SEMINAR NR. 10, REZOLVĂRI
Analiză matematică, AIA

CALCUL INTEGRAL

Teoria integrabilităţii pentru $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

1. Integrala nedefinită (primitive) pentru $f : \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

1.1. Definiţii. Exemple

Definiţie, notaţii, propoziţii, teorema de liniaritate- A se vedea Curs.
Observaţia 1. Dacă $g : \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este derivabilă pe $\mathbb{I}$, atunci g este o primitivă pentru funcţia derivată $g' : \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, adică

$$\boxed{\int g'(x)\,dx = g(x) + c, \forall x \in \mathbb{I}, \forall c \in \mathbb{R}.}$$

De exemplu,

$$\int 2\sin x\cos x dx = \int \left((\sin x)^2\right)' dx = (\sin x)^2 + c, \forall x \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R}.$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \int (\operatorname{arctg} x)'\,dx = \operatorname{arctg} x + c, \forall x \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R}.$$

Observaţia 2. a) Fie $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ un interval cu interior nevid.*Dacă* $f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ *este continuă pe* $\mathbb{I}$ *atunci* f *admite primitive pe* $\mathbb{I}$. Reciproc nu, *există funcţii care nu sunt continue şi totuşi admit primitive*-A se vedea Curs.
b) Există funcţii $f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ care admit primitive pe $\mathbb{I}$, dar aceste primitive nu pot fi exprimate cu funcţii elementare. De exemplu, integralele nedefinite

$$\int e^{-x^2}dx, x \in \mathbb{R}; \int \frac{\sin x}{x}dx, x \in \left]0, +\infty\right[; \int \frac{\cos x}{x}dx, x \in \left]0, +\infty\right[\text{ ş.a.}$$

există, dar nu se pot exprima cu funcţii elementare.

Exerciţiul 1. Să se studieze dacă următoarele funcţii admit primitive pe intervalul pe care sunt definite:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}, & \text{dacă } x \neq \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{dacă } x = \frac{\pi}{2} \end{cases};$

Rezolvare. *Este un exemplu de funcţie care este continuă pe* $\mathbb{R}$ (şi în $a = \frac{\pi}{2}$), *deci admite primitive pe* $\mathbb{R}$. Mai mult, aceste primitive nu pot fi exprimate cu funcţii elemetare-A se vedea Curs

○**b)** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases};$

Rezolvare. *Este un exemplu de funcţie care nu este continuă pe* $\mathbb{R}$ (în $a = 0$) *dar admite primitive pe* $\mathbb{R}$.-A se vedea Curs

<u>Integrale nedefinite ale funcţiilor elementare simplu definite şi compus definite</u> (tabelul cu primitive) şi Observaţia 1.2.1.-A se vedea Curs, precum şi exemplele aferente.

Exerciţiul 2. a) Să se calculeze: $\displaystyle\int \left(\sqrt[5]{x} + \frac{1}{x\sqrt[5]{x}}\right)^2 dx, x \in \left]0, +\infty\right[.$

Rezolvare. <u>etapa 1.</u> $f : \left]0, +\infty\right[\to \mathbb{R}, f(x) = \left(\sqrt[5]{x} + \dfrac{1}{x\sqrt[5]{x}}\right)^2$

f este continuă pe $\left]0, +\infty\right[\Rightarrow f$ admite primitive pe $\left]0, +\infty\right[$.
<u>etapa 2.</u> Se aplică teorema de liniaritate şi tabelul$\Rightarrow$

$\int\left(\sqrt[5]{x}+\dfrac{1}{x\sqrt[5]{x}}\right)^2dx=\int\left(x^{\frac{2}{5}}+\dfrac{2}{x}+x^{\frac{-12}{5}}\right)dx=\dfrac{x^{\frac{2}{5}+1}}{\frac{2}{5}+1}+2\ln x+\dfrac{x^{-\frac{12}{5}+1}}{-\frac{12}{5}+1}+c=$

$=\frac{5}{7}x^{\frac{7}{5}}+2\ln x-\frac{5}{7}x^{-\frac{7}{5}}+c,\forall x\in\left]0,+\infty\right[,\forall c\in\mathbb{R}.$

$F(x;c)=\frac{5}{7}x^{\frac{7}{5}}+2\ln x-\frac{5}{7}x^{-\frac{7}{5}}+c,\forall x\in\left]0,+\infty\right[$ (variabilă), $\forall c\in\mathbb{R}$ (constantă) sunt toate primitivele funcţiei f pe $\mathbb{I}=\left]0,+\infty\right[$, familia de primitive fiind indexată după constanta $c\in\mathbb{R}$.

b) Să se studieze dacă următoarea funcţie admite primitive pe $\mathbb{R}$.

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{e^x}, & \text{dacă } x\in\left]-\infty,1\right[\\ \dfrac{\ln^2 x}{x}, & \text{dacă } x\in\left[1,+\infty\right[\end{cases};$$

Dacă admite, să se determine o primitivă.

Rezolvare. etapa 1. Se studiază dacă f este continuă pe $\mathbb{I}=\mathbb{R}$.

• f este continuă pe $\left]-\infty,1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$;

• f este continuă în $a=1\in\mathbb{R}\cap\mathbb{R}'\Leftrightarrow\exists\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)$. Într-adevăr

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1,x<1}f(x)=\lim\limits_{x\to1,x<1}\dfrac{x-1}{e^x}=0.\\ \lim\limits_{x\to1,x>1}f(x)=\lim\limits_{x\to1,x>1}\dfrac{\ln^2 x}{x}=0.\end{array}\right\}\Rightarrow\exists\lim_{x\to1}f(x)=0=f(1).$$

Deci f este continuă pe $\mathbb{R}\Rightarrow f$ admite primitive pe $\mathbb{R}$

etapa 2. Se calculează:

$\int\dfrac{x-1}{e^x}dx=\int(x-1)\cdot e^{-x}dx\overset{(1)}{=}-xe^{-x}+c_1,\forall x\in\left]-\infty,1\right[,\forall c_1\in\mathbb{R}.$

$\int\dfrac{\ln^2 x}{x}dx=\frac{1}{3}\ln^3 x+c_2,\forall x\in\left]1,+\infty\right[,\forall c_2\in\mathbb{R}.$

Se presupune că există $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care să fie primitivă pentru f pe $\mathbb{R}$, adică o funcţie care să verifice (i) şi (ii) din Definiţie. Atunci F ar avea legea de asociere

$$F(x)=\begin{cases}-xe^{-x}+c_1, & \text{dacă } x\in\left]-\infty,1\right[\\ c_2, & \text{dacă } x=1\\ \frac{1}{3}\ln^3 x+c_3, & \text{dacă } x\in\left]1,+\infty\right[\end{cases},\text{ cu } c_1\in\mathbb{R},\ c_2\in\mathbb{R},\ c_3\in\mathbb{R}.$$

Mulţimea de primitive va depinde de o singură constantă $c\in\mathbb{R}$. Pentru ca F să fie derivabilă pe $\mathbb{R}$ e necesar să Se impune ca F să fie continuă pe $\mathbb{R}$.

• F este continuă pe $\left]-\infty,1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$;

• F este continuă în $a=1\in\mathbb{R}\cap\mathbb{R}'\Leftrightarrow\exists\lim\limits_{x\to1}F(x)=F(1)$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1,x<1}F(x)=\lim\limits_{x\to1,x<1}\left(-xe^{-x}+c_1\right)=-e^{-1}+c_1\\ \lim\limits_{x\to1,x>1}F(x)=\lim\limits_{x\to1,x>1}\left(\frac{1}{3}\ln^3 x+c_3\right)=0+c_3\\ F(1)=c_2\end{array}\right\}\Rightarrow-e^{-1}+c_1=c_2=c_3\overset{\text{not}}{=}c\in\mathbb{R}.$$

$$\text{Se obţine } F(x)=\begin{cases}-xe^{-x}+e^{-1}+c, & \text{dacă } x\in\left]-\infty,1\right[\\ c, & \text{dacă } x=1\\ \frac{1}{3}\ln^3 x+c, & \text{dacă } x\in\left]1,+\infty\right[\end{cases},\text{ cu } c\in\mathbb{R}.$$

Se impune ca F să fie derivabilă pe $\mathbb{R}$.

• F este derivabilă pe $\left]-\infty,1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$, cu

$F'(x)=-e^{-x}+xe^{-x}=f(x),\forall x\in\left]-\infty,1\right[,$

$F'(x)=\dfrac{\ln^2 x}{x}=f(x),\forall x\in\left]1,+\infty\right[.$

$\bullet F$ este derivabilă în $a = 1 \in \mathbb{R} \cap \mathbb{R}' \Leftrightarrow \exists \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{F(x) - F(1)}{x - 1}$.

$\exists F'_s(1) = \lim\limits_{x \to 1, x<1} \dfrac{F(x) - F(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1, x<1} \dfrac{-xe^{-x} + e^{-1} + c - c}{x - 1} = 0.$

$\exists F'_d(1) = \lim\limits_{x \to 1, x>1} \dfrac{F(x) - F(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1, x>1} \dfrac{\frac{1}{3}\ln^3 x + c - c}{x - 1} = 0.$

$\Rightarrow F$ este derivabilă în $a = 1$ şi $F'(1) = 0$.

Dar $f(1) = 0 = F'(1) \Rightarrow F$ este primitivă pentru f.

$$F(x;c) = \begin{cases} -xe^{-x} + e^{-1} + c, & \text{dacă } x \in \left]-\infty, 1\right[\\ c, & \text{dacă } x = 1 \\ \frac{1}{3}\ln^3 x + c, & \text{dacă } x \in \left]1, +\infty\right[\end{cases}, \forall x \in \mathbb{R} \text{ (variabilă)}, \forall c \in \mathbb{R} \text{ (constantă)}$$

sunt toate primitivele funcţiei f pe $\mathbb{R}$, familia de primitive fiind indexată după constanta $c \in \mathbb{R}$.

1.2. Integrale nedefinite (primitive) determinate cu formula integrării prin părţi

Teorema 2. Fie $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ un interval cu interior nevid şi $u, v : \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Fie $\alpha \in \mathbb{R}$. Dacă u şi v sunt derivabile pe $\mathbb{I}$ şi funcţia $u' \cdot v$ admite primitive pe $\mathbb{I}$, atunci funcţia $u \cdot v'$ admite primitive pe $\mathbb{I}$ şi

$$\boxed{\int u(x)\, v'(x)\, dx = u(x)\, v(x) - \int u'(x)\, v(x)\, dx, \forall x \in \mathbb{I}.} \quad (1)$$

Exerciţiul 3. Să se calculeze:

a) $\int x^2 \cos x dx, x \in \mathbb{R}$;-A se vedea Curs.

b) $\int xe^{-2x} dx, x \in \mathbb{R}$;

Rezolvare. etapa 1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = xe^{-2x}$

f este continuă pe $\mathbb{R} \Rightarrow f$ admite primitive pe $\mathbb{R}$.

etapa 2. Se aplică de două ori formula integrării prin părţi

$\int xe^{-2x} dx = \int x \left(\dfrac{e^{-2x}}{-2}\right)' dx = x \cdot \dfrac{e^{-2x}}{-2} - \int 1 \cdot \dfrac{e^{-2x}}{-2} dx =$

$= \frac{-1}{2} xe^{-2x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{-2} \int e^{-2x} \cdot (-2)\, dx = \frac{-1}{2} xe^{-2x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{-2} e^{-2x} + c, \forall x \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R}.$

$F(x;c) = \frac{-1}{2} xe^{-2x} + \frac{-1}{4} e^{-2x} + c, \forall x \in \mathbb{R}$ (variabilă), $\forall c \in \mathbb{R}$ (constantă)

sunt toate primitivele funcţiei f pe $\mathbb{I} = \mathbb{R}$, familia de primitive fiind indexată după constanta $c \in \mathbb{R}$.

c) $\int \left(3x^2 + 1\right) \sin(2x + 5)\, dx, x \in \mathbb{R}$;

Rezolvare. etapa 1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \left(3x^2 + 1\right) \sin(2x + 5)$

f este continuă pe $\mathbb{R} \Rightarrow f$ admite primitive pe $\mathbb{R}$.

etapa 2. Se aplică de două ori formula integrării prin părţi, apoi tabelul

$\int \left(3x^2 + 1\right) \sin(2x + 5)\, dx = \int \left(3x^2 + 1\right) \left(\dfrac{\cos(2x + 5)}{-2}\right)' dx =$

$= \left(3x^2 + 1\right) \cdot \dfrac{\cos(2x + 5)}{-2} - \int (6x + 0) \left(\dfrac{\cos(2x + 5)}{-2}\right) dx =$

$= \frac{-1}{2} \left(3x^2 + 1\right) \cdot \cos(2x + 5) + 3 \int x \cos(2x + 5)\, dx =$

$= \frac{-1}{2} \left(3x^2 + 1\right) \cdot \cos(2x + 5) + 3 \int x \left(\dfrac{\sin(2x + 5)}{2}\right)' dx =$

$= \frac{-1}{2} \left(3x^2 + 1\right) \cdot \cos(2x + 5) + 3 \left(x \cdot \dfrac{\sin(2x + 5)}{2} - \int 1 \cdot \dfrac{\sin(2x + 5)}{2} dx\right) =$

$= \frac{-1}{2} \left(3x^2 + 1\right) \cdot \cos(2x + 5) + \frac{3}{2} x \cdot \sin(2x + 5) - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \int (\sin(2x + 5)) \cdot 2dx =$

$= \frac{-1}{2} \left(3x^2 + 1\right) \cdot \cos(2x + 5) + \frac{3}{2} x \cdot \sin(2x + 5) + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cos(2x + 5) + c, \forall x \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R}.$

$F(x;c) = \frac{-1}{2}\left(3x^2+1\right)\cos(2x+5) + \frac{3}{2}x\sin(2x+5) + \frac{3}{4}\cos(2x+5) + c$,
$\forall x \in \mathbb{R}$ (variabilă), $\forall c \in \mathbb{R}$ (constantă) sunt toate primitivele funcţiei f pe $\mathbb{I} = \mathbb{R}$, familia de primitive fiind indexată după constanta $c \in \mathbb{R}$.

REGULĂ: Calculul primitivelor de tipul

$\boxed{\int P(x)\cdot\cos(ax+b)\,dx;\ \int P(x)\cdot\sin(ax+b)\,dx;\ \int P(x)\cdot e^{ax+b}dx}$

se poate face cu formula integrării prin părţi, alegând

$u(x) = P(x)\,;\ v'(x) = \cos(ax+b)\,/\sin(ax+b)\,/e^{ax+b}$.

Formula integrării prin părţi se aplică de un număr de ori egal cu gradul polinomului, pană se ajunge la calculul unei integrale pe baza unei formule din tabel.

d) $\int\left(\cos^2 x\right)dx, x \in \mathbb{R}$-A se vedea Curs

e) $\int\left(\sin^2 x\right)dx, x \in \mathbb{R}$-A se vedea Curs

f) $\int e^{2x}\cos(3x)\,dx, x \in \mathbb{R}$;

Rezolvare. <u>etapa 1.</u> $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^{2x}\cos(3x)$

f este continuă pe $\mathbb{R} \Rightarrow f$ admite primitive pe $\mathbb{R}$

<u>etapa 2.</u> Se aplică de două ori formula integrării prin părţi

$$\underline{\int e^{2x}\cos(3x)\,dx} = \int e^{2x}\left(\frac{\sin(3x)}{3}\right)' dx = e^{2x}\cdot\frac{\sin(3x)}{3} - \int e^{2x}\cdot 2\cdot\frac{\sin(3x)}{3}dx =$$
$$= \tfrac{1}{3}e^{2x}\sin(3x) - \tfrac{2}{3}\int e^{2x}\sin(3x)\,dx = \tfrac{1}{3}e^{2x}\sin(3x) - \tfrac{2}{3}\int e^{2x}\left(\frac{\cos(3x)}{-3}\right)' dx =$$
$$= \tfrac{1}{3}e^{2x}\sin(3x) - \tfrac{2}{3}\left(e^{2x}\cdot\frac{\cos(3x)}{-3} - \int e^{2x}\cdot 2\cdot\frac{\cos(3x)}{-3}dx\right) =$$
$$= \tfrac{1}{3}e^{2x}\sin(3x) + \tfrac{2}{9}e^{2x}\cos(3x) - \tfrac{4}{9}\underline{\int e^{2x}\cos(3x)\,dx} \Rightarrow$$
$$\left(1+\tfrac{4}{9}\right)\int e^{2x}\cos(3x)\,dx = \tfrac{1}{3}e^{2x}\sin(3x) + \tfrac{2}{9}e^{2x}\cos(3x) + c \Rightarrow$$
$$\int e^{2x}\cos(3x)\,dx = \frac{3e^{2x}\sin(3x) + 2e^{2x}\cos(3x)}{3^2+2^2} + c, \forall x \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R}.$$
$$F(x;c) = \frac{3e^{2x}\sin(3x) + 2e^{2x}\cos(3x)}{3^2+2^2} + c, \forall x \in \mathbb{R}\ (\text{variabilă}), \forall c \in \mathbb{R}\ (\text{constantă})$$

sunt toate primitivele funcţiei f pe $\mathbb{I} = \mathbb{R}$, familia de primitive fiind indexată după constanta $c \in \mathbb{R}$.

REGULĂ: Calculul primitivelor de tipul

$\boxed{\int e^{ax}\cdot\cos(bx)\,dx, \int e^{ax}\cdot\sin(bx)\,dx,}$

$\boxed{\int\sin(ax)\cdot\cos(bx)\,dx, \int\sin(ax)\cdot\sin(bx)\,dx, \int\cos(ax)\cdot\cos(bx)\,dx,}$

se face cu formula integrării prin părţi, aplicată de două ori, alegând iniţial

$u(x) = e^{ax}; v'(x) = \cos(bx)\,/\sin(bx)$.

$u(x) = \sin(ax)\,/\cos(ax)\,; v'(x) = \cos(bx)\,/\sin(bx)$.

Pentru cele cu produs de funcţii trigonometrice, se pot folosi formulele de transformare a produselor în sume.

$$\boxed{\sin x\cos y = \frac{\sin(x+y)+\sin(x-y)}{2}, \forall x, y \in \mathbb{R}}$$
$$\boxed{\cos x\cos y = \frac{\cos(x+y)+\cos(x-y)}{2}, \forall x, y \in \mathbb{R}}$$
$$\boxed{\sin x\sin y = \frac{-\cos(x+y)+\cos(x-y)}{2}, \forall x, y \in \mathbb{R}}$$

g) $\int x^n \ln x dx, x \in\,]0,+\infty[$ pentru $n \in \mathbb{N}$ fixat;

Rezolvare. <u>etapa 1.</u> Fie $n \in \mathbb{N}$ fixat şi $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}, f(x) = x^n \ln x$.

f este continuă pe $]0,+\infty[\ \Rightarrow f$ admite primitive pe $]0,+\infty[$.

etapa 2. Fie $n\in\mathbb{N}$ fixat. Atunci

$$\int x^n\ln x dx=\int(\ln x)\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)'dx=(\ln x)\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)-\int\frac{1}{x}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)dx$$

$$=\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x-\frac{1}{n+1}\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x-\frac{1}{n+1}\frac{x^{n+1}}{n+1},\forall x\in\,]0,+\infty[\,,\forall c\in\mathbb{R}.$$

$$\int x^n\ln x dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x-\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}+c,\forall x\in\,]0,+\infty[\,,\forall c\in\mathbb{R}.$$

$$F(x;c)=\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x-\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}+c,\forall x\in\,]0,+\infty[\ (\text{variabilă}),\forall c\in\mathbb{R}\ (\text{constantă})$$

sunt toate primitivele funcţiei f pe $\mathbb{I}=]0,+\infty[$, familia de primitive fiind indexată după constanta $c\in\mathbb{R}$.

În particular,

- $\int x^3\ln x dx=\int(\ln x)\left(\frac{x^4}{4}\right)'dx=(\ln x)\left(\frac{x^4}{4}\right)-\int\frac{1}{x}\left(\frac{x^4}{4}\right)dx=$

$$=\frac{x^4}{4}\ln x-\frac{1}{4}\int x^3dx=\frac{x^4}{4}\ln x-\frac{1}{4}\frac{x^4}{4},\forall x\in\,]0,+\infty[\,,\forall c\in\mathbb{R}.$$

- $\int\ln x dx=\int(\ln x)(x)'dx=(\ln x)(x)-\int\frac{1}{x}(x)dx=$

$$=x\ln x-\int 1dx=x\ln x-x,\forall x\in\,]0,+\infty[\,,\forall c\in\mathbb{R}.$$

REGULĂ: Calculul primitivelor de tipul

$$\boxed{\int P(x)\cdot\ln(ax)dx}$$

se face cu formula integrării prin părţi, alegând

$u(x)=\ln(ax)\,;v'(x)=P(x)$.

h) $\int\cos(\ln x)dx, x\in\,]0,+\infty[$-A se vedea Curs

i) $\int\operatorname{arctg}x dx, x\in\mathbb{R}$;

Rezolvare. etapa 1. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\operatorname{arctg}x$.

f este continuă pe $\mathbb{R}\Rightarrow f$ admite primitive pe $\mathbb{R}$.

etapa 2. Se aplică formula integrării prin părţi:

$$\int\operatorname{arctg}x dx=\int(\operatorname{arctg}x)(x)'dx=(\operatorname{arctg}x)(x)-\int\frac{1}{1+x^2}(x)dx$$

$$=x\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\int\frac{2x}{1+x^2}dx=x\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right),\forall x\in\mathbb{R},\forall c\in\mathbb{R}.$$

$$F(x;c)=x\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right),\forall x\in\mathbb{R}\ (\text{variabilă}),\forall c\in\mathbb{R}\ (\text{constantă})$$

sunt toate primitivele funcţiei f pe $\mathbb{I}=\mathbb{R}$, familia de primitive fiind indexată după constanta $c\in\mathbb{R}$.

Analog pentru $\boxed{\int x^n\operatorname{arctg}x dx, x\in\mathbb{R}\text{ pentru }n\in\{0,1,2,...\}\text{ fixat.}}$

j) $\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}e^{\arccos x}dx, x\in\,]-1,1[$;

Rezolvare. etapa 1. $f:]-1,1[\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}e^{\arccos x}$.

f este continuă pe $]-1,1[\ \Rightarrow f$ admite primitive pe $]-1,1[$.

etapa 2. Se aplică de două ori formula integrării prin părţi

$$\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}e^{\arccos x}dx=-\int e^{\arccos x}\left(\sqrt{1-x^2}\right)'dx=-e^{\arccos x}\sqrt{1-x^2}+\int e^{\arccos x}\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2}dx$$

$$=-e^{\arccos x}\sqrt{1-x^2}-\int e^{\arccos x}x'dx=-e^{\arccos x}\sqrt{1-x^2}-e^{\arccos x}x+\int e^{\arccos x}\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}xdx$$

$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} e^{\arccos x} dx = \frac{1}{2}\left(-e^{\arccos x}\sqrt{1-x^2} - e^{\arccos x} x\right) + c, \forall x \in \left]-1,1\right[, \forall c \in \mathbb{R}.$

k) $\int \sqrt{9-x^2}dx, x \in \mathbb{R}, x \in \left]-3,3\right[.$

Rezolvare. etapa 1. $f : \left]-3,3\right[\to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{9-x^2}.$

f este continuă pe $\left]-3,3\right[\Rightarrow f$ admite primitive pe $\left]-3,3\right[$.

etapa 2. modul 1. $\int \sqrt{9-x^2}dx = \int \left(\sqrt{9-x^2}\right) x'dx = \left(\sqrt{9-x^2}\right) x - \int \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}} \cdot xdx =$

$= x\sqrt{9-x^2} - \int \frac{9-x^2}{\sqrt{9-x^2}}dx + \int \frac{9}{\sqrt{9-x^2}}dx = x\sqrt{9-x^2} - \int \sqrt{9-x^2}dx + 9\arcsin\frac{x}{a} \Rightarrow$

$\int \sqrt{9-x^2}dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{9-x^2} + 9\arcsin\frac{x}{a}\right) + c, \forall x \in \left]-3,3\right[, \forall c \in \mathbb{R}.$

○modul 2. $\int \sqrt{9-x^2}dx = \int \frac{9-x^2}{\sqrt{9-x^2}}dx = \int \frac{9}{\sqrt{9-x^2}}dx - \int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}dx.$

Se foloseşte $\left(\sqrt{9-x^2}\right)' = \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}$ şi se aplică formula integrării prin părţi$\Rightarrow$

$\int \sqrt{9-x^2}dx = \int \frac{9}{\sqrt{9-x^2}}dx + \int x\left(\sqrt{9-x^2}\right)'dx = 9\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}dx + x\left(\sqrt{9-x^2}\right) - \int 1\sqrt{9-x^2}dx =$

$= 9\arcsin\frac{x}{a} + x\sqrt{9-x^2} - \int \sqrt{9-x^2}dx \Rightarrow$

$\int \sqrt{9-x^2}dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{9-x^2} + 9\arcsin\frac{x}{a}\right) + c, \forall x \in \left]-3,3\right[, \forall c \in \mathbb{R}.$

$F(x;c) = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{9-x^2} + 9\arcsin\frac{x}{a}\right) + c, \forall x \in \left]-3,3\right[$ (variabilă), $\forall c \in \mathbb{R}$ (constantă) sunt toate primitivele funcţiei f pe $\mathbb{I} = \left]-3,3\right[$, familia de primitive fiind indexată după constanta $c \in \mathbb{R}$.

l) $\int \sqrt{x^2+4}dx, x \in \mathbb{R}$; **m)** $\int \sqrt{x^2+2}dx, \forall x \in \mathbb{R}$; **n)** $\int \sqrt{x^2+x+1}dx, \forall x \in \mathbb{R}$;

-A se vedea Curs.

o) $\int \sqrt{x^2-3}dx, \forall x \in \left]-\infty,-\sqrt{3}\right[\cup \left]\sqrt{3},+\infty\right[$; **p)** $\int \sqrt{x^2-5x+6}dx, \forall x \in \left]-\infty,2\right[\cup \left]3,+\infty\right[$;

-A se vedea Curs.

q) $\int \sqrt{\pi-x^2}dx, \forall x \in \left]-\sqrt{\pi},\sqrt{\pi}\right[$; **r)** $\int \sqrt{3x-x^2-2}dx, \forall x \in \left]1,2\right[, c \in \mathbb{R}.$

-A se vedea Curs.

1.4. Integrale nedefinite determinate cu teoreme de schimbare de variabilă de integrare

Teoreme.A se vedea Curs.

Exerciţiul 4. Să se calculeze

a) $\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}dx, x \in \mathbb{R};$

Rezolvare. etapa 1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}.$

f este continuă pe $\mathbb{R} \Rightarrow f$ admite primitive pe $\mathbb{R}$.

etapa 2. Se determină integrala, aplicând prima teoremă de schimbare de variabilă de integrare.

Se face schimbarea de variabilă de integrare: $\begin{cases} 1+\cos^2 x = t,\ t \in [1,2] \mid \text{se diferenţiază} \\ (0 + 2\cos x(-\sin x))\,dx = dt \end{cases}$

Se înlocuieşte$\Rightarrow F(t;\tilde{c}) = \int \frac{-dt}{t} = -\ln t + \tilde{c}, \forall t \in [1,2], \forall \tilde{c} \in \mathbb{R}.$

Se revine la substituţie$\Rightarrow F(x;c) = -\ln\left(1+\cos^2 x\right) + c, \forall x \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R}$

sunt toate primitivele funcţiei f pe $\mathbb{I} = \mathbb{R}$, familia de primitive fiind indexată după constanta $c \in \mathbb{R}$.

Comentariu. De fapt s-a aplicat Teorema de schimbare directă de variabilă (chiar tabelul)

Fie $u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $u(x)=1+\cos^2 x$. Atunci
$\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}dx = -\int \frac{1}{1+\cos^2 x}\cdot\left(1+\cos^2 x\right)' dx = -\ln\left(1+\cos^2 x\right), \forall x\in\mathbb{R}, \forall c\in\mathbb{R}.$

b) $\int \cos\sqrt{x}dx, x\in\,]0,+\infty[\,;$

Rezolvare. etapa 1. $f:\,]0,+\infty[\,\to\mathbb{R}, f(x)=\cos\sqrt{x}$.

f este continuă pe $]0,+\infty[\,\Rightarrow f$ admite primitive pe $]0,+\infty[\,.$

etapa 2. Se determină integrala, aplicând a doua teoremă de schimbare de variabilă de integrare.

Se face schimbarea de variabilă de integrare: $\begin{cases}\sqrt{x}=t,\ t\in\,]0,+\infty[\,|\text{ se inversează}\\ x=t^2,\ t\in\,]0,+\infty[\,|\text{ se diferenţiază}\\ dx=2tdt\end{cases}$

Se înlocuieşte$\Rightarrow F(t;\widetilde{c})=\int(\cos t)\,2tdt=2\int t(\sin t)'dt=2t\sin t-2\int 1\sin tdt=$
$=2t\sin t+2\cos t+\widetilde{c}, \forall t\in\,]0,+\infty[\,, \forall\widetilde{c}\in\mathbb{R}.$

Se revine la substituţie$\Rightarrow F(x;c)=2\sqrt{x}\sin\sqrt{x}+2\cos\sqrt{x}+c,\ \forall x\in\,]0,+\infty[\,, \forall c\in\mathbb{R}$
sunt toate primitivele funcţiei f pe $\mathbb{I}=\,]0,+\infty[$, familia de primitive fiind indexată după constanta $c\in\mathbb{R}$.

c) $\int\frac{1}{\sin x}dx, x\in\,]0,\pi[$-A se vedea Curs

1.4. Integrale nedefinite (primitive) având ca integrant funcţii raţionale în x

Forma generală: $\boxed{\int R(x)\,dx, x\in\mathbb{I},}$ (2)

unde $R:\mathbb{I}\to\mathbb{R}, R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ este funcţie raţională în x.

Rezolvare: I. Dacă $\operatorname{grad}P\geq\operatorname{grad}Q$ atunci, conform teoremei împărţirii cu rest, există funcţiile polinomiale K, P_1 cu $\operatorname{grad}P_1<\operatorname{grad}Q$ astfel încât

$$P(x)=K(x)\cdot Q(x)+P_1(x), \forall x\in\mathbb{I}\Rightarrow\boxed{\int R(x)\,dx=\int K(x)\,dx+\int\frac{P_1(x)}{Q(x)}dx, \forall x\in\mathbb{I}.}$$

$\int K(x)\,dx$ se determină folosind, pentru $n\in\mathbb{N}, \int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c, \forall x\in\mathbb{R}, \forall c\in\mathbb{R}.$

$\int\frac{P_1(x)}{Q(x)}dx$ se determină folosind **II.**

II. Dacă $\operatorname{grad}P<\operatorname{grad}Q$ atunci R se descompune în fracţii simple şi se aplică teoria din liceu pentru a calcula

$\boxed{\int\frac{A}{(x-a)^m}dx, x\in\mathbb{I}, \text{ unde } A\in\mathbb{R}, a\in\mathbb{R}, m\in\mathbb{N}^*}$ şi

$\boxed{\int\frac{Bx+C}{(ax^2+bx+c)^m}dx, x\in\mathbb{I}, \text{ unde } A,B\in\mathbb{R}, a,b,c\in\mathbb{R} \text{ cu } b^2-4ac<0, m\in\mathbb{N}^*.}$

În descompunerea funcţiei $R(x)$ în fracţii simple apar situaţiile:

-$Q(x)$ are rădăcini reale simple;
-$Q(x)$ are rădăcini reale multiple;
-$Q(x)$ are rădăcini complexe conjugate simple;
-$Q(x)$ are rădăcini complexe conjugate multiple.

Comentariu. Cazurile I şi II din teorie se pot reduce la determinarea directă a coeficienţilor polinomului K cu $\operatorname{grad}K=\operatorname{grad}P-\operatorname{grad}Q$ şi a descompunerii în fracţii simple pentru $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ din relaţia

$$R(x) = K(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}, \forall x \in \mathbb{I}.$$

Exerciţiul 5. Să se calculeze

a) $\int \frac{x+1}{2x^2+x+2}dx, x \in \mathbb{I}.$

Rezolvare. etapa 1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x+1}{2x^2+x+2}.$

f este continuă pe $\mathbb{R} \Rightarrow f$ admite primitive pe $\mathbb{R}$.

etapa 2. Se determină $F(x;c)$, aplicând teoria. Se observă că

$\left(2x^2+x+2\right)' = 4x+1 \neq x+1.$

Se observă că f este de forma (2), cu $P(x) = x+1, Q(x) = 2x^2+x+2$, caz II.

Cum $\Delta_Q < 0 \Rightarrow f$ este deja fracţie simplă. Atunci

$$\int \frac{x+1}{2x^2+x+2}dx = \frac{1}{4}\int \frac{4x+4}{2x^2+x+2}dx = \frac{1}{4}\int \frac{4x+1}{2x^2+x+2}dx + \frac{1}{4}\int \frac{3}{2x^2+x+2}dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{\left(2x^2+x+2\right)'}{2x^2+x+2}dx + \frac{3}{4\cdot 2}\int \frac{\left(x+\frac{1}{4}\right)'}{\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2}dx =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left(2x^2+x+2\right) + \frac{3}{4\cdot 2}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{15}}{4}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{15}}{4}} + c, \forall x \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R}$$

sunt toate primitivele funcţiei f pe $\mathbb{R}$, familia de primitive fiind indexată după constanta $c \in \mathbb{R}$.

b) $\int \frac{x+1}{x^2-3x+2}dx, x \in \mathbb{I}.$

Rezolvare. etapa 1. $f :]-\infty,1[\cup]1,2[\cup]2,+\infty[\to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x+1}{x^2-3x+2}.$

f este continuă pe $]-\infty,1[\cup]1,2[\cup]2,+\infty[\Rightarrow f$ admite primitive pe $]-\infty,1[\cup]1,2[\cup]2,+\infty[$.

etapa 2. Se determină $F(x;c)$, aplicând teoria.

Se observă că f este de forma (2), cu $P(x) = x+1, Q(x) = x^2-3x+2$, caz II şi că

$\left(x^2-3x+2\right)' = 2x-3 \neq x+1.$

modul 1. $Q(x) = 0 \Leftrightarrow x^2-3x+2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \in \mathbb{R}, & m(x_1) = 1 \\ x_2 = 2 \in \mathbb{R}, & m(x_2) = 1. \end{cases}$

Se descompune f în fracţii simple. Se poate arăta că

$\frac{x+1}{x^2-3x+2} = \frac{3}{x-2} - \frac{2}{x-1}, \forall x \in]-\infty,1[\cup]1,2[\cup]2,+\infty[$. Atunci

$$\int\left(\frac{3}{x-2} - \frac{2}{x-1}\right)dx = 3\int\frac{1}{x-2}(x-2)'\,dx - 2\int\frac{1}{x-1}(x-1)'\,dx \overset{\text{formal}}{=}$$

$$= 3\ln|x-2| - 2\ln|x-1| + c =$$

$$= \begin{cases} 3\ln(-x+2) - 2\ln(-x+1) + c_1 & \forall x \in]-\infty,1[, c_1 \in \mathbb{R} \\ 3\ln(-x+2) - 2\ln(x-1) + c_2 & \forall x \in]1,2[, c_2 \in \mathbb{R} \\ 3\ln(x-2) - 2\ln(x-1) + c_3, & \forall x \in]2,+\infty[, c_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

sunt toate primitivele funcţiei f pe $]-\infty,1[\cup]1,2[\cup]2,+\infty[$, cele trei familii de primitive fiind indexate după constantele $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

modul 2. (se aplică mai ales pentru R cu $\operatorname{grad} P = 1, \operatorname{grad} Q = 2$, când Q are rădăcini reale, dar iraţionale)

Se foloseşte $\left(x^2-3x+2\right)' = 2x-3$. Atunci

$$\int\frac{x+1}{x^2-3x+2}dx = \frac{1}{2}\int\frac{2x+2}{x^2-3x+2}dx = \frac{1}{2}\int\frac{2x-3}{x^2-3x+2}dx + \frac{1}{2}\int\frac{5}{x^2-3x+2}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\frac{\left(x^2-3x+2\right)'}{x^2-3x+2}dx + \frac{5}{2}\int\frac{\left(x-\frac{3}{2}\right)'}{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}dx \overset{\text{formal}}{=}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|x^2-3x+2\right| + \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}}\ln\left|\frac{\left(x-\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{2}}{\left(x-\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{2}}\right| + c =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}\ln\left(x^2-3x+2\right)+\frac{5}{2}\ln\frac{x-2}{x-1}+c_1 & \forall x\in\left]-\infty,1\right[, c_1\in\mathbb{R} \\ \frac{1}{2}\ln\left(-x^2+3x-2\right)+\frac{5}{2}\ln\frac{2-x}{x+1}+c_2 & \forall x\in\left]1,2\right[, c_2\in\mathbb{R} \\ \frac{1}{2}\ln\left(x^2-3x+2\right)+\frac{5}{2}\ln\frac{x-2}{x-1}+c_3, & \forall x\in\left]2,+\infty\right[, c_3\in\mathbb{R} \end{cases}$$

sunt toate primitivele funcţiei f pe $]-\infty,1[\,\cup\,]1,2[\,\cup\,]2,+\infty[$, cele trei familii de primitive fiind indexate după constantele $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

c) $\int \frac{x+1}{x^2-4x+2}dx, x\in\left]2+\sqrt{2},+\infty\right[.$

Rezolvare. etapa 1.$f:\left]2+\sqrt{2},+\infty\right[\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x+1}{x^2-4x+2}.$

f este continuă pe $\left]2+\sqrt{2},+\infty\right[\Rightarrow f$ admite primitive pe $\left]2+\sqrt{2},+\infty\right[.$

etapa 2. Se determină $F(x;c)$, aplicând teoria.

Se observă că f este de forma (2), cu $P(x)=x+1, Q(x)=x^2-4x+2$, caz II şi că $\left(x^2-4x+2\right)'=2x-4\neq x+1.$

modul 1. $Q(x)=0 \Leftrightarrow x^2-4x+2=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=2+\sqrt{2}\in\mathbb{R}, & m(x_1)=1 \\ x_2=2-\sqrt{2}\in\mathbb{R}, & m(x_2)=1. \end{cases}$

Se descompune f în fracţii simple.

$\frac{x+1}{x^2-4x+2}=\frac{A}{x-\left(2+\sqrt{2}\right)}-\frac{B}{x-\left(2-\sqrt{2}\right)}, \forall x\in\left]2+\sqrt{2},+\infty\right[$ −mult calcul.

modul 2. (se aplică mai ales pentru R cu $\operatorname{grad}P=1, \operatorname{grad}Q=2$, când Q are rădăcini reale, dar iraţionale)

Se foloseşte $\left(x^2-4x+2\right)'=2x-4$. Atunci

$$\int\frac{x+1}{x^2-4x+2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+2}{x^2-4x+2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x-4}{x^2-4x+2}dx+\frac{1}{2}\int\frac{6}{x^2-4x+2}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\left(x^2-4x+2\right)'}{x^2-4x+2}dx+\frac{6}{2}\int\frac{(x-2)'}{(x-2)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}dx \overset{\text{formal}}{=}$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|x^2-4x+2\right|+3\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{(x-2)-\sqrt{2}}{(x-2)+\sqrt{2}}\right|+c=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(x^2-4x+2\right)+\frac{3}{2\sqrt{2}}\ln\frac{x-\left(2+\sqrt{2}\right)}{x-\left(2-\sqrt{2}\right)}+c, \forall x\in\left]2+\sqrt{2},+\infty\right[, c\in\mathbb{R}$$

sunt toate primitivele funcţiei f pe $\left]2+\sqrt{2},+\infty\right[$, cele familia de primitive fiind indexată după constantele $c\in\mathbb{R}$.

d) $\int\frac{x^2-3x+2}{x^3+2x^2+x}dx, x\in\left]0,+\infty\right[$- A se vedea Curs.

e) $\int\frac{x+1}{x^5+4x^3+4x}dx, x\in\left]0,+\infty\right[.$

Rezolvare. etapa 1. $f:\left]0,+\infty\right[\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x+1}{x^5+4x^3+4x}.$

f este continuă pe $\left]0,+\infty\right[\Rightarrow f$ admite primitive pe $\left]0,+\infty\right[.$

etapa 2. Se determină $F(x;c)$, aplicând teoria.

Se observă că f este de forma (2), cu $P(x)=x+1, Q(x)=x^5+4x^3+4x$, caz II şi că $\left(x^5+4x^3+4x\right)'=5x^4+12x^2+4\neq x+1.$

$$Q(x)=0\Leftrightarrow x^5+4x^3+4x=0\Leftrightarrow x\left(x^2+2\right)^2=0\Rightarrow\begin{cases}x_1=0\in\mathbb{R}, & m(x_1)=1\\ x_2=i\sqrt{2}\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}, & m(x_2)=2\\ x_3=-i\sqrt{2}\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}, & m(x_3)=2\end{cases}$$

Se descompune f în fracţii simple. Se poate arăta că

$\dfrac{x+1}{x\left(x^2+2\right)^2}=\dfrac{\frac14}{x}+\dfrac{-\frac14x}{x^2+2}+\dfrac{1-\frac12x}{\left(x^2+2\right)^2},\forall x\in\left]0,+\infty\right[.$

Se foloseşte $\left(x^2+2\right)'=2x;\ \left(\dfrac{1}{x^2+2}\right)'=\dfrac{-2x}{\left(x^2+2\right)^2}$. Atunci

$\int\dfrac{x+1}{x^5+4x^3+4x}dx=\int\left(\frac14\dfrac{1}{x}-\frac14\frac12\dfrac{2x}{x^2+2}-\frac12\frac{1}{-1}\dfrac{-2x}{\left(x^2+2\right)^2}+\dfrac{1}{\left(x^2+2\right)^2}\right)dx=$

$=\frac14\int\dfrac{1}{x}dx-\frac18\int\dfrac{\left(x^2+2\right)'}{x^2+2}dx+\frac12\int\left(\dfrac{1}{x^2+2}\right)'dx+\int\dfrac{1}{\left(x^2+2\right)^2}dx.$

Se calculează separat

$\int\dfrac{1}{\left(x^2+2\right)^2}dx=\frac12\int\dfrac{2}{\left(x^2+2\right)^2}dx=\frac12\int\dfrac{\left(x^2+2\right)-x^2}{\left(x^2+2\right)^2}dx=\frac12\int\dfrac{1}{x^2+2}dx+\frac12\int\dfrac{-x^2}{\left(x^2+2\right)^2}dx=$

$=\frac12\int\dfrac{1}{x^2+2}dx+\frac12\frac12\int x\cdot\dfrac{-2x}{\left(x^2+2\right)^2}dx=\frac12\int\dfrac{1}{x^2+2}dx+\frac14\int x\cdot\left(\dfrac{1}{x^2+2}\right)'dx=$

$=\frac12\int\dfrac{1}{x^2+2}dx+\frac14\left(x\cdot\dfrac{1}{x^2+2}-\int 1\cdot\dfrac{1}{x^2+2}dx\right)=\frac14\int\dfrac{1}{x^2+2}dx+\frac14x\cdot\dfrac{1}{x^2+2}=$

$=\frac14\frac{1}{\sqrt2}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt2}+\frac14\dfrac{x}{x^2+2}+c,\forall x\in\left]0,+\infty\right[,c\in\mathbb{R}.$

Atunci $\int\dfrac{x+1}{x^5+4x^3+4x}dx=$

$=\frac14\ln x-\frac18\ln\left(x^2+2\right)+\frac12\dfrac{1}{x^2+2}+\frac14\frac{1}{\sqrt2}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt2}+\frac14\dfrac{x}{x^2+2}+c,\forall x\in\left]0,+\infty\right[,c\in\mathbb{R}$

sunt toate primitivele funcţiei f pe $]0,+\infty[$, familia de primitive fiind indexată după constanta $c\in\mathbb{R}$.

f) $\int\dfrac{x^3}{x+1}dx,x\in\left]-1,+\infty\right[.$

Rezolvare. etapa 1. $f:\left]-1,+\infty\right[\to\mathbb{R},f(x)=\dfrac{x^3}{x+1}$

f este continuă pe $]-1,+\infty[\ \Rightarrow f$ admite primitive pe $]-1,+\infty[$

etapa 2. Se determină $F(x;c)$, aplicând teoria.

Se observă că f este de forma (2), cu $P(x)=x^3,Q(x)=x+1$, caz I.

$Q(x)=0\Leftrightarrow x^3+2x^2+x=0\Leftrightarrow x_1=-1\in\mathbb{R},m(x_1)=1.$

Se împarte P la Q :

-sau cu teorema împărţirii cu rest$\Rightarrow x^3=(x+1)\left(x^2-x+1\right)-1.$

-sau $\dfrac{x^3}{x+1}=\dfrac{x^3+1-1}{x+1}=\dfrac{(x+1)\left(x^2-x+1\right)-1}{x+1}.$

$\int\dfrac{x^3}{x+1}dx=\int\left(x^2-x+1-\dfrac{1}{x+1}\right)dx=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}+x-\ln(x+1)+c,\forall x\in\left]-1,+\infty\right[,c\in\mathbb{R}$

sunt toate primitivele funcţiei f pe $]-1,+\infty[$, familia de primitive fiind indexată după constanta $c\in\mathbb{R}$.

g) $\int\dfrac{1}{x^3+1}dx,x\in\left]-1,+\infty\right[$.- A se vedea Curs.

h) $\int\dfrac{1}{x^4+4}dx,x\in\mathbb{R}$.- A se vedea Curs.

i) $\int \frac{1}{(x^2+1)^2}dx, x \in \mathbb{R}$.- A se vedea Curs.

1.5. Integrale nedefinite (primitive) având ca integrant funcţii iraţionale în x, reductibile la cele din Secţiunea 1.4

1.5.1.Forma generală: $\boxed{\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, ..., \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_p}{n_p}}\right)dx, x \in \mathbb{I},}$ (3)

unde $R : \mathbb{I}_0 \times \mathbb{I}_1 \times ... \times \mathbb{I}_p \to \mathbb{R}, R(y_0, y_1, ..., y_p) = \frac{P(y_0, y_1, ..., y_p)}{Q(y_0, y_1, ..., y_p)}$ este funcţie raţională în $y_0 = x, y_1 = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, ..., y_p = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_p}{n_p}}$, iar $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ $m_1, ..., m_p$ sunt numere întregi, $n_1, ..., n_p$ sunt numere întregi nenule astfel încât macar unul din numerele raţionale $\frac{m_i}{n_i}, i \in \{1, ..., p\}$ să nu fie număr întreg.

Rezolvare: Se face schimbarea de variabilă de integrare: $\boxed{\frac{ax+b}{cx+d} = t^n,}$ (3′)

unde n este cel mai mic multiplu comun al numerelor $n_1, ..., n_p$, se obţine o integrală ca în Secţiunea 1.4 în variabila t, se calculează şi se revine la substituţie.

Exerciţiul 6. Să se calculeze

a) $\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx, x \in \mathbb{I}$.

Rezolvare. etapa 1. $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

f este continuă pe $]0, +\infty[\Rightarrow f$ admite primitive pe $\mathbb{I} =]0, +\infty[$.

etapa 2. Se determină integrala, aplicând teoria. Se observă că $f(x) = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}}$ este de forma (3), cu $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$, $d = 1$, $m_1 = 1$, $n_1 = 2$, $m_2 = 1$, $n_2 = 3$.

Se face schimbarea de variabilă de integrare: $\begin{cases} x = t^6, t \in]0, +\infty[\mid \text{se diferenţiază} \\ dx = 6t^5 dt \end{cases}$

Se înlocuieşte$\Rightarrow \int \frac{1}{t^2+t^3}6t^5 dt = 6\int \frac{t^3+1-1}{1+t}dt = 6\int \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{1+t}\right)dt =$

$= 6\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t + \ln(1+t)\right) + \widetilde{c}, \forall t \in]0, +\infty[, \forall \widetilde{c} \in \mathbb{R}$.

Se revine la substituţie$\Rightarrow$

$\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx = 6\left(\frac{\sqrt{x}}{3} - \frac{\sqrt[3]{x}}{2} + \sqrt[6]{x} + \ln(1+\sqrt[6]{x})\right) + c, \forall x \in]0, +\infty[, \forall c \in \mathbb{R}$

sunt toate primitivele funcţiei f pe $\mathbb{I} =]0, +\infty[$, familia de primitive fiind indexată după constanta $c \in \mathbb{R}$.

b) $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}dx, x \in]1, +\infty[$.-A se vedea Curs.

○**1.5.2.Forma generală:** $\boxed{\int \frac{P_m(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx, x \in \mathbb{I},}$ (4)

unde P_m este funcţie polinomială de grad m în variabila x, iar $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Rezolvare: modul 1. (mai ales pentru $m = 0, m = 1, m = 2$) Folosind

•$(m=0, m=1, m=2)$modul de calcul pentru $\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx, x\in\mathbb{I}$;

•$(m=1, m=2)$ $\left(\sqrt{ax^2+bx+c}\right)' = \frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}$;

•$(m=2)$modul de calcul pentru $\int \sqrt{ax^2+bx+c}dx, x\in\mathbb{I}$;

<u>modul 2.</u> (mai ales pentru $m\geq 2$) Se consideră relaţia

$$\boxed{\int \frac{P_m(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = Q_{m-1}(x)\cdot\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda\cdot\int\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx, x\in\mathbb{I},} \qquad (4')$$

unde Q_{m-1} este funcţie polinomială de grad m în variabila x cu coeficienţi necunoscuţi şi $\lambda\in\mathbb{R}$ este necunoscut. Coeficienţii funcţiei polinomiale Q_{m-1} şi numărul $\lambda\in\mathbb{R}$ se determină derivând relaţia $(4')$, apoi indentificând coeficienţii polinoamelor ce apar.

<u>modul 3.</u> Folosind substituţiile Euler de mai jos.

Exerciţiul 7. Să se calculeze

a) $\int \frac{2x+1}{\sqrt{3x^2-6x+5}}dx, x\in\mathbb{I}$.- A se vedea Curs; **b)** $\int\frac{x^2+x+1}{\sqrt{2x^2-3x+2}}dx, x\in\mathbb{I}$.- A se vedea Curs.

c) $\int\frac{2x}{\sqrt{1-2x-x^2}}dx, x\in\left]0,-1+\sqrt{2}\right[$.

Rezolvare. <u>etapa 1.</u> $f:\left]0,-1+\sqrt{2}\right[\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{2x}{\sqrt{1-2x-x^2}}$

f este continuă pe $\left]0,-1+\sqrt{2}\right[\Rightarrow f$ admite primitive pe $\left]0,-1+\sqrt{2}\right[$

<u>etapa 2.</u> Se determină integrala, aplicând teoria. Se observă că f este de forma (4), cu $P_2(x) = 2x, m=1$ şi $a=-1$, $b=-2$, $c=1$.

<u>modul 1.</u> Se foloseşte $\left(\sqrt{1-2x-x^2}\right)' = \frac{-2x-2}{2\sqrt{1-2x-x^2}} = \frac{-x-1}{\sqrt{1-2x-x^2}}$. Obţinem

$$\int\frac{2x}{\sqrt{1-2x-x^2}}dx = -2\int\frac{-x-1+1}{\sqrt{1-2x-x^2}}dx = -2\int\frac{-x-1}{\sqrt{1-2x-x^2}}dx - 2\int\frac{1}{\sqrt{1-2x-x^2}}dx.$$

Se observă că $1-2x-x^2 = -\left(x^2+2x-1\right) = -\left((x+1)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2\right)$. Atunci:

$$\int\frac{2x}{\sqrt{1-2x-x^2}}dx = -2\int\left(\sqrt{1-2x-x^2}\right)'dx - 2\int\frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2-(x+1)^2}}(x+1)'\,dx =$$

$$= -2\sqrt{1-2x-x^2} - 2\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}} + c, \forall x\in\left]0,-1+\sqrt{2}\right[, \forall c\in\mathbb{R}.$$

<u>modul 3.</u> Cu substituţii Euler.

○**1.5.3**. **Forma generală:** $\boxed{\int\frac{1}{(x-d)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}dx, x\in\mathbb{I},}$ (5)

unde $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ şi $n\in\mathbb{N}^*$

Rezolvare: <u>modul 1.</u> Se face schimbarea de variabilă de integrare

$$\boxed{\frac{1}{x-d}=t,} \qquad (5')$$

şi se obţine o integrală ca în Secţiunea 1.5.2 în variabila t, se calculează şi se revine la substituţie.

<u>modul 2.</u> Folosind substituţiile Euler de mai jos.

Exerciţiul 8. Să se calculeze

a) $\int\frac{1}{x\sqrt{5x-6-x^2}}dx, x\in\mathbb{I}$.

Rezolvare. etapa 1. $f:\mathbb{I}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{5x-6-x^2}}$

Se impune $CE:\begin{cases} x\neq 0 \\ 5x-6-x^2 \gneqq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\left]2,3\right[.$

f este continuă pe $]2,3[\Rightarrow f$ admite primitive pe $\mathbb{I}=]2,3[$

etapa 2. Se determină integrala, aplicând teoria. Se observă că f este de forma (5), cu $d=0$, $a=-1$, $b=5$, $c=-6$, $n=1$.

modul 1. Se face schimbarea de variabilă de integrare: $\begin{cases} \dfrac{1}{x}=t,\, t\in\left]\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right[\big| \text{ se inversează} \\ x=\dfrac{1}{t},\, t\in\left]\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right[\big| \text{ se diferenţiază} \\ dx=\dfrac{-1}{t^2}dt \end{cases}$

Se înlocuieşte$\Rightarrow \displaystyle\int \frac{t}{\sqrt{-\left(\frac{1}{t}\right)^2+5\frac{1}{t}-6}}\frac{-1}{t^2}dt \overset{t>0 \text{ pe } \left]\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right[}{\underset{|t|=t}{=}} \int\frac{-1}{\sqrt{-1+5t-6t^2}}dt=$

$$=-\frac{1}{\sqrt{6}}\int\frac{1}{\sqrt{-\frac{1}{6}+\frac{5}{6}t-t^2}}dt=-\frac{1}{\sqrt{6}}\int\frac{1}{\sqrt{-\left(t^2-2\frac{5}{12}t+\left(\frac{5}{12}\right)^2\right)+\left(\frac{5}{12}\right)^2-\frac{1}{6}}}dt=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{6}}\int\frac{\left(t-\frac{5}{12}\right)'}{\sqrt{\left(\frac{1}{12}\right)^2-\left(t-\frac{5}{12}\right)^2}}dt=-\frac{1}{\sqrt{6}}\arcsin\frac{t-\frac{5}{12}}{\frac{1}{12}}+\widetilde{c},\forall t\in\left]\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{2}\right[,\forall\widetilde{c}\in\mathbb{R}.$$

Se revine la substituţie$\Rightarrow \displaystyle\int\frac{1}{x\sqrt{5x-6-x^2}}dx=-\frac{1}{\sqrt{6}}\arcsin\frac{\frac{1}{x}-\frac{5}{12}}{\frac{1}{12}}+c,\ \forall x\in\left]2,3\right[,\forall c\in\mathbb{R}$
sunt toate primitivele funcţiei f pe $\mathbb{I}=]2,3[$, familia de primitive fiind indexată după constanta $c\in\mathbb{R}$.

modul 2. Cu substituţii Euler.

b) $\displaystyle\int\frac{1}{x\sqrt{2x-x^2}}dx, x\in\mathbb{I}.$

Rezolvare. etapa 1. $f:\mathbb{I}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{2x-x^2}}.$

Se impune $CE:\begin{cases} x\neq 0 \\ 2x-x^2 \gneqq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\left]0,2\right[.$

f este continuă pe $]0,2[\Rightarrow f$ admite primitive pe $\mathbb{I}=]0,2[$

etapa 2. Se determină integrala, aplicând teoria. Se observă că f este de forma (5), cu $d=0$, $a=-1$, $b=2$, $c=0$, $n=1$.

modul 1. Se face schimbarea de variabilă de integrare: $\begin{cases} \dfrac{1}{x}=t,\, t\in\left]\frac{1}{2},+\infty\right[\big| \text{ se inversează} \\ x=\dfrac{1}{t},\, t\in\left]\frac{1}{2},+\infty\right[\big| \text{ se diferenţiază} \\ dx=\dfrac{-1}{t^2}dt \end{cases}$

Se înlocuieşte$\Rightarrow \displaystyle\int\frac{t}{\sqrt{2\frac{1}{t}-\left(\frac{1}{t}\right)^2}}\frac{-1}{t^2}dt \overset{t>0 \text{ pe } \left]\frac{1}{2},+\infty\right[}{\underset{|t|=t}{=}} \int\frac{-1}{\sqrt{2t-1}}dt=$

$$=\tfrac{1}{2}\int-(2t-1)^{\frac{-1}{2}}(2t-1)'\,dt=-\tfrac{1}{2}\frac{(2t-1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+\widetilde{c},\forall t\in\left]\tfrac{1}{2},+\infty\right[,\forall\widetilde{c}\in\mathbb{R}.$$

Se revine la substituţie$\Rightarrow \int \frac{1}{x\sqrt{2x-x^2}}dx = -\sqrt{2\frac{1}{x}-1}+c,\ \forall x \in \left]0,2\right[,\forall c \in \mathbb{R}$
sunt toate primitivele funcţiei f pe $\mathbb{I} = \left]0,2\right[$, familia de primitive fiind indexată după constanta $c \in \mathbb{R}$.

modul 2. Cu substituţii Euler.

c) $\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x^2+2x+2}}dx,\ x \in \left]-1,+\infty\right[.$

Rezolvare. etapa 1. $f : \left]-1,+\infty\right[\to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{(1+x)\sqrt{x^2+2x+2}}$

f este continuă pe $\left]-1,+\infty\right[\Rightarrow f$ admite primitive pe $\left]-1,+\infty\right[$

etapa 2. Se determină integrala, aplicând teoria. Se observă că $f(x)$ este de forma (5), cu $d=-1$, $a=1$, $b=2$, $c=2$, $n=1$.

modul 1. Se face schimbarea de variabilă de integrare: $\begin{cases} \frac{1}{1+x} = t,\ t \in \mathbb{J} \mid \text{se inversează} \\ x = \frac{1-t}{t},\ t \in \left]0,+\infty\right[\mid \text{se diferenţiază} \\ dx = \frac{-1}{t^2}dt \end{cases}$

Se menţionează că $\frac{1-t}{t} > -1 \Leftrightarrow \frac{1}{t} > 0 \Leftrightarrow t \in \left]0,+\infty\right[.$

Se înlocuieşte$\Rightarrow$

$$\int \frac{t}{\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}}\frac{-1}{t^2}dt \overset{t>0 \text{ pe }]0,+\infty[}{\underset{|t|=t}{=}} \int \frac{-1}{\sqrt{t^2+1}}dt = -\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)+\widetilde{c},\forall t \in \left]0,+\infty\right[,\forall \widetilde{c} \in \mathbb{R}.$$

Se revine la substituţie$\Rightarrow$

$$\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x^2+2x+2}}dx = -\ln\left(\frac{1}{1+x}+\sqrt{\frac{1}{(1+x)^2}+1}\right)+c,\ \forall x \in \left]-1,+\infty\right[,\forall c \in \mathbb{R}$$

modul 2. Cu Euler.

d) $\int \frac{1}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}}dx,\ x \in \left]0,\frac{3}{2}\right[.$

Rezolvare. etapa 1. $f : \left]0,\frac{3}{2}\right[\to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}}$

f este continuă pe $\left]0,\frac{3}{2}\right[\Rightarrow f$ admite primitive pe $\left]0,\frac{3}{2}\right[$

etapa 2. Se determină integrala, aplicând teoria. Se observă că f este de forma (5), cu $d=\frac{3}{2}$, $a=-1$, $b=4$, $c=0$, $n=1$.

modul 1. Se face schimbarea de variabilă de integrare: $\begin{cases} \frac{1}{x-\frac{3}{2}} = t,\ t \in \mathbb{J} \mid \text{se inversează} \\ x = \frac{1+\frac{3}{2}t}{t},\ t \in \left]-\infty,-\frac{2}{3}\right[\mid \text{se diferenţiază} \\ dx = \frac{-1}{t^2}dt \end{cases}$

Se menţionează că $0 < \frac{1+\frac{3}{2}t}{t} < \frac{3}{2} \Leftrightarrow t \in \left]-\infty,-\frac{2}{3}\right[.$

Se înlocuieşte$\Rightarrow$

$$F(t;\widetilde{c}) = \int \frac{t}{\sqrt{4\frac{1+\frac{3}{2}t}{t}-\left(\frac{1+\frac{3}{2}t}{t}\right)^2}}\frac{-1}{t^2}dt \overset{t<0 \text{ pe }]-\infty,-\frac{2}{3}[}{\underset{\sqrt{t^2}=|t|=-t}{=}} \int \frac{1}{\sqrt{4t+6t^2-1-3t-\frac{9}{4}t^2}}dt =$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{\frac{15}{4}t^2 + t - 1}} dt = \frac{2}{\sqrt{15}} \int \frac{1}{\sqrt{t^2 + \frac{4}{15}t - \frac{4}{15}}} dt = \frac{2}{\sqrt{15}} \int \frac{\left(t - \frac{2}{15}\right)'}{\sqrt{\left(t - \frac{2}{15}\right)^2 - \left(\frac{8}{15}\right)^2}} dt =$$
$$= \frac{2}{\sqrt{15}} \ln\left(t - \frac{2}{15} + \sqrt{\left(t - \frac{2}{15}\right)^2 - \left(\frac{8}{15}\right)^2}\right) + \widetilde{c},\ \forall t \in \left]-\infty, -\frac{2}{3}\right[, \forall \widetilde{c} \in \mathbb{R}.$$

Se revine la substituţie$\Rightarrow$

$$F(x; c) = \frac{2}{\sqrt{15}} \ln\left(\frac{1}{x - \frac{3}{2}} - \frac{2}{15} + \sqrt{\left(\frac{1}{x - \frac{3}{2}} - \frac{2}{15}\right)^2 - \left(\frac{8}{15}\right)^2}\right) + c, \forall x \in \left]0, \frac{3}{2}\right[, \forall c \in \mathbb{R}$$

sunt toate primitivele funcţiei f pe $\left]0, \frac{3}{2}\right[$, familia de primitive fiind indexată după constanta $c \in \mathbb{R}$.

1.5.4. Forma generală: $\boxed{\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx, x \in \mathbb{I},}$ (6)

unde $R : \mathbb{I}_0 \times \mathbb{I}_1 \to \mathbb{R}, R(y_0, y_1) = \dfrac{P(y_0, y_1)}{Q(y_0, y_1)}$ este funcţie raţională în $y_0 = x, y_1 = \sqrt{ax^2 + bx + c}$, iar $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Rezolvare: Se face una din schimbarea de variabilă (substituţie Euler)

a) dacă $a > 0 : \begin{cases} \sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}x + t \text{ sau } \sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}x - t \\ \sqrt{ax^2 + bx + c} = -\sqrt{a}x + t \text{ sau } \sqrt{ax^2 + bx + c} = -\sqrt{a}x - t \end{cases}$ (6′)

b) dacă $c > 0 : \begin{cases} \sqrt{ax^2 + bx + c} = tx + \sqrt{c} \text{ sau } \sqrt{ax^2 + bx + c} = tx - \sqrt{c} \\ \sqrt{ax^2 + bx + c} = -tx + \sqrt{c} \text{ sau } \sqrt{ax^2 + bx + c} = -tx - \sqrt{c} \end{cases}$ (6″)

c) dacă $ax^2 + bx + c = 0$ are rădăcinile reale x_1, x_2 :

$\left\{\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - x_1) \text{ sau } \sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - x_2)\right.$ (6‴)

pentru x într-un subinterval al $\mathbb{I}$ ce nu conţine x_1, respectiv x_2.

Se obţine o integrală ca în Secţiunea 1.4 în variabila t, se calculează şi se revine la substituţie.

Exerciţiul 9. Să se calculeze

a) $\displaystyle\int \frac{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}{x - \sqrt{x^2 + x + 1}} dx, x \in \mathbb{I}.$

Rezolvare. etapa 1. $f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}{x - \sqrt{x^2 + x + 1}}$.

Se impune $CE : \left\{x - \sqrt{x^2 + x + 1} \neq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}.\right.$

f este continuă pe $\mathbb{R} \Rightarrow f$ admite primitive pe $\mathbb{I} = \mathbb{R}$

etapa 2. Se determină integrala, aplicând teoria. Se observă că f este de forma (5), cu $R(y_0, y_1) = \dfrac{y_0 + y_1}{y_0 - y_1}$, $a = 1,\ b = 1,\ c = 1$.

Se face schimbarea de variabilă de integrare: $\begin{cases} \sqrt{x^2 + x + 1} = x + t,\ t \in \mathbb{J} \mid \text{se exprimă } x \text{ în funcţie de } t \\ x^2 + x + 1 = x^2 + 2xt + t^2 \Rightarrow \\ x = \dfrac{t^2 - 1}{1 - 2t},\ t \in \mathbb{J} \text{ a.î. } t \neq \frac{1}{2} \Big| \text{ se diferenţiază} \\ dx = \dfrac{2t(1 - 2t) - \left(t^2 - 1\right)(-2)}{(1 - 2t)^2} dt \Rightarrow \\ dx = \dfrac{-2t^2 + 2t - 2}{(1 - 2t)^2} dt \end{cases}$

Se observă că inecuaţia

$\sqrt{x^2 + x + 1} - x > 0$ are ca soluţii $\forall x \in \mathbb{R}$ şi că inecuaţia

$\sqrt{x^2+x+1}-x \leq 0$ nu are soluţii în $\mathbb{R}$. Deci $\mathbb{J} \subset]0,+\infty[\setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$

Se înlocuieşte formal$\Rightarrow$

$$F(t;\widetilde{c}) = \int \frac{\frac{t^2-1}{1-2t}+\left(\frac{t^2-1}{1-2t}+t\right)}{\frac{t^2-1}{1-2t}-\left(\frac{t^2-1}{1-2t}+t\right)} \frac{-2t^2+2t-2}{(1-2t)^2}dt = \int \frac{2t^2-2+t-2t^2}{-t(1-2t)} \frac{-2t^2+2t-2}{(1-2t)^2}dt =$$

$$= 2\int \frac{(t-2)\left(t^2-t+1\right)}{t(1-2t)^3}dt = 2\int\left(-\frac{2}{t}-\frac{15}{4(1-2t)}-\frac{3}{(1-2t)^2}-\frac{9}{4(1-2t)^3}\right)dt.$$

Se menţionează că, pentru $\mathbb{J}_1 \subseteq \left]0,\frac{1}{2}\right[\Rightarrow$

$$F(t;\widetilde{c_1}) = -4\ln t - \frac{30}{4}\frac{\ln(1-2t)}{-2} - 6\frac{(1-2t)^{-1}}{(-2)(-1)} - \frac{18}{4}\frac{(1-2t)^{-2}}{(-2)(-2)} + \widetilde{c_1}, \forall t \in \mathbb{J}_1, \forall \widetilde{c_1} \in \mathbb{R},$$

iar pentru $\mathbb{J}_2 \subseteq \left]0,\frac{1}{2}\right[\Rightarrow$

$$F(t;\widetilde{c_2}) = -4\ln t + \frac{30}{4}\frac{\ln(2t-1)}{2} - 6\frac{(2t-1)^{-1}}{2(-1)} + \frac{18}{4}\frac{(2t-1)^{-2}}{2(-2)} + \widetilde{c_2}, \forall t \in \mathbb{J}_2, \forall \widetilde{c_2} \in \mathbb{R},$$

Se revine la substituţie$\Rightarrow$

$$F(x;c) = -4\ln\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right) - \frac{30}{4}\frac{\ln\left|1-2\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)\right|}{-2} -$$

$$-6\frac{\left|1-2\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)\right|^{-1}}{(-2)(-1)} - \frac{18}{4}\frac{\left|1-2\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)\right|^{-2}}{(-2)(-2)} + c, \forall x \in \mathbb{I}, \forall c \in \mathbb{R}$$

sunt toate primitivele funcţiei f pe $\mathbb{I}$, familia de primitive fiind indexată după constanta $c \in \mathbb{R}$. Se fac precizări suplimentare pentru $x \in \mathbb{I}_1$, respectiv $x \in \mathbb{I}_2$.

b) $\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x^2+2x+2}}dx, x \in]-1,+\infty[$.- A se vedea Curs

c) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}}dx, x \in \left]0,-1+\sqrt{2}\right[$.

Rezolvare. etapa 1.$f : \left]0,-1+\sqrt{2}\right[\to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}}$.

f este continuă pe $\left]0,-1+\sqrt{2}\right[\Rightarrow f$ admite primitive pe $\left]0,-1+\sqrt{2}\right[$.

etapa 2. Se determină integrala, aplicând teoria.

modul 3. Se observă că f este de forma (6), cu $R(y_0,y_1) = \frac{y_0^2}{1+y_1}$, $a=-1$, $b=-2$, $c=1$.

Cum $a=-1<0$ şi $c=1>0$, Se face schimbarea de variabilă de integrare

$$\begin{cases} \sqrt{1-2x-x^2} = tx+1,\ t \in \mathbb{J} | \text{ se exprimă } x \text{ în funcţie de } t \\ 1-2x-x^2 = t^2x^2+2tx+1 \Rightarrow \\ x = \frac{-2t-2}{t^2+1}, t \in \mathbb{J} \text{ a.î. } 0 < \frac{-2t-2}{t^2+1} < -1+\sqrt{2} \\ x = \frac{-2t-2}{t^2+1},\ t \in \mathbb{J} | \text{ se diferenţiază} \\ dx = \frac{-2\left(t^2+1\right)-(-2t-2)2t}{\left(t^2+1\right)^2}dt \Rightarrow \\ dx = \frac{2t^2+4t-2}{\left(t^2+1\right)^2}dt \end{cases}$$

Se menţionează că $0 < \frac{-2t-2}{t^2+1} < -1+\sqrt{2} \Leftrightarrow ...$

Se înlocuieşte$\Rightarrow F(t;\widetilde{c}) = \int \dfrac{\left(\dfrac{-2t-2}{t^2+1}\right)^2}{t\cdot\dfrac{-2t-2}{t^2+1}+1}\cdot\dfrac{2t^2+4t-2}{\left(t^2+1\right)^2}dt = -8\int\dfrac{(t+1)^2}{\left(t^2+1\right)^3}dt =$

$= -8\int\dfrac{t^2+2t+1}{\left(t^2+1\right)^3}dt = -8\int\left(\dfrac{1}{\left(t^2+1\right)^2}+\dfrac{2t}{\left(t^2+1\right)^3}\right)dt.$

Se foloseşte $\left(\dfrac{1}{t^2+1}\right)' = \left(\left(t^2+1\right)^{-1}\right)' = -1\left(t^2+1\right)^{-2}(2t) = \dfrac{-2t}{\left(t^2+1\right)^2}$ şi

$\left(\dfrac{1}{\left(t^2+1\right)^2}\right)' = \left(\left(t^2+1\right)^{-2}\right)' = -2\left(t^2+1\right)^{-3}(2t) = \dfrac{-4t}{\left(t^2+1\right)^3}$. Atunci

$\int\dfrac{2t}{\left(t^2+1\right)^3}dt = \frac{1}{-2}\int\dfrac{-4t}{\left(t^2+1\right)^3}dt = \frac{1}{-2}\int\left(\dfrac{1}{\left(t^2+1\right)^2}\right)'dt = \frac{1}{-2}\dfrac{1}{\left(t^2+1\right)^2}+c_1;$

$\int\dfrac{1}{\left(t^2+1\right)^2}dt = \int\left(\dfrac{1}{t^2+1}-\dfrac{t^2}{\left(t^2+1\right)^2}\right)dt =$

$= \int\dfrac{1}{t^2+1}dt + \frac{1}{2}\int t\cdot\dfrac{-2t}{\left(t^2+1\right)^2}dt = \int\dfrac{1}{t^2+1}dt + \frac{1}{2}\int t\cdot\left(\dfrac{1}{t^2+1}\right)'dt =$

$= \int\dfrac{1}{t^2+1}dt + \frac{1}{2}\left(t\dfrac{1}{t^2+1} - \int 1\cdot\dfrac{1}{t^2+1}dt\right) = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + \frac{1}{2}\dfrac{t}{t^2+1}+c_2;$

Se înlocuieşte$\Rightarrow F(t;\widetilde{c}) = -8\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + \frac{1}{2}\dfrac{t}{t^2+1} + \frac{1}{-2}\dfrac{1}{\left(t^2+1\right)^2}\right)+\widetilde{c}, \forall t\in\mathbb{J}, \widetilde{c}\in\mathbb{R}$

Se revine la substituţie$\Rightarrow$

$F(x;c) = -8\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{1-2x-x^2}-1}{x}+...\right)+c, \forall x\in\left]0,-1+\sqrt{2}\right[, \forall c\in\mathbb{R}$

sunt toate primitivele funcţiei f pe $\left]0,-1+\sqrt{2}\right[$, familia de primitive fiind indexată după constanta $c\in\mathbb{R}$.

<u>modul 1.</u> Se observă că $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}}$, adică este de forma (4), cu $P_2(x) = x^2, m = 2$ şi $a=-1$, $b=-2$, $c=1$.

Se foloseşte $\left(\sqrt{1-2x-x^2}\right)' = \dfrac{-2x-2}{2\sqrt{1-2x-x^2}} = \dfrac{-x-1}{\sqrt{1-2x-x^2}}$. Obţinem

$\int\dfrac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}}dx = -\int\dfrac{\left(1-2x-x^2\right)-(1-2x)}{\sqrt{1-2x-x^2}}dx =$

$= -\int\sqrt{1-2x-x^2}dx + 2\int\dfrac{-x-1}{\sqrt{1-2x-x^2}}dx + 3\int\dfrac{1}{\sqrt{1-2x-x^2}}dx.$

Se observă că $1-2x-x^2 = -\left(x^2+2x-1\right) = -\left((x+1)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2\right)$. Atunci:

$\int\dfrac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}}dx =$

$= -\int\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2-(x+1)^2}\cdot(x+1)'dx + 2\int\left(\sqrt{1-2x-x^2}\right)'dx + 3\int\dfrac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2-(x+1)^2}}(x+1)'dx =$

$= -\frac{1}{2}\left((x-1)\sqrt{2-(x+1)^2}+2\arcsin\dfrac{x+1}{\sqrt{2}}\right)+2\sqrt{1-2x-x^2}+3\arcsin\dfrac{x+1}{\sqrt{2}}+c =$

$= \left(\frac{3}{2}+\frac{-1}{2}x\right)\sqrt{1-2x-x^2}+2\arcsin\dfrac{x+1}{\sqrt{2}}+c, \forall x\in\left]0,-1+\sqrt{2}\right[, \forall c\in\mathbb{R}.$

<u>modul 2$^{\bigcirc}$.</u> Se consideră relaţia

$(*)\int \frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}}dx = Q_1(x)\cdot\sqrt{1-2x-x^2} + \lambda\cdot\int\frac{1}{\sqrt{1-2x-x^2}}dx, x\in\mathbb{I},$

unde Q_1 este funcţie polinomială de grad 1 în variabila x cu coeficienţi necunoscuţi, adică $Q_0(x) = a_0 + a_1 x$ şi $\lambda\in\mathbb{R}$ este necunoscut. Se determină integrala, aplicând teoria. Se observă că f este de forma a_0, a_1 şi λ. Derivăm $(*)\Rightarrow$

$$\frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}} = a_1\cdot\sqrt{1-2x-x^2} + (a_0+a_1x)\frac{-x-1}{\sqrt{1-2x-x^2}} + \lambda\frac{1}{\sqrt{1-2x-x^2}}, x\in\mathbb{I}\Rightarrow$$

$x^2 = a_1\left(1-2x-x^2\right) + (a_0+a_1x)(-x-1) + \lambda, x\in\mathbb{I}.$

Identificăm coeficienţii puterilor lui $x\Rightarrow\begin{cases}0 = a_1 - a_0 + \lambda\\ 0 = -2a_1 - a_1 - a_0\\ 1 = -a_1 - a_1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1 = \frac{-1}{2}\\ a_0 = \frac{3}{2}\\ \lambda = 2\end{cases}$ .Atunci

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}}dx = \left(\tfrac{3}{2} + \tfrac{-1}{2}x\right)\sqrt{1-2x-x^2} + 2\int\frac{1}{\sqrt{1-2x-x^2}}dx =$$

$$= \left(\tfrac{3}{2} + \tfrac{-1}{2}x\right)\sqrt{1-2x-x^2} + 2\int\frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 - (x+1)^2}}(x+1)'\,dx =$$

$$= \left(\tfrac{3}{2} + \tfrac{-1}{2}x\right)\sqrt{1-2x-x^2} + 2\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}} + c, \forall x\in\left]0, -1+\sqrt{2}\right[, \forall c\in\mathbb{R}.$$

sunt toate primitivele funcţiei f pe $\mathbb{I}$, familia de primitive fiind indexată după constanta $c\in\mathbb{R}$.

d) $\int\frac{1}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}dx, x\in\left]0,-1+\sqrt{2}\right[$.–A se vedea Curs

e) $\int\frac{1}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}}dx, x\in\left]0,\frac{3}{2}\right[$.- A se vedea Curs

○**1.5.5.Forma generală:** $\boxed{\int x^m(ax^n+b)^p\,dx, x\in\mathbb{I},}$ (7)

unde $a,b\in\mathbb{R}$ cu $ab\neq 0, m,n,p\in\mathbb{Q}$.

Rezolvare: Se face una din schimbarea de variabilă (substituţie Cebâşev)

a) dacă $p\in\mathbb{Z}$, atunci integrala (7) este de tip (3), şi se face

$\boxed{x = t^q,}$ (7′)

unde q este cel mai mic multiplu comun al numitorilor lui m şi n.

b) dacă $p\notin\mathbb{Z}$, $p = \frac{r}{s}$ ca fracţie ireductibilă cu $r\in\mathbb{Z}$ şi $s\in\mathbb{N}^*$ şi $\frac{m+1}{n}\in\mathbb{Z}$ atunci se face

$\boxed{ax^n + b = t^s.}$ (7″)

c) dacă $p\notin\mathbb{Z}$, $p = \frac{r}{s}$ ca fracţie ireductibilă cu $r\in\mathbb{Z}$ şi $s\in\mathbb{N}^*$ şi $\frac{m+1}{n}\notin\mathbb{Z}$ şi $\frac{m+1}{n} + p\in\mathbb{Z}$ atunci se face

$\boxed{\frac{ax^n+b}{x^n} = t^s \text{ (sau } a + bx^{-n} = t^s)}$ (7‴)

Se obţine o integrală ca în Secţiunea 1.3 în variabila t, se calculează şi se revine la substituţie.

○**Exerciţiul 10**.Se se calculeze:

a) $\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx, x\in\mathbb{I}$.- A se vedea Curs; **b)** $\int\frac{1}{x\sqrt{1-x^3}}dx, x\in]0,1[$.- A se vedea Curs

c) $\int\frac{1}{x^4\sqrt{1+x^2}}dx, x\in]0,+\infty[$. - A se vedea Curs

1.6. Integrale nedefinite (primitive) având ca integrant funcţii raţionale în e^x şi e^{-x}, respectiv în $\operatorname{ch} x$ şi $\operatorname{sh} x$, reductibile la cele din Secţiunea 1.4

Forma generală: $\boxed{\int R\left(e^x, e^{-x}\right) dx, x \in \mathbb{I}}$, chiar $\boxed{\int R\left(\operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x\right) dx, x \in \mathbb{I},}$

unde $R : \mathbb{I}_1 \times \mathbb{I}_2 \to \mathbb{R}, R\left(y_1, y_2\right) = \dfrac{P\left(y_1, y_2\right)}{Q\left(y_1, y_2\right)}$ este funcţie raţională în $y_1 = e^x, y_2 = e^{-x}$.

Rezolvare: Se face schimbarea de variabilă: $\begin{cases} \boxed{e^x = t}, \ t \in \mathbb{J} | \text{ se inversează} \\ x = \ln t, \ t \in \mathbb{J} | \text{ se diferenţiază} \\ dx = \frac{1}{t} dt \end{cases}$

Se obţine o integrală ca în Secţiunea 1.4. în variabila t, se calculează şi se revine la substituţie.

Exerciţiul 11. Să se calculeze

a) $\int \dfrac{1+e^x}{1+e^{2x}} dx, x \in \mathbb{R}$.

Rezolvare. etapa 1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1+e^x}{1+e^{2x}}$.

f este continuă pe $\mathbb{R} \Rightarrow f$ admite primitive pe $\mathbb{I} = \mathbb{R}$.

etapa 2. Se face schimbarea de variabilă de integrare: $\begin{cases} e^x = t, \ t \in \left]0, +\infty\right[| \text{ se inversează} \\ x = \ln t, \ t \in \left]0, +\infty\right[| \text{ se diferenţiază} \\ dx = \frac{1}{t} dt \end{cases}$

Se înlocuieşte$\Rightarrow \int \dfrac{1+t}{1+t^2} \cdot \dfrac{1}{t} dt = \int \left(\dfrac{1}{t} + \dfrac{-t+1}{1+t^2}\right) dt = \ln t - \frac{1}{2} \ln\left(1+t^2\right) + \operatorname{arctg} t + \widetilde{c}, \ \forall t \in \left]0, +\infty\right[, \forall \widetilde{c} \in \mathbb{R}$.

Se revine la substituţie$\Rightarrow \int \dfrac{1+e^x}{1+e^{2x}} dx = \ln e^x - \frac{1}{2} \ln\left(1+e^{2x}\right) + \operatorname{arctg} e^x + c, \ \forall x \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R}$ sunt toate primitivele funcţiei f pe $\mathbb{I} = \mathbb{R}$, familia de primitive fiind indexată după constanta $c \in \mathbb{R}$.

b) $\int \operatorname{ch}^3 x dx, x \in \mathbb{R}$.

Rezolvare. etapa 1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^3$.

f este continuă pe $\mathbb{R} \Rightarrow f$ admite primitive pe $\mathbb{I} = \mathbb{R}$.

etapa 2. Se face schimbarea de variabilă de integrare: $\begin{cases} e^x = t, \ t \in \left]0, +\infty\right[| \text{ se inversează} \\ x = \ln t, \ t \in \left]0, +\infty\right[| \text{ se diferenţiază} \\ dx = \frac{1}{t} dt \end{cases}$

Se înlocuieşte$\Rightarrow \int \left(\dfrac{t + \frac{1}{t}}{2}\right)^3 \cdot \dfrac{1}{t} dt = \frac{1}{8} \int \left(t^3 + 3t^2 \dfrac{1}{t} + 3t \dfrac{1}{t^2} + \dfrac{1}{t^3}\right) \cdot \dfrac{1}{t} dt =$

$$= \frac{1}{8} \int \left(t^2 + 3 + 3\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^4}\right) dt = \frac{1}{8} \left(\frac{t^3}{3} + 3t + 3\frac{t^{-1}}{-1} + \frac{t^{-3}}{-3}\right) + \widetilde{c}, \forall t \in \left]0, +\infty\right[, \forall \widetilde{c} \in \mathbb{R}.$$

Se revine la substituţie$\Rightarrow \int \operatorname{ch}^3 x dx = \frac{1}{8} \left(\dfrac{e^{3x}}{3} + 3e^x - 3e^{-x} - \dfrac{e^{-3x}}{3}\right) + c, \ \forall x \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R}$ sunt toate primitivele funcţiei f pe $\mathbb{I} = \mathbb{R}$, familia de primitive fiind indexată după constanta $c \in \mathbb{R}$.

1.7. Integrale nedefinite având ca integrant funcţii raţionale în $\cos x, \sin x$, reductibile la cele din Secţiunea 1.4

Forma generală: $\boxed{\int R(\cos x, \sin x)\, dx, x \in \mathbb{I},}$ (8)

unde $R : \mathbb{I}_1 \times \mathbb{I}_2 \to \mathbb{R}, R(y_1, y_2) = \dfrac{P(y_1, y_2)}{Q(y_1, y_2)}$ este funcţie raţională în $y_1 = \cos x, y_2 = \sin x$.

Rezolvare: I. În general, se face schimbarea de variabilă de integrare

$\boxed{\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, t \in \mathbb{J}}$ (8′)

unde $\mathbb{J}$ este un interval corespunzător ales. Se foloseşte

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t,\ t \in \mathbb{J} | \text{ se inversează} \\ x = 2 \operatorname{arctg} t,\ t \in \mathbb{J} | \text{ se diferenţiază} \\ dx = \dfrac{2}{1+t^2} dt \end{cases} \quad \text{şi} \quad \begin{cases} \cos x = \dfrac{1 - \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)^2}{1 + \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)^2}; \\ \sin x = \dfrac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)^2}; \end{cases}$$

II. În anumite situaţii particulare, se fac schimbările de variabilă de integrare:

a) dacă $R(-\cos x, -\sin x) = R(\cos x, \sin x)$, atunci se face

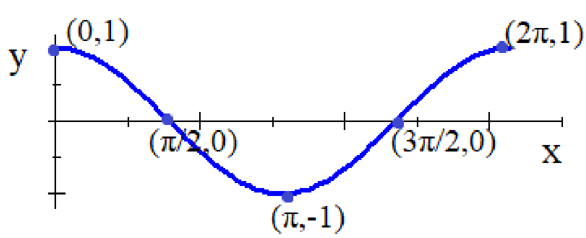
$\boxed{\operatorname{tg} x = t, t \in \mathbb{J}}$ (8″)

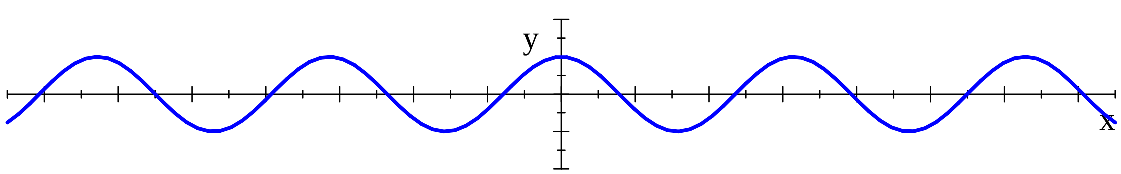
unde $\mathbb{J}$ este un interval corespunzător ales. Se foloseşte

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = t,\ t \in \mathbb{J} | \text{ se inversează} \\ x = \operatorname{arctg} t,\ t \in \mathbb{J} | \text{ se diferenţiază} \\ dx = \dfrac{1}{1+t^2} dt \end{cases} \quad \text{şi} \quad \begin{cases} \cos x = \pm \dfrac{1}{\sqrt{1 + (\operatorname{tg} x)^2}} \\ \sin x = \pm / \mp \dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + (\operatorname{tg} x)^2}}; . \end{cases}$$

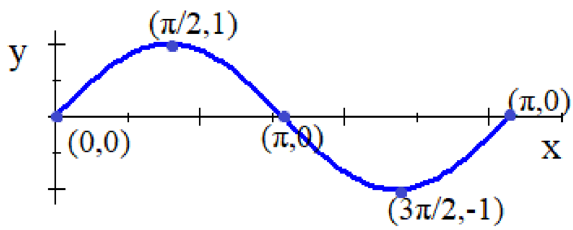
şi unde $\mathbb{J}$ este un interval corespunzător ales; semnele $+, -$ se aleg în funcţie de intervalul $\mathbb{I}$ parcurs de x din graficele funcţiilor $\cos$ şi $\sin$.

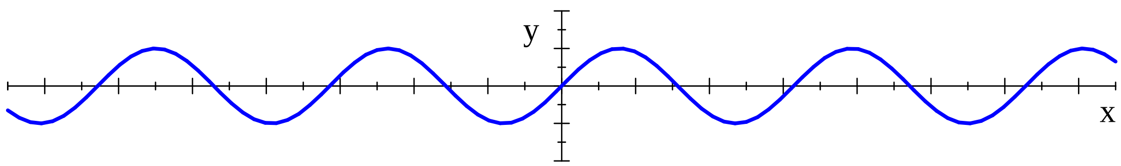
$\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$





$\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$





b) dacă $R(\cos x, -\sin x) = -R(\cos x, \sin x)$, atunci se face

$$\boxed{\begin{cases} \cos x = t,\ t \in \mathbb{J} | \text{ se inversează} \\ x = \arccos t,\ t \in \mathbb{J} | \text{ se diferenţiază} \\ dx = \dfrac{-1}{\sqrt{1-t^2}} dt \end{cases} \text{ sau} \begin{cases} \cos x = t,\ t \in \mathbb{J} | \text{ se diferenţiază} \\ -\sin x dx = dt. \end{cases}} \tag{8'''}$$

unde $\mathbb{J}$ este un interval corespunzător ales. Se foloseşte

$$\left\{ \sin x = \pm\sqrt{1-(\cos x)^2}; \right.$$

unde semnele $+$, $-$ se aleg în funcţie de intervalul $\mathbb{I}$ parcurs de x.

c) dacă $R(-\cos x, \sin x) = -R(\cos x, \sin x)$, atunci se face

$$\boxed{\begin{cases} \sin x = t,\ t \in \mathbb{J} | \text{ se inversează} \\ x = \arcsin t,\ t \in \mathbb{J} | \text{ se diferenţiază} \\ dx = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} \sin x = t,\ t \in \mathbb{J} | \text{ se diferenţiază} \\ \cos x dx = dt \end{cases}} \tag{8''''}$$

unde $\mathbb{J}$ este un interval corespunzător ales. Se foloseşte

$$\left\{ \cos x = \pm\sqrt{1-(\sin x)^2}; \right.$$

unde semnele $+$, $-$ se aleg în funcţie de intervalul $\mathbb{I}$ parcurs de x.

Se obţine o integrală ca în Secţiunea 1.4 în variabila t, se calculează şi se revine la substituţie.

Exerciţiul 12. Să se calculeze

a) $\int \dfrac{1}{3+5\cos x} dx, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Rezolvare. etapa 1. $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{3+5\cos x}$.

f este continuă pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow f$ admite primitive pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

etapa 2. Se determină integrala, aplicând teoria. Se observă că $R(y_1, y_2) = \dfrac{1}{3+5y_1}$.

Se face schimbarea de variabilă de integrare: $\begin{cases} \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t,\ t \in [0,1] | \text{ se inversează} \\ x = 2\operatorname{arctg} t,\ t \in [0,1] | \text{ se diferenţiază} \\ dx = \dfrac{2}{1+t^2}dt \end{cases}$

Se menţionează că $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \operatorname{tg}\frac{x}{2} \in [0,1]$.

Se înlocuieşte$\Rightarrow$ $F(t;\widetilde{c}) = \int \dfrac{1}{3+5\dfrac{1-t^2}{1+t^2}} \dfrac{2}{1+t^2}dt = \int \dfrac{1}{4-t^2}dt = -\int \dfrac{1}{t^2-4}dt =$

$= -\dfrac{1}{2\cdot 2}\ln\dfrac{2-t}{2+t} + \widetilde{c},\ \forall t \in [0,1], \forall \widetilde{c} \in \mathbb{R}.$

Se revine la substituţie$\Rightarrow$ $F(x;c) = -\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{2-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{2+\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + c,\ \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \forall c \in \mathbb{R}$

sunt toate primitivele funcţiei f pe $\mathbb{I} = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, familia de primitive fiind indexată după constanta $c \in \mathbb{R}$.

b) $\int \dfrac{1}{3+2\sin x}dx,\ x \in \mathbb{R}$-A se vedea Curs.

c) $\int \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x + 2\sin^2 x}dx,\ x \in \mathbb{R}$

Rezolvare. etapa 1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x + 2\sin^2 x} = \dfrac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}.$

f este continuă pe $\mathbb{R} \Rightarrow f$ admite primitive pe $\mathbb{R}$.

etapa 2. Se determină integrala, aplicând teoria. Se observă că $R(y_1, y_2) = \dfrac{y_2^2}{1+y_2^2}$.

modul 1. Cu schimbarea de variabilă de integrare: $\begin{cases} \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t,\ t \in \mathbb{J} | \text{ se inversează} \\ x = 2\operatorname{arctg} t,\ t \in \mathbb{J} | \text{ se diferenţiază} \\ dx = \dfrac{2}{1+t^2}dt \end{cases}$

Nu, deoarece este mult calcul.

modul 2. Deoarece $R(-\cos x, -\sin x) = \dfrac{(-\sin x)^2}{(-\cos x)^2 + 2(-\sin x)^2} = R(\cos x, \sin x)$

sau, deoarece $\int \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x + 2\sin^2 x}dx \overset{\text{formal}}{=} \int \dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{1+2\operatorname{tg}^2 x}dx \Rightarrow$

se face schimbarea de variabilă de integrare: $\begin{cases} \operatorname{tg} x = v,\ v \in \mathbb{J} | \text{ se inversează} \\ x = \operatorname{arctg} v,\ v \in \mathbb{J} | \text{ se diferenţiază} \\ dx = \dfrac{1}{1+v^2}dv \end{cases}$

Se înlocuieşte$\Rightarrow$

$$F(v;\widetilde{c}) = \int \frac{\dfrac{v^2}{1+v^2}}{\dfrac{1}{1+v^2} + 2\dfrac{v^2}{1+v^2}} \frac{1}{1+v^2}dv = \int \frac{v^2}{(1+2v^2)(1+v^2)}dv = \int \frac{1}{v^2+1}dv - \int \frac{1}{2v^2+1}dv =$$

$$= \int \frac{1}{v^2+1}dt - \frac{1}{2}\int \frac{1}{v^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}dv = \operatorname{arctg} v - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\operatorname{arctg} v\sqrt{2} + \widetilde{c},\ \forall v \in \mathbb{R}, \forall \widetilde{c} \in \mathbb{R}.$$

Se revine la substituţie$\Rightarrow$

$F(x;c) = x - \frac{1}{2}\sqrt{2}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg} x\right) + c, \forall x \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R}$

sunt toate primitivele funcţiei f pe $\mathbb{I} = \mathbb{R}$, familia de primitive fiind indexată după constanta $c \in \mathbb{R}$.

d) $\int \dfrac{1}{\sin x \cos^2 x}dx,\ x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[.$

Rezolvare. etapa 1. $f: \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{\sin x \cos^2 x}$.

f este continuă pe $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow f$ admite primitive pe $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

etapa 2. Se determină integrala, aplicând teoria. Se observă că $R(y_1, y_2) = \dfrac{1}{y_1^2 \cdot y_2}$.

modul 1. Se face schimbarea de variabilă de integrare: $\begin{cases} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t,\ t \in]0,1[\text{ se inversează} \\ x = 2 \operatorname{arctg} t,\ t \in]0,1[\text{ se diferenţiază} \\ dx = \dfrac{2}{1+t^2} dt \end{cases}$

Se înlocuieşte$\Rightarrow$ $F(t; \widetilde{c}) = \int \dfrac{1}{\dfrac{2t}{1+t^2} \cdot \left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2} \dfrac{2}{1+t^2} dt = \int \dfrac{\left(1+t^2\right)^2}{t\left(1-t^2\right)^2} dt =$

$= \int \left(\dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{(t-1)^2} - \dfrac{1}{(t+1)^2} \right) dt = \ln t + \dfrac{(t-1)^{-1}}{-1} - \dfrac{(t+1)^{-1}}{-1} + \widetilde{c}, \forall t \in]0,1[, \forall \widetilde{c} \in \mathbb{R}.$

Se revine la substituţie$\Rightarrow$ $F(x; c) = \ln\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) + \dfrac{\left(\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) - 1\right)^{-1}}{-1} - \dfrac{\left(\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) + 1\right)^{-1}}{-1} + c =$

$= \ln\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) - \dfrac{2}{\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)^2 + 1} + c,\ \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \forall c \in \mathbb{R}$

sunt toate primitivele funcţiei f pe $\mathbb{I} = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, familia de primitive fiind indexată după constanta $c \in \mathbb{R}$.

modul 2. Deoarece $R(\cos x, -\sin x) = \dfrac{1}{-\sin x \cos^2 x} = -R(\cos x, \sin x)$,

Se face schimbarea de variabilă de integrare: $\begin{cases} \cos x = v,\ v \in]0,1[\text{ se inversează} \\ x = \arccos v,\ v \in]0,1[\text{ se diferenţiază} \\ dx = \dfrac{-1}{\sqrt{1-v^2}} dv \end{cases}$

Se înlocuieşte$\Rightarrow$ $F(v; \widetilde{c}) = \int \dfrac{1}{\left(+\sqrt{1-v^2}\right) \cdot v^2} \dfrac{-1}{\sqrt{1-v^2}} dv = \int \dfrac{-1}{v^2\left(1-v^2\right)} dv =$

$= \int \left(-\dfrac{1}{v^2} - \dfrac{1}{2(v+1)} - \dfrac{1}{2(1-v)} \right) dv = -\dfrac{v^{-1}}{-1} + \frac{1}{2}\ln(v+1) + \frac{1}{2}\ln(1-v) + \widetilde{c},\ \forall v \in]0,1[, \forall \widetilde{c} \in \mathbb{R}.$

SAU, direct, deoarece

$\int \dfrac{1}{\sin x \cos^2 x} dx = \int \dfrac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} \sin x dx = \int \dfrac{1}{\left(1-\cos^2 x\right)\cos^2 x} \sin x dx,$

Se face schimbarea de variabilă de integrare: $\begin{cases} \cos x = v,\ v \in]0,1[\text{ se diferenţiază} \\ -\sin x dx = dv, v \in]0,1[\end{cases}$

Se înlocuieşte$\Rightarrow$ $F(v; \widetilde{c}) = \int \dfrac{1}{\left(1-v^2\right) \cdot v^2} (-1)\, dv = ...\boxdot$

Se revine la substituţie$\Rightarrow$

$F(x; c) = -\dfrac{\cos^{-1} x}{-1} + \frac{1}{2}\ln(\cos x + 1) + \frac{1}{2}\ln(1 - \cos x) + c, \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \forall c \in \mathbb{R}$

sunt toate primitivele funcţiei f pe $\mathbb{I} = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, familia de primitive fiind indexată după constanta $c \in \mathbb{R}$.

e) $\int \dfrac{1}{\left(3+\cos^2 x\right)\sin x} dx, x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$- A se vedea Curs

f) $\int \sin^3 x \cos^2 x dx, x \in \mathbb{R}$

Rezolvare. etapa 1.$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sin^3 x \cos^2 x$

f este continuă pe $\mathbb{R} \Rightarrow f$ admite primitive pe $\mathbb{R}$

etapa 2. Se determină integrala, aplicând teoria.

Se observă că f este de forma (8), cu $R(y_1, y_2) = y_1^2 \cdot y_2^3$.

modul 2. $\int \sin^3 x \cos^2 x dx = \int \sin^2 x \cos^2 x \sin x dx = \int \left(1 - \cos^2 x\right) \cos^2 x \sin x dx$

Se face schimbarea de variabilă de integrare $\begin{cases} \cos x = v,\, v \in [-1,1] | \text{ se diferenţiază} \\ -\sin x dx = 1 dv \end{cases}$

Se înlocuieşte$\Rightarrow F(v; \widetilde{c}) = -\int \left(1 - v^2\right) v^2 dv = -\dfrac{v^3}{3} + \dfrac{v^5}{5} + \widetilde{c},\ \forall v \in [-1,1], \forall \widetilde{c} \in \mathbb{R}.$

Se revine la substituţie$\Rightarrow F(x; c) = -\dfrac{\cos^3 x}{3} + \dfrac{\cos^5 x}{5} + c,\ \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \forall c \in \mathbb{R}$

sunt toate primitivele funcţiei f pe $\mathbb{I} = \mathbb{R}$, familia de primitive fiind indexată după constanta $c \in \mathbb{R}$.

g) $\int \dfrac{1}{(\sin x + \cos x)^2} dx, x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

Rezolvare. etapa 1. $f : \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{(\sin x + \cos x)^2}$

f este continuă pe $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow f$ admite primitive pe $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

etapa 2. Se determină integrala, aplicând teoria. Se observă că $R(y_1, y_2) = \dfrac{1}{(y_1 + y_2)^2}$.

modul 1. Se face schimbarea de variabilă de integrare: $\begin{cases} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t,\, t \in \mathbb{J} | \text{ se inversează} \\ x = 2 \operatorname{arctg} t,\, t \in \mathbb{J} | \text{ se diferenţiază} \\ dx = \dfrac{2}{1+t^2} dt \end{cases}$

Se înlocuieşte$\Rightarrow F(t; \widetilde{c}) = \int \dfrac{1}{\left(\dfrac{2t}{1+t^2} + \dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2} \dfrac{2}{1+t^2} dt$

$$= \int \frac{2\left(1+t^2\right)}{\left(2t + 1 - t^2\right)^2} dt = 2 \int \frac{t^2+1}{\left(t^2 - 2t - 1\right)^2} dt = ... = -2 \frac{t}{t^2 - 2t - 1} + \widetilde{c}, \forall t \in]0, 1[, \forall \widetilde{c} \in \mathbb{R}.$$

Se revine la substituţie$\Rightarrow F(x; c) = -2 \dfrac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)^2 - 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1} + c, \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \forall c \in \mathbb{R}$

sunt toate primitivele funcţiei f pe $\mathbb{I} = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, familia de primitive fiind indexată după constanta $c \in \mathbb{R}$.

modul 2. $R(-\cos x, -\sin x) = \dfrac{1}{(-\sin x - \cos x)^2} = \dfrac{1}{(\sin x + \cos x)^2} = R(\cos x, \sin x)$,

Se face schimbarea de variabilă de integrare: $\begin{cases} \operatorname{tg} x = v,\, v \in \mathbb{J} | \text{ se inversează} \\ x = \operatorname{arctg} v,\, v \in \mathbb{J} | \text{ se diferenţiază} \\ dx = \dfrac{1}{1+v^2} dv \end{cases}$

Se înlocuieşte$\Rightarrow F(v; \widetilde{c}) = \int \dfrac{1}{\left(\dfrac{+v}{\sqrt{1+v^2}} + \dfrac{+1}{\sqrt{1+v^2}}\right)^2} \dfrac{1}{1+v^2} dv = \int \dfrac{1}{(v+1)^2} dv =$

$$= \frac{(v+1)^{-1}}{-1} + \widetilde{c},\ \forall v \in]0, +\infty[, \forall \widetilde{c} \in \mathbb{R}.$$

Se revine la substituţie$\Rightarrow F(x; c) = \dfrac{(\operatorname{tg} x + 1)^{-1}}{-1} + c,\ \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \forall c \in \mathbb{R}$

sunt toate primitivele funcţiei f pe $\mathbb{I} = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, familia de primitive fiind indexată după constanta $c \in \mathbb{R}$.