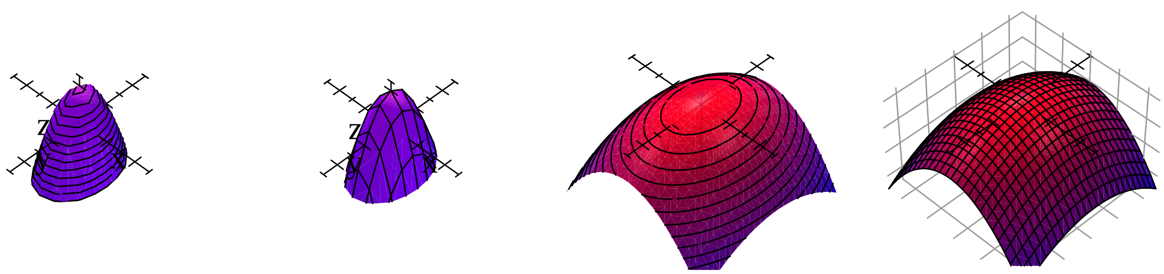
12.1. Derivata de ordin 1 după o direcţie; derivatele parţiale de ordin 1 în raport cu "variabilele" funcţiei; diferenţiala de ordin 1

În tot acest capitol, fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulţime nevidă şi deschisă (caz în care $\underline{A \cap A' = A}$).
Definiţia 12.1.1. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathbf{a} \in A$ şi $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\theta_{\mathbb{R}^n}\}$ o direcţie.
a) Funcţia f *are derivată de ordinul* 1 *în punctul* a *după direcţia* $\mathbf{h}$ dacă

$$\boxed{\exists \lim_{t \to 0, t \in V} \frac{1}{t} \left(f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) \right) \overset{\text{se not.}}{=} \frac{df}{d\mathbf{h}}(\mathbf{a}) \in \overline{\mathbb{R}},} \text{ unde } V \in \mathcal{V}(0).$$

b) Funcţia f *este derivabilă de ordinul* 1 *în punctul* a *după direcţia* h dacă există limita anterioară şi este finită, $\exists \frac{df}{d\mathbf{h}}(\mathbf{a}) \in \mathbb{R}$. Dacă există, numărul $\frac{df}{d\mathbf{h}}(\mathbf{a}) \in \mathbb{R}$ se numeşte *derivata funcţiei* f *de ordinul* 1 *în* a *după direcţia* h.
c) Funcţia *este derivabilă de ordinul* 1 *în punctul* a *după direcţia* h *pe mulţimea deschisă* A dacă este derivabilă de ordinul 1 după direcţia h în fiecare $\mathbf{a} \in A$.

Exermplul 12.1.1**.** Să se determine derivata funcţiei f de ordinul 1 în $\mathbf{a}$ după direcţia h pentru $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = -x^2 - 2y^2 + 4, \mathbf{a} = (0, 1), \mathbf{h} = (1, 2)$.



Rezolvare. $\exists \lim_{t \to 0, t \in V} \frac{1}{t} \left(f((0, 1) + t(1, 2)) - f((0, 1)) \right) = \lim_{t \to 0, t \in V} \frac{1}{t} \left(f((0 + t, 1 + 2t)) - f((0, 1)) \right) \overset{((\cdot))=(\cdot)}{=}$

$$= \lim_{t \to 0, t \in V} \frac{1}{t} \left(f(t, 1 + 2t) - f(0, 1) \right) = \lim_{t \to 0, t \in V} \frac{1}{t} \left(-t^2 - 2(1 + 2t)^2 + 4 + 0^2 + 2 \cdot 1^2 - 4 \right) =$$

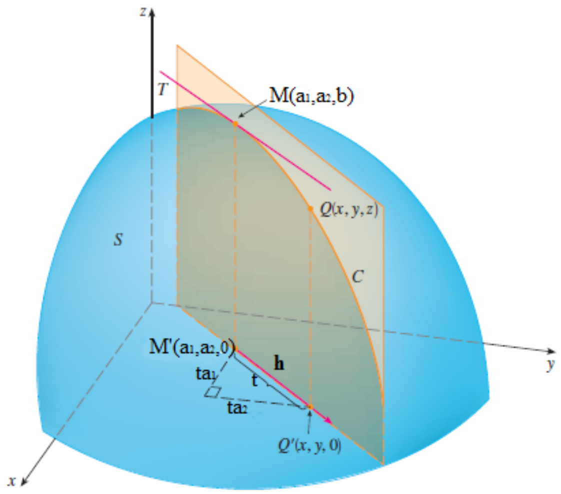
$$= \lim_{t \to 0, t \in V} \frac{1}{t} \left(-t^2 - 2 - 8t - 8t^2 + 2 \right) = \lim_{t \to 0, t \in V} \frac{1}{t} \left(-9t^2 - 8t \right) = -8.$$

Deci $\exists \frac{df}{d\mathbf{h}}(0, 1) = -8$, unde $\mathbf{h} = (1, 2)$.

Conform interpretării geometrice ulterioare, numărul $\frac{df}{d\mathbf{h}}(0, 1) = -8$ reprezintă panta dreptei tangente la curba obţinută din intersecţia suprafeţei-reprezentare a graficului cu un plan perpendicular pe (xOy) ce trece prin $(a_1, a_2, f(a_1, a_2)) = (0, 1, 0)$, după direcţia $\mathbf{h} = (1, 2)$ din planul xOy. Mai mult, deoarece $\frac{df}{d\mathbf{h}}(0, 1) = -8 < 0 \Rightarrow$ câmpul scalar f descreşte într-o vecinătate a punctului $(a_1, a_2) = (0, 1)$ după direcţia $\mathbf{h} = (1, 2)$.

A se vedea profesor Eugene Khutoryansky, "Gradients and Partial Derivatives" https://www.youtube.com/watch?v=GkB4vW16QHI.

Interpretarea geometrică a derivatei după o direcţie pentru $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$



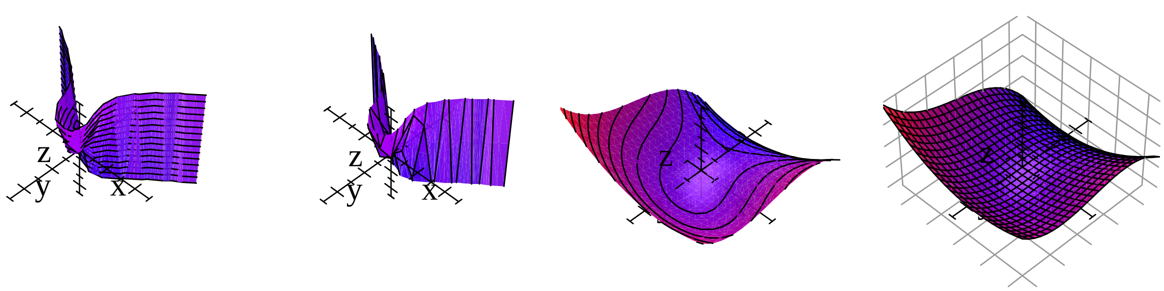
Fie funcţia $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ al cărei grafic $G_f = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x, y) \in A, z = f(x, y)\right\}$ are ca reprezentare o suprafaţă în spaţiu. Fie $M(a_1, a_2, b)$ un punct pe această suprafaţă, adică $b = f(a_1, a_2)$.

Fie $\mathbf{h} = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ o direcţie în xOy. Se construieşte vectorul liber $\mathbf{h}$ cu punctul de aplicaţie în $M'(a_1, a_2, 0)$, adică în proiecţia lui $M(a_1, a_2, b)$ pe xOy. Se construieşte curba C ca fiind obţinută prin intersecţia suprafeţei S cu planul perpendicular pe xOy ce trece prin M şi prin $\mathbf{h}$.

Panta dreptei tangente în M la C este $\dfrac{df}{d\mathbf{h}}(a_1, a_2) = \lim\limits_{t \to 0, t \in V} \dfrac{1}{t}\left(f\left((a_1, a_2) + t(h_1, h_2)\right) - f\left((a_1, a_2)\right)\right).$

De exemplu, să se determine derivata funcţiei f de ordinul 1 în $\mathbf{a}$ după direcţia h pentru

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = x^3 - 3xy + 4y^2, \mathbf{a} = (1, 2), \mathbf{h} = \left(\cos\frac{\pi}{6}, \sin\frac{\pi}{6}\right);$



Rezolvare. $\exists \lim\limits_{t \to 0, t \in V} \dfrac{1}{t}\left(f\left((1, 2) + t\left(\cos\frac{\pi}{6}, \sin\frac{\pi}{6}\right)\right) - f((1, 2))\right) \overset{((\cdot))=(\cdot)}{=}$

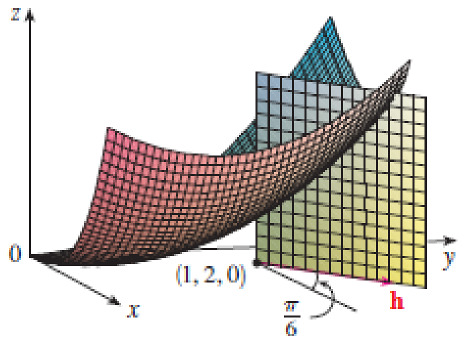
$$= \lim_{t \to 0, t \in V} \frac{1}{t}\left(f\left(1 + t\cos\tfrac{\pi}{6}, 2 + t\sin\tfrac{\pi}{6}\right) - f(1, 2)\right) =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left(\left(1 + t\cos\tfrac{\pi}{6}\right)^3 - 3\left(1 + t\cos\tfrac{\pi}{6}\right)\left(2 + t\sin\tfrac{\pi}{6}\right) + 4\left(2 + t\sin\tfrac{\pi}{6}\right)^2 - 1^3 + 3 \cdot 1 \cdot 2 - 4 \cdot 2^2\right) =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left(\left(1 + t \cdot \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 - 3\left(1 + t \cdot \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(2 + t \cdot \tfrac{1}{2}\right) + 4\left(2 + t \cdot \tfrac{1}{2}\right)^2 - 11\right) =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left(\tfrac{3}{8}\sqrt{3}t^3 - t^2\left(\tfrac{3}{4}\sqrt{3} - \tfrac{13}{4}\right) - t\left(\tfrac{3}{2}\sqrt{3} - \tfrac{13}{2}\right)\right) = -\left(\tfrac{3}{2}\sqrt{3} - \tfrac{13}{2}\right) = \tfrac{13 - 3\sqrt{3}}{2}.$$

Deci $\exists \dfrac{df}{d\mathbf{h}}(1,2) = \frac{13-3\sqrt{3}}{2} > 0$, unde $\mathbf{h} = \left(\cos\frac{\pi}{6}, \sin\frac{\pi}{6}\right)$.



Teorema 12.1.1. (**de legătură între derivata după direcţie şi continuitatea după direcţie**) Fie $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\theta_{\mathbb{R}^n}\}$ o direcţie. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un câmp scalar şi $\mathbf{a} \in A-$deschisă. Dacă funcţia f este derivabilă de ordin 1 în a după direcţia h atunci f este continuă în a după direcţia h, adică $\exists \lim\limits_{t\to 0} f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) = f(\mathbf{a})$.

○**Teorema 12.1.2**. (**operaţii cu derivate după direcţie**) Fie $h\in \mathbb{R}^n \setminus \{\theta_{\mathbb{R}^n}\}$ o direcţie. Fie $f, g : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ câmpuri scalare derivabile de ordin 1 pe mulţimea deschisă A după direcţia h. Fie $\alpha \in \mathbb{R}$. Atunci funcţiile $f + g, \alpha f$ şi $f \cdot g$ sunt derivabile de ordin 1 pe A după direcţia h şi

$$\boxed{\frac{d(f+g)}{d\mathbf{h}}(\mathbf{a}) = \frac{df}{d\mathbf{h}}(\mathbf{a}) + \frac{dg}{d\mathbf{h}}(\mathbf{a}), \forall \mathbf{a} \in A; \frac{d(\alpha \cdot f)}{d\mathbf{h}}(\mathbf{a}) = \alpha \frac{df}{d\mathbf{h}}(\mathbf{a}), \forall \mathbf{a} \in A;}$$

$$\boxed{\frac{d(f \cdot g)}{d\mathbf{h}}(\mathbf{a}) = \frac{df}{d\mathbf{h}}(\mathbf{a}) \cdot g(\mathbf{a}) + f(\mathbf{a}) \cdot \frac{dg}{d\mathbf{h}}(\mathbf{a}), \forall \mathbf{a} \in A.}$$

Dacă, în plus, $g(\mathbf{a}) \neq 0, \forall \mathbf{a} \in A$ atunci funcţia $\frac{f}{g}$ este derivabilă de ordin 1 pe A după direcţia h şi

$$\boxed{\frac{d\left(\frac{f}{g}\right)}{d\mathbf{h}}(\mathbf{a}) = \frac{1}{g^2(\mathbf{a})}\left(\frac{df}{d\mathbf{h}}(\mathbf{a}) \cdot g(\mathbf{a}) - f(\mathbf{a}) \cdot \frac{dg}{d\mathbf{h}}(\mathbf{a})\right), \forall \mathbf{a} \in A.}$$

○**Teorema 12.1.4**. (**teorema lui Lagrange pentru câmpuri scalare**) Fie $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\theta_{\mathbb{R}^n}\}$ o direcţie şi $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ câmp scalar. Fie $t > 0$ şi $\mathbf{a} \in A-$deschisă cu proprietatea că, pentru orice $\tau \in [0, t]$ rezultă că $\mathbf{a} + \tau\mathbf{h} \in A$ şi că $\exists \dfrac{df}{d\mathbf{h}}(\mathbf{a} + \tau\mathbf{h}) \in \mathbb{R}$, adică funcţia f este derivabilă de ordin 1 în $\mathbf{a} + \tau\mathbf{h}$ după direcţia h. Atunci $\exists \theta \in \left]0, 1\right[$ a.î.

$$f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = t \cdot \frac{df}{d\mathbf{h}}(\mathbf{a} + \theta t\mathbf{h}).$$

○**Teorema 12.1.5**. (**aditivitatea şi omogeneitatea derivatei de ordin 1 după direcţie în raport cu direcţia**) Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un câmp scalar pe $A-$deschisă.

a) Fie $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\theta_{\mathbb{R}^n}\}, \mathbf{k} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\theta_{\mathbb{R}^n}\}$ două direcţii. Dacă $\exists \dfrac{df}{d\mathbf{h}} : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ şi este continuă în $\mathbf{a} \in A$ şi dacă $\exists \dfrac{df}{d\mathbf{k}}(\mathbf{a}) \in \mathbb{R}$, atunci f este derivabilă de ordin 1 în a după direcţia $\mathbf{h} + \mathbf{k}$ (adică $\exists \dfrac{df}{d(\mathbf{h}+\mathbf{k})}(\mathbf{a}) \in \mathbb{R}$) şi

$$\boxed{\frac{df}{d(\mathbf{h}+\mathbf{k})}(\mathbf{a}) = \frac{df}{d\mathbf{h}}(\mathbf{a}) + \frac{df}{d\mathbf{k}}(\mathbf{a}).}$$

b) Fie $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\theta_{\mathbb{R}^n}\}$ o direcţie şi $\alpha \in \mathbb{R}$. Dacă $\exists \dfrac{df}{d\mathbf{h}} : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ şi este continuă în $\mathbf{a} \in A$, atunci f este derivabilă de ordin 1 în $\mathbf{a} \in A$ după direcţia αh (adică $\exists \frac{df}{d(\alpha \mathbf{h})}(\mathbf{a}) \in \mathbb{R}$) şi

$$\boxed{\frac{df}{d(\alpha \mathbf{h})}(\mathbf{a}) = \alpha \frac{df}{d\mathbf{h}}(\mathbf{a}).}$$

c) Fie $h^1, ..., h^r \in \mathbb{R}^n \setminus \{\theta_{\mathbb{R}^n}\}$ r - direcţii şi $\alpha_1, ..., \alpha_r \in \mathbb{R}$ r - numere reale. Dacă $\exists \frac{df}{d\mathbf{h}^1}, ..., \frac{df}{d\mathbf{h}^{r-1}} : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ şi sunt continue în $\mathbf{a} \in A$ atunci f este derivabilă de ordin 1 în a după direcţia $\alpha_1 h^1 + ... + \alpha_r h^r$ (adică $\exists \frac{df}{d(\alpha_1 \mathbf{h}^1 + ... + \alpha_r \mathbf{h}^r)}(\mathbf{a}) \in \mathbb{R}$) şi

$$\boxed{\frac{df}{d(\alpha_1 \mathbf{h}^1 + ... + \alpha_r \mathbf{h}^r)}(\mathbf{a}) = \alpha_1 \frac{df}{d\mathbf{h}^1}(\mathbf{a}) + ... + \alpha_r \frac{df}{d\mathbf{h}^r}(\mathbf{a}).}$$

Definiţia 12.1.2. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \mathbf{a} \in A-$deschisă şi $C = (\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n)$ baza canonică din $\mathbb{R}^n$.
a) Fie $j \in \{1, ..., n\}$. Funcţia f *are derivată parţială de ordinul* 1 *în punctul* a *în raport cu variabila* x_j dacă

$$\boxed{\exists \frac{df}{d\mathbf{e}_j}(\mathbf{a}) = \lim_{t \to 0, t \in V} \frac{1}{t}(f(\mathbf{a} + t\mathbf{e}_j) - f(\mathbf{a})) \overset{\text{se not.}}{=} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a}) \in \overline{\mathbb{R}},} \text{ unde } V \in \mathcal{V}(0). \quad (1)$$

b) Fie $j \in \{1, ..., n\}$. Funcţia f *este derivabilă parţial de ordinul* 1 *în* a *în raport cu variabila* x_j, dacă există limita anterioară şi este finită, $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a}) \in \mathbb{R}$. Dacă există, numărul $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a}) \in \mathbb{R}$ se numeşte *derivata parţială a funcţiei* f *de ordinul* 1 *în* a *în raport cu variabila* x_j.
c) Fie $j \in \{1, ..., n\}$. Funcţia f este *derivabilă parţial de ordinul* 1 *pe mulţimea deschisă* A *în raport cu variabila* x_j, dacă este derivabilă parţial de ordinul 1 în $\forall \mathbf{a} \in A$ în raport cu variabila x_j.
d) Funcţia f este *de clasă* $\mathcal{C}^1$ *pe mulţimea deschisă* A (şi notăm $f \in \mathcal{C}^1(A; \mathbb{R})$) dacă este derivabilă parţial de ordinul 1 pe A în raport cu toate variabilele x_j, $\forall j \in \{1, ..., n\}$ şi funcţiile derivate parţiale de ordinul 1, $\frac{\partial f}{\partial x_j} : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sunt continue, $\forall j \in \{1, ..., n\}$.

Observaţia 12.1.1. **a)** În particular, pentru $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = ...$, derivatele parţiale ale funcţiei f în $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in A$ sunt date de

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2) = \frac{df}{d\mathbf{e}_1}(a_1, a_2) = \lim_{t \to 0, t \in V} \frac{1}{t}(f((a_1, a_2) + t(1, 0)) - f((a_1, a_2))) =$$
$$= \lim_{t \to 0, t \in V} \frac{1}{t}(f(a_1 + t, a_2) - f(a_1, a_2)),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2) = \frac{df}{d\mathbf{e}_2}(a_1, a_2) = \lim_{t \to 0, t \in V} \frac{1}{t}(f((a_1, a_2) + t(0, 1)) - f((a_1, a_2))) =$$
$$= \lim_{t \to 0, t \in V} \frac{1}{t}(f(a_1, a_2 + t) - f(a_1, a_2)).$$

b) În particular, pentru $f : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x, y, z) = ...$, derivatele parţiale ale funcţiei f în $(a_1, a_2, a_3) \in A$, dacă există şi sunt finite, sunt date de

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2, a_3) = \frac{df}{d\mathbf{e}_1}(a_1, a_2, a_3) = \lim_{t \to 0, t \in V} \frac{1}{t}(f((a_1, a_2, a_3) + t(1, 0, 0)) - f((a_1, a_2, a_3))) =$$
$$= \lim_{t \to 0, t \in V} \frac{1}{t}(f(a_1 + t, a_2, a_3) - f(a_1, a_2, a_3)),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2, a_3) = \frac{df}{d\mathbf{e}_2}(a_1, a_2, a_3) = \lim_{t \to 0, t \in V} \frac{1}{t}(f((a_1, a_2, a_3) + t(0, 1, 0)) - f((a_1, a_2, a_3))) =$$
$$= \lim_{t \to 0, t \in V} \frac{1}{t}(f(a_1, a_2 + t, a_3) - f(a_1, a_2, a_3)),$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(a_1,a_2,a_3)=\frac{df}{d\mathbf{e}_3}(a_1,a_2,a_3)=\lim_{t\to 0,t\in V}\frac{1}{t}\left(f\left((a_1,a_2,a_3)+t\left(0,0,1\right)\right)-f\left((a_1,a_2,a_3)\right)\right)=$$
$$=\lim_{t\to 0,t\in V}\frac{1}{t}\left(f\left(a_1,a_2,a_3+t\right)-f\left(a_1,a_2,a_3\right)\right).$$

Teorema 12.1.6. (**operaţii cu derivate parţiale**) Fie $j\in\{1,...,n\}$. Fie $f,g:A\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ câmpuri scalare derivabile parţial de ordin 1 pe mulţimea deschisă A în raport cu variabila x_j. Fie $\alpha\in\mathbb{R}$. Atunci funcţiile $f+g,\alpha f$ şi $f\cdot g$ sunt derivabile parţial de ordin 1 pe mulţimea A în raport cu variabila x_j şi

$$\boxed{\frac{\partial\left(f+g\right)}{\partial x_j}(\mathbf{a})=\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a})+\frac{\partial g}{\partial x_j}(\mathbf{a}),\forall\mathbf{a}\in A;\ \frac{\partial\left(\alpha\cdot f\right)}{\partial x_j}(\mathbf{a})=\alpha\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a}),\forall\mathbf{a}\in A;}$$
$$\boxed{\frac{\partial\left(f\cdot g\right)}{\partial x_j}(\mathbf{a})=\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a})\cdot g(\mathbf{a})+f(\mathbf{a})\cdot\frac{\partial g}{\partial x_j}(\mathbf{a}),\forall\mathbf{a}\in A.}$$

Dacă, în plus, $g(\mathbf{a})\neq 0,\forall\mathbf{a}\in A$ atunci funcţia $\frac{f}{g}$ este derivabilă parţial de ordin 1 pe mulţimea A în raport cu variabila x_j şi

$$\boxed{\frac{\partial\left(\frac{f}{g}\right)}{\partial x_j}(\mathbf{a})=\frac{1}{g^2(x)}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a})\cdot g(\mathbf{a})-f(\mathbf{a})\cdot\frac{\partial g}{\partial x_j}(\mathbf{a})\right),\forall\mathbf{a}\in A.}$$

Teorema 12.1.7. (**de legătură între derivata de ordin 1 după o direcţie şi derivatele parţiale de ordin 1**) Fie $f:A\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ şi $\mathbf{a}\in A-$deschisă. Dacă

(i) f este derivabilă parţial de ordinul 1 pe A în raport cu variabila x_j, adică $\exists\frac{\partial f}{\partial x_j}:A\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, pentru $\forall j\in\{1,...,n\}$ şi

(ii) $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ sunt funcţii continue în a, pentru $\forall j\in\{1,...,n\}$,

atunci $\exists\frac{df}{d\mathbf{h}}(\mathbf{a})\in\mathbb{R}$, pentru $\forall\mathbf{h}\in\mathbb{R}^n\setminus\{\theta_{\mathbb{R}^n}\}$, $\mathbf{h}=(h_1,...,h_n)$. În acest caz

$$\boxed{\frac{df}{d\mathbf{h}}(\mathbf{a})=\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a})\cdot h_1+...+\frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a})\cdot h_n.}\tag{2}$$

Observaţia 12.1.2. Fie $f:A\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $\mathbf{a}\in A-$deschisă. Fie $j\in\{1,...,n\}$. Se observă că funcţia f este derivabilă parţial de ordinul 1 în a în raport cu variabila x_j dacă există şi este finită limita

$$\lim_{x_j\to a_j}\frac{1}{x_j-a_j}\left(f\left(a_1,...,a_{i-1},x_i,a_{i+1},...,a_n\right)-f\left(a_1,...,a_{i-1},a_i,a_{i+1},...,a_n\right)\right)$$

Dacă există, numărul dat de limita anterioară este chiar $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a})\in\mathbb{R}$, adică derivata parţială a funcţiei f de ordinul 1 în a.

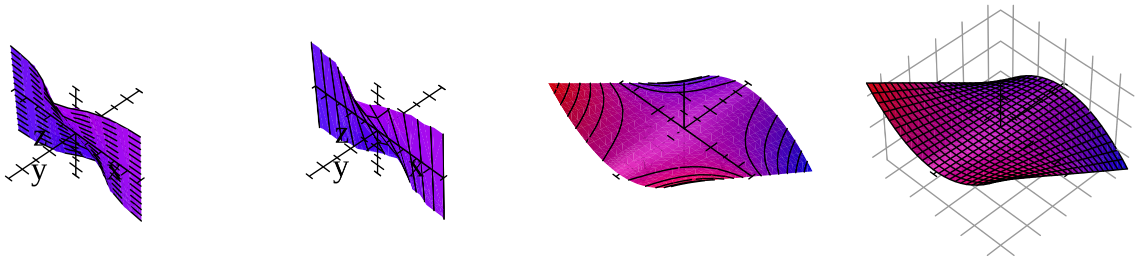
a) În particular, pentru $f:A\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},f(x,y)=...$, derivatele parţiale ale funcţiei f în $(a_1,a_2)\in A$, dacă există şi sunt finite, sunt date şi de

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(a_1,a_2)=\lim_{x\to a_1}\frac{f(x,a_2)-f(a_1,a_2)}{x-a_1};\frac{\partial f}{\partial y}(a_1,a_2)=\lim_{y\to a_2}\frac{f(a_1,y)-f(a_1,a_2)}{y-a_2}.}\tag{3}$$

b) În particular, pentru $f:A\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},f(x,y,z)=...$, derivatele parţiale ale funcţiei f în $(a_1,a_2,a_3)\in A$, dacă există şi sunt finite, sunt date şi de

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(a_1,a_2,a_3)=\lim_{x\to a_1}\frac{f(x,a_2,a_3)-f(a_1,a_2,a_3)}{x-a_1},\frac{\partial f}{\partial y}(a_1,a_2,a_3)=\lim_{y\to a_2}\frac{f(a_1,y,a_3)-f(a_1,a_2,a_3)}{y-a_2},}$$
$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial z}(a_1,a_2,a_3)=\lim_{z\to a_3}\frac{f(a_1,a_2,z)-f(a_1,a_2,a_3)}{z-a_3}.}\tag{4}$$

Exemplul 12.1.2. Să se studieze dacă există $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2)$ şi $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,2)$ pentru $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\, f(x,y)=xy^2+3x.$



Rezolvare.
modul 1 $\exists\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2)=\dfrac{df}{d\mathbf{e}_1}(1,2)=\lim\limits_{t\to0,t\in V}\dfrac{1}{t}\left(f(1+t,2)-f(1,2)\right)=$

$$=\lim_{t\to0,t\in V}\frac{1}{t}\left((1+t)\cdot2^2+3(1+t)-1\cdot2^2-3\cdot1\right)=\lim_{t\to0,t\in V}\frac{1}{t}(7t)=7.\text{ Deci }\exists\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)=7.$$

Conform interpretării geometrice pentru $f:A\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, numărul $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2)=7$ reprezintă panta dreptei tangente la curba obţinută din intersecţia suprafeţei-reprezentare a graficului cu un plan perpendicular pe (xOy) ce trece prin $(a_1,a_2,f(a_1,a_2))=(1,2,7)$, după direcţia $\mathbf{e}_1=(1,0)$ a axei Ox, adică plan paralel cu xOz. Mai mult, deoarece $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2)=7>0\Rightarrow$ câmpul scalar f creşte într-o vecinătate a punctului $(a_1,a_2)=(1,2)$ după direcţia $\mathbf{e}_1=(1,0)$ a axei Ox.

$\exists\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,2)=\dfrac{df}{d\mathbf{e}_2}(1,2)=\lim\limits_{t\to0,t\in V}\dfrac{1}{t}\left(f(1,2+t)-f(1,2)\right)=$

$$=\lim_{t\to0,t\in V}\frac{1}{t}\left(1\cdot(2+t)^2+3\cdot1-1\cdot2^2-3\cdot1\right)=\lim_{t\to0,t\in V}\frac{1}{t}\left(t^2+4t\right)=4.\text{ Deci }\exists\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)=4.$$

Conform interpretării geometrice pentru $f:A\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, numărul $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,2)=4$ reprezintă panta dreptei tangente la curba obţinută din intersecţia suprafeţei-reprezentare a graficului cu un plan perpendicular pe (xOy) ce trece prin $(a_1,a_2,f(a_1,a_2))=(1,2,7)$, după direcţia $\mathbf{e}_2=(0,1)$ a axei Oy, adică plan paralel cu yOz. Mai mult, deoarece $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,2)=4>0\Rightarrow$ câmpul scalar f creşte într-o vecinătate a punctului $(a_1,a_2)=(1,2)$ după direcţia $\mathbf{e}_2=(0,1)$ a axei Oy.

modul 2. Conform observaţiei 12.1.1 $\Rightarrow$

$$\exists\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)=\lim_{x\to1}\frac{f(x,2)-f(1,2)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x\cdot2^2+3x-2^2-3}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{2^2(x-1)+3(x-1)}{x-1}=7.$$

$$\exists\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)=\lim_{y\to2}\frac{f(1,y)-f(1,2)}{y-2}=\lim_{y\to2}\frac{1\cdot y^2+3\cdot1-2^2-3}{y-2}=\lim_{y\to2}(y+2)=4.$$

Comentariu- modul 3. Deoarece f este definită pe mulţimea deschisă $A=\mathbb{R}^2$ se pot determina, dacă există, funcţiile derivate parţiale de ordinul 1.

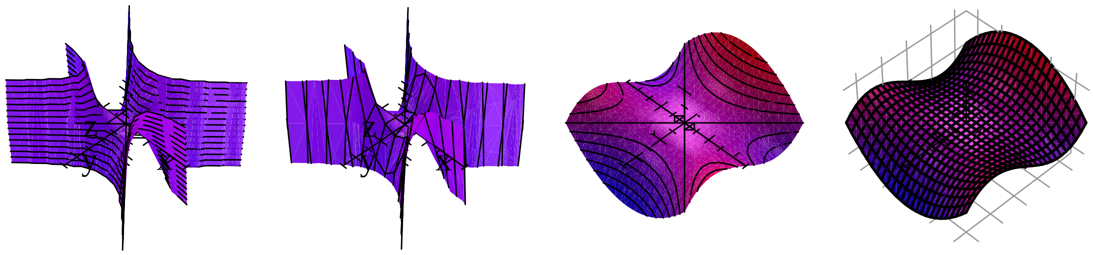
$$\exists\frac{\partial f}{\partial x}:A_1\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(xy^2+3x\right)\overset{x\text{ este variabilă}}{\underset{\text{de derivare}}{=}}y^2+3;\ A_1=A.$$

Cum $(1,2)\in A_1\Rightarrow\exists\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2)=2^2+3=7.$

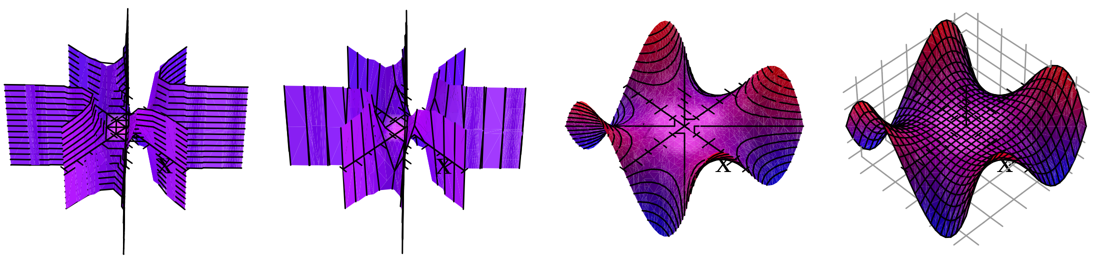
$$\exists\frac{\partial f}{\partial y}:A_2\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(xy^2+3x\right)\overset{y\text{ este variabilă}}{\underset{\text{de derivare}}{=}}x\cdot2y+0;\ A_2=A.$$

Cum $(1,2) \in A_2 \Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 2 \cdot 1 \cdot 2 = 4.$

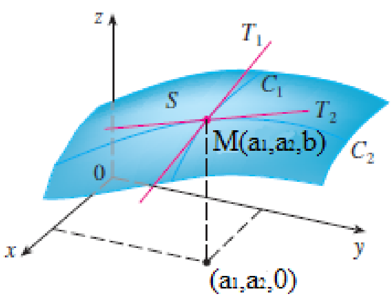
b) Să se studieze dacă există $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ şi $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ pentru
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = xy^2 - x^3$ (monkey saddle)



c) Să se studieze dacă există $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ şi $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ pentru
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = xy^3 - yx^3$ (dog saddle)



<u>Interpretarea geometrică a derivatelor parţiale pentru $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$</u>



Fie funcţia $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ al cărei grafic $G_f = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; (x,y) \in A, z = f(x,y)\right\}$ are ca reprezentare o suprafaţă în spaţiu. Fie $M(a_1, a_2, b)$ un punct pe această suprafaţă, adică $f(a_1, a_2) = b$. Se construiesc curbele

$C_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; (x,y) \in A, f(x,y) = z, y = a_2\right\}$-intersecţia suprafeţei cu planul $y = a_2$, paralel cu xOz.

$C_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; (x,y) \in A, f(x,y) = z, x = a_1\right\}$-intersecţia suprafeţei cu planul $x = a_1$, paralel cu yOz.

Ele trec prin M.

Cum C_1 este reprezentarea graficului funcţiei $u(x) = f(x, a_2)$, atunci panta tangentei în M la C_1 este $u'(a_1) = \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2)$.

Cum C_2 este reprezentarea graficului funcţiei $v(y) = f(a_1, y)$, atunci panta tangentei în M la C_2 este $v'(a_2) = \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2)$.

De exemplu, fie $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, f(x,y)=4-x^2-2y^2$. Graficul funcţiei,

$G_f=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3; 4-x^2-2y^2=z\right\}$,

este un paraboloid eliptic, reprezentat la exemplul 12.1.1. Se calculează:

$f(x,y)=4-x^2-2y^2, \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \Rightarrow f(1,1)=1$ şi

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-2x$ şi $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-4x, \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1)=-2$ şi $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1)=-4.$

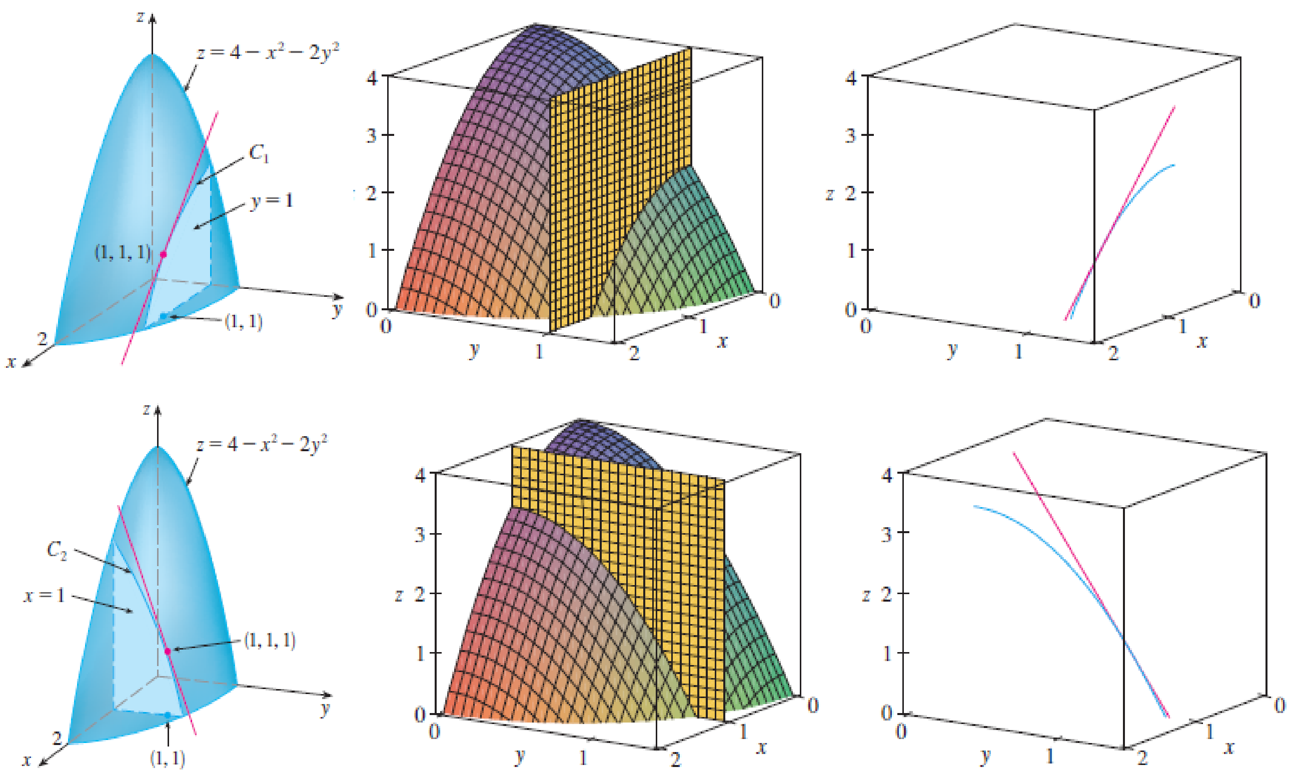
Fie $M(a_1,a_2,f(a_1,a_2))=M(1,1,1)$ un punct pe suprafaţa paraboloidului. Se construiesc curbele $C_1=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3; 4-x^2-2y^2=z, y=1\right\}$, intersecţia suprafeţei cu planul $y=1$, paralel cu xOz.

$C_2=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3; 4-x^2-2y^2=z, x=1\right\}$, intersecţia suprafeţei cu planul $x=1$, paralel cu yOz.

Ele trec prin M.

Cum C_1 este reprezentarea graficului funcţiei $u(x)=f(x,1)$, atunci panta tangentei în M la C_1 este $u'(1)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1)$.

Cum C_2 este reprezentarea graficului funcţiei $v(y)=f(1,y)$, atunci panta tangentei în M la C_2 este $v'(1)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1)$.



O altă interpretarea geometrică a derivatelor parţiale.pentru $f:A\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

Fie funcţia $f:A\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ al cărei grafic $G_f=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;(x,y)\in A, z=f(x,y)\right\}$ are ca reprezentare o suprafaţă în spaţiu. Fie $M(a_1,a_2,b)$ un punct pe această suprafaţă, adică $f(a_1,a_2)=b$.

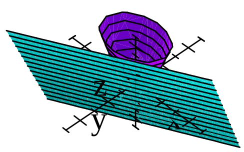
Dacă f are derivate parţiale continue, atunci *ecuaţia planului tangent* la suprafaţa S în punctul M este $\boxed{z-b=\dfrac{\partial f}{\partial x}(a_1,a_2)\cdot(x-a_1)+\dfrac{\partial f}{\partial y}(a_1,a_2)\cdot(y-a_2).}$

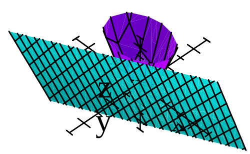
Se poate construi *liniarizata funcţiei* f în apropierea punctului (a_1, a_2) ca fiind

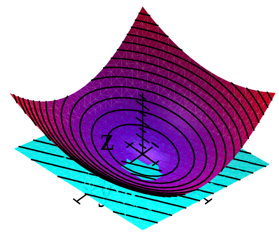
$$\boxed{L(x,y) = f(a_1,a_2) + \frac{\partial f}{\partial x}(a_1,a_2)\cdot(x-a_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(a_1,a_2)\cdot(y-a_2).}$$

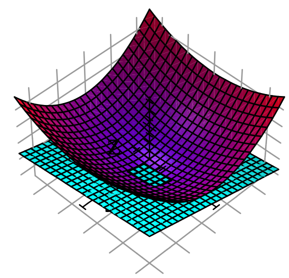
(*aproximarea* G_f *cu planul tangent* a f în (a_1, a_2)).

De exemplu, fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 2x^2 + y^2$. Reprezentarea graficului funcţiei, $G_f = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; 2x^2 + y^2 = z\right\}$, este un paraboloid eliptic.









$f(x,y) = 2x^2 + y^2, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow f(1,1) = 3$ şi

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x$ şi $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 4$ şi $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 2.$

Fie $M(a_1, a_2, f(a_1,a_2)) = M(1,1,3)$ un punct pe suprafaţa paraboloidului. Se construieşte *planul tangent* la S în M, de ecuaţie

$(\pi) : z - 3 = 4(x-1) + 2(y-1) \Leftrightarrow (\pi) : z = 4x + 2y - 3.$

Se construieşte *liniarizata funcţiei* f,

$L(x,y) = 4x + 2y - 3$, al cărei grafic este chiar planul tangent la S în M.

Se observă că $L(x,y)$ aproximează $f(x,y)$ într-o vecinătate apropiată a punctului $(1,1)$:

$\boxed{f(x,y) \simeq L(x,y), \forall (x,y) \in V.}$

De exemplu,

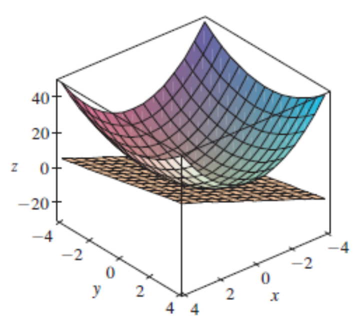
$f(1.1, 0.95) = 2(1.1)^2 + (0.95)^2 = 3.3225; L(1.1, 0.95) = 4(1.1) + 2(0.95) - 3 = 3.3,$

$f(1.1, 0.95) \simeq L(1.1, 0.95).$

Dar dacă se ia un punct depărtat de $(1,1)$, precum $(2,3)$:

$f(2,3) = 2 \cdot (2)^2 + (3)^2 = 17; L(2,3) = 4 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 14.$

$f(2,3) \ncong L(2,3).$

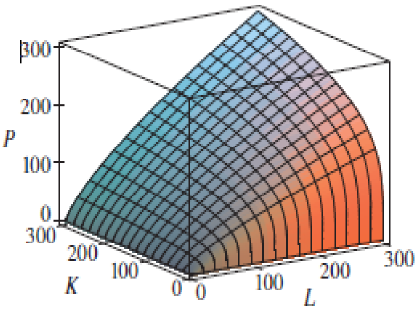


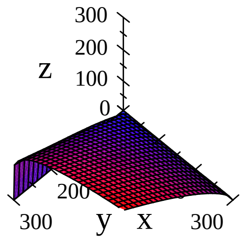
Se menţionează că, în apropierea punctului M, la zoom, planul tangent are graficul suprapus peste graficul funcţiei.

Interpretări fizice / economice. Derivatele parţiale apar în ecuaţii cu derivate parţiale ce exprimă anumite legi fizice sau legi economice.

Economiştii americani Charles Cobb şi Paul Douglas au modelat matematic producţia totală a unui sistem economic P în funcţie de cantitatea de muncă L (numărul total de persoane-ore lucrate într-un an) şi de investiţia de capital K (valoarea monetară a tuturor echipamentelor, maşinilor şi clădirilor). În 1928 au studiat creşterea economiei S.U.A. în perioada $1899-1922$. Folosind metoda celor mai mici pătrate şi tabelul de mai jos (de la guvern), au obţinut

$P(L,K)=1.01L^{0.75}K^{0.25}$, din al cărei grafic





se observă că producţia P creşte atunci când L sau K cresc, aşa cum era de aşteptat.

Year	P	L	K
1899	100	100	100
1900	101	105	107
1901	112	110	114
1902	122	117	122
1903	124	122	131
1904	122	121	138
1905	143	125	149
1906	152	134	163
1907	151	140	176
1908	126	123	185
1909	155	143	198
1910	159	147	208
1911	153	148	216
1912	177	155	226
1913	184	156	236
1914	169	152	244
1915	189	156	266
1916	225	183	298
1917	227	198	335
1918	223	201	366
1919	218	196	387
1920	231	194	407
1921	179	146	417
1922	240	161	431

Ulterior s-a obţinut acelaşi rezultat prin modelare. În cazul în care funcţia de producţie este notată cu $P(L,K),(L,K)\in\left\{(L,K)\in\mathbb{R}^2, L\geq 0, K\geq 0\right\}$ atunci derivata parţială $\dfrac{\partial P}{\partial L}$ este rata de modificare a producţiei în ceea ce priveşte cantitatea de muncă. Economiştii o numesc producţia marginală cu privire la munca depusă sau *productivitatea marginală a muncii.* De asemenea, derivata parţială $\dfrac{\partial P}{\partial K}$ este rata de schimbare a producţiei cu privire la investiţia de capital şi se numeşte *productivitatea marginală a capitalului.* În aceşti termeni, rezultatul dat de Cobb şi Douglas poate fi stabilit, după cum urmează:

(i) În cazul în care munca sau capitalul devin nule, atunci şi producţia devine nulă.

(ii) Productivitatea marginală a muncii este proporţională cu cantitatea de producţie pe unitatea de muncă.

(iii) Productivitatea marginală a capitalului este proporţională cu cantitatea de producţie pe unitatea de capital.

Deoarece cantitatea de producţie pe unitatea de muncă este $\dfrac{P}{L}$ se deduce că funcţia $P(L,K)$ *verifică ecuaţia cu derivate parţiale* de ordinul 1 :

$$\frac{\partial P}{\partial L}(L,K)=\alpha\frac{P(L,K)}{L},\forall(L,K)\in D,$$

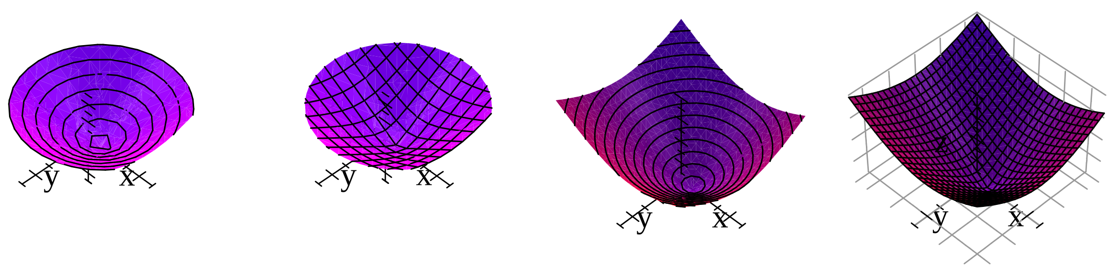
unde α este o constantă. Procedând ca la disciplina "Ecuaţii diferenţiale", se obţine că P este dată de funcţia Cobb-Douglass

$$P(L,K)=bL^{\alpha}K^{1-\alpha},$$

unde b este o constantă independentă de L şi K.

Exemplul 12.1.3. Să se studieze dacă există $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,1)$ şi $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,1)$ pentru

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, f(x,y)=\sqrt{x^2+(y-1)^2}.$$



Rezolvare. modul 1.

$$\exists\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)=\frac{df}{d\mathbf{e}_1}(0,1)=\lim_{t\to0,t\in V}\frac{1}{t}(f(t,1)-f(0,1))=\lim_{t\to0,t\in V}\frac{1}{t}\left(\sqrt{t^2+(1-1)^2}-\sqrt{0^2+(1-1)^2}\right)$$
$$=\lim_{t\to0,t\in V}\frac{|t|}{t}.$$

Cum $\displaystyle\lim_{t\to0,t<0}\frac{|t|}{t}=-1$ şi $\displaystyle\lim_{t\to0,t>0}\frac{|t|}{t}=1\Rightarrow\nexists\lim_{t\to0,t\in V}\frac{|t|}{t}$. Deci $\nexists\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,1)$.

$$\exists\frac{\partial f}{\partial y}(0,1)=\frac{df}{d\mathbf{e}_2}(0,1)=\lim_{t\to0,t\in V}\frac{1}{t}(f(0,1+t)-f(0,1))=\lim_{t\to0,t\in V}\frac{1}{t}\left(\sqrt{0^2+(1+t-1)^2}-\sqrt{0^2+(1-1)^2}\right)$$
$$=\lim_{t\to0,t\in V}\frac{|t|}{t}.$$

Cum $\displaystyle\lim_{t\to0,t<0}\frac{|t|}{t}=-1$ şi $\displaystyle\lim_{t\to0,t>0}\frac{|t|}{t}=1\Rightarrow\nexists\lim_{t\to0,t\in V}\frac{|t|}{t}$. Deci $\nexists\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,1)$.

modul 2. Conform observaţiei 12.1.1 $\Rightarrow$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)=\lim_{x\to0}\frac{f(x,1)-f(0,1)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+(1-1)^2}-\sqrt{0^2+(1-1)^2}}{x-1}=\lim_{x\to0}\frac{|x|}{x}.$$

Cum $\displaystyle\lim_{x\to0,x<0}\frac{|x|}{x}=-1$ şi $\displaystyle\lim_{x\to0,x>0}\frac{|x|}{x}=1\Rightarrow\nexists\lim_{x\to0}\frac{|x|}{x}$. Deci $\nexists\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,1)$.

$$\exists\frac{\partial f}{\partial y}(0,1)=\lim_{y\to 1}\frac{f(0,y)-f(0,1)}{y-1}=\lim_{y\to 1}\frac{\sqrt{0^2+(y-1)^2}-\sqrt{0^2+(1-1)^2}}{y-1}=\lim_{y\to 1}\frac{|y-1|}{y-1}.$$

Cum $\lim\limits_{y\to 1, y<1}\frac{|y-1|}{y-1}=-1$ şi $\lim\limits_{y\to 0, y>0}\frac{|y-1|}{y-1}=1\Rightarrow\nexists\lim\limits_{y\to 1}\frac{|y-1|}{y-1}$. Deci $\nexists\frac{\partial f}{\partial y}(0,1)$.

Comentariu- modul 3. Deoarece f este definită pe mulţimea deschisă $\mathbb{R}^2$ se pot determina, dacă există, funcţiile derivate parţiale de ordinul 1.

$$\exists\frac{\partial f}{\partial x}:A_1\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x^2+(y-1)^2}\right)\underset{\text{de derivare}}{\overset{x\text{ este variabilă}}{=}}\frac{1}{2\sqrt{x^2+(y-1)^2}}(2x+0).$$

$A_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;(x,y)\neq(0,1)\}$ şi A_1 este mulţime deschisă. Deci

$$\exists\frac{\partial f}{\partial x}:A_1\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}.$$

$(0,1)\notin A_1$.

$$\exists\frac{\partial f}{\partial y}:A_2\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{x^2+(y-1)^2}\right)\underset{\text{de derivare}}{\overset{y\text{ este variabilă}}{=}}\frac{1}{2\sqrt{x^2+(y-1)^2}}(0+2(y-1)).$$

Se observă că $A_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;(x,y)\neq(0,1)\}$, şi că A_2 este mulţime deschisă. Deci

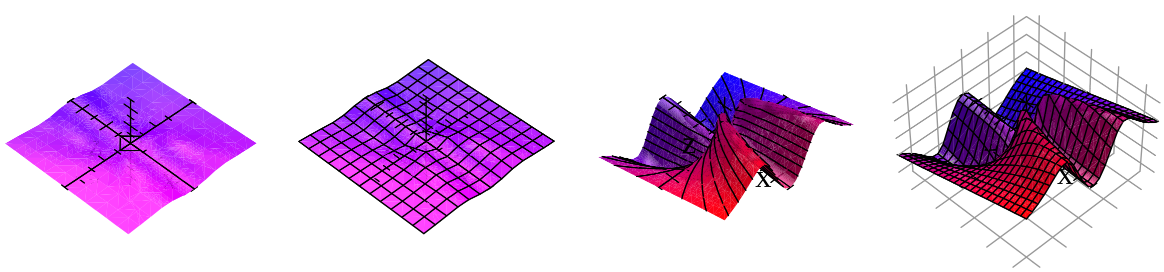
$$\exists\frac{\partial f}{\partial y}:A_2\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{y-1}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}.$$

$(0,1)\notin A_2$.

Comentariu. În $(0,1)$, graficul lui f are un "colţ", nu are plan tangent ataşat.

Exemplul 12.1.4. Fie $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^4+y^2}, & \text{dacă } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{dacă } (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

Se arată că *există* $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ şi $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, adică este o funcţie care *este derivabilă parţial de ordinul* 1 în $\mathbf{a}=(0,0)$ şi totuşi *nu este continuă* în $\mathbf{a}=(0,0)$.



Rezolvare. $\mathbb{R}^2=\left(\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\right)\cup\{(0,0)\}$.

•Se studiază dacă f este derivabilă parţial de ordinul 1 pe $\mathbb{R}^2$, în raport cu x, respectiv y.

••pe $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, care e mulţime deschisă, se va deriva parţial folosind regulile de derivare parţială.

••în $\mathbf{a}=(0,0)\in\left(\mathbb{R}^2\right)\cap\left(\mathbb{R}^2\right)'$ se va folosi definiţia derivatei parţiale în raport cu x, respectiv cu y.

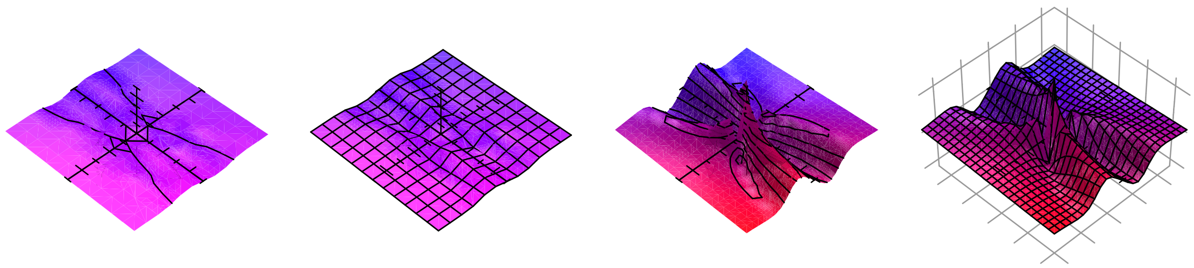
$\exists\frac{\partial f}{\partial x}:A_1\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2y}{x^4+y^2}\right)\underset{\text{de derivare}}{\overset{x\text{ este variabilă}}{=}}\frac{2xy\left(x^4+y^2\right)-x^2y\left(4x^3+0\right)}{\left(x^4+y^2\right)^2},\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \overset{\text{modul 1}}{=} \frac{df}{d\mathbf{e}_1}(0,0) = \lim_{t\to 0, t\in V} \frac{1}{t}\left(f(t,0) - f(0,0)\right) = \lim_{t\to 0, t\in V} \frac{1}{t}\left(\frac{t^2\cdot 0}{t^4+0^2} - 0\right) =$$
$$= \lim_{t\to 0, t\in V} \frac{1}{t}\cdot 0 = \lim_{t\to 0, t\in V} 0 = 0 \Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0.$$

$$\exists \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \overset{\text{modul 2}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2\cdot 0}{x^4+0^2} - 0}{x-0} = \lim_{x\to 0} 0 = 0.$$

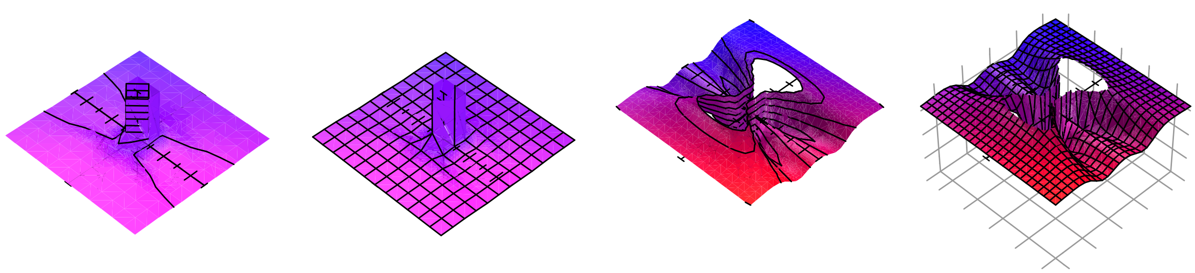
$$\exists \frac{\partial f}{\partial x} : A_1 = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy\left(-x^4+y^2\right)}{\left(x^4+y^2\right)^2}, & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$



$$\exists \frac{\partial f}{\partial y} : A_2 \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2 y}{x^4+y^2}\right) \underset{\text{de derivare}}{\overset{y \text{ este variabilă}}{=}} \frac{x^2\left(x^4+y^2\right) - x^2 y\,(0+2y)}{\left(x^4+y^2\right)^2}, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \overset{\text{modul 1}}{=} \frac{df}{d\mathbf{e}_2}(0,0) = \lim_{t\to 0, t\in V} \frac{1}{t}\left(f(0,t) - f(0,0)\right) = \lim_{t\to 0, t\in V} \frac{1}{t}\left(\frac{0^2\cdot t}{0^4+t^2} - 0\right) =$$
$$= \lim_{t\to 0, t\in V} \frac{1}{t}\cdot 0 = \lim_{t\to 0, t\in V} 0 = 0 \Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

$$\exists \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \overset{\text{modul 2}}{=} \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{0^2\cdot y}{0^4+y^2} - 0}{y-0} = \lim_{y\to 0} 0 = 0.$$

$$\exists \frac{\partial f}{\partial y} : A_2 = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2\left(x^4-y^2\right)}{\left(x^4+y^2\right)^2}, & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$



•Se studiază dacă f este continuă pe $\mathbb{R}^2$.

••pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, care e mulţime deschisă, f este continuă ca fiind obţinută prin operaţii algebrice cu funcţii continue.

••în $\mathbf{a} = (0,0) \in \left(\mathbb{R}^2\right) \cap \left(\mathbb{R}^2\right)'$, f este continuă$\Leftrightarrow \exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$.

*Se studiază dacă $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 \overset{\text{caracterizarea } \varepsilon-\delta}{\Leftrightarrow}$

$[\forall\varepsilon > 0, \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ cu

$0 < |x-0| < \delta$ şi $0 < |y-0| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - 0| < \varepsilon]$.

Fie $\forall\varepsilon > 0$. Se caută $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ cu $0 < |x-0| < \delta$ şi $0 < |y-0| < \delta$ să rezulte

$$|f(x,y) - 0| = \left|\frac{x^2 y}{x^4 + y^2} - 0\right| = \frac{x^2|y|}{x^4+y^2} \underset{\text{rămâne } \delta}{\overset{\text{"se scapă" de } x,y}{<}} ... < \varepsilon.$$

Se încearcă $x^4 + y^2 > 2x^2|y| \Rightarrow |f(x,y) - 0| < \dfrac{x^2|y|}{2x^2|y|} = \dfrac{1}{2} < \varepsilon-$contradicţie cu ε oarecare, > 0, de exemplu $\varepsilon = \frac{1}{10}$.

Se încearcă $x^4 + y^2 > x^4 \Rightarrow |f(x,y) - 0| < \dfrac{x^2|y|}{x^4} = \dfrac{|y|}{|x|^2} < \dfrac{\delta}{|x|^2} < \varepsilon-$nu se poate "scăpa" de x.

Se încearcă $x^4 + y^2 > y^2 \Rightarrow |f(x,y) - 0| < \dfrac{x^2|y|}{y^2} = \dfrac{x^2}{|y|} < \dfrac{\delta^2}{|y|} < \varepsilon-$nu se poate "scăpa" de y.

Se intuieşte că

-sau s-a majorat prea tare, înainte de a scrie ... $< \varepsilon$.

-sau nu există limita $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

*Se arată că $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ cu şiruri. Se aleg:

• $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (0,0)$.

$$f(x_n, y_n) = \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)^4 + \left(\frac{1}{n}\right)^2}; \lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1} = 0.$$

• $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (0,0)$.

$$f(x_n, y_n) = \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)^4 + \left(\frac{1}{n^2}\right)^2}; \lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Cum $0 \neq \frac{1}{2} \Rightarrow \nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Deci f nu este continuă în $(0,0)$.

<u>Comentariu.</u> Chiar dacă există $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ şi $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, funcţiile $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ şi $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ nu sunt continue în $(0,0)$.

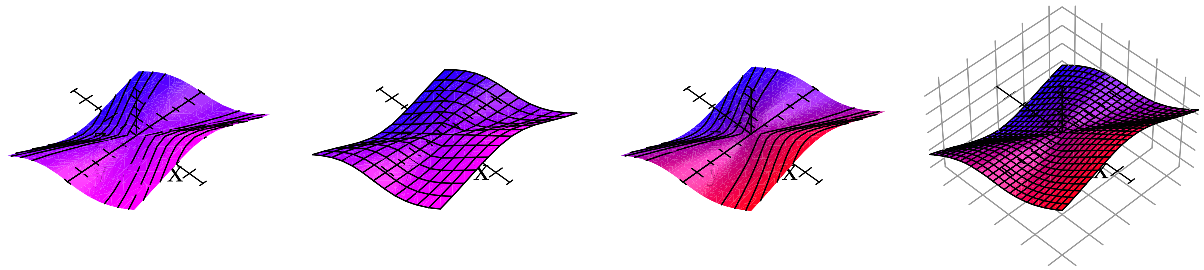
<u>Concluzie.</u> Continuitatea (globală) în $\mathbf{a}$ nu este condiţie necesară pentru existenţa derivatelor parţiale în $\mathbf{a}$, în raport cu x, respectiv y. Se ştie, conform Teoremei 1, că

$\exists\dfrac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{a}) \Rightarrow f$ este continuă în $\mathbf{a}$ doar după direcţia $\mathbf{e}_1 = (1,0)$ (după axa Ox), nu global;

$\exists\dfrac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{a}) \Rightarrow f$ este continuă în $\mathbf{a}$ doar după direcţia $\mathbf{e}_2 = (0,1)$ (după axa Oy), nu global.

Exemplul 12.1.5**.** Să se studieze dacă există $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ şi $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ pentru

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3}{x^2+y^2}, & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$



Rezolvare. $\mathbb{R}^2 = \left(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\right) \cup \{(0,0)\}$.
(*continuitatea nu este o condiţie necesară pentru existenţa derivatelor parţiale*).
•Se studiază dacă f este derivabilă parţial de ordinul 1 pe $\mathbb{R}^2$, în raport cu x, respectiv y.

••pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, care e mulţime deschisă, se va deriva parţial folosind regulile de derivare parţială.

••în $a = (0,0) \in \left(\mathbb{R}^2\right) \cap \left(\mathbb{R}^2\right)'$ se va folosi definiţia derivatei parţiale în raport cu x, respectiv cu y.

$\exists \dfrac{\partial f}{\partial x} : A_1 \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

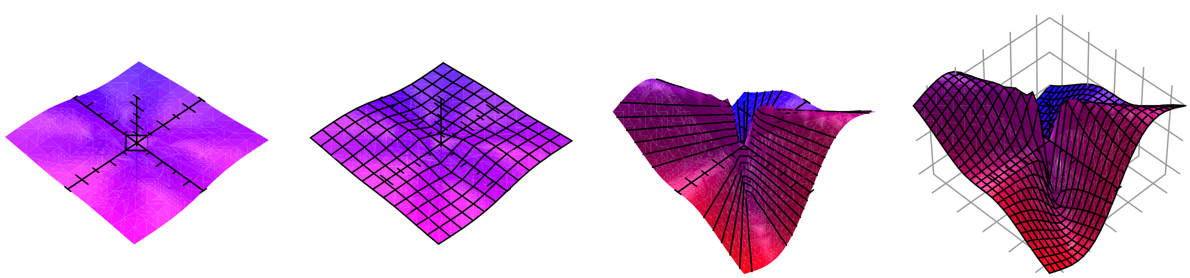
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y^3}{x^2+y^2}\right) \overset{x \text{ este variabilă}}{\underset{\text{de derivare}}{=}} \frac{0\left(x^2+y^2\right) - y^3(2x+0)}{\left(x^2+y^2\right)^2}, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

$$\exists \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \overset{\text{modul 1}}{=} \frac{df}{d\mathbf{e}_1}(0,0) = \lim_{t\to 0, t\in V} \frac{1}{t}\left(f(t,0) - f(0,0)\right) = \lim_{t\to 0, t\in V} \frac{1}{t}\left(\frac{0^3}{t^2+0^2} - 0\right) =$$

$$= \lim_{t\to 0, t\in V} \frac{1}{t} \cdot 0 = \lim_{t\to 0, t\in V} 0 = 0 \Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0.$$

$$\exists \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \overset{\text{modul 2}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{0^3}{x^2+0^2} - 0}{x-0} = \lim_{x\to 0} 0 = 0.$$

$$\exists \frac{\partial f}{\partial x} : A_1 = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{-2xy^3}{\left(x^2+y^2\right)^2}, & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$



$\exists \dfrac{\partial f}{\partial y} : A_2 \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

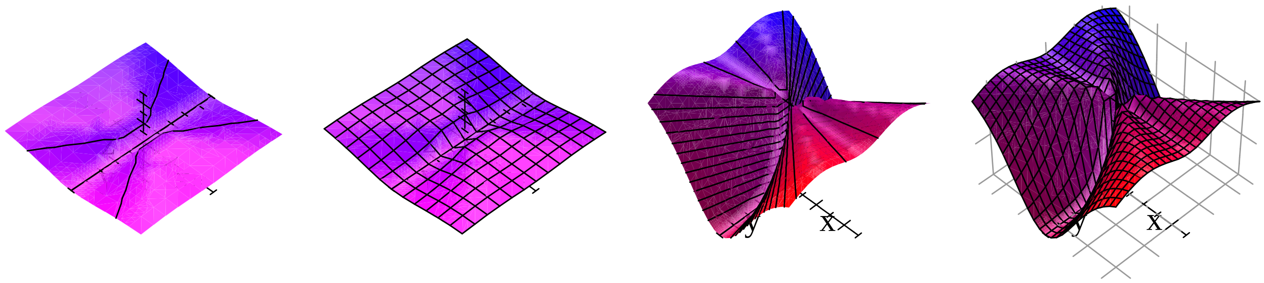
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y^3}{x^2+y^2}\right) \overset{y \text{ este variabilă}}{\underset{\text{de derivare}}{=}} \frac{3y^2\left(x^2+y^2\right) - y^3(0+2y)}{\left(x^2+y^2\right)^2}, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

$$\exists \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \overset{\text{modul 1}}{=} \frac{df}{d\mathbf{e}_2}(0,0) = \lim_{t\to 0, t\in V} \frac{1}{t}\left(f(0,t) - f(0,0)\right) = \lim_{t\to 0, t\in V} \frac{1}{t}\left(\frac{t^3}{0^2+t^2} - 0\right) =$$

$$= \lim_{t\to 0, t\in V} \frac{t^3}{t^3} = 1 \Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1.$$

$$\exists \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \overset{\text{modul } 2}{=} \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{\dfrac{y^3}{0^2+y^2}-0}{y-0} = \lim_{y\to 0} 1 = 1.$$

$$\exists \frac{\partial f}{\partial y} : A_2 = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2\left(3x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}, & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$



Definiţia 12.1.3. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ deschisă, $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p, f(x_1,...,x_n) = (f_1(x_1,...,x_n),...,f_p(x_1,...,x_n))$ şi $\mathbf{a} \in A$.

a) Fie $j \in \{1,...,n\}$. Funcţia f este *derivabilă parţial de ordinul* 1 *în a în raport cu variabila* x_j dacă toate funcţiile $f_1,...,f_p$ sunt derivabile parţial de ordinul 1 în a în raport cu variabila x_j. În plus

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a}) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(\mathbf{a}),...,\frac{\partial f_p}{\partial x_j}(\mathbf{a})\right).} \tag{5}$$

Dacă există, p-upla $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a}) \in \mathbb{R}^p$ se numeşte *derivata parţială a funcţiei f de ordinul* 1 *în a în raport cu variabila* x_j.

b) Fie $j \in \{1,...,n\}$. Funcţia f este *derivabilă parţial de ordinul* 1 *pe mulţimea deschisă A în raport cu variabila* x_j dacă este derivabilă parţial de ordinul 1 în $\forall \mathbf{a} \in A$ în raport cu variabila x_j.

c) Funcţia f este *de clasă $\mathcal{C}^1$ pe mulţimea deschisă A* (şi se notează $f \in \mathcal{C}^1(A;\mathbb{R}^p)$) dacă este derivabilă parţial de ordinul 1 pe A în raport cu toate variabilele $x_j, j \in \{1,...,n\}$ şi funcţiile derivate parţiale $\dfrac{\partial f}{\partial x_j} : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ sunt continue.

Definiţia 12.1.4. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p, f((x_1,...,x_n)) = (f_1(x_1,...,x_n),...,f_p(x_1,...,x_n))$ şi $\mathbf{a} \in A-$deschisă.

a) Se presupune că f este derivabilă parţial de ordinul 1 în $\mathbf{a} \in A$ în raport cu toate variabilele $x_j, j \in \{1,...,n\}$. Se numeşte *matricea jacobiană a funcţiei f în punctul a* (*derivata totală a funcţiei f în punctul a*) matricea

$$\boxed{\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & ... & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ ... & ... & ... \\ \dfrac{\partial f_p}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & ... & \dfrac{\partial f_p}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{pmatrix} \overset{\text{se not.}}{=} J_f(\mathbf{a}) \left(\overset{\text{se not.}}{=} J_{(f_1,...,f_p)}(\mathbf{a})\right).} \tag{6}$$

Dacă $p = n$, se numeşte *jacobianul a funcţiei f în punctul a* determinantul

$$\det J_f(\mathbf{a}) = \det J_{(f_1,...,f_n)}(\mathbf{a}) \overset{\text{se not.}}{=} \frac{\partial(f_1,...,f_n)}{\partial(x_1,...,x_n)}. \tag{7}$$

b) Se presupune că f este derivabilă parţial de ordinul 1 pe A în raport cu toate variabilele x_j,

$j \in \{1, ..., n\}$. Se numeşte *funcţia-matrice Jacobiană a funcţiei f în punctul a* matricea funcţională

$$J : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{R}),\ J_f(x_1, ..., x_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1, ..., x_n) & ... & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_1, ..., x_n) \\ ... & ... & ... \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(x_1, ..., x_n) & ... & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(x_1, ..., x_n) \end{pmatrix}.$$

Dacă $p = n$ se numeşte *funcţia-jacobian a funcţiei f în punctul a* determinantul funcţional

$\det J_f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \det J_f(x_1, ..., x_n) = ...$

Exemplul 12.1.6**.** Să se determine funcţiile derivate parţiale şi funcţia matrice jacobiană pentru

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, f(x, y) = \left(e^{2x+3y}, \operatorname{arctg}\frac{x}{y}, \sqrt{x^4 + 3y^2}\right).$$

Rezolvare. $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \neq 0\right\}$. Se alege $A = D$- este mulţime deschisă.

$n = 2, p = 3, f = (f_1, f_2, f_3)$, unde

$f_1 : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f_1(x, y) = e^{2x+3y}$,

$f_2 : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f_2(x, y) = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$,

$f_3 : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f_3(x, y) = \sqrt{x^4 + 3y^2}$.

Se determină, dacă există, funcţiile derivate parţiale de ordinul 1.

$$\exists \frac{\partial f}{\partial x} : A_1 \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{2x+3y}, \operatorname{arctg}\frac{x}{y}, \sqrt{x^4 + 3y^2}\right) =$$

$$\underset{\text{de derivare}}{\overset{x \text{ este variabilă}}{=}} \left(e^{2x+3y}\cdot 2, \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\frac{1}{y}, \frac{1}{2\sqrt{x^4 + 3y^2}}\left(4x^3 + 0\right)\right); A_1 = A.$$

$$\exists \frac{\partial f}{\partial x} : A_1 \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \left(\underbrace{2e^{2x+3y}}_{\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y)}, \underbrace{\frac{y}{x^2 + y^2}}_{\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y)}, \underbrace{\frac{2x^3}{\sqrt{x^4 + 3y^2}}}_{\frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y)}\right).$$

$$\exists \frac{\partial f}{\partial y} : A_2 \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{2x+3y}, \operatorname{arctg}\frac{x}{y}, \sqrt{x^4 + 3y^2}\right) =$$

$$\underset{\text{de derivare}}{\overset{y \text{ este variabilă}}{=}} \left(e^{2x+3y}\cdot 3, \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right), \frac{1}{2\sqrt{x^4 + 3y^2}}\left(0 + 6y\right)\right); A_2 = A.$$

$$\exists \frac{\partial f}{\partial y} : A_2 \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \left(\underbrace{e^{2x+3y}\cdot 3}_{\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)}, \underbrace{\frac{-x}{x^2 + y^2}}_{\frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y)}, \underbrace{\frac{3y}{\sqrt{x^4 + 3y^2}}}_{\frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y)}\right).$$

Matricea jacobiană este

$$\boxed{J_f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f_3}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^{2x+3y}\cdot 2 & e^{2x+3y}\cdot 3 \\ \frac{y}{x^2 + y^2} & \frac{-x}{x^2 + y^2} \\ \frac{2x^3}{\sqrt{x^4 + 3y^2}} & \frac{3y}{\sqrt{x^4 + 3y^2}} \end{pmatrix}, \forall (x, y) \in A_1 \cap A_2.$$

Este o matrice având drept componente funcţii, $J_f : A_1 \cap A_2 \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$.
Nu are sens calculul jacobianului, nu este o matrice pătratică. *Matricea se foloseşte la scrierea diferenţialei funcţiei* f, precum şi *la derivarea parţială a funcţiilor compuse.*

Exemplul 12.1.7. Să se determine funcţiile derivate parţiale şi funcţia matrice jacobiană pentru
$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$.
Rezolvare. $D = \mathbb{R}^2$. Se alege $A = D = \mathbb{R}^2$- este mulţime deschisă.
$n = 2, p = 2. f = (f_1, f_2)$, unde
$f_1 : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f_1(\rho,\theta) = \rho\cos\theta; f_2 : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f_2(\rho,\theta) = \rho\sin\theta.$
Deoarece f este definită pe mulţimea deschisă A se pot determina, dacă există, funcţiile derivate parţiale de ordinul 1.

$$\exists\frac{\partial f}{\partial\rho} : A_1 \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial\rho}(\rho,\theta) \overset{\rho \text{ este variabilă}}{\underset{\text{de derivare}}{=}} \left(\underbrace{\cos\theta}_{\frac{\partial f_1}{\partial\rho}(\rho,\theta)}, \underbrace{\sin\theta}_{\frac{\partial f_2}{\partial\rho}(\rho,\theta)}\right); A_1 = A.$$

$$\exists\frac{\partial f}{\partial\theta} : A_2 \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial\theta}(\rho,\theta) \overset{\theta \text{ este variabilă}}{\underset{\text{de derivare}}{=}} \left(\underbrace{-\rho\sin\theta}_{\frac{\partial f_1}{\partial\theta}(\rho,\theta)}, \underbrace{\rho\cos\theta}_{\frac{\partial f_2}{\partial\theta}(\rho,\theta)}\right); A_2 = A.$$

Matricea jacobiană este

$$\boxed{J_f(\rho,\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial\rho}(\rho,\theta) & \frac{\partial f_1}{\partial\theta}(\rho,\theta) \\ \frac{\partial f_2}{\partial\rho}(\rho,\theta) & \frac{\partial f_2}{\partial\theta}(\rho,\theta) \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix}, \forall(\rho,\theta) \in A_1 \cap A_2.$$

Este o matrice pătratică, având drept componente funcţii, $J_f : A_1 \cap A_2 \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
Are sens calculul jacobianului.

$$\det J_f(\rho,\theta) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho, \forall(\rho,\theta) \in A_1 \cap A_2.$$

Este un determinant funcţional, *folosit în schimbarea de variabile din coordonate carteziene în coordonate polare, în integrala dublă.*

Alţi jacobieni, ca de exemplu cel ataşat funcţiei
$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x,y) = \left(\ln\sqrt{x^2+y^2}, \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)$,
se folosesc *pentru determinarea modulului derivatei unor funcţii complexe*, precum a ramurii
$\operatorname{Log}_k(z) = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi)$.

Definiţia 12.1.5. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ deschisă, $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ şi $\mathbf{a} \in A$.
a) Funcţia f este *diferenţiabilă de ordinul* 1 *în* a dacă

$$\exists T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) \text{ astfel încât } \lim_{\mathbf{h}\to\boldsymbol{\theta}_{\mathbb{R}^n}} \frac{1}{\|\mathbf{h}\|_{2,\mathbb{R}^n}}(f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - T(\mathbf{h})) = \theta_{\mathbb{R}^p}, \tag{8}$$

unde $\|(h_1,...,h_n)\|_{2,\mathbb{R}^n} = \sqrt{h_1^2 + ... + h_n^2}$. Dacă există, funcţia liniară $T \overset{\text{se not.}}{=} (df)(\mathbf{a})$ definită prin

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p, T(\mathbf{h}) \overset{\text{se not.}}{=} ((df)(\mathbf{a}))(\mathbf{h}) \tag{9}$$

se numeşte *diferenţiala funcţiei* f *de ordinul* 1 *în* a.
b) Funcţia f este *diferenţiabilă de ordinul* 1 *pe mulţimea deschisă* A dacă este diferenţiabilă de ordinul 1 în $\forall\mathbf{a} \in A$.
Teorema 12.1.8. (**de unicitate a diferenţialei de ordin 1**) Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ deschisă, $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ şi $\mathbf{a} \in A$. Dacă f este diferenţiabilă de ordinul 1 în a, atunci diferenţiala ei în punctul a,

$T = (df)(\mathbf{a})$ este unic determinată.

Propoziţia 12.1.1. Fie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ o funcţie constantă. Atunci f este diferenţiabilă pe $\mathbb{R}^n$ şi

$T = (df)(\mathbf{a}) = 0, \forall a \in \mathbb{R}^n$.

Propoziţia 12.1.2. Fie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ o funcţie liniară. Atunci f este diferenţiabilă pe $\mathbb{R}^n$ şi

$T = (df)(\mathbf{a}) = f, \forall a \in \mathbb{R}^n$.

Observaţia 12.1.3. Se reaminteşte "Fie $A = \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ un interval nevid şi deschis. Fie $f : \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $a \in \mathbb{I}$. Funcţia f este diferenţiabilă în a dacă şi numai dacă este derivabilă în a. În acest caz

$((df)(a))(h) = f'(a) \cdot h, \forall h \in \mathbb{R}$".

De menţionat că dacă f este derivabilă pe $\mathbb{I}$, atunci

$$\boxed{(df)(x) = f'(x) \cdot dx, \forall x \in \mathbb{I}.}$$

Pentru $n \geq 2$, diferenţiabilitatea unei funcţii f nu este echivalentă cu derivabilitatea parţială a funcţiei f.

Teorema 12.1.9. (**CN de diferenţiabilitate de ordin 1 a unui câmp scalar, cu derivate după direcţii de ordin 1, respectiv cu derivate parţiale de ordin 1**) Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ deschisă, $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ şi $\mathbf{a} \in A$. Dacă f este diferenţiabilă de ordinul 1 în a, atunci f este derivabilă în raport cu orice direcţie în a şi

$$\boxed{\frac{df}{d\mathbf{h}}(\mathbf{a}) = ((df)(\mathbf{a}))(\mathbf{h}), \forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\theta_{\mathbb{R}^n}\}.} \tag{10}$$

În particular f este şi derivabilă parţial de ordinul 1 în a în raport cu fiecare variabilă şi, pentru $\forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\theta_{\mathbb{R}^n}\}, \mathbf{h} = (h_1, ..., h_n)$

$$\boxed{((df)(\mathbf{a}))(\mathbf{h}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}) \cdot h_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \cdot h_n.} \tag{11}$$

Reciproc nu.

Teorema 12.1.10. (**CN de diferenţiabilitate de ordin 1 a unui câmp vectorial, bazată pe continuitate**) Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ deschisă, $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ şi $\mathbf{a} \in A$. Dacă f este diferenţiabilă de ordinul 1 în a, atunci f este continuă în a.

Teorema 12.1.11. (**CS de diferenţiabilitate de ordin 1 a unui câmp scalar, bazată pe continuitatea derivatelor parţiale**) Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ deschisă, $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ şi $\mathbf{a} \in A$. Dacă f este derivabilă parţial de ordinul 1 pe A în raport cu fiecare variabilă şi funcţiile derivate parţiale $\dfrac{\partial f}{\partial x_j} : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, j \in \{1, ..., n\}$ sunt continue în a, atunci f este diferenţiabilă de ordinul 1 în a şi

$$\boxed{(df)(\mathbf{a})(\mathbf{h}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}) \cdot h_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \cdot h_n.} \tag{12}$$

Observaţia 12.1.4. a) Cum aplicaţia proiecţie

$p_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, p_j(h_1, ..., h_j, ..., h_n) = h_j$

este o aplicaţie liniară$\Rightarrow dp_j(\mathbf{a}) = p_j$. Mai scriem $dx_j(\mathbf{a}) = p_j$. Atunci:

$$\boxed{(df)(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}) \cdot dx_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \cdot dx_n.}$$

b) Pentru $n = 2$, $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = ...$, relaţiile devin

$$((df)(\mathbf{a}))(\mathbf{h}) = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{a}) \cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{a}) \cdot h_2, \forall \mathbf{h} = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2 \tag{13}$$

respectiv $(df)(\mathbf{a}) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{a}) \cdot dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{a}) \cdot dy$ (14)

S-a utilizat convenţia că $dx = p_1, dy = p_2$ sunt funcţiile proiecţie a $\mathbb{R}^2$ pe Ox, respectiv Oy, adică

$p_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, p_1(h_1, h_2) = h_1; p_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, p_2(h_1, h_2) = h_2$.

c) Pentru $n = 3$, $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = ...$, relaţiile devin

$$((df)(\mathbf{a}))(\mathbf{h}) = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{a}) \cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{a}) \cdot h_2 + \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{a}) \cdot h_3, \forall \mathbf{h} = (h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{R}^3. \tag{15}$$

respectiv $(df)(\mathbf{a}) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{a}) \cdot dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{a}) \cdot dy + \dfrac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{a}) \cdot dz$ (15)

S-a utilizat convenţia că dx, dy, dz sunt funcţiile proiecţie a $\mathbb{R}^3$ pe Ox, Oy, respectiv Oz, adică

$p_{1,2,3} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, p_1(h_1, h_2, h_3) = h_1; p_2(h_1, h_2, h_3) = h_2; p_2(h_1, h_2, h_3) = h_3.$

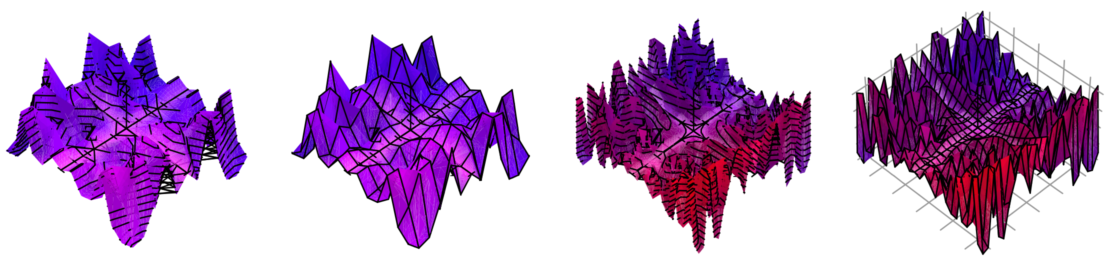
Observaţia 12.1.5. a) Dacă $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ este diferenţiabilă pe mulţimea deschisă A, atunci

$$\boxed{(df)(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \cdot dy, \forall (x,y) \in A} \tag{16}$$

b) Dacă $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ este diferenţiabilă pe mulţimea deschisă A, atunci

$$\boxed{(df)(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) \cdot dy + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) \cdot dz, \forall (x,y,z) \in A} \tag{17}$$

Exemplul 12.1.8. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = y \sin(x^2 y)$. Să se studieze dacă f este diferenţiabilă pe $\mathbb{R}^2$. Să se determine $(df)(x,y), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2; (df)\left(1, \frac{\pi}{2}\right); \left((df)\left(1, \frac{\pi}{2}\right)\right)(-1,2)$.



Rezolvare. Se va folosi Teorema 12.1.11, dacă e posibil. Deoarece f este definită pe mulţimea deschisă $\mathbb{R}^2$ se pot determina, dacă există, funcţiile derivate parţiale de ordinul 1.

$\exists \dfrac{\partial f}{\partial x} : A_1 \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(y \sin(x^2 y)\right) \underset{\text{de derivare}}{\overset{x \text{ este variabilă}}{=}} y\left(\cos(x^2 y)\right) \cdot 2xy; A_1 = \mathbb{R}^2.$

Mai mult, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ este funcţie continuă pe $\mathbb{R}^2$.

$\exists \dfrac{\partial f}{\partial y} : A_2 \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(y \sin(x^2 y)\right) \underset{\text{de derivare}}{\overset{y \text{ este variabilă}}{=}} 1 \cdot \sin(x^2 y) + y \cdot \left(\cos(x^2 y)\right) \cdot x^2; A_2 = \mathbb{R}^2.$

Mai mult, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ este funcţie continuă pe $\mathbb{R}^2$.

Conform Teoremei 12.1.11 $\Rightarrow$ f este diferenţiabilă pe $A_1 \cap A_2 = \mathbb{R}^2$ şi

$(df)(x,y) = \left(2xy^2 \cos(x^2 y)\right) \cdot dx + \left(\sin(x^2 y) + x^2 y \cos(x^2 y)\right) \cdot dy, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$

Atunci $(df)\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = \underbrace{0 \cdot dx + 1 \cdot dy}_{T \text{ pentru } \mathbf{a}=\left(1,\frac{\pi}{2}\right)}$. | se aplică în $(h_1, h_2) \Rightarrow$

$\left((df)\left(1, \frac{\pi}{2}\right)\right)(h_1, h_2) = \underbrace{0 \cdot h_1 + 1 \cdot h_2}_{T(h_1,h_2) \text{ pentru } \mathbf{a}=\left(1,\frac{\pi}{2}\right)} \Rightarrow \left((df)\left(1, \frac{\pi}{2}\right)\right)(-1,2) = 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 2.$

Interpretarea geometrică a diferenţialei pentru $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Fie funcţia $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ al cărei grafic $G_f = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; (x,y) \in A, z = f(x,y)\right\}$ are ca reprezentare o suprafaţă în spaţiu. Fie $M(a_1, a_2, b)$ un punct pe această suprafaţă, adică

$f(a_1, a_2) = b$.

Se reaminteşte că, la o altă interpretare geometrică a derivatelor parţiale, s-a observat că, dacă f are derivate parţiale continue, atunci ecuaţia planului tangent la suprafaţa S în punctul M este

$$z - b = \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2) \cdot (x - a_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2) \cdot (y - a_2)$$

şi că, în apropierea punctului M, la zoom, planul tangent are graficul suprapus peste graficul funcţiei. S-a construit *liniarizata funcţiei* f în apropierea punctului (a_1, a_2) ca fiind

$$L(x, y) = f(a_1, a_2) + \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2) \cdot (x - a_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2) \cdot (y - a_2).$$

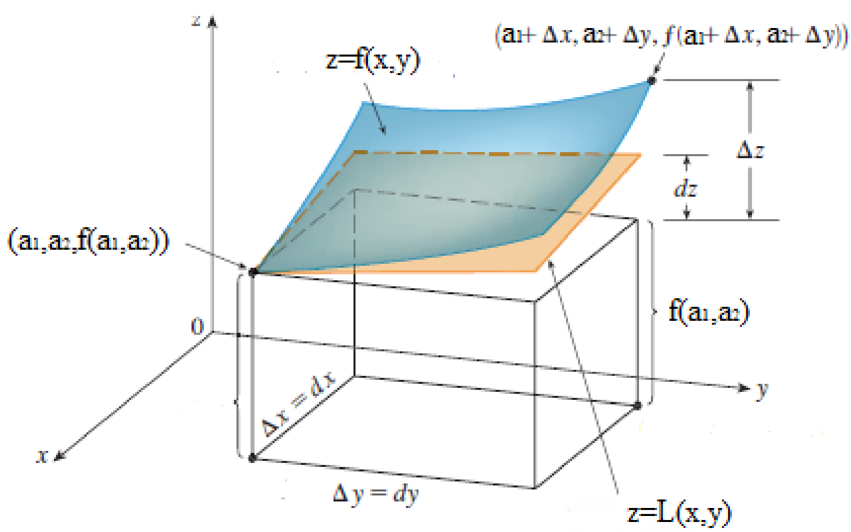
(*aproximarea* G_f *cu planul tangent* a f în (a_1, a_2)).

Dacă, în limbajul de la diferenţială, se consideră $dx = \Delta x = x - a_1, dy = \Delta y = y - a_2$, atunci

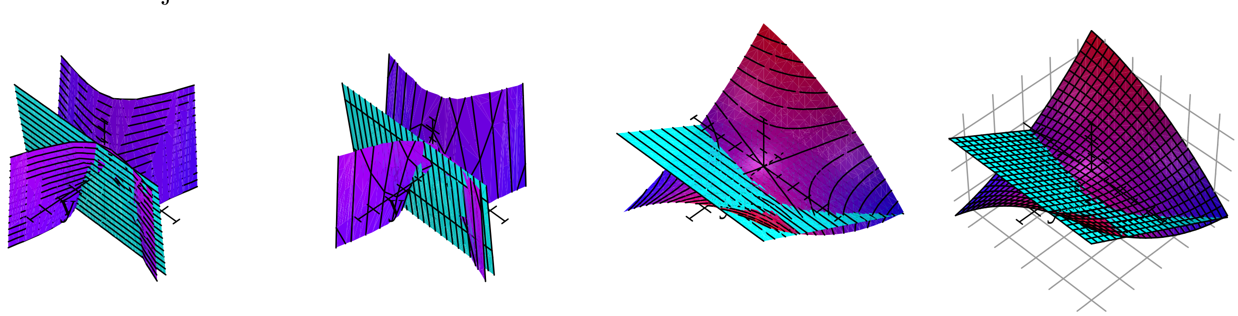
$$df(a_1, a_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2) \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2) \cdot dy \Rightarrow$$

$$f(x, y) - f(a_1, a_2) \simeq \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2) \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2) \cdot dy}_{df(a_1,a_2)=T \text{ pentru } (a_1,a_2)},$$

adică, renotând $df = dz \Rightarrow \underbrace{f(x, y) - f(a_1, a_2)}_{\Delta z} \simeq dz$.



De exemplu, fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = x^2 + 3xy - y^2$. Graficul funcţiei, $G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + 3xy - y^2 = z\}$ este reprezentat mai jos.



$$f(x, y) = x^2 + 3xy - y^2, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow f(2, 3) = 13 \text{ şi}$$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + 3y$ şi $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3x - 2y, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}(2,3) = 13$ şi $\dfrac{\partial f}{\partial y}(2,3) = 0.$

Fie $M(a_1, a_2, f(a_1, a_2)) = M(2,3,13)$ un punct pe suprafaţa paraboloidului. Se construieşte *planul tangent* la S în M, de ecuaţie

$(\pi) : z - 13 = 13(x-2) + 0(y-3) \Leftrightarrow (\pi) : z = 13x - 13.$

Se construieşte *liniarizata funcţiei* f,

$L(x,y) = 13x - 13,$

al cărei grafic este chiar planul tangent la S în M.

Se observă că $L(x,y)$ aproximează $f(x,y)$ într-o vecinătate a punctului $(2,3) : f(x,y) \simeq L(x,y), \forall (x,y) \in V.$

Atunci şi dz aproximează Δz într-o vecinătate apropiată a punctului $(2,3)$, de exemplu pentru $(x,y) = (2.05, 2.96)$. Într-adevăr

$df(x,y) = (2x+3y) \cdot dx + (3x - 2y) \cdot dy.$

Considerăm $x = 2, dx = \Delta x = 0.05, y = 3, dy = \Delta y = -0.04 \Rightarrow$

$dz = (2 \cdot 2 + 3 \cdot 3) \cdot 0.05 + (3 \cdot 2 - 2 \cdot 3) \cdot (-0.04) = 0.65$

$\Delta z = f(2.05, 2.96) - f(2,3) = \left((2.05)^2 + 3(2.05)(2.96) - (2.96)^2\right) - 13 = 0.6449.$

Exemplul 12.1.9**.** Să se studieze dacă f este diferenţiabilă pe $\mathbb{R}^2$, unde

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3}{x^2+y^2}, & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Rezolvare. $\mathbb{R}^2 = \left(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\right) \cup \{(0,0)\}.$

•Se studiază dacă f este derivabilă parţial de ordinul 1 pe $\mathbb{R}^2$, în raport cu x, respectiv y (*derivabilitatea parţială este o condiţie necesară pentru diferenţiabilitate*). S-a arătat că

$$\exists \frac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{-2xy^3}{(x^2+y^2)^2}, & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

$$\exists \frac{\partial f}{\partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2(3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}, & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

$\Rightarrow f$ *poate fi* diferenţiabilă pe $\mathbb{R}^2$.

•Se studiază dacă f este continuă pe $\mathbb{R}^2$ (*continuitatea este o condiţie necesară pentru diferenţiabilitate*).

••pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, care e mulţime deschisă, f este continuă.

••În $\mathbf{a} = (0,0) \in (\mathbb{R}^2) \cap (\mathbb{R}^2)'$, f este continuă $\Leftrightarrow \exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$

$\Leftrightarrow [\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ cu $0 < |x - 0| < \delta$ şi $0 < |y - 0| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - 0| < \varepsilon]$.

Fie $\forall \varepsilon > 0$. Se caută $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ cu $0 < |x - 0| < \delta$ şi $0 < |y - 0| < \delta$ să rezulte

$$|f(x,y) - 0| = \left|\frac{y^3}{x^2+y^2} - 0\right| = \frac{y^2|y|}{x^2+y^2} \underset{\text{rămâne } \delta}{\overset{\text{"scăpăm" de } x,y}{<}} 1 \cdot |y| < \delta < \varepsilon$$

$\overset{\text{din Teorema de densitate}}{\underset{\text{a } \mathbb{R} \text{ în } \mathbb{R}}{\Rightarrow}} \exists \delta(\varepsilon)$ între 0 şi ε, de exemplu $\delta(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{2}$.

$\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. Deci f este continuă în $(0,0)$.

$\Rightarrow f$ *poate fi* diferenţiabilă pe $\mathbb{R}^2$

•Se studiază dacă f este diferenţiabilă de ordinul 1 pe $\mathbb{R}^2$.

$\bullet\bullet$pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, care e mulţime deschisă, se va utiliza Teorema 12.1.11. Deoarece $\exists \dfrac{\partial f}{\partial x}, \exists \dfrac{\partial f}{\partial y}$ şi sunt continue pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \overset{\text{Teorema 12.1.11}}{\Rightarrow} f$ este diferenţiabilă pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ şi

$$(df)(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\cdot dy, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

$$(df)(x,y) = \frac{-2xy^3}{(x^2+y^2)^2}dx + \frac{y^2\left(3x^2+y^2\right)}{(x^2+y^2)^2}dy, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

$\bullet\bullet$în $a = (0,0) \in \left(\mathbb{R}^2\right) \cap \left(\mathbb{R}^2\right)'$ se va folosi definiţia diferenţialei de ordinul 1.

Deoarece $\exists \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0), \exists \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) \Rightarrow$se poate defini

$$\boxed{T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, T(h_1,h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\cdot h_2} = 0\cdot h_1 + 1\cdot h_2 = h_2.$$

Se observă că $T \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$.Se verifică dacă

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\left(f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - T(\mathbf{h})\right) = 0, \text{ cu } \mathbf{a} = (0,0)\text{, adică:}$$

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\left(f((0,0)+(h_1,h_2)) - f((0,0)) - T(h_1,h_2)\right) = 0.$$

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\left(f((0,0)+(h_1,h_2)) - f((0,0)) - T(h_1,h_2)\right)$$

$$\overset{((\cdot))=(\cdot)}{=} \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\left(f(h_1,h_2) - f(0,0) - T(h_1,h_2)\right)$$

$$= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\left(\frac{h_2^3}{h_1^2+h_2^2} - 0 - h_2\right) = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{-h_1^2h_2}{\left(h_1^2+h_2^2\right)\sqrt{h_1^2+h_2^2}}.$$

Se face schimbarea de variabile de trecere la limită $h_1 = x, h_2 = y$. Se consideră

$g : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, g(x,y) = \dfrac{-x^2y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ şi se verifică dacă $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0$.

<u>modul 1.</u> Se studiază existenţa limitei funcţiei g în $(0,0)$ cu direcţii.

Fie $\forall \mathbf{h} = (h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ o direcţie în $\mathbb{R}^2$.

$$\exists \lim_{t\to 0, t\in U} g((0,0)+t(h_1,h_2)) \overset{((\cdot))=(\cdot)}{=} \lim_{t\to 0, t\in U} g(th_1, th_2) = \lim_{t\to 0, t\in U} \frac{-(th_1)^2(th_2)}{\left((th_1)^2+(th_2)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \lim_{t\to 0, t\in U} \frac{-t^3}{t^3}\frac{h_1^2h_2}{\left(h_1^2+h_2^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-h_1^2h_2}{\left(h_1^2+h_2^2\right)^{\frac{3}{2}}}\text{-depinde de } (h_1,h_2)$$

$\Rightarrow$există limita funcţiei g în $(0,0)$ după o direcţie $\mathbf{h}$, dar depinde de direcţia $\mathbf{h} \Rightarrow$ nu există limita globală a funcţiei g în $(0,0) \Rightarrow f$ nu este diferenţiabilă în $(0,0)$.

<u>modul 2.</u> (nu mai e necesar aici, este doar o alternativă pentru modul 1). Se arată că $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) \neq 0$ (în sensul că sau nu există limita, sau nu are valoarea 0), cu şiruri.

Se alege $(x_n,y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n,y_n) = (0,0)$. Se observă că

$$g(x_n,y_n) = \frac{-\left(\frac{1}{n}\right)^2\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{1}{n}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} g(x_n,y_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{-1}{2\sqrt{2}} = \frac{-1}{2\sqrt{2}}.$$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$, chiar dacă ar exista, nu ar fi 0.

Deci f nu este diferenţiabilă în $(0,0)$.

Exemplul 12.1.10. Fie $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}, & \text{dacă } x>0, y>0 \\ 0, & \text{dacă } (x,y)=(0,0) \end{cases}$,
unde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0\}$. În Seminar se arată că f are derivate parţiale în raport cu x, respectiv y pe D; mai mult, f este diferenţiabilă pe D.

Exemplul 12.1.11. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{dacă } (x,y)=(0,0) \end{cases}$.
În Seminar se arată că f are derivate parţiale în raport cu x, respectiv y pe $\mathbb{R}^2$; mai mult, f este diferenţiabilă pe D.

Observaţia 12.1.6. Conform Teoremei 12.1.9 $\Rightarrow \mathcal{C}^1(A;\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}(A;\mathbb{R})$.

$$f \in \mathcal{C}^1(A;\mathbb{R}) \Leftrightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial x_j} : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ şi } \frac{\partial f}{\partial x_j} \in \mathcal{C}(A;\mathbb{R}) \Leftrightarrow \exists df : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f \in \mathcal{C}(A;\mathbb{R}).$$

Teorema 12.1.12. (**operaţii cu diferenţiale**) Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ deschisă, $f, g : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ câmpuri scalare diferenţiabile de ordin 1 în $\mathbf{a} \in A$. Fie $\alpha \in \mathbb{R}$. Atunci funcţiile $f+g, \alpha f$ şi $f \cdot g$ sunt diferenţiabile de ordin 1 în $\mathbf{a} \in A$ şi

$$\boxed{d(f+g)(\mathbf{a}) = df(\mathbf{a}) + dg(\mathbf{a}); d(\alpha \cdot f)(\mathbf{a}) = \alpha df(\mathbf{a}),}$$
$$\boxed{d(f \cdot g)(\mathbf{a}) = df(\mathbf{a}) \cdot g(\mathbf{a}) + f(\mathbf{a}) \cdot dg(\mathbf{a}).}$$

Dacă, în plus, $g(\mathbf{a}) \neq 0, \forall \mathbf{a} \in A$ atunci funcţia $\frac{f}{g}$ este diferenţiabilă de ordin 1 în $\mathbf{a}$ şi

$$\boxed{d\left(\tfrac{f}{g}\right)(\mathbf{a}) = \frac{1}{g^2(\mathbf{a})}\left(df(\mathbf{a}) \cdot g(\mathbf{a}) - f(\mathbf{a}) \cdot dg(\mathbf{a})\right).}$$

Observaţia 7$^{\bigcirc}$. Dacă $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ este diferenţiabilă pe mulţimea deschisă A, atunci

$$\boxed{(df)(x_1,...,x_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,...,x_n) \cdot dx_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1,...,x_n) \cdot dx_n, \forall (x_1,...,x_n) \in A} \tag{18}$$

$$\boxed{(df)(x_1,...,x_n) \cong J_f(x_1,...,x_n) \cdot \begin{pmatrix} dx_1 \\ ... \\ dx_n \end{pmatrix}, \forall (x_1,...,x_n) \in A} \tag{19}$$

simbolul $\cong$ înţelegându-se în sensul că matricea coloană obţinută se identifică cu $p-$upla corespunzătoare.

De exemplu, dacă $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y), f_3(x,y))$ este diferenţiabilă pe mulţimea deschisă A, atunci, $\forall (x,y) \in A$,

$$(df)(x,y) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y)\right) \cdot dx + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y), \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y), \frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y)\right) \cdot dy$$

$$\boxed{(df)(x,y) \cong J_f(x,y) \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}, \forall (x,y) \in A}$$

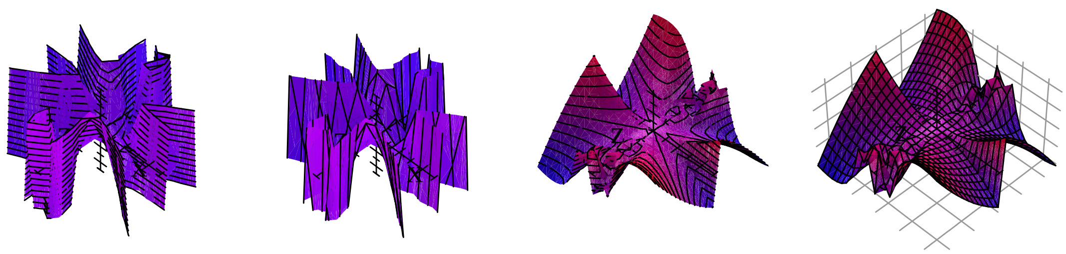
$$\boxed{(df)(x,y) = \Bigg(\underbrace{\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y)\,dx + \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)\,dy}_{(df_1)(x,y)}, \underbrace{\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y)\,dx + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y)\,dy}_{(df_2)(x,y)}, \underbrace{\frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y)\,dx + \frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y)\,dy}_{(df_3)(x,y)}\Bigg)}$$

Exemplul 12.1.12. Să se arate că funcţia

$$f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \left(x^2 - y^2\right) \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \left(x^2 + y^2\right) \sin \frac{x}{y},$$

unde $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \neq 0, y \neq 0\right\}$, verifică ecuaţia diferenţială cu derivate parţiale de ordinul întâi

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2f(x,y), \forall (x,y) \in D.$$



Rezolvare. •Se observă că funcţia f este derivabilă parţial de ordinul 1 pe D în raport cu x, respectiv y, adică

$$\exists \frac{\partial f}{\partial x} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\left(x^2 - y^2\right) \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \left(x^2 + y^2\right) \sin \frac{x}{y}\right)$$

$$\underset{\text{de derivare}}{\overset{x \text{ este variabilă}}{=}} (2x - 0) \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \left(x^2 - y^2\right) \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \left(\frac{-y}{x^2}\right) + (2x + 0) \sin \frac{x}{y} + \left(x^2 + y^2\right) \left(\cos \frac{x}{y}\right) \left(\frac{1}{y}\right).$$

$$\exists \frac{\partial f}{\partial y} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\left(x^2 - y^2\right) \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \left(x^2 + y^2\right) \sin \frac{x}{y}\right)$$

$$\underset{\text{de derivare}}{\overset{y \text{ este variabilă}}{=}} (0 - 2y) \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \left(x^2 - y^2\right) \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \left(\frac{1}{x}\right) + (0 + 2y) \sin \frac{x}{y} + \left(x^2 + y^2\right) \left(\cos \frac{x}{y}\right) \left(\frac{-x}{y^2}\right).$$

•Se verifică ecuaţia diferenţială:

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x \left(2x \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \frac{-y\left(x^2 - y^2\right)}{x^2 + y^2} + 2x \sin \frac{x}{y} + \frac{x^2 + y^2}{y} \cos \frac{x}{y}\right) +$$

$$+ y \left(-2y \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \frac{x\left(x^2 - y^2\right)}{x^2 + y^2} + 2y \sin \frac{x}{y} + \frac{-x\left(x^2 + y^2\right)}{y^2} \cos \frac{x}{y}\right) = 2f(x,y), \forall (x,y) \in D.$$

Exemplul 12.1.13. Să se arate că funcţia

$$f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x,y,z) = \frac{xy}{z} \ln x + x \operatorname{arctg} \frac{y+z}{x},$$

unde $D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x > 0, z \neq 0\right\}$, verifică ecuaţia cu derivate parţiale de ordinul întâi:

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) + z \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = f(x,y,z) + \frac{xy}{z}, \forall (x,y,z) \in D.$$

Rezolvare. Se observă că funcţia f este derivabilă parţial de ordinul 1 pe D în raport cu x, respectiv y, z, adică

$$\exists \frac{\partial f}{\partial x} : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xy}{z} \ln x + x \operatorname{arctg} \frac{y+z}{x}\right) =$$

$$\underset{\text{de derivare}}{\overset{x \text{ este variabilă}}{=}} \frac{y}{z} \ln x + \frac{xy}{z} \frac{1}{x} + \operatorname{arctg} \frac{y+z}{x} + x \frac{1}{1 + \left(\frac{y+z}{x}\right)^2} \frac{-(y+z)^2}{x^2}.$$

$$\exists\frac{\partial f}{\partial y}:D\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{xy}{z}\ln x+x\operatorname{arctg}\frac{y+z}{x}\right)=$$
$$\underset{\text{de derivare}}{\overset{y\text{ este variabilă}}{=}}\frac{x}{z}\ln x+x\frac{1}{1+\left(\frac{y+z}{x}\right)^2}\frac{1}{x}.$$
$$\exists\frac{\partial f}{\partial z}:D\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{xy}{z}\ln x+x\operatorname{arctg}\frac{y+z}{x}\right)=$$
$$\underset{\text{de derivare}}{\overset{z\text{ este variabilă}}{=}}\frac{-xy}{z^2}\ln x+x\frac{1}{1+\left(\frac{y+z}{x}\right)^2}\frac{1}{x}.$$

Atunci

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)+z\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=$$
$$=x\left(\frac{y}{z}\ln x+\frac{xy}{z}\frac{1}{x}+\operatorname{arctg}\frac{y+z}{x}+x\frac{1}{1+\left(\frac{y+z}{x}\right)^2}\frac{-(y+z)^2}{x^2}\right)+$$
$$+y\left(\frac{x}{z}\ln x+x\frac{1}{1+\left(\frac{y+z}{x}\right)^2}\frac{1}{x}\right)+z\left(\frac{-xy}{z^2}\ln x+x\frac{1}{1+\left(\frac{y+z}{x}\right)^2}\frac{1}{x}\right)=$$
$$=f(x,y,z)+\frac{xy}{z},\forall(x,y,z)\in D.$$

12.1′. Derivarea parţială şi diferenţierea funcţiilor definite prin compunere

Teorema 12.1′.1.(chain rule-regula lanţului). Fie $f:D_1\subseteq\mathbb{R}^n\to D_2\subseteq\mathbb{R}^m$ şi $g:D_2\subseteq\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^p$, cu D_1 şi D_2 mulţimi deschise a.î. $f(D_1)\subseteq D_2$.

$$D_1\subseteq\mathbb{R}^n\xrightarrow{f}D_2\subseteq\mathbb{R}^m\xrightarrow{g}\mathbb{R}^p$$
$$\forall\mathbf{x}\ \rightsquigarrow\ f(\mathbf{x})\ \rightsquigarrow g(f(\mathbf{x}))=F(\mathbf{x})$$

Dacă f este diferenţiabilă de ordinul 1 în $\mathbf{a}\in D_1$ şi g este diferenţiabilă de ord 1 în $f(\mathbf{a})\in D_2$, atunci $F=g\circ f$ este diferenţiabilă de ordin 1 în $\mathbf{a}$ şi

$$\boxed{J_F(\mathbf{a})=J_g(f(\mathbf{a}))\cdot J_f(\mathbf{a}).}\qquad(1)$$

Convenţie.

Cu $\frac{df}{dx}$ se notează derivata unei funcţii de o singură variabilă x.

Cu $\frac{\partial f}{\partial x}$ se notează derivata parţială în raport cu x a unei funcţii cu "mai multe variabile", pe lângă x.

Exemplul 12.1′.1.

a) Fie $f:D_1\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2, f(x)=(u(x),v(x));g:D_2\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},g(u,v)=....$

$$D_1\subseteq\mathbb{R}\xrightarrow{f}D_2\subseteq\mathbb{R}^2\xrightarrow{g}\quad\mathbb{R}$$
$$\forall x\rightsquigarrow f(x)=(u(x),v(x))\rightsquigarrow g(u(x),v(x))=F(x)$$

Se presupune că D_1 şi D_2 sunt mulţimi deschise a.î. $f(D_1)\subseteq D_2$. Se presupune că f este diferenţiabilă de ordinul 1 în $\forall x \in D_1$ şi g este diferenţiabilă de ord 1 în $f(x) \in D_2$. Atunci $F = g \circ f$ este diferenţiabilă de ordin 1 în $\forall x \in D_1$ şi

$J_F(x) = J_g(f(x)) \cdot J_f(x), \forall x \in D_1$, adică

$$\left(\frac{dF}{dx}(x)\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u}(u(x), v(x)) & \frac{\partial g}{\partial v}(u(x), v(x)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{du}{dx}(x) \\ \frac{dv}{dx}(x) \end{pmatrix}, \forall x \in D_1, \text{adică}$$

$$\boxed{\frac{dF}{dx}(x) = \frac{\partial g}{\partial u}(u(x), v(x)) \cdot \frac{du}{dx}(x) + \frac{\partial g}{\partial v}(u(x), v(x)) \cdot \frac{dv}{dx}(x), \forall x \in D_1}$$

Pe scurt, subînţelegând argumentele, pentru $F(x) = g(u(x), v(x))$,

$$\boxed{\frac{dF}{dx} = \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx}}$$

b) Fie $f : D_1 \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$; $g : D_2 \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, g(u,v) = ...$

$$D_1 \subseteq \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} D_2 \subseteq \mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

$$\forall (x,y) \rightsquigarrow f(x,y) = (u(x,y), v(x,y)) \rightsquigarrow g(u(x,y), v(x,y)) = F(x,y)$$

Se presupune că D_1 şi D_2 sunt mulţimi deschise a.î. $f(D_1) \subseteq D_2$. Se presupune că f este diferenţiabilă de ordinul 1 în $\forall (x,y) \in D_1$ şi g este diferenţiabilă de ord 1 în $f(x,y) \in D_2$. Atunci $F = g \circ f$ este diferenţiabilă de ordin 1 în $\forall (x,y) \in D_1$ şi

$J_F(x,y) = J_g(f(x,y)) \cdot J_f(x,y), \forall (x,y) \in D_1$, adică

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u}(u(x,y), v(x,y)) & \frac{\partial g}{\partial v}(u(x,y), v(x,y)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix},$$

$\forall (x,y) \in D_1$, adică

$$\boxed{\begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial u}(u(x,y), v(x,y)) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial g}{\partial v}(u(x,y), v(x,y)) \cdot \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial u}(u(x,y), v(x,y)) \cdot \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial g}{\partial v}(u(x,y), v(x,y)) \cdot \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \end{array}}, \forall (x,y) \in D_1$$

Pe scurt, subînţelegând argumentele, pentru $F(x,y) = g(u(x,y), v(x,y))$,

$$\boxed{\begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \end{array}}$$

c) Fie $f : D_1 \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = u(x,y)$; $g : D_2 \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(u) = ...$

$$D_1 \subseteq \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} D_2 \subseteq \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

$$\forall (x,y) \rightsquigarrow f(x,y) = u(x,y) \rightsquigarrow g(u(x,y)) = F(x,y)$$

Se presupune că D_1 şi D_2 sunt mulţimi deschise a.î. $f(D_1) \subseteq D_2$. Se presupune că f este diferenţiabilă de ordinul 1 în $\forall (x,y) \in D_1$ şi g este diferenţiabilă de ord 1 în $f(x,y) \in D_2$. Atunci $F = g \circ f$ este diferenţiabilă de ordin 1 în $\forall (x,y) \in D_1$ şi

$J_F(x,y) = J_g(f(x,y)) \cdot J_f(x,y), \forall (x,y) \in D_1$, adică

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \left(\frac{dg}{du}(u(x,y))\right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix},$$

$\forall (x,y) \in D_1$, adică

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \dfrac{dg}{du}(u(x,y)) \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \dfrac{dg}{du}(u(x,y)) \cdot \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) \end{array}}, \forall (x,y) \in D_1$$

Pe scurt, subînţelegând argumentele, pentru $F(x,y) = g(u(x,y))$,

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{dg}{du} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{dg}{du} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial y} \end{array}}$$

d) Fie $f : D_1 \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x,y) = (u(x,y), v(x,y)); g : D_2 \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, g(u,v) = (\varphi(u,v), \psi(u,v))$

$D_1 \subseteq \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} D_2 \subseteq \mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \quad \mathbb{R}^2$

$\forall (x,y) \rightsquigarrow f(x,y) = (u(x,y), v(x,y)) \rightsquigarrow g(u(x,y), v(x,y)) = (F_1(x,y), F_2(x,y))$

Se presupune că D_1 şi D_2 sunt mulţimi deschise a.î. $f(D_1) \subseteq D_2$. Se presupune că f este diferenţiabilă de ordinul 1 în $\forall (x,y) \in D_1$ şi g este diferenţiabilă de ord 1 în $f(x,y) \in D_2$. Atunci $F = g \circ f$ este diferenţiabilă de ordin 1 în $\forall (x,y) \in D_1$ şi

$J_F(x,y) = J_g(f(x,y)) \cdot J_f(x,y), \forall (x,y) \in D_1$, adică

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial F_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi}{\partial u}(u(x,y), v(x,y)) & \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}(u(x,y), v(x,y)) \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial u}(u(x,y), v(x,y)) & \dfrac{\partial \psi}{\partial v}(u(x,y), v(x,y)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix},$$

$\forall (x,y) \in D_1$, adică

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{\partial F_1}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial \varphi}{\partial u}(u(x,y), v(x,y)) \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}(u(x,y), v(x,y)) \cdot \dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) \\ \dfrac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial \varphi}{\partial u}(u(x,y), v(x,y)) \cdot \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) + \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}(u(x,y), v(x,y)) \cdot \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial \psi}{\partial u}(u(x,y), v(x,y)) \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \dfrac{\partial \psi}{\partial v}(u(x,y), v(x,y)) \cdot \dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial \psi}{\partial u}(u(x,y), v(x,y)) \cdot \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) + \dfrac{\partial \psi}{\partial v}(u(x,y), v(x,y)) \cdot \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) \end{array}}, \forall (x,y) \in D_1$$

Pe scurt, subînţelegând argumentele, pentru $F(x,y) = \Bigg(\underbrace{\varphi(u(x,y), v(x,y))}_{F_1(x,y)}, \underbrace{\psi(u(x,y), v(x,y))}_{F_2(x,y)}\Bigg)$,

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{\partial F_1}{\partial x} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial F_1}{\partial y} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x} = \dfrac{\partial \psi}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial \psi}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y} = \dfrac{\partial \psi}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial \psi}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{array}}, \text{ chiar}$$

$$\dfrac{\partial F}{\partial x} = \left(\dfrac{\partial F_1}{\partial x}, \dfrac{\partial F_2}{\partial x}\right) = \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial \psi}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial \psi}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$\dfrac{\partial F}{\partial y} = \left(\dfrac{\partial F_1}{\partial y}, \dfrac{\partial F_2}{\partial y}\right) = \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial y}, \dfrac{\partial \psi}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial \psi}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial y}\right).$$

Exemplul 12.1′.2. Fie

$f : D_1 = \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, f(t) = (\sin 2t, \cos t);$

$g : D_2 = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, g(x,y) = x^2 y + 3xy^4$.

Să se determine, dacă este posibil, $F'(0) = \dfrac{dF}{dt}(0)$ pentru $F = g \circ f$.

Rezolvare. modul 1. Se poate determina explicit $F = g \circ f$, deoarece f şi g sunt date explicit.

$n = 1, m = 2, p = 1$

$$D_1 = \mathbb{R} \xrightarrow{f} D_2 = \mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \quad \mathbb{R}$$
$$\forall t \rightsquigarrow (x(t), y(t)) \rightsquigarrow g(x(t), y(t)) = F(t)$$

$\exists F : D_1 = \mathbb{R} \to \mathbb{R}, F(t) = g(x(t), y(t)) = g(\sin 2t, \cos t) = (\sin 2t)^2 (\cos t) + 3 (\sin 2t) (\cos t)^4$.

Atunci

$$\exists F'(t) = \frac{dF}{dx}(t) = \frac{d}{dt}\left((\sin 2t)^2 (\cos t) + 3 (\sin 2t)(\cos t)^4\right) =$$
$$= 4 \sin 2t \cos 2t \cos t - (\sin 2t)^2 \sin t + 6 (\cos 2t)(\cos t)^4 - 12 (\sin 2t)(\cos t)^3 (\sin t) \Rightarrow$$

$\exists F'(0) = 6.$

modul 2. Fie

$f : D_1 = \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, f(t) = (x(t), y(t))$;

$g : D_2 = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, g(x,y) = x^2 y + 3xy^4$.

$$D_1 = \mathbb{R} \xrightarrow{f} D_2 = \mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \quad \mathbb{R}$$
$$\forall t \rightsquigarrow f(t) = (x(t), y(t)) \rightsquigarrow g(x(t), y(t)) = F(t)$$

Se observă că D_1 şi D_2 sunt mulţimi deschise a.î. $f(D_1) = D_2$.

Se observă că f este diferenţiabilă de ordinul 1 în $\forall t \in D_1$ şi g este diferenţiabilă de ord 1 în $f(t) \in D_2$. Atunci $F = g \circ f$ este diferenţiabilă de ordin 1 în $\forall t \in D_1$ şi

$J_F(t) = J_g(f(t)) \cdot J_f(t), \forall t \in D_1$, adică

$$\left(\frac{dF}{dx}(t)\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial x}(x(t), y(t)) & \dfrac{\partial g}{\partial y}(x(t), y(t)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt}(x) \\ \dfrac{dy}{dt}(x) \end{pmatrix}, \forall t \in D_1, \text{ adică}$$

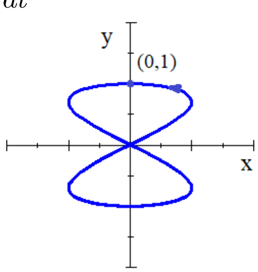
$$\boxed{\frac{dF}{dt}(t) = \frac{\partial g}{\partial x}(x(t), y(t)) \cdot \frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial g}{\partial y}(x(t), y(t)) \cdot \frac{dy}{dt}(t), \forall t \in D_1}$$

Pe scurt, subînţelegând argumentele, pentru $F(t) = g(x(t), y(t))$,

$$\boxed{\frac{dF}{dt} = \frac{\partial g}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial g}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}}$$

Aici

$$\frac{dF}{dt}(t) = \left(2xy + 3y^4\right)\Big|_{(t)} \cdot 2 \cos 2t + \left(x^2 + 12xy^3\right)\Big|_{(t)} \cdot (-\sin t) \Rightarrow \frac{dF}{dt}(0) = 6.$$



Derivata din exemplul anterior poate fi interpretată ca rata de schimb a lui F în raport cu t, când punctul (x, y) se mişcă de-a lungul curbei γ cu ecuaţiile parametrice

$$\begin{cases} x = \sin 2t \\ y = \cos t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

În particular, când $t = 0$, punctul de pe curbă este $f(0) = (x(0), y(0)) = (0, 1)$, iar $\frac{dF}{dt}(0) = 6$ este rata de schimb a lui F de-a lungul curbei în $(0, 1)$. De exemplu, dacă

$$z = g(x, y) = x^2 y + 3xy^4$$

reprezintă temperatura într-un punct (x, y), atunci funcţia compusă

$$F(t) = g(x(t), y(t)) = g(\sin 2t, \cos t) = (\sin 2t)^2 (\cos t) + 3 (\sin 2t) (\cos t)^4$$

reprezintă temperatura în punctele de pe curba γ şi derivata $\frac{dF}{dt}(t)$ reprezintă rata de schimbare a temperaturii de-a lungul curbei γ.

Exemplul 12.1′.3. Fie $g(s, t) = f\left(s^2 - t^2, t^2 - s^2\right), (s, t) \in D$,
unde f este o funcţie diferenţiabilă pe D. Să se arate că g satisface ecuaţia cu derivate parţiale

$$t\frac{\partial g}{\partial s}(s, t) + s\frac{\partial g}{\partial t}(s, t) = 0, (s, t) \in D.$$

Rezolvare. Se consideră

$$x(s, t) = s^2 - t^2, y(s, t) = t^2 - s^2.$$

Aplicând Exemplul $12'.1.1, b)$, în notaţiile de la acest exemplu, se obţine, prescurtat

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial s} = \dfrac{\partial f}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial x}{\partial s} + \dfrac{\partial f}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial s} \\ \dfrac{\partial g}{\partial t} = \dfrac{\partial f}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial x}{\partial t} + \dfrac{\partial f}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial s} = \dfrac{\partial f}{\partial x} \cdot (2s) + \dfrac{\partial f}{\partial y} \cdot (-2s) \\ \dfrac{\partial g}{\partial t} = \dfrac{\partial f}{\partial x} \cdot (-2t) + \dfrac{\partial f}{\partial y} \cdot (2t) \end{cases} \Rightarrow$$

$$t\frac{\partial g}{\partial s} + s\frac{\partial g}{\partial t} = t\left(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot (2s) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot (-2s)\right) + s\left(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot (-2t) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot (2t)\right) = 0.$$