CURS NR. 9
Analiză matematică, AIA

12.2. Derivata de ordin 2 şi mai mare decât 2 după direcţii; derivatele parţiale de ordin 2 şi mai mare decât 2 în raport cu "variabilele" funcţiei; diferenţiala de ordin 2 şi mai mare decât 2

Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulţime nevidă şi deschisă ($A \cap A' = A$).

○**Definiţia 12.2.1**. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ deschisă, $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathbf{a} \in A$ şi $(\mathbf{h}, \mathbf{s}) \in (\mathbb{R}^n \setminus \{\theta_{\mathbb{R}^n}\})^2$ o pereche ordonată de direcţii. Se presupune că f este derivabilă de ordinul 1 pe o vecinătate a punctului $\mathbf{a}$, $V \subseteq A$, după direcţia $\mathbf{h}$, adică $\exists \frac{df}{d\mathbf{h}} : V \subset A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

a) Funcţia f *are derivată de ordinul* 2 *în punctul* $\mathbf{a}$ *în raport cu perechea ordonată de direcţii* $(\mathbf{h}, \mathbf{s})$ dacă funcţia $\frac{df}{d\mathbf{h}}$ are derivată de ordinul 1 în $\mathbf{a}$ în raport cu direcţia $\mathbf{h}$, adică

$$\boxed{\exists \frac{d}{d\mathbf{s}}\left(\frac{df}{d\mathbf{h}}\right)(\mathbf{a}) = \lim_{t\to 0, t\in V} \frac{1}{t}\left(\frac{df}{d\mathbf{h}}(\mathbf{a}+t\mathbf{s}) - \frac{df}{d\mathbf{h}}(\mathbf{a})\right) \in \overline{\mathbb{R}}.}$$

b) Funcţia f *este derivabilă de ordinul* 2 *în punctul* $\mathbf{a}$ *în raport cu perechea ordonată de direcţii* $(\mathbf{h}, \mathbf{s})$ dacă există $\frac{d}{d\mathbf{s}}\left(\frac{df}{d\mathbf{h}}\right)(\mathbf{a}) \in \mathbb{R}$. Dacă există, numărul $\frac{d}{d\mathbf{s}}\left(\frac{df}{d\mathbf{h}}\right)(\mathbf{a}) \in \mathbb{R}$ se numeşte *derivata funcţiei* f *de ordinul* 2 *în* $\mathbf{a}$ *în raport cu perechea ordonată de direcţii* $(\mathbf{h}, \mathbf{s})$.

Pentru $\mathbf{s} \neq \mathbf{h}$, $\boxed{\frac{d}{d\mathbf{s}}\left(\frac{df}{d\mathbf{h}}\right)(\mathbf{a}) \underset{\text{pentru } \mathbf{s}\neq\mathbf{h}}{\overset{\text{se not.}}{=}} \frac{d^2 f}{d\mathbf{s}d\mathbf{h}}(\mathbf{a}).}$

Pentru $\mathbf{s} = \mathbf{h}$, $\boxed{\frac{d}{d\mathbf{h}}\left(\frac{df}{d\mathbf{h}}\right)(\mathbf{a}) \underset{\text{pentru } \mathbf{s}=\mathbf{h}}{\overset{\text{se not.}}{=}} \frac{d^2 f}{d\mathbf{h}^2}(\mathbf{a}).}$ (1)

c) Funcţia *este derivabilă de ordinul* 2 *în raport cu perechea ordonată de direcţii* $(\mathbf{h}, \mathbf{s})$ *pe mulţimea* A dacă este derivabilă de ordinul 2 în raport cu perechea ordonată de direcţii $(\mathbf{h}, \mathbf{s})$ în fiecare $\mathbf{a} \in A$.

○**Definiţia 12.2.2**. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ deschisă, $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathbf{a} \in A$ şi $\left(\mathbf{h}^1, ..., \mathbf{h}^{k-1}, \mathbf{h}^k\right) \in (\mathbb{R}^n \setminus \{\theta_{\mathbb{R}^n}\})^k$ o k-uplă ordonată de direcţii.Se presupune că f este derivabilă de ordinul $k-1$ pe o vecinătate a punctului $\mathbf{a}$, $V \subseteq A$, în raport cu o $k-1$-upla ordonată de direcţii $\left(\mathbf{h}^1, ..., \mathbf{h}^{k-1}\right)$.

a) Se numeşte *derivata de ordinul k a funcţiei f în punctul* $\mathbf{a}$ *în raport cu k-upla ordonată de direcţii* $\left(\mathbf{h}^1, ..., \mathbf{h}^{k-1}, \mathbf{h}^k\right)$, derivata de ordin 1 în raport cu direcţia $\mathbf{h}^k = \left(h_1^k, ..., h_n^k\right)$ a funcţiei "derivată de ordin $k-1$ a funcţiei f în punctul $\mathbf{a}$ în raport cu $k-1$-upla ordonată de direcţii $\left(\mathbf{h}^1, ..., \mathbf{h}^{k-1}\right)$", dacă aceasta există.

b) Funcţia *este derivabilă de ordinul k în raport cu k-upla ordonată de direcţii* $\left(\mathbf{h}^1, ..., \mathbf{h}^k\right)$ *pe mulţimea* A dacă este derivabilă de ordinul k în raport cu k-upla ordonată de direcţii $\left(\mathbf{h}^1, ..., \mathbf{h}^k\right)$ în fiecare $\mathbf{a} \in A$.

○**Teorema 12.2.1**. (**de legătură între derivata de ordin 2 după direcţii şi derivata de ordin 2 a unei funcţii reale**) Fie $(\mathbf{h}, \mathbf{s}) \in (\mathbb{R}^n \setminus \{\theta_{\mathbb{R}^n}\})^2$ o pereche ordonată de direcţii. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ deschisă, $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ câmp scalar şi fie $\mathbf{a} \in A$. Atunci $\exists V \in \mathcal{V}(0)$ şi

$\exists \varphi : V \to \mathbb{R}$, $\varphi(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{h})$

astfel încât următoarele afirmaţii sunt echivalente

(a) $\exists \frac{d^2 f}{d\mathbf{h}^2}(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) \in \mathbb{R}$, adică funcţia f este derivabilă de ordin 2 în $\mathbf{a} + t\mathbf{h}$ după direcţia $\mathbf{h}$;

(b) $\exists \varphi''(t) \in \mathbb{R}$, adică funcţia φ este derivabilă de ordin 2 în t.

În acest caz, $\frac{d^2 f}{d\mathbf{h}^2}(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) = \varphi''(t), \forall t \in V$ şi $\frac{d^2 f}{d\mathbf{h}^2}(\mathbf{a}) = \varphi''(0).$

$\bigcirc$**Teorema 12.2.2**. **(de egalitate a derivatelor de ordin 2 după perechi ordonate de direcţii)** Fie $(\mathbf{h},\mathbf{s}) \in \left(\mathbb{R}^n \setminus \{\theta_{\mathbb{R}^n}\}\right)^2$ o pereche ordonată de direcţii distincte. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ deschisă, $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ câmp scalar. Dacă există şi sunt finite $\dfrac{d^2 f}{d\mathbf{s}d\mathbf{h}}$ şi $\dfrac{d^2 f}{d\mathbf{h}d\mathbf{s}}$ pe o vecinătate $V \subset A$ a punctului $\mathbf{a} \in A$ şi funcţiile derivate parţiale mixte $\dfrac{d^2 f}{d\mathbf{s}d\mathbf{h}} : V \subset A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ şi $\dfrac{d^2 f}{d\mathbf{h}d\mathbf{s}} : V \subset A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sunt continue pe V, atunci

$$\frac{d^2 f}{d\mathbf{s}d\mathbf{h}}(\mathbf{a}) = \frac{d^2 f}{d\mathbf{h}d\mathbf{s}}(\mathbf{a}).$$

Definiţia 12.2.3. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ deschisă, $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathbf{a} \in A$. Fie $j \in \{1,...,n\}$. Se presupune că f este derivabilă parţial de ordinul 1 pe o vecinătate a punctului $\mathbf{a}$, $A_j \subseteq A$, în raport cu variabila x_j, adică $\exists \dfrac{\partial f}{\partial x_j} : A_j \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

a) Fie $i \in \{1,...,n\}$. Funcţia f *are derivată parţială de ordinul* 2 *în punctul* $\mathbf{a}$ *în raport cu perechea ordonată de variabile* (x_j, x_i) dacă

$$\boxed{\exists \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(\mathbf{a}) \in \overline{\mathbb{R}}.}$$

b) Fie $i \in \{1,...,n\}$. Funcţia f *este derivabilă parţial de ordinul* 2 *în* $\mathbf{a}$ *în raport cu perechea ordonată de variabile* (x_j, x_i), dacă $\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\right)(\mathbf{a}) \in \mathbb{R}$. Dacă există, numărul $\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\right)(\mathbf{a}) \in \mathbb{R}$ se numeşte *derivata parţială a funcţiei f de ordinul* 2 *în* $\mathbf{a}$ *în raport cu perechea ordonată de variabile* (x_j, x_i).

Pentru $i \neq j$, $$\boxed{\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(\mathbf{a}) \underset{\text{pentru } i\neq j}{\overset{\text{se not.}}{=}} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}) \underset{\text{pentru } i\neq j}{\overset{\text{sau se not.}}{=}} f''_{x_j x_i}(\mathbf{a})} \tag{2}$$
iar dacă există, se numeşte *derivata parţială mixtă a funcţiei f de ordinul* 2 *în* $\mathbf{a}$, *în raport cu variabilele* (x_j, x_i).

Pentru $i = j$, $$\boxed{\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(\mathbf{a}) \underset{\text{pentru } i=j}{\overset{\text{se not.}}{=}} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(\mathbf{a}) \underset{\text{pentru } i=j}{\overset{\text{sau se not.}}{=}} f''_{x_j^2}(\mathbf{a})} \tag{3}$$
iar dacă există, se numeşte *derivata parţială simplă a funcţiei f de ordinul* 2 *în* $\mathbf{a}$, *în raport cu variabila* x_j.

c) Fie $i \in \{1,...,n\}$. Funcţia f este *derivabilă parţial de ordinul* 2 *pe mulţimea deschisă A în raport cu variabilele* (x_j, x_i), dacă este derivabilă parţial de ordinul 2 în $\forall \mathbf{a} \in A$ în raport cu perechea ordonată de variabile (x_j, x_i).

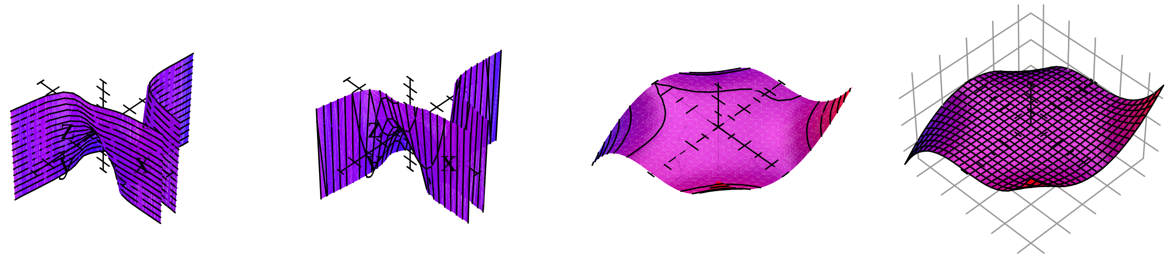
d) Funcţia f este *de clasă* $\mathcal{C}^2$ *pe mulţimea deschisă* A şi se notează $f \in \mathcal{C}^2(A;\mathbb{R})$ dacă este derivabilă parţial de ordinul 2 pe A în raport cu toate perechile de variabilele (x_j, x_i), $j \in \{1,...,n\}$, $i \in \{1,...,n\}$ şi funcţiile derivate parţiale de ordinul 2 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ şi $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sunt continue pe A, $\forall j \in \{1,...,n\}, \forall i \in \{1,...,n\}$.

Există n^2 derivate parţiale de ordin 2.

Interpretare geometrică. Se determină derivatele parţiale de ordinul întâi şi al doilea pentru

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = x^3 + x^2 y^3 - 2y^2$.

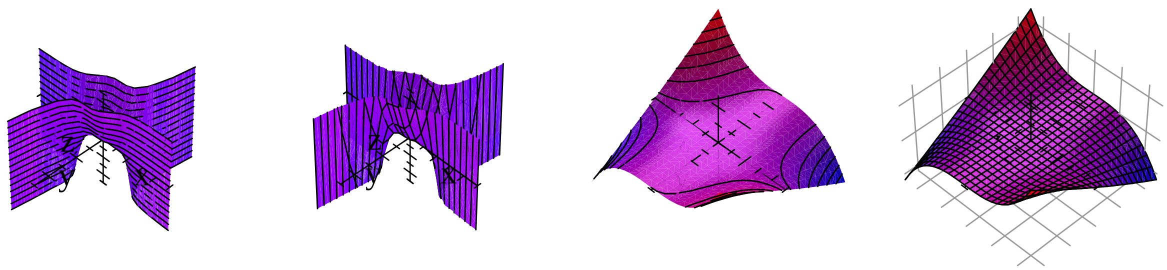
Graficul lui f are reprezentarea:



Se determină funcţiile derivate parţiale de ordinul 1.

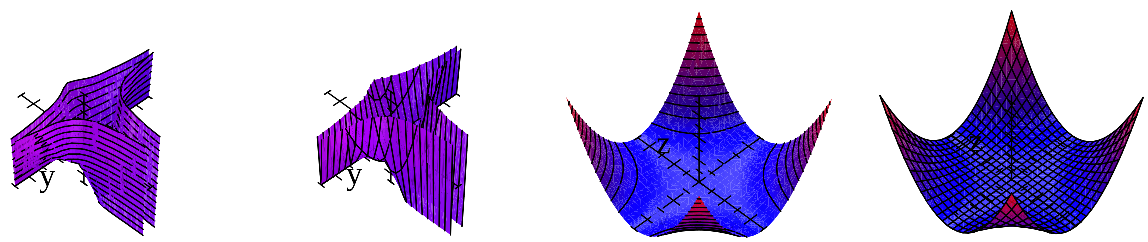
$\exists \dfrac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^3 + x^2y^3 - 2y^2\right) \underset{\text{de derivare}}{\overset{x \text{ este variabilă}}{=}} 3x^2 + 2xy^3.$

Graficul lui $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ are reprezentarea:



$\exists \dfrac{\partial f}{\partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(x^3 + x^2y^3 - 2y^2\right) \underset{\text{de derivare}}{\overset{y \text{ este variabilă}}{=}} 3x^2y^2 - 4y.$

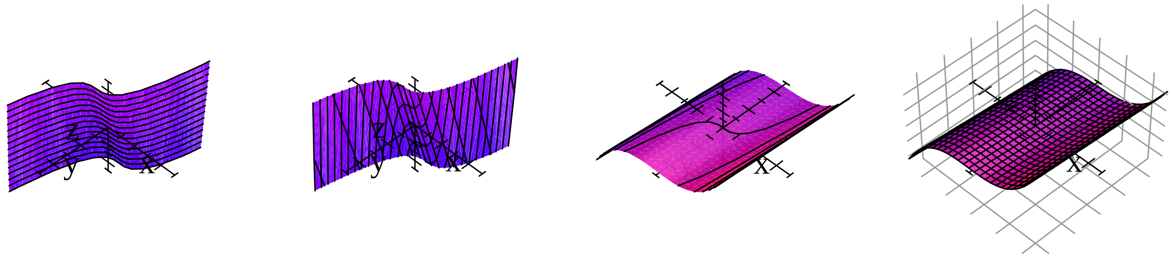
Graficul lui $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ are reprezentarea:



Se determină funcţiile derivate parţiale de ordinul al 2-lea simple:

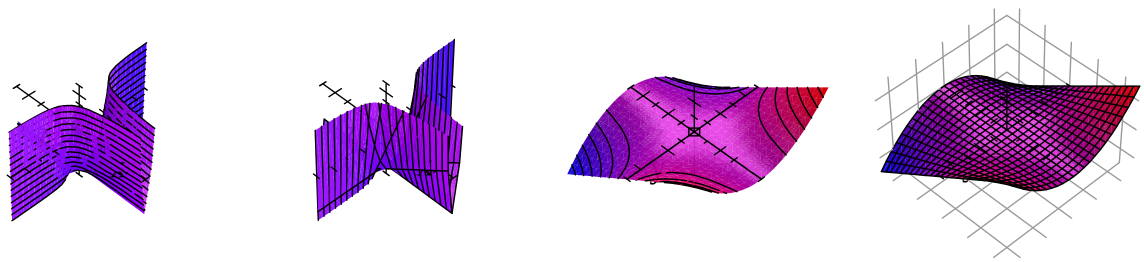
$\exists \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(3x^2 + 2xy^3\right) = 6x + 2y^3.$

Graficul lui $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ are reprezentarea:



$\exists \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(3x^2y^2 - 4y\right) = 6x^2y - 4.$

Graficul lui $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ are reprezentarea:

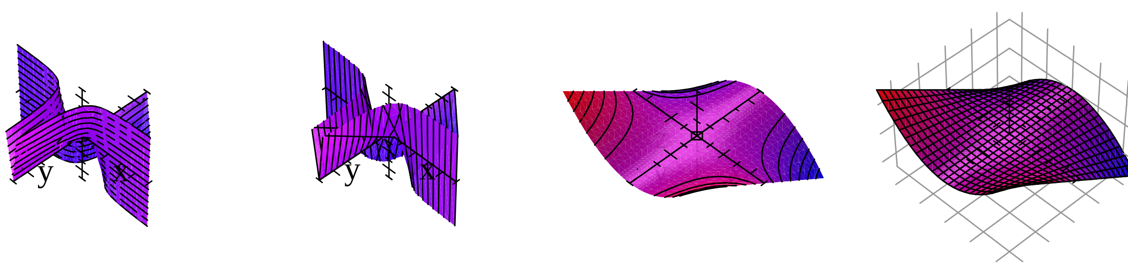


Se determină funcţiile derivate parţiale de ordinul al 2-lea mixte:

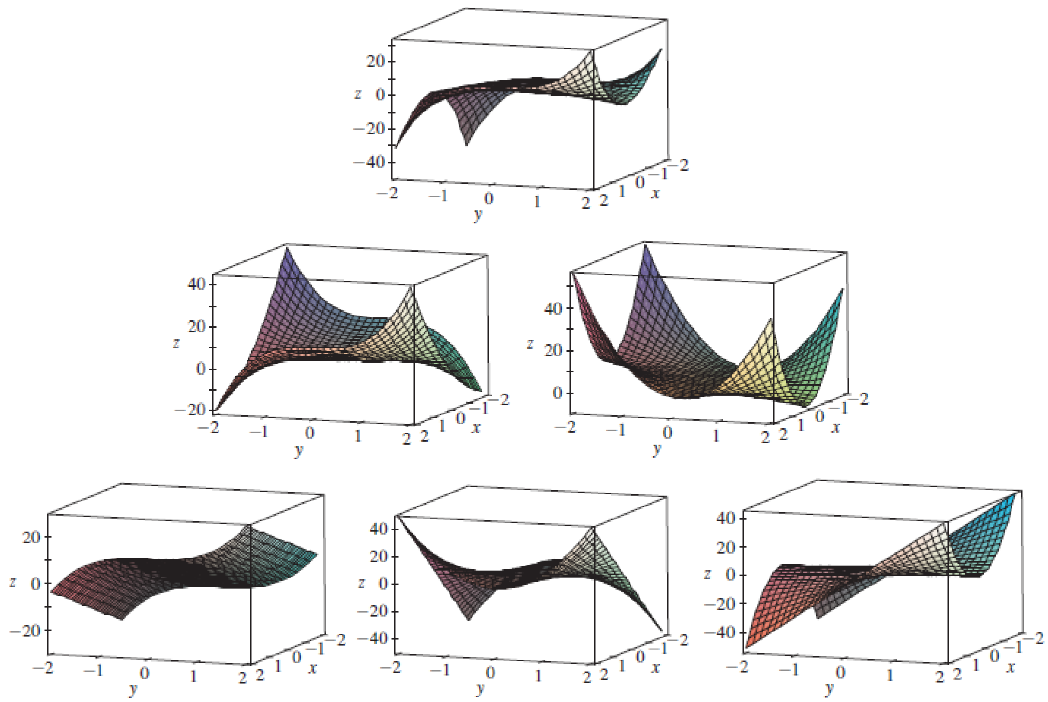
$\exists \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(3x^2y^2 - 4y\right) = 6xy^2.$

$\exists \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(3x^2 + 2xy^3\right) = 6xy^2.$

Graficul lui $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ este:



În figura următoare, pe prima linie apare graficul f, pe a doua graficele $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ şi $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, pe a treia graficele $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, toate pentru $(x,y) \in [-2,2] \times [-2,2]$. Se observă că aceste grafice urmează interpretarea conform cu care $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ şi $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ într-un punct reprezintă pantele tangentelor la curbele C_1, C_2 de pe graficul lui f (A se vedea Cursul anterior). Mai mult, graficul lui f descreşte când punctul (x,y) se mişcă de la $(0,-2)$ în direcţia x-pozitiv. Aceasta se reflectă în valorile negative ale $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ pentru aceste puncte. La fel se observă şi când se compară graficele $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ şi $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ cu cel al lui $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.



Definiţia 12.2.4. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ deschisă, $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathbf{a} \in A$. Se presupune că f este derivabilă parţial de ordinul $k-1$ pe o vecinătate a punctului $\mathbf{a}$, $V \subseteq A$, în raport cu toate variabilele $x_j, j \in \{1, ..., n\}$.

a) Se numesc *derivate parţiale de ordinul* k *ale* f *în punctul* $\mathbf{a}$, derivatele parţiale de ordin 1 ale derivatelor parţiale de ordin $k-1$ ale f în punctul $\mathbf{a}$, dacă acestea există.

b) Funcţia f este *de clasă* $\mathcal{C}^k$ *pe mulţimea deschisă* A (şi se not. $f \in \mathcal{C}^k(A; \mathbb{R})$) dacă este derivabilă parţial de ordinul k pe A în raport cu toate k-uplele de variabile, şi funcţiile derivate parţiale de ordinul k sunt continue pe A.

b) Funcţia f este *de clasă* $\mathcal{C}^\infty$ *pe mulţimea deschisă* A (şi se not. $f \in \mathcal{C}^\infty(A; \mathbb{R})$) dacă este derivabilă parţial de ordinul k pe A în raport cu toate k-uplele de variabile, $\forall k \in \mathbb{N}^*$.

Observaţia 12.2.1. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ mulţime nevidă şi deschisă. Atunci

$$... \subset \mathcal{C}^k(A; \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^{k-1}(A; \mathbb{R}) \subset ... \subset \mathcal{C}^2(A; \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^1(A; \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^0(A; \mathbb{R}); \mathcal{C}^\infty(A; \mathbb{R}) = \bigcap_{\widetilde{k}=0}^{\infty} \mathcal{C}^{\widetilde{k}}(A; \mathbb{R}).$$

Definiţia 12.2.5. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ deschisă, $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

a) Fie $\mathbf{a} \in A$. Se presupune că f este derivabilă parţial de ordinul 2 în $\mathbf{a}$, simplu în raport cu variabilele $x_j, \forall j \in \{1, ..., n\}$, adică $\exists \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(\mathbf{a}) \in \mathbb{R}, \forall j \in \{1, ..., n\}$. Se numeşte *laplaceanul funcţiei* f *în punctul* $\mathbf{a}$ numărul real

$$\boxed{(\Delta f)(\mathbf{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{a}) + ... + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\mathbf{a}).}$$

b) Se presupune că f este derivabilă parţial de ordinul 2 pe $A_{jj} \subseteq A$, simplu în raport cu variabilele

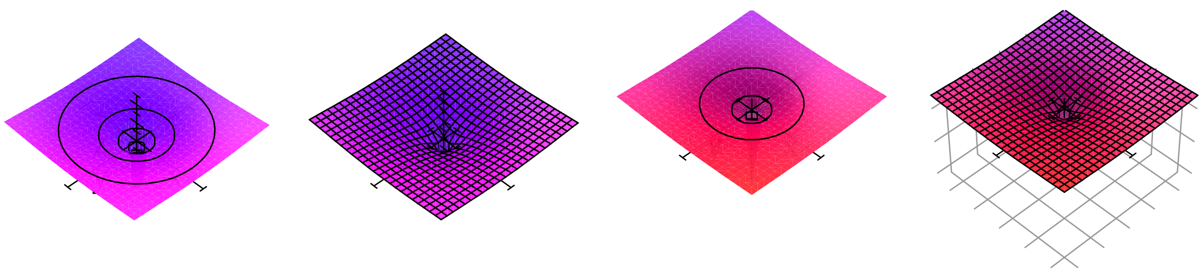
$x_j, \forall j \in \{1, ..., n\}$, adică $\exists \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} : A_{jj} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Se numeşte *laplaceanul funcţiei* f *pe* $A_{11} \cap ... \cap A_{nn}$ funcţia

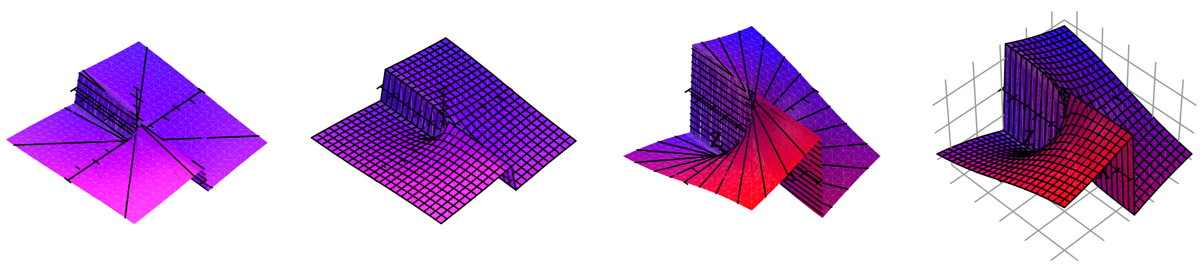
$$\Delta f : A_{11} \cap ... \cap A_{nn} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \Delta f(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{x}) + ... + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\mathbf{x}).$$

c) Funcţia f este *armonică* pe mulţimea deschisă A dacă $\exists \Delta f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ şi

$$\Delta f(\mathbf{x}) = 0, \forall \mathbf{x} \in A, \text{ adică } \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{x}) + ... + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\mathbf{x}) = 0, \forall \mathbf{x} \in A.$$

Exemplul 12.2.1. Să se determine laplaceanul următoarelor funcţii
a) $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$;**b)** $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$;





Rezolvare. a) $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}; D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Se alege $A = D$-deschisă.

$\exists \dfrac{\partial f}{\partial x} : A_1 \subseteq A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\ln \sqrt{x^2 + y^2}\right) \underset{\text{de derivare}}{\overset{x \text{ este variabilă}}{=}} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{(2x + 0)}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{x^2 + y^2}; A_1 = A.$$

$\exists \dfrac{\partial f}{\partial y} : A_2 \subseteq A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\ln \sqrt{x^2 + y^2}\right) \underset{\text{de derivare}}{\overset{y \text{ este variabilă}}{=}} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{(0 + 2y)}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{x^2 + y^2}; A_2 = A.$$

$$\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} : A_{11} \subseteq A_1 \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) =$$

$$\underset{\text{de derivare}}{\overset{x \text{ este variabilă}}{=}} \frac{1 \cdot (x^2 + y^2) - x \cdot (2x + 0)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}; A_{11} = A_1.$$

$$\exists \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} : A_{22} \subseteq A_2 \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right) =$$

$$\underset{\text{de derivare}}{\overset{y \text{ este variabilă}}{=}} \frac{1 \cdot (x^2 + y^2) - y \cdot (2y + 0)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}; A_{22} = A_2.$$

$$\boxed{\Delta f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0, \forall (x,y) \in A$$

$\Rightarrow f$ este funcţie armonică pe A.

b) $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}; D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \neq 0\right\}$. Se alege $A = D$-deschisă.

$$\exists \frac{\partial f}{\partial x} : A_1 \subseteq A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right) \underset{\text{de derivare}}{\overset{x \text{ este variabilă}}{=}} \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{-y}{x^2} = \frac{-y}{x^2+y^2}; A_1 = A.$$

$$\exists \frac{\partial f}{\partial y} : A_2 \subseteq A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right) \underset{\text{de derivare}}{\overset{y \text{ este variabilă}}{=}} \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}; A_2 = A.$$

$$\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} : A_{11} \subseteq A_1 \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) =$$

$$\underset{\text{de derivare}}{\overset{x \text{ este variabilă}}{=}} \frac{0 \cdot \left(x^2+y^2\right) - (-y)\cdot(2x+0)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}; A_{11} = A_1.$$

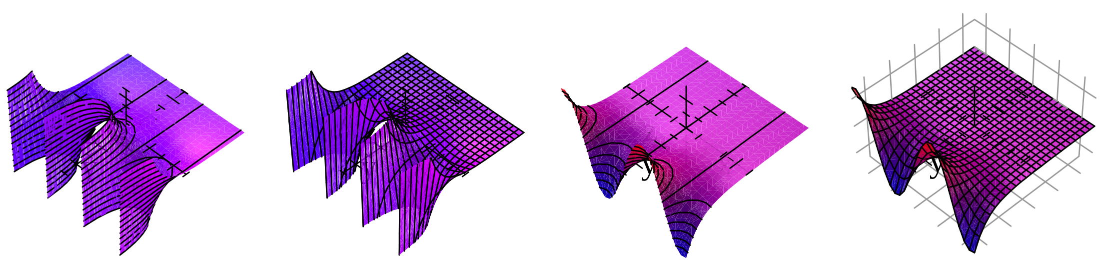
$$\exists \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} : A_{22} \subseteq A_2 \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) =$$

$$\underset{\text{de derivare}}{\overset{y \text{ este variabilă}}{=}} \frac{0 \cdot \left(x^2+y^2\right) - x\cdot(2y+0)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}; A_{22} = A_2.$$

$$\boxed{\Delta f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} + \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} = 0, \forall (x,y) \in A.$$

$\Rightarrow f$ este funcţie armonică pe A.

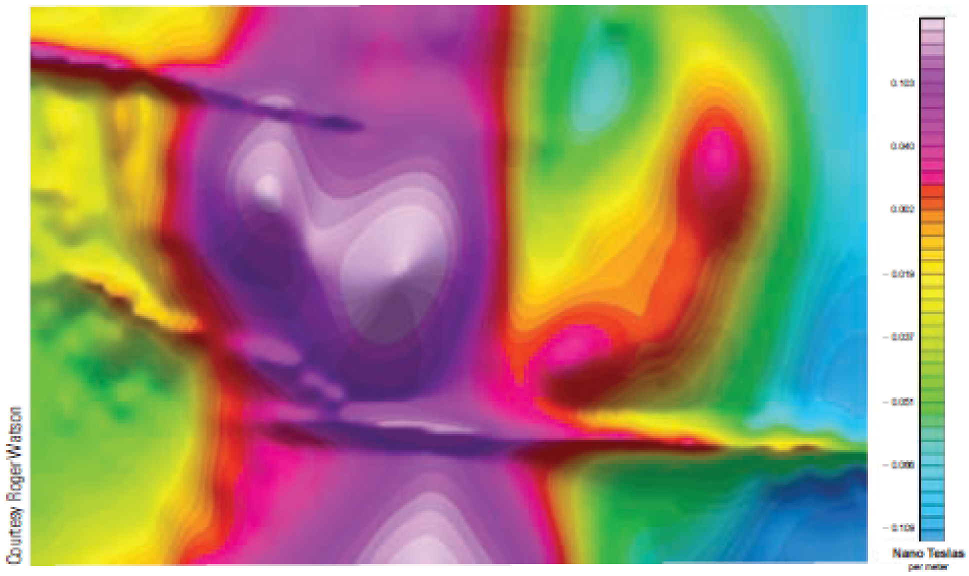
c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = e^x \cos y$;**d)** $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = e^x \sin y-$funcţii armonice pe A.



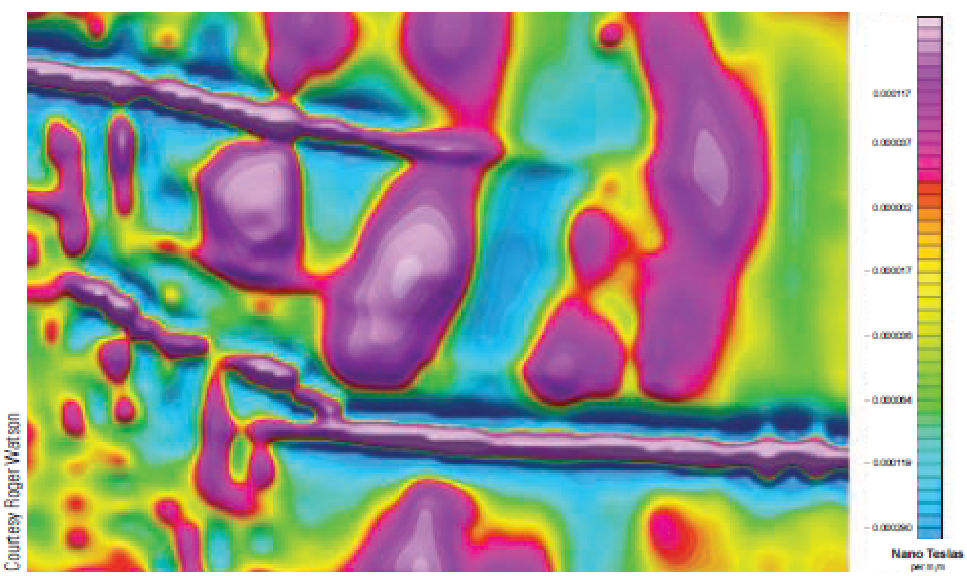
<u>**Interpretări fizice.**</u> Derivatele parţiale apar în ecuaţii cu derivate parţiale ce exprimă anumite legi fizice.

a) Ecuaţia $\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0, \forall (x,y) \in D}$ este numită *ecuaţia Laplace* (Pierre Laplace, 1749 – 1827). Soluţiile f ale ecuaţiei, numite funcţii armonice, joacă un rol important în *probleme de conducţie termică, de curgere a fluidului, de potenţial electric.*

b) Ecuaţia $\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) = 0, \forall (x,y,z) \in D}$ apare în geofizică. Dacă $f(x,y,z)$ reprezintă *intensitatea câmpului magnetic* în poziţia (x,y,z) atunci f satisface ecuaţia. Intensitatea câmpului magnetic indică distribuţia de minerale bogate în fier din diferite tipuri de roci. Se pot întocmi hărţi ale curbelor de nivel ale funcţiei f, precum cea de mai jos, înregistrată de magnetometrul dintr-un avion ce zbura la $200m$ altitudine deasupra Pământului. De menţionat: curbele de nivel ale f sunt curbe de ecuaţii $f(x,y,z) = k$, unde k este o constantă din imaginea funcţiei.



Valorile funcţiilor $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ şi $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ sunt măsurabile din harta lui f şi atunci valorile funcţiei $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ pot fi calculate din ecuaţia Laplace şi poate fi întocmită harta de mai jos, pentru $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.

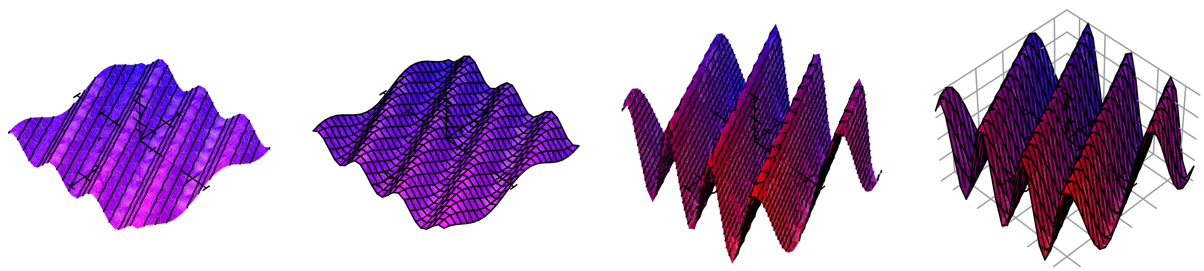


c) Ecuaţia

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)}$$

este numită *ecuaţia undei*, ce are ca soluţii funcţii u. Ecuaţia descrie mişcarea unei forme de undă precum un val de ocean, o undă de sunet, o undă de lumină, o undă de-a lungul unei corzi vibrante. De exemplu, dacă $u(x,t)$ reprezintă deplasarea unei corzi vibrante de vioară la timpul t şi la distanţa x de unul dintre capetele corzii, atunci $u(x,t)$ satisface ecuaţia undei. Constanta a depinde de densitatea corzii şi de tensiunea în coardă.

Funcţia $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, u(x,t) = \sin(x - at)$ satisface ecuaţia undelor.



Teorema 12.2.3. (**Criteriul Schwarz-Clairaut de egalitate a derivatelor parţiale mixte de ordin 2**). Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ deschisă, $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ şi $\mathbf{a} \in A$. Fie $i \in \{1, ..., n\}$ şi $j \in \{1, ..., n\}$. Dacă există şi sunt finite derivatele parţiale de ordinul 2 mixte $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ şi $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ pe o vecinătate $V \subset A$ a punctului $\mathbf{a}$ şi dacă funcţiile derivate parţiale

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} : V \subset A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ şi } \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} : V \subset A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

sunt continue în $\mathbf{a}$, atunci

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a}). \tag{3}$$

○**Corolar 12.2.1.** (**generalizarea Criteriului Schwarz de egalitate a derivatelor parţiale mixte de ordin 2**). Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ deschisă, $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ şi $\mathbf{a} \in A$. Dacă f admite derivate parţiale mixte de ordin k finite pe o vecinătate V a punctului $\mathbf{a}$ şi aceste funcţii sunt continue în $\mathbf{a}$, atunci ele sunt egale două câte două în $\mathbf{a}$, adică nu depind de ordinea de derivare.

Teorema 12.2.4. (**Criteriul Young de egalitate a derivatelor parţiale mixte de ordin 2**). Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ deschisă, $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ şi $\mathbf{a} \in A$. Dacă f este funcţie derivabilă parţial de ordinul 1 pe o vecinătate $V \subset A$ a punctului $\mathbf{a}$ în raport cu toate variabilele $x_j, j \in \{1, ..., n\}$ şi dacă toate funcţiile derivate parţiale de ordinul 1, $\dfrac{\partial f}{\partial x_j} : V \subset A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, sunt diferenţiabile în $\mathbf{a}, \forall j \in \{1, ..., n\}$, atunci există toate cele n^2 derivatele parţiale de ordinul 2 în $\mathbf{a}$ şi derivatele parţiale mixte sunt egale două câte două, adică

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a}), \forall i \in \{1, ..., n\}, \forall j \in \{1, ..., n\}.$$

○**Teorema 12.2.5.** (**de legătură între derivata de ordin 2 după o direcţie şi derivatele parţiale de ordin 2**) Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ deschisă, $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ şi $\mathbf{a} \in A$. Dacă $f \in C^2(A; \mathbb{R})$ atunci, pentru orice pereche ordonată de direcţii $(\mathbf{h}, \mathbf{s}) \in (\mathbb{R}^n \setminus \{\theta_{\mathbb{R}^n}\})^2, \mathbf{h} = (h_1, ..., h_n)$ şi $\mathbf{s} = (s_1, ..., s_n)$, există $\dfrac{d^2 f}{d\mathbf{s} d\mathbf{h}}(\mathbf{a}) \in \mathbb{R}$ şi $\dfrac{d^2 f}{d\mathbf{h} d\mathbf{s}}(\mathbf{a}) \in \mathbb{R}$ şi

$$\frac{d^2 f}{d\mathbf{s} d\mathbf{h}}(\mathbf{a}) = \frac{d^2 f}{d\mathbf{h} d\mathbf{s}}(\mathbf{a}) =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{a}) h_1 s_1 + ... + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\mathbf{a}) h_1 s_n +$$

$$+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\mathbf{a}) h_2 s_1 + ... + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\mathbf{a}) h_2 s_n +$$
$$+ \qquad ...+$$
$$+\frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\mathbf{a}) h_n s_1 + ... + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\mathbf{a}) h_n s_n. \tag{4}$$

Definiţia 12.2.6. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ deschisă, $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
a) Fie $\mathbf{a} \in A$. Se presupune că f este derivabilă parţial de ordinul 2 în $\mathbf{a}$, în raport cu toate perechile de variabile $(x_j, x_i), \forall i \in \{1, ..., n\}, \forall j \in \{1, ..., n\}$. Se numeşte *hessiana funcţiei f în punctul* $\mathbf{a}$ matricea

$$\boxed{\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{a}) & ... & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\mathbf{a}) \\ ... & ... & ... \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\mathbf{a}) & ... & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\mathbf{a}) \end{pmatrix} \overset{\text{se not.}}{=} H_f(\mathbf{a})} \tag{5}$$

b) Se presupune că f este derivabilă parţial de ordinul 2 pe mulţimea deschisă A, în raport cu toate perechile de variabile $(x_j, x_i), \forall i \in \{1, ..., n\}, \forall j \in \{1, ..., n\}$. Se numeşte *hessiana funcţiei f pe A* funcţia

$$H_f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), H_f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{x}) & ... & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\mathbf{x}) \\ ... & ... & ... \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\mathbf{x}) & ... & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

Exemplul 12.2.2. Să se compare derivatele parţiale mixte de ordinul 2, prin calcul direct, cât şi utilizând Criteriul Schwarz pentru

$$f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

Pentru funcţia anterioară, să se determine hessiana.
Rezolvare. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \neq 0\}$. Se alege $A = D$- deschisă. S-au determinat, la exemplul 12.2.1, b), funcţiile derivate parţiale de ordinul 1 şi 2, simple.
•Se determină şi cele mixte.

$$\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} : A_{21} \subseteq A_2 \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) =$$
$$= \frac{1(x^2 + y^2) - x(2x + 0)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}; A_{21} = A_2.$$
$$\exists \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} : A_{12} \subseteq A_1 \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2 + y^2}\right) =$$
$$= \frac{-1(x^2 + y^2) - (-y)(0 + 2y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}; A_{12} = A_1.$$

•Prin calcul direct se observă că

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y), \forall (x, y) \in A.$$

•Pe de altă parte, $\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ şi $\exists \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ şi aceste funcţii sunt continue în $\forall (x, y) \in A$. Atunci, şi conform Criteriului Schwarz,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

$\exists H_f : A_{11} \cap A_{22} \cap A_{21} \cap A_{12} = A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$\boxed{H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} & \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} & \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}.$$

Exemplul 12.2.3. Să se compare derivatele parţiale mixte de ordinul 2, prin calcul direct, pentru $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x,y,z) = \sin(2x - y + 8z)$. Se poate utiliza Criteriul Schwarz?
Pentru funcţia anterioară, să se determine hessiana.
Rezolvare.a) *Continuitatea* pe $\mathbb{R}^3$ *nu este condiţie necesară pentru existenţa derivatelor parţiale.*
Etapa 1. Se studiază dacă f este derivabilă parţial de ordinul 1 pe $\mathbb{R}^3$, în raport cu x, y, respectiv z. Pe $\mathbb{R}^3$-deschisă, se va deriva parţial f folosind regulile de derivare parţială.

$\exists \frac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}(\sin(2x-y+8z)) \overset{x \text{ este variabilă}}{\underset{\text{de derivare}}{=}} 2\cos(2x-y+8z).$

$\exists \frac{\partial f}{\partial y} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y}(\sin(2x-y+8z)) \overset{y \text{ este variabilă}}{\underset{\text{de derivare}}{=}} -\cos(2x-y+8z).$

$\exists \frac{\partial f}{\partial z} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial z}(\sin(2x-y+8z)) \overset{y \text{ este variabilă}}{\underset{\text{de derivare}}{=}} 8\cos(2x-y+8z).$

Etapa 2. Se studiază dacă f este derivabilă parţial de ordinul 2 pe $\mathbb{R}^3$, mixt în raport cu x, y, z. Pe $\mathbb{R}^3$-deschisă, se va deriva parţial $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ folosind regulile de derivare parţială.

$\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\right) = \frac{\partial}{\partial x}(-\cos(2x-y+8z)) = 2\sin(2x-y+8z).$

$\exists \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\right) = \frac{\partial}{\partial y}(2\cos(2x-y+8z)) = 2\sin(2x-y+8z).$

$\exists \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\right) = \frac{\partial}{\partial y}(8\cos(2x-y+8z)) = 8\sin(2x-y+8z).$

$\exists \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\right) = \frac{\partial}{\partial z}(-\cos(2x-y+8z)) = 8\sin(2x-y+8z).$

$\exists \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\right) = \frac{\partial}{\partial z}(2\cos(2x-y+8z)) = -16\sin(2x-y+8z).$

$\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\right) = \frac{\partial}{\partial x}(8\cos(2x-y+8z)) = -16\sin(2x-y+8z).$

•Prin calcul direct se observă că

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z), \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x,y,z), \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z), \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

•Pe de altă parte, $\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ şi $\exists \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ şi aceste funcţii sunt continue în $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Atunci, şi conform Criteriului Schwarz,

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z), \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Analog celelalte.

•Se determină derivatele parţiale de ordinul 2 simple

$\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\right) = \frac{\partial}{\partial x}(2\cos(2x-y+8z)) = -4\sin(2x-y+8z).$

$\exists \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) \overset{\text{def}}{=} \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\right) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(-\cos(2x-y+8z)\right) = -\sin(2x-y+8z)$.

$\exists \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) \overset{\text{def}}{=} \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\right) = \dfrac{\partial}{\partial z}\left(8\cos(2x-y+8z)\right) = -64\sin(2x-y+8z)$.

Deci $\exists H_f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

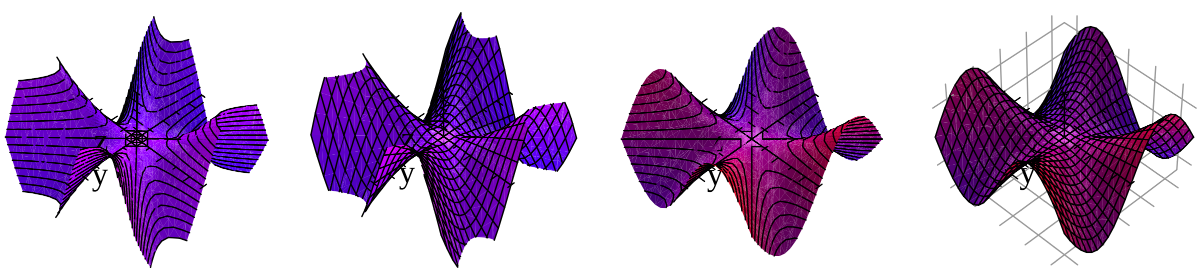
$$\boxed{H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y,z) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x,y,z) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) \end{pmatrix}} =$$

$$= \begin{pmatrix} -4\sin(2x-y+8z) & 2\sin(2x-y+8z) & -16\sin(2x-y+8z) \\ 2\sin(2x-y+8z) & -\sin(2x-y+8z) & 8\sin(2x-y+8z) \\ -16\sin(2x-y+8z) & 8\sin(2x-y+8z) & -64\sin(2x-y+8z) \end{pmatrix}$$

Exemplul 12.2.4. Următorul exemplu arată că derivatele parţiale mixte nu sunt, în general, egale. Să se compare derivatele parţiale mixte de ordinul 2, prin calcul direct, pentru

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Pentru funcţia anterioară, să se determine hessiana.



Rezolvare. $\mathbb{R}^2 = \left(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\right) \cup \{(0,0)\}$.

Continuitatea pe $\mathbb{R}^2$ *nu este condiţie necesară pentru existenţa derivatelor parţiale.*

Etapa 1. Se studiază dacă f este derivabilă parţial de ordinul 1 pe $\mathbb{R}^2$, în raport cu x, respectiv y.

••pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, care e mulţime deschisă, se va deriva parţial f folosind regulile de derivare parţială.

••în $\mathbf{a} = (0,0) \in \left(\mathbb{R}^2\right) \cap \left(\mathbb{R}^2\right)'$ se va folosi definiţia derivatei parţiale în raport cu x, respectiv cu y.

$\exists \dfrac{\partial f}{\partial x} : A_1 \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) = y\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy\dfrac{(2x-0)\left(x^2+y^2\right) - \left(x^2-y^2\right)(2x+0)}{\left(x^2+y^2\right)^2} =$

$$= y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \frac{4x^2y^3}{\left(x^2+y^2\right)^2}, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \overset{\text{modul 1}}{=} \frac{df}{d\mathbf{e}_1}(0,0) = \lim_{t\to 0, t\in V} \frac{1}{t}\left(f(t,0) - f(0,0)\right) = \lim_{t\to 0, t\in V} \frac{1}{t}\left(t \cdot 0 \cdot \frac{t^2-0^2}{t^2+0^2} - 0\right) =$$

$$= \lim_{t\to 0, t\in V} 0 = 0 \Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0.$$

$$\exists \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \overset{\text{modul 2}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x \cdot 0 \dfrac{x^2-0^2}{x^2+0^2} - 0}{x-0} = 0.$$

Se observă că $A_1 = \mathbb{R}^2$. Deci:

$$\exists \frac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{\left(x^2+y^2\right)^2}, & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

$$\exists \frac{\partial f}{\partial y} : A_2 \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) = x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy\frac{(0-2y)\left(x^2+y^2\right) - \left(x^2-y^2\right)(0+2y)}{\left(x^2+y^2\right)^2} =$$

$$= x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy\frac{-4x^2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \overset{\text{modul 1}}{=} \frac{df}{d\mathbf{e}_2}(0,0) = \lim_{t\to 0, t\in V} \frac{1}{t}\left(f(0,t) - f(0,0)\right) = \lim_{t\to 0, t\in V} \frac{1}{t}\left(0\cdot t\frac{0^2-t^2}{0^2+t^2} - 0\right) =$$

$$== \lim_{t\to 0, t\in V} 0 = 0 \Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

$$\exists \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \overset{\text{modul 2}}{=} \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y-0} = \lim_{x\to 0} \frac{0\cdot y\dfrac{0^2-y^2}{0^2+y^2} - 0}{y-0} = 0.$$

Se observă că $A_2 = \mathbb{R}^2$. Deci

$$\exists \frac{\partial f}{\partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{\left(x^2+y^2\right)^2}, & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

<u>Etapa 2.</u> Se studiază dacă f este derivabilă parţial de ordinul 2 pe $\mathbb{R}^2$, mixt în raport cu x, y.

••pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, care e mulţime deschisă, se vor deriva parţial $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ folosind regulile de derivare parţială.

••în $\mathbf{a} = (0,0) \in \left(\mathbb{R}^2\right) \cap \left(\mathbb{R}^2\right)'$ se va folosi definiţia derivatei parţiale în raport cu x, respectiv cu y a funcţiilor $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$.

$$\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} : A_{21} \subseteq A_2 \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - \frac{4x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right)\right) =$$

$$= \left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - \frac{4x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right) + x\left(\frac{4xy^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} - \frac{8xy^2\left(x^2+y^2\right) - 4x^2y^2\cdot 2\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^3}\right) =$$

$$= \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \frac{-4x^2y^2 + 4x^2y^2 - 8x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} + \frac{16x^4y^2}{\left(x^2+y^2\right)^3}, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \overset{\text{modul 1}}{=} \frac{\partial}{\partial x}\Bigg(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}}_{f_2}\Bigg)(0,0) = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial x}(0,0) = \frac{d\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{d\mathbf{e}_1}(0,0) =$$

$$= \lim_{t\to 0, t\in V} \frac{1}{t}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(t,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) = \lim_{t\to 0, t\in V} \frac{1}{t}\left(t\left(\frac{t^2-0^2}{t^2+0^2} - \frac{4t^2\cdot 0^2}{\left(t^2+0^2\right)^2}\right) - 0\right)$$

$$= \lim_{t\to 0, t\in V} 1 = 1 \Rightarrow \exists \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1.$$

$$\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \overset{\text{modul 2}}{=} \frac{\partial}{\partial x}\Bigg(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}}_{f_2}\Bigg)(0,0) = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x-0} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x\left(\dfrac{x^2-0^2}{x^2+0^2} - \dfrac{4x^2 0^2}{\left(x^2+0^2\right)^2}\right) - 0}{x-0} = 1; A_{21} = A_2. \text{ Deci}$$

$$\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^6 + 9x^4y^2 - 9x^2y^4 - y^6}{\left(x^2+y^2\right)^3}, & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\exists \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} : A_{12} \subseteq A_1 \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(y\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \frac{4x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right)\right) =$$

$$= \left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \frac{4x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right) + y\left(\frac{-4x^2y}{\left(x^2+y^2\right)^2} + \frac{8x^2y\left(x^2+y^2\right) - 4x^2y^2\cdot 2\cdot 2y}{\left(x^2+y^2\right)^3}\right) =$$

$$= \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \frac{4x^2y^2 - 4x^2y^2 + 8x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} + \frac{-16x^2y^3}{\left(x^2+y^2\right)^3}, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \overset{\text{modul 1}}{=} \frac{\partial}{\partial y}\Bigg(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}}_{f_1}\Bigg)(0,0) = \frac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial y}(0,0) = \frac{d\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)}{d\mathbf{e}_2}(0,0) =$$

$$= \lim_{t\to 0, t\in V} \frac{1}{t}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,t) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right) = \lim_{t\to 0, t\in V} \frac{1}{t}\left(t\left(\frac{0^2-t^2}{0^2+t^2} + \frac{4\cdot 0^2t^2}{\left(0^2+t^2\right)^2}\right) - 0\right) =$$

$$= \lim_{t\to 0, t\in V} (-1) = -1 \Rightarrow \exists \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1.$$

$$\exists \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \overset{\text{modul 2}}{=} \frac{\partial}{\partial y}\Bigg(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}}_{f_1}\Bigg)(0,0) = \frac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial y}(0,0) == \lim_{y\to 0} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y-0} =$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{y\left(\dfrac{0^2-y^2}{0^2+y^2} + \dfrac{4\cdot 0^2y^2}{\left(0^2+y^2\right)^2}\right) - 0}{y-0} = -1. \ A_{12} = A_1. \text{ Deci}$$

$$\exists \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^6 + 9x^4y^2 - 9x^2y^4 - y^6}{\left(x^2+y^2\right)^3}, & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ -1, & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

•Prin calcul direct, se observă că

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \frac{8x^4y^2 - 8x^2y^3}{\left(x^2+y^2\right)^3} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Dar $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1 \neq -1 = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

•Se determină derivatele parţiale de ordinul 2 simple

$$\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} : A_{11} \subseteq A_1 \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(y\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \frac{4x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right)\right) =$$

$$= y\left(\frac{4xy^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} + \frac{8xy^2\left(x^2+y^2\right) - 4x^2y^2\cdot 2\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^3}\right) =$$

$$= \frac{4xy^3 + 8xy^3}{\left(x^2+y^2\right)^2} - \frac{16x^3y^3}{\left(x^2+y^2\right)^3}, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) \overset{\text{modul 1}}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}}_{f_1}\right)(0,0) = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial x}(0,0) = \frac{d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{d\mathbf{e}_1}(0,0) =$$

$$= \lim_{t\to 0, t\in V} \frac{1}{t}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(t,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right) = \lim_{t\to 0, t\in V} \frac{1}{t}\left(0\left(\frac{t^2-0^2}{t^2+0^2} + \frac{4t^2 0^2}{(t^2+0^2)^2}\right) - 0\right) =$$

$$= \lim_{t\to 0, t\in V}(0) = 0 \Rightarrow \exists \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0.$$

$$\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) \overset{\text{modul 2}}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}}_{f_1}\right)(0,0) = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{x-0} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{0\left(\frac{x^2-0^2}{x^2+0^2} + \frac{4\cdot x^2 0^2}{(x^2+0^2)^2}\right) - 0}{x-0} = 0.\ A_{11} = A_1 \text{ Deci}$$

$$\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{12xy^3}{(x^2+y^2)^2} - \dfrac{16x^3y^3}{(x^2+y^2)^3}, & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

$$\exists \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} : A_{22} \subseteq A_2 \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(x\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right)\right) =$$

$$= x\left(\frac{-4x^2y}{(x^2+y^2)^2} - \frac{8x^2y\left(x^2+y^2\right) - 4x^2y^2\cdot 2\cdot 2y}{(x^2+y^2)^3}\right) =$$

$$= \frac{-4x^3y - 8x^3y}{(x^2+y^2)^2} + \frac{16x^3y^3}{(x^2+y^2)^3}, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) \overset{\text{modul 1}}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}}_{f_2}\right)(0,0) = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial y}(0,0) = \frac{d\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{d\mathbf{e}_2}(0,0) =$$

$$= \lim_{t\to 0, t\in V} \frac{1}{t}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(0,t) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) = \lim_{t\to 0, t\in V} \frac{1}{t}\left(0\left(\frac{0^2-t^2}{0^2+t^2} - \frac{4\cdot 0^2 t^2}{(0^2+t^2)^2}\right) - 0\right) =$$

$$= \lim_{t\to 0, t\in V}(0) = 0 \Rightarrow \exists \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 0.$$

$$\exists \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) \overset{\text{modul 2}}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}}_{f_2}\right)(0,0) = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{y-0} =$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{0\left(\frac{0^2-y^2}{0^2+y^2} - \frac{4\cdot 0^2y^2}{(0^2+y^2)^2}\right) - 0}{y-0} = 0.\ A_{22} = A_2.\text{ Deci}$$

$$\exists \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{-12x^3y}{(x^2+y^2)^2} + \dfrac{16x^3y^3}{(x^2+y^2)^3}, & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Deci $\exists H_f : A_{11} \cap A_{22} \cap A_{21} \cap A_{12} = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\boxed{H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}}$.

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{12xy^3}{(x^2+y^2)^2} - \dfrac{16x^3y^3}{(x^2+y^2)^3} & \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \dfrac{-8x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} + \dfrac{16x^4y^2}{(x^2+y^2)^3} \\ \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \dfrac{8x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} + \dfrac{-16x^2y^3}{(x^2+y^2)^3} & \dfrac{-12x^3y}{(x^2+y^2)^2} + \dfrac{16x^3y^3}{(x^2+y^2)^3} \end{pmatrix},$$

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$;

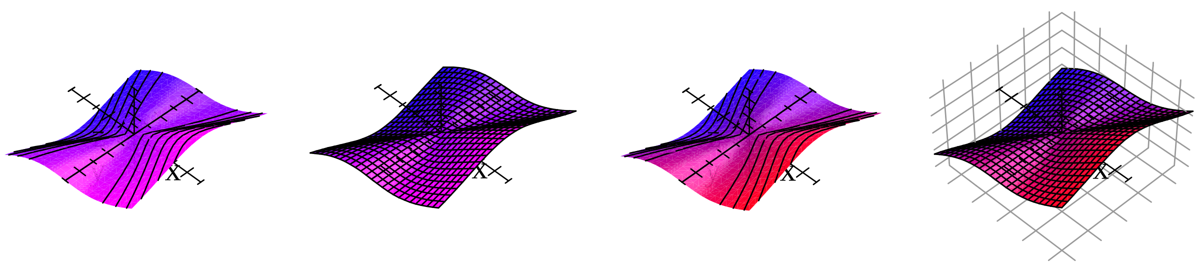
$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exemplul 12.2.5. Următorul exemplu arată că derivatele parţiale mixte nu sunt în general egale, una din ele existând, cealaltă nu.

Să se compare derivatele parţiale mixte de ordinul 2, prin calcul direct, pentru

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3}{x^2+y^2}, & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Pentru funcţia anterioară, să se determine hessiana.



Rezolvare. $\mathbb{R}^2 = \left(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\right) \cup \{(0,0)\}$.

Continuitatea pe $\mathbb{R}^2$ *nu este condiţie necesară pentru existenţa derivatelor parţiale.*

Etapa 1. Se studiază dacă f este derivabilă parţial de ordinul 1 pe $\mathbb{R}^2$, în raport cu x, respectiv y.

••pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, care este mulţime deschisă, se va deriva parţial f folosind regulile de derivare parţială.

••în $\mathbf{a} = (0,0) \in \left(\mathbb{R}^2\right) \cap \left(\mathbb{R}^2\right)'$ se va folosi definiţia derivatei parţiale în raport cu x, respectiv cu y.

$$\exists \frac{\partial f}{\partial x} : A_1 \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y^3}{x^2+y^2}\right) = \frac{-2xy^3}{(x^2+y^2)^2}, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \overset{\text{modul 1}}{=} \frac{df}{d\mathbf{e}_1}(0,0) = \lim_{t\to 0, t\in V} \frac{1}{t}\left(f(t,0) - f(0,0)\right) = \lim_{t\to 0, t\in V} \frac{1}{t}\left(\frac{0^3}{t^2+0^2} - 0\right) =$$

$$= \lim_{t\to 0, t\in V} \frac{1}{t} \cdot 0 = \lim_{t\to 0, t\in V} 0 = 0 \Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0.$$

Se observă că $A_1 = \mathbb{R}^2$. Deci

$$\exists \frac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{-2xy^3}{(x^2+y^2)^2}, & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

$$\exists \frac{\partial f}{\partial y} : A_2 \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y^3}{x^2+y^2}\right) = \frac{3y^2\left(x^2+y^2\right) - y^3 \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \overset{\text{modul 1}}{=} \frac{df}{d\mathbf{e}_2}(0,0) = \lim_{t\to 0, t\in V} \frac{1}{t}\left(f(0,t) - f(0,0)\right) = \lim_{t\to 0, t\in V} \frac{1}{t}\left(\frac{t^3}{0^2+t^2} - 0\right) =$$

$$= \lim_{t\to 0, t\in V} \frac{t^3}{t^3} = 1 \Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1.$$

Se observă că $A_2 = \mathbb{R}^2$. Deci

$$\exists \frac{\partial f}{\partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y^2+y^4}{\left(x^2+y^2\right)^2}, & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

<u>Etapa 2.</u> Se studiază dacă f este derivabilă parţial de ordinul 2 pe $\mathbb{R}^2$, mixt în raport cu x, y.

••pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, care e mulţime deschisă, se vor deriva parţial $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ folosind regulile de derivare parţială.

••în $\mathbf{a} = (0,0) \in \left(\mathbb{R}^2\right) \cap \left(\mathbb{R}^2\right)'$ se va folosi definiţia derivatei parţiale în raport cu x, respectiv cu y a funcţiilor $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$.

$$\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} : A_{21} \subseteq A_2 \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{3x^2y^2+y^4}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right) =$$

$$= \frac{6xy^2\left(x^2+y^2\right)^2 - \left(3x^2y^2+y^4\right)\cdot 2\left(x^2+y^2\right)\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^4}, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \overset{\text{modul 1}}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}}_{f_2}\right)(0,0) = \frac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial x}(0,0) = \frac{d\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)}{d\mathbf{e}_1}(0,0) =$$

$$= \lim_{t\to 0, t\in V} \frac{1}{t}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(t,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) = \lim_{t\to 0, t\in V} \frac{1}{t}\left(\frac{3t^2 0^2 + 0^4}{\left(t^2+0^2\right)^2} - 1\right) = \lim_{t\to 0, t\in V} \frac{-1}{t}.$$

Cum $\lim\limits_{t\to 0, t<0} \dfrac{-1}{t} = +\infty$ şi $\lim\limits_{t\to 0, t>0} \dfrac{-1}{t} = -\infty \Rightarrow \nexists \lim\limits_{t\to 0, t\in V} \dfrac{-1}{t}$.Deci $\nexists \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \Rightarrow A_{21} \subsetneq A_2$.

$$\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{-6x^3y^2+2xy^4}{\left(x^2+y^2\right)^3}.$$

$$\exists \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} : A_{12} \subseteq A_1 \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-2xy^3}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right) =$$

$$= \frac{-6xy^2\left(x^2+y^2\right)^2 - \left(-2xy^3\right)\cdot 2\left(x^2+y^2\right)\cdot 2y}{\left(x^2+y^2\right)^4}, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \overset{\text{modul 1}}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}}_{f_1}\right)(0,0) = \frac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial y}(0,0) = \frac{d\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)}{d\mathbf{e}_2}(0,0) =$$

$$= \lim_{t\to 0, t\in V} \frac{1}{t}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,t) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right) = \lim_{t\to 0, t\in V} \frac{1}{t}\left(\frac{-2\cdot 0\cdot t^3}{\left(0^2+t^2\right)^2} - 0\right) =$$

$$= \lim_{t\to 0, t\in V} 0 = 0 \Rightarrow \exists \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 0; A_{12} = A_1. \text{ Deci:}$$

$$\exists \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{-6x^3y^2+2xy^4}{\left(x^2+y^2\right)^3}, & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

•Prin calcul direct se observă că

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \text{ şi } \nexists \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0), \exists \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 0.$$

•Se determină derivatele parţiale de ordinul 2 simple

$$\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} : A_{11} \subseteq A_1 \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-2xy^3}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

$$= \frac{-2y^3\left(x^2+y^2\right) - \left(-2xy^3\right)\cdot 2\cdot 2x}{(x^2+y^2)^3} = \frac{6x^2y^3 - 2y^5}{(x^2+y^2)^3}, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) \overset{\text{modul 1}}{=} \frac{\partial}{\partial x}\Bigg(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}}_{f_1}\Bigg)(0,0) = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial x}(0,0) = \frac{d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{d\mathbf{e}_1}(0,0) =$$

$$= \lim_{t\to 0, t\in V} \frac{1}{t}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(t,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right) = \lim_{t\to 0, t\in V} \frac{1}{t}\left(\frac{-2t\cdot 0^3}{(t^2+0^2)^2} - 0\right) =$$

$$= \lim_{t\to 0, t\in V}(0) = 0 \Rightarrow \exists \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0; A_{11} = A_1. \text{ Deci}$$

$$\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{6x^2y^3 - 2y^5}{(x^2+y^2)^3}, & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

$$\exists \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} : A_{22} \subseteq A_2 \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{3x^2y^2+y^4}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

$$= \frac{\left(6x^2y + 4y^3\right)\left(x^2+y^2\right) - \left(3x^2y^2+y^4\right)\cdot 2\cdot 2y}{(x^2+y^2)^3} = \frac{6x^4y - 2x^2y^3}{(x^2+y^2)^3}, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) \overset{\text{modul 1}}{=} \frac{\partial}{\partial y}\Bigg(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}}_{f_2}\Bigg)(0,0) = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial y}(0,0) = \frac{d\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{d\mathbf{e}_2}(0,0) =$$

$$= \lim_{t\to 0, t\in V} \frac{1}{t}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(0,t) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) \lim_{t\to 0, t\in V} \frac{1}{t}\left(\frac{3\cdot 0^2t^2 + t^4}{(0^2+t^2)^2} - 1\right) =$$

$$= \lim_{t\to 0, t\in V}(0) = 0 \Rightarrow \exists \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 0; A_{22} = A_2. \text{ Deci}$$

$$\exists \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{6x^4y - 2x^2y^3}{(x^2+y^2)^3}, & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Atunci $\exists H_f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$,

$$\boxed{H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \dfrac{6x^2y^3 - 2y^5}{(x^2+y^2)^3} & \dfrac{-6x^3y^2 + 2xy^4}{(x^2+y^2)^3} \\ \dfrac{-6x^3y^2 + 2xy^4}{(x^2+y^2)^3} & \dfrac{6x^4y - 2x^2y^3}{(x^2+y^2)^3} \end{pmatrix}.$$

Definiţia 12.2.7. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ deschisă, $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathbf{a} \in A$.

a) Funcţia f se numeşte *de k ori diferenţiabilă în* $\mathbf{a}$ dacă este de $k-1$ ori derivabilă parţial într-o vecinătate V a punctului $\mathbf{a}$ şi toate funcţiile derivate parţiale de ordin $k-1$ ale lui f sunt diferenţiabile în $\mathbf{a}$.

b) Funcţia f se numeşte *de k ori diferenţiabilă pe mulţimea A* dacă este de k ori diferenţiabilă în $\forall \mathbf{a} \in A$.

○**Observaţia 12.2.2**. Din Criteriul Young se observă că, dacă f este de k ori diferenţiabilă în $\mathbf{a} \in A$, atunci f este de k ori derivabilă parţial în $\mathbf{a}$ şi pentru derivatele parţiale mixte de ordin $\leq k$ nu contează ordinea de derivare.

Propoziţia 12.2.1. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ deschisă, $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathbf{a} \in A$. Dacă f are derivate parţiale de ordin k şi acestea sunt continue în $\mathbf{a}$, atunci f este diferenţiabilă de ordin k în $\mathbf{a}$.

○**Observaţia 12.2.3**. Conform Teoremei 12.1.9, dacă f este diferenţiabilă de ordinul 1 în $\mathbf{a}$, atunci f este şi derivabilă parţial de ordinul 1 în $\mathbf{a}$ în raport cu fiecare variabilă şi, pentru $\forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\theta_{\mathbb{R}^n}\}, \mathbf{h} = (h_1, ..., h_n)$

$$\boxed{((df)(\mathbf{a}))(\mathbf{h}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}) \cdot h_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \cdot h_n.} \tag{6}$$

Se generalizează această formulă în următoarea definiţie:

○**Definiţia 12.2.8**. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ deschisă, $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathbf{a} \in A$. Se presupune că f este de k ori diferenţiabilă în $\mathbf{a}$. Se numeşte *diferenţiala de ordin k a funcţiei f în* $\mathbf{a}$ funcţia notată $(d^k f)(\mathbf{a}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definită prin

$$\boxed{\left((d^k f)(\mathbf{a})\right)(\mathbf{h}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}) \cdot h_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \cdot h_n\right)^{(k)}, \forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\theta_{\mathbb{R}^n}\}, \mathbf{h} = (h_1, ..., h_n),} \tag{7}$$

unde puterea simbolică (k) semnifică o dezvoltare de tip binomul lui Newton în care, în loc de puterea m, apar derivate parţiale de ordin m ale f. De exemplu, în loc de

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a})\right)^{(m)} \text{ apare } \frac{\partial^m f}{\partial x_j^m}(\mathbf{a}),$$

adică derivata de ordin m a lui f în raport cu variabila x_j de m ori, iar în loc de

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a})\right)^{(m-2)} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})\right)^{(2)} \text{ apare } \frac{\partial^m f}{\partial x_j^{m-2} \partial x_i^2}(\mathbf{a}),$$

adică derivata de ordin m a lui f în raport cu variabila x_j de $m-2$ ori, şi în raport cu variabila x_i de 2 ori.

○**Observaţia 12.2.4**. Se reaminteşte că, dacă f este diferenţiabilă de ordinul 1 în $\mathbf{a}$, atunci

$$\boxed{(df)(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}) \cdot dx_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \cdot dx_n.}$$

Atunci, dacă f este diferenţiabilă de ordin k în $\mathbf{a}$,

$$\boxed{(d^k f)(\mathbf{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}) \cdot dx_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \cdot dx_n\right)^{(k)}.} \tag{8}$$

○**Observaţia 12.2.5**. **a)** Pentru $n = 2$, $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = ...$, relaţiile $(7), (8)$ devin

$$\left((d^k f)(\mathbf{a})\right)(\mathbf{h}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{a}) \cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{a}) \cdot h_2\right)^{(k)}, \forall \mathbf{h} = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2.$$

$$\boxed{\begin{aligned} (d^k f)(\mathbf{a}) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{a}) \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{a}) \cdot dy\right)^{(k)} = \\ &= C_k^0 \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(\mathbf{a}) \cdot (dx)^k + C_k^1 \frac{\partial^k f}{\partial x^{k-1} \partial y}(\mathbf{a}) \cdot (dx)^{k-1} dy + ... + C_k^k \frac{\partial^k f}{\partial y^k}(\mathbf{a}) \cdot (dy)^k. \end{aligned}}$$

S-a utilizat convenţia că $dx = p_1, dy = p_2$ sunt funcţiile proiecţie a $\mathbb{R}^2$ pe Ox, respectiv Oy, adică $p_{1,2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, p_1(h_1, h_2) = h_1; p_2(h_1, h_2) = h_2$.

b) Pentru $n = 3$, $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = ...$, relaţiile $(7), (8)$ devin

$$\left((d^k f)(\mathbf{a})\right)(\mathbf{h}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{a}) \cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{a}) \cdot h_2 + \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{a}) \cdot h_3\right)^{(k)}, \forall \mathbf{h} = (h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{R}^3.$$

$$\boxed{\left(d^k f\right)(\mathbf{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{a}) \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{a}) \cdot dy + \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{a}) \cdot dz\right)^{(k)}.}$$

S-a utilizat convenţia că dx, dy, dz sunt funcţiile proiecţie a $\mathbb{R}^3$ pe Ox, Oy, respectiv Oz, adică $p_{1,2,3} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, p_1(h_1, h_2, h_3) = h_1; p_2(h_1, h_2, h_3) = h_2; p_2(h_1, h_2, h_3) = h_3.$

Observaţia 12.2.6.

a) Dacă $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ este diferenţiabilă pe mulţimea deschisă A, atunci

$$\boxed{(df)(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \cdot dy, \forall (x, y) \in A} \tag{9}$$

Dacă $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ este diferenţiabilă de ordin 2 pe mulţimea deschisă A, atunci

$$\boxed{\begin{aligned}\left(d^2 f\right)(x, y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) \cdot (dx)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \cdot (dx)(dy) \\ &+\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \cdot (dy)(dx) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \cdot (dy)^2, \forall (x, y) \in A\end{aligned}} \tag{10}$$

sau $\boxed{\left(d^2 f\right)(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) \cdot (dx)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \cdot (dx)(dy) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \cdot (dy)^2, \forall (x, y) \in A}$

$(10')$

Dacă $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ este diferenţiabilă de ordin 3 pe mulţimea deschisă A, atunci

$$\boxed{\begin{aligned}\left(d^3 f\right)(x, y) &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x, y) \cdot (dx)^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x, y) \cdot (dx)^2(dy) + \\ &+3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x, y) \cdot (dx)(dy)^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x, y) \cdot (dy)^3, \forall (x, y) \in A\end{aligned}} \tag{11}$$

b) Dacă $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ este diferenţiabilă pe mulţimea deschisă A, atunci

$$\boxed{(df)(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) \cdot dy + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \cdot dz, \forall (x, y, z) \in A} \tag{12}$$

Dacă $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ este diferenţiabilă de ordin 2 pe mulţimea deschisă A, atunci

$$\boxed{\begin{aligned}\left(d^2 f\right)(x, y, z) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) \cdot (dx)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y, z) \cdot (dx)(dy) + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x, y, z) \cdot (dx)(dz) + \\ &+\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y, z) \cdot (dy)(dx) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) \cdot (dy)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x, y, z) \cdot (dy)(dz) + \\ &+\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x, y, z) \cdot (dz)(dx) + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x, y, z) \cdot (dz)(dy) + \frac{\partial^2 f}{\partial z}(x, y, z) \cdot (dz)^2, \forall (x, y, z) \in A\end{aligned}} \tag{13}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\left(d^2 f\right)(x, y, z) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) \cdot (dx)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) \cdot (dy)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z}(x, y, z) \cdot (dz)^2 + \\ &+2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y, z) \cdot (dx)(dy) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x, y, z) \cdot (dy)(dz) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x, y, z) \cdot (dz)(dx), \\ &\forall (x, y, z) \in A\end{aligned}} \tag{13'}$$

Exemplul 12.2.5. c) Să se determine diferenţialele de ordin 1 şi 2 pentru $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$.

Rezolvare. $A = D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \neq 0\right\}$-deschisă.

Conform exemplului 12.2.2 a) şi b) şi conform Propoziţiei 12.2.1, deoarece f are derivate parţiale de ordin 1 şi acestea sunt continue în $\forall (x, y) \in A$, atunci f este diferenţiabilă de ordin 1 în $\forall (x, y) \in A$ şi

$(df)(x,y) = \dfrac{-y}{x^2+y^2} \cdot dx + \dfrac{x}{x^2+y^2} \cdot dy, \forall (x,y) \in A.$

Conform exemplului 12.2.2 a) şi b) şi conform Propoziţiei 12.2.1, deoarece f are derivate parţiale de ordin 2 şi acestea sunt continue în $\forall (x,y) \in A$, atunci f este diferenţiabilă de ordin 2 în $\forall (x,y) \in A$ şi

$$\left(d^2 f\right)(x,y) = \frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2} \cdot (dx)^2 + 2\frac{-x^2+y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} \cdot (dx)(dy) + \frac{-2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2} \cdot (dy)^2, \forall (x,y) \in A$$

Dacă se gândeşte diferenţiala de ordinul 2 în (x,y) fixat ca şi formă pătratică, atunci matricea asociată acestei forme pătratice este chiar hessiana funcţiei f în (x,y), adică

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2} & \dfrac{-x^2+y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} \\ \dfrac{-x^2+y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} & \dfrac{-2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2} \end{pmatrix}, \forall (x,y) \in A.$$

Exemplul 12.2.6. c) Să se determine, dacă există, diferenţialele de ordin 1 şi 2 pentru

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \sin(2x - y + 8z).$

Rezolvare. $A = \mathbb{R}^3$ este mulţime deschisă.

Conform exemplului 12.2.3 a) şi b) şi conform Propoziţiei 12.2.1, deoarece f are derivate parţiale de ordin 1 şi acestea sunt continue în $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, atunci f este diferenţiabilă de ordin 1 în $\forall (x,y) \in A$ şi

$(df)(x,y,z) = 2\cos(2x-y+8z) \cdot dx - \cos(2x-y+8z) \cdot dy + 8\cos(2x-y+8z) \cdot dz, \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$

Conform exemplului 12.2.3 a) şi b) şi conform Propoziţiei 12.2.1, deoarece f are derivate parţiale de ordin 2 şi acestea sunt continue în $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, atunci f este diferenţiabilă de ordin 2 în $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ şi

$$\begin{aligned} \left(d^2 f\right)(x,y,z) = & -4\sin(2x-y+8z) \cdot (dx)^2 - \sin(2x-y+8z) \cdot (dy)^2 - \\ & -64\sin(2x-y+8z) \cdot (dz)^2 + 2 \cdot 2\sin(2x-y+8z) \cdot (dx)(dy) + \\ & +2 \cdot 8\sin(2x-y+8z) \cdot (dy)(dz) + 2(-16)\sin(2x-y+8z), \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Dacă se gândeşte diferenţiala de ordinul 2 în (x,y,z) fixat ca şi formă pătratică, atunci matricea asociată acestei forme pătratice este chiar hessiana funcţiei f în (x,y,z), adică

$$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} -4\sin(2x-y+8z) & 2\sin(2x-y+8z) & -16\sin(2x-y+8z) \\ 2\sin(2x-y+8z) & -\sin(2x-y+8z) & 8\sin(2x-y+8z) \\ -16\sin(2x-y+8z) & 8\sin(2x-y+8z) & -64\sin(2x-y+8z) \end{pmatrix},$$

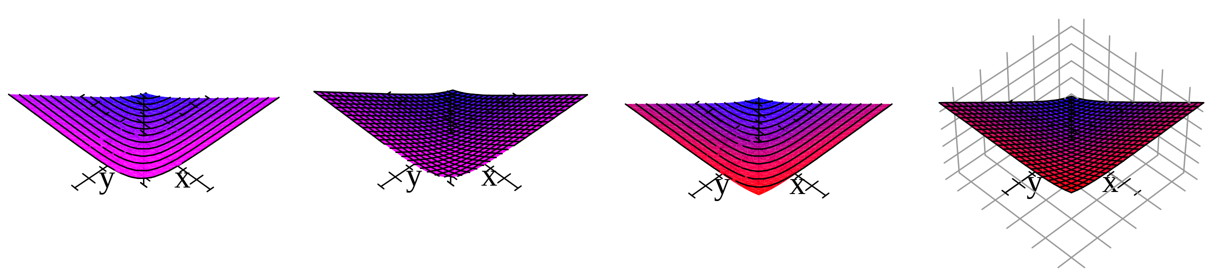
$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$

Exemplul 12.2.7. Să se arate că funcţia

$f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \ln(e^x + e^y),$

unde $D = \mathbb{R}^2$, verifică ecuaţia diferenţială cu derivate parţiale de ordinul al doilea:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\right) \cdot \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\right)^2 = 0, \forall (x,y) \in D.$$



Rezolvare.•Se observă că funcţia f este derivabilă parţial de ordinul 1 pe $D=\mathbb{R}^2$ în raport cu x, respectiv y, adică

$$\exists\frac{\partial f}{\partial x}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\ln\left(e^x+e^y\right)\right)\underset{\text{de derivare}}{\overset{x\text{ este variabilă}}{=}}\frac{e^x}{e^x+e^y}.$$

$$\exists\frac{\partial f}{\partial y}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\ln\left(e^x+e^y\right)\right)\underset{\text{de derivare}}{\overset{y\text{ este variabilă}}{=}}\frac{e^y}{e^x+e^y}.$$

•Se observă că funcţia f este derivabilă parţial de ordinul 2 pe $D=\mathbb{R}^2$ în raport cu x, respectiv y, adică

$$\exists\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\overset{\text{def}}{=}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^x}{e^x+e^y}\right)\underset{\text{de derivare}}{\overset{x\text{ este variabilă}}{=}}\frac{e^x\left(e^x+e^y\right)-e^x\cdot e^x}{\left(e^x+e^y\right)^2}=\frac{e^x\cdot e^y}{\left(e^x+e^y\right)^2}.$$

$$\exists\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\overset{\text{def}}{=}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{e^y}{e^x+e^y}\right)\underset{\text{de derivare}}{\overset{y\text{ este variabilă}}{=}}\frac{e^y\left(e^x+e^y\right)-e^y\cdot e^y}{\left(e^x+e^y\right)^2}=\frac{e^x\cdot e^y}{\left(e^x+e^y\right)^2}.$$

$$\exists\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^y}{e^x+e^y}\right)\underset{\text{de derivare}}{\overset{x\text{ este variabilă}}{=}}\frac{-e^x\cdot e^y}{\left(e^x+e^y\right)^2}.$$

$$\exists\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{e^x}{e^x+e^y}\right)\underset{\text{de derivare}}{\overset{y\text{ este variabilă}}{=}}\frac{-e^x\cdot e^y}{\left(e^x+e^y\right)^2}.$$

•Se verifică ecuaţia diferenţială:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\right)\cdot\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\right)-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)\right)^2=\frac{e^x\cdot e^y}{\left(e^x+e^y\right)^2}\cdot\frac{e^x\cdot e^y}{\left(e^x+e^y\right)^2}-\left(\frac{-e^x\cdot e^y}{\left(e^x+e^y\right)^2}\right)^2$$
$$=0,\forall\left(x,y\right)\in D=\mathbb{R}^2.$$