SEMINAR NR. 11, REZOLVĂRI
Analiză matematică, AIA

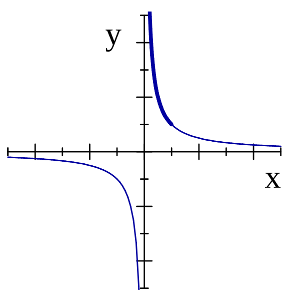
2. Integrala Riemann (definită, proprie) pentru $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Definiţia 1. $\int_a^b f(x)\,dx-$ definiţie, notaţii, interpretare- A se vedea Curs.
T 1.Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Dacă f este monotonă pe $[a, b]$ atunci $f \in \mathcal{R}([a, b])$.
T 2.Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Dacă f este monotonă pe porţiuni pe $[a, b]$ atunci $f \in \mathcal{R}([a, b])$.
T 3.Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Dacă f este continuă pe $[a, b]$ atunci $f \in \mathcal{R}([a, b])$.
T 4. Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Dacă $f \in \mathcal{R}([a, b])$ atunci f este mărginită pe $[a, b]$.
T 5. (**Lebesgue**) Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. $f \in \mathcal{R}([a, b]) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} (i)\ \ f \text{ este mărginită pe } [a,b]\,; \\ (ii)\ \ f \text{ este continuă aproape peste tot pe } [a,b]\,. \end{cases}$$

Observaţia 1.
a) <u>Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ nu este mărginită pe $[a, b]$ atunci $f \notin \mathcal{R}([a, b])$.</u>

De exemplu, $f : [0, 1] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{dacă } x \in \,]0, 1] \\ 1, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$



nu este mărginită pe $[0, 1]$, deci $f \notin \mathcal{R}([0, 1])$.

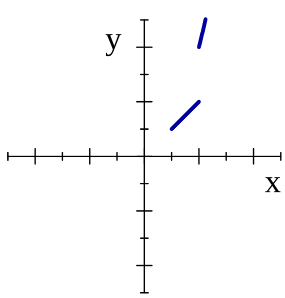
b) <u>Există funcţii mărginite pe $[a, b]$, dar care nu sunt integrabile pe $[a, b]$.</u>

De exemplu, *funcţia lui Dirichlet* $f : [0, 1] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ 0, & \text{dacă } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

este mărginită pe $[0, 1]$, dar nu este integrabilă Riemann pe $[0, 1]$. Justificarea nu se dă aici.

c) <u>Există integrabile Riemann pe $[a, b]$, dar care nu sunt continue pe $[a, b]$.</u>

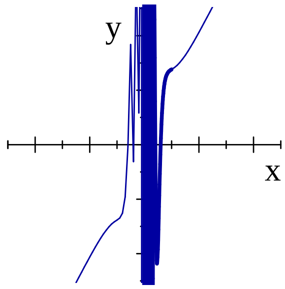
De exemplu, $f : [1, 3] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \in [1, 2] \\ x^2, & \text{dacă } x \in \,]2, 3] \end{cases}$



este integrabilă (deoarece este monotonă pe cele două porţiuni) dar nu este continuă în 2.

d) <u>Există funcţii care admit primitive pe $[a, b]$, dar care nu sunt integrabile pe $[a, b]$.</u>

De exemplu, $f : [0, 1] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x \cos \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} \sin \frac{1}{x^2}, & \text{dacă } x \in \,]0, 1] \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$



nu este mărginită pe $[0,1]$, deci $f \notin \mathcal{R}([0,1])$. Dar f admite primitive pe $[0,1]$, precum funcţia $F:[0,1] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, F(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x^2}, & \text{dacă } x \in]0,1] \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$.

e) Există funcţii f, g care nu sunt integrabile pe $[a,b]$ dar care au $f+g, f \cdot g$ integrabile pe $[a,b]$.
De exemplu,

$f:[-1,1] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in [-1,1] \cap \mathbb{Q} \\ -1, & \text{dacă } x \in [-1,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$; $g(x) = \begin{cases} -1, & \text{dacă } x \in [-1,1] \cap \mathbb{Q} \\ 1, & \text{dacă } x \in [-1,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

$f+g:[-1,1] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (f+g)(x) = 0.$

$f \cdot g:[-1,1] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (f \cdot g)(x) = -1.$

Observaţia 2. Pentru $f:[a,b] \to \mathbb{R}, f \in \mathcal{R}([a,b])$, în ipotezele din curs, se pot utiliza următoarele metode de **calcul** ale $\int_a^b f(x)\,dx$

-formula Leibniz-Newton: $\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \overset{\text{notăm}}{=} F(x)|_{x=a}^{x=b}.}$ (1)

-formula de integrare prin părţi: $\boxed{\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)\,v(x)|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx.}$ (2)

-fomule de schimbare de variabile: $\begin{cases} x \\ dx \\ \text{capete} \end{cases}$

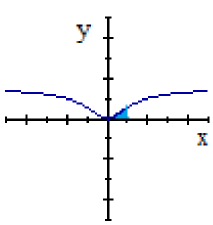
-altele, printre care şi metode numerice (calculator).

Exerciţiul 1. Să se calculeze

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{x^2+1}}dx$;**b)** $\displaystyle\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}dx$;**c)** $\displaystyle\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}dx$;**d)** $\displaystyle\int_{-1}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\arcsin x}{x^2}dx$;**e)** $\displaystyle\int_0^2 \min\left(x, \frac{2}{1+x^2}\right)dx.$

Rezolvare. a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{x^2+1}}dx$;

etapa 1. $f:[0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{x^2+1}}$.



f este bine definită pe intervalul compact $[0,1]$ şi continuă pe $[0,1] \Rightarrow f \in \mathcal{R}([0,1])$.

etapa 2. Calcul.

<u>modul 1.</u> Se determină o primitivă pentru f pe $[0,1]$ cu teorema integrării prin părţi în integrala nedefinită şi apoi se aplică teorema Leibniz-Newton, ş.a.

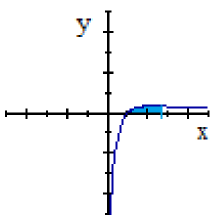
$$F(x;c)=\int\frac{x\operatorname{arctg}x}{\sqrt{x^2+1}}dx=\int(\operatorname{arctg}x)\left(\sqrt{x^2+1}\right)'dx=(\operatorname{arctg}x)\left(\sqrt{x^2+1}\right)-\int(\operatorname{arctg}x)'\left(\sqrt{x^2+1}\right)dx=$$
$$=\sqrt{x^2+1}\operatorname{arctg}x-\int\frac{1}{x^2+1}\sqrt{x^2+1}dx=\sqrt{x^2+1}\operatorname{arctg}x-\int\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx=$$
$$=\sqrt{x^2+1}\operatorname{arctg}x-\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)+c,\forall x\in[0,1],\forall c\in\mathbb{R}.$$
$$\int_0^1\frac{x\operatorname{arctg}x}{\sqrt{x^2+1}}dx=\left(\sqrt{x^2+1}\operatorname{arctg}x-\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)\right)\Big|_{x=0}^{x=1}=$$
$$=\sqrt{1^2+1}\operatorname{arctg}1-\ln\left(1+\sqrt{1^2+1}\right)-\sqrt{0^2+1}\operatorname{arctg}0+\ln\left(0+\sqrt{0^2+1}\right)=\frac{\pi\sqrt{2}}{4}-\ln\left(1+\sqrt{2}\right).$$

<u>modul 2.</u> Se aplică reguli de calcul direct în integrala Riemann. Se calculează integrala cu teorema integrării prin părţi în integrala Riemann ş.a.

$$\int_0^1\frac{x\operatorname{arctg}x}{\sqrt{x^2+1}}dx=\int_0^1(\operatorname{arctg}x)\left(\sqrt{x^2+1}\right)'dx=(\operatorname{arctg}x)\left(\sqrt{x^2+1}\right)\Big|_{x=0}^{x=1}-\int_0^1(\operatorname{arctg}x)'\left(\sqrt{x^2+1}\right)dx=$$
$$=\sqrt{1^2+1}\operatorname{arctg}1-\sqrt{0^2+1}\operatorname{arctg}0-\int_0^1\frac{1}{x^2+1}\sqrt{x^2+1}dx=\sqrt{2}\frac{\pi}{4}-0-\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx=$$
$$=\frac{\pi\sqrt{2}}{4}-\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)\Big|_{x=0}^{x=1}=\frac{\pi\sqrt{2}}{4}-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)+0=\frac{\pi\sqrt{2}}{4}-\ln\left(1+\sqrt{2}\right).$$

b) $\displaystyle\int_1^e\frac{\sin(\ln x)}{x}dx$;

<u>etapa 1.</u> $f:[1,e]\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{\sin(\ln x)}{x}$.



f este bine definită pe intervalul compact $[1,e]$ şi continuă pe $[1,e]\Rightarrow f\in\mathcal{R}([1,e])$.

<u>etapa 2.</u> Calcul.

<u>modul 1.</u> •Se determină o primitivă pentru f pe $[1,e]$, $F(x;c)=\int\dfrac{\sin(\ln x)}{x}dx$.

Se face schimbarea de variabilă de integrare în integrala nedefinită

$$\begin{cases}\ln x=t,\ t\in\mathbb{J}|\text{ se diferenţiază}\\ \frac{1}{x}dx=dt\end{cases}$$

Se înlocuieşte$\Rightarrow\int\sin t\,dt=-\cos t+c,\forall t\in\mathbb{J},\forall c\in\mathbb{R}$.

Se revine la substituţie$\Rightarrow\int\dfrac{\sin(\ln x)}{x}dx=-\cos(\ln x)+c,\forall x\in[1,e],\forall c\in\mathbb{R}$.

•Se aplică teorema Leibniz-Newton

$$\int_1^e\frac{\sin(\ln x)}{x}dx=(-\cos(\ln x))|_{x=1}^{x=e}=-\cos(\ln e)+\cos(\ln 1)=-\cos 1+\cos 0=-\cos 1+1.$$

<u>modul 2.</u> Se aplică reguli de calcul direct în integrala Riemann. Se calculează integrala cu teorema schimbării de variabilă în integrala Riemann ş.a.

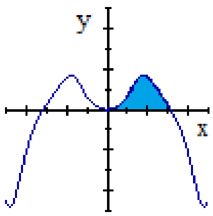
Se face schimbarea de variabilă de integrare în integrala definită

$$\begin{cases} \ln x = t\ ,\ t \in \mathbb{J} | \text{ se diferenţiază} \\ \frac{1}{x}dx = dt \\ \text{capete: } \begin{cases} x = 1 \Rightarrow t = \ln 1 = 0 \\ x = e \Rightarrow t = \ln e = 1 \end{cases} \end{cases}$$

$\displaystyle\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}dx = \int_0^1 \sin t dt = \left(-\cos t\right)\Big|_{t=0}^{t=1} = -\cos 1 + \cos 0 = -\cos 1 + 1.$

c) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx;$

etapa 1. $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{x\sin x}{1+\cos^2 x}.$



f este bine definită pe intervalul compact $[0,\pi]$ şi continuă pe $[0,\pi] \Rightarrow f \in \mathcal{R}([0,\pi])$.

etapa 2. Calcul

modul 1. f este continuă pe $[0,\pi] \Rightarrow f$ admite primitive pe $[0,\pi]$.

Funcţia f nu este raţională în $\cos x, \sin x$, deoarece apare şi x liber. Atunci nu se pot aplica substituţiile din seminarul anterior, pentru a determina o primitivă (f admite primitive pe $[0,\pi]$, deoarece f este continuă pe $[0,\pi]$, dar aceste primitive nu pot fi exprimate cu funcţii elementare).

modul 2. Se aplică alte reguli de calcul în integrala Riemann. Se face schimbarea de variabilă de integrare în integrala definită

$$\begin{cases} x = \pi - t\ , | \text{ se diferenţiază} \\ dx = -dt \\ \text{capete: } \begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = \pi \\ x = \pi \Rightarrow t = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Se înlocuieşte$\Rightarrow \mathcal{I} = \displaystyle\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx \overset{\mathcal{I} \text{ e numar}}{=} \int_\pi^0 \frac{(\pi - t)\sin(\pi - t)}{1+\cos^2(\pi - t)}(-dt) =$

$= \displaystyle\int_0^\pi \frac{\pi \sin(\pi - t)}{1+\cos^2(\pi - t)}dt - \int_0^\pi \frac{t\sin(\pi - t)}{1+\cos^2(\pi - t)}dt \ln t = \int_0^\pi \frac{\pi \sin t}{1+\cos^2 t}dt - \int_0^\pi \frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}dt =$

$= \pi \displaystyle\int_0^\pi \frac{(\cos t)'}{1+\cos^2 t}dt - \mathcal{I} \Rightarrow$

$\mathcal{I} = \dfrac{\pi}{2}\operatorname{arctg}(\cos t)\Big|_{t=0}^{t=\pi} = \dfrac{\pi}{2}\left(\operatorname{arctg}(\cos\pi) - \operatorname{arctg}(\cos 0)\right) = \dfrac{\pi}{2}\left(\operatorname{arctg}(-1) - \operatorname{arctg}(1)\right) = \dfrac{\pi^2}{4}.$

Se menţionează că

$\sin(\pi - t) = \underbrace{\sin\pi}_{=0}\cos t - \underbrace{\cos\pi}_{=.1}\sin t = \sin t$ şi $\cos(\pi - t) = \underbrace{\cos\pi}_{=-1}\cos t + \underbrace{\sin\pi}_{=.0}\sin t = -\cos t.$

Se menţionează şi că $\displaystyle\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \int_0^\pi \frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}dt.$

Exerciţiul 2. Utilizând teorema lui Lebesgue, să se studieze care dintre următoarele funcţii sunt integrabile Riemann

a) $f:[0,2]\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} 2, & \text{dacă } x=0 \\ e^x, & \text{dacă } 0<x<1 \\ x-1, & \text{dacă } 1\le x\le 2 \end{cases}$

(în acest caz să se calculeze $\int_0^2 f(x)\,dx$);

b) $f:[0,2]\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} x^3, & \text{dacă } 0\le x<1 \\ x^2, & \text{dacă } 1\le x\le 2 \end{cases}$

(în acest caz să se calculeze $\int_0^2 f(x)\,dx$);

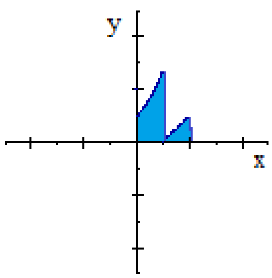
c) $f:[1,3]\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} 1, & \text{dacă } 0\le x<2 \\ 2, & \text{dacă } 2< x\le 3 \end{cases}$

(în acest caz să se calculeze $\int_1^3 f(x)\,dx$);

d) $f:[-1,1]\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} e^{x+1}, & \text{dacă } -1\le x\le 0 \\ 1+x^2, & \text{dacă } 0< x\le 1 \end{cases}$

(în acest caz să se calculeze $\int_{-1}^1 f(x)\,dx$).

Rezolvare.a) $f:[0,2]\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} 2, & \text{dacă } x=0 \\ e^x, & \text{dacă } 0<x<1 \\ x-1, & \text{dacă } 1\le x\le 2 \end{cases}$



Din grafic, se observă că
$\cdot f$ este mărginită pe $[0,2]$, deoarece
$0\le f(x)<e, \forall x\in[0,2]$
$\cdot f$ este continuă a.p.t. pe $[0,2]$, deoarece
$x_1=0, x_2=1$ sunt punctele de discontinuitate
Atunci, conform Teoremei lui Lebesgue$\Rightarrow f\in\mathcal{R}([0,2])$. Mai mult,

$$\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^1 e^x dx+\int_1^2(x-1)\,dx=(e^x)\Big|_{x\to 0}^{x\to 1}+\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Bigg|_{x=1}^{x=2}=e-\frac{1}{2}.$$

T 6.Fie $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$. Dacă $f,g\in\mathcal{R}([a,b])$ şi
$f(x)\le g(x), \forall x\in[a,b]$, atunci $\int_a^b f(x)\,dx\le\int_a^b g(x)\,dx$.

C 1.Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Dacă $f\in\mathcal{R}([a,b])$ şi
$f(x)\ge 0, \forall x\in[a,b]$, atunci $\int_a^b f(x)\,dx\ge 0$.

C 2.Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Dacă $f\in\mathcal{R}([a,b])$ atunci $|f|\in\mathcal{R}([a,b])$ şi
$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|\le\int_a^b|f(x)|\,dx$.

C 3.(**Teorema 1 de medie**) Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Dacă $f\in\mathcal{R}([a,b])$ şi
$m\le f(x)\le M, \forall x\in[a,b]$, atunci $m(b-a)\le\int_a^b f(x)\,dx\le M(b-a)$.

Exerciţiul 3. Fără a calcula integralele, să se arate că:
a) $\sqrt{10} \leq \int_{-4}^{-3} \sqrt{x^2+1}dx \leq \sqrt{17}$;**b)** $0 \leq \int_{-\frac{1}{2}}^{0} x\ln\left(1-x^2\right)dx \leq \frac{1}{4}\ln\frac{4}{3}$;
c) $\frac{1}{3} \leq \int_4^7 \frac{x-3}{x+5}dx \leq 1$;**d)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\sin x}dx \leq \frac{\pi}{2}$.
Rezolvare.a) Fie $f:[-4,3]\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{x^2+1}$. Deoarece
$\exists f':[-4,-3]\to\mathbb{R}, f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ şi $f'(x)<0, \forall x\in[-4,-3] \Rightarrow$
•tabel, m, M sau
•f este strict descrescătoare pe $[-4,-3]$ şi
$f(-3)\leq f(x)\leq f(-4), \forall x\in[-4,-3] \Rightarrow$
$\sqrt{10}\leq\sqrt{x^2+1}\leq\sqrt{17}, \forall x\in[-4,-3] \overset{C3}{\Rightarrow} \sqrt{10}\leq\int_{-4}^{-3}\sqrt{x^2+1}dx\leq\sqrt{17}$.
b) Fie $f:\left[-\frac{1}{2},0\right]\to\mathbb{R}, f(x)=x\ln\left(1-x^2\right)$. Deoarece
$\exists f':\left[-\frac{1}{2},0\right]\to\mathbb{R}, f'(x)=\ln\left(1-x^2\right)+x\dfrac{-2x}{1-x^2}$ şi $f'(x)<0, \forall x\in\left[-\frac{1}{2},0\right] \Rightarrow$
•tabel, m, M sau
•f este strict descrescătoare pe $\left[-\frac{1}{2},0\right]$ şi
$f(0)\leq f(x)\leq f\left(-\frac{1}{2}\right), \forall x\in\left[-\frac{1}{2},0\right] \Rightarrow$
$0\leq x\ln\left(1-x^2\right)\leq -\frac{1}{2}\ln\frac{3}{4}, \forall x\in\left[-\frac{1}{2},0\right] \overset{C3}{\Rightarrow} 0\leq\int_{-\frac{1}{2}}^{0} x\ln\left(1-x^2\right)dx\leq\frac{1}{4}\ln\frac{4}{3}$.

Exerciţiul 4. Fără a calcula integralele, să se compare:
a) $\int_1^2 \ln(1+x)\,dx$ şi $\int_1^2 \frac{x}{x+1}dx$; **b)** $\int_2^{10} x\,\mathrm{arctg}\,x dx$ şi $\int_2^{10} \ln\left(1+x^2\right)dx$.
Rezolvare.a) Fie $f:]-1,+\infty[\to\mathbb{R}, f(x)=\ln(1+x)-\dfrac{x}{x+1}$. Deoarece
$\exists f':]-1,+\infty[\to\mathbb{R}, f'(x)=\dfrac{x}{(x+1)^2}$ şi $f'(x)>0, \forall x\in]-1,+\infty[\Rightarrow$
•tabel sau
•f este strict crescătoare pe $]-1,+\infty[$ şi
$f(0)\leq f(x), \forall x\in]-1,+\infty[\Rightarrow$
$\dfrac{x}{x+1}\leq\ln(1+x), \forall x\in[1,2]\subset]-1,+\infty[\overset{T1}{\Rightarrow} \int_1^2\dfrac{x}{x+1}dx\leq\int_1^2\ln(1+x)\,dx$.
b) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x\,\mathrm{arctg}\,x-\ln\left(1+x^2\right)$. Deoarece
$\exists f':\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f'(x)=\mathrm{arctg}\,x-\dfrac{x}{1+x^2}, \exists f'':\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f''(x)=\dfrac{2x^2}{(1+x^2)^2}$ şi
$f''(x)>0, \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow$
•tabel, m, M sau
•f' este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ şi
$f'(0)\leq f'(x), \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow 0\leq f'(x), \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow$
f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ şi
$f(0)\leq f(x), \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow$
$\ln\left(1+x^2\right)\leq x\,\mathrm{arctg}\,x, \forall x\in[2,10]\subset\mathbb{R} \overset{T1}{\Rightarrow} \int_2^{10}\ln\left(1+x^2\right)dx\leq\int_2^{10}x\,\mathrm{arctg}\,x dx$.

Def. pentru integrale cu limite variabile de integrare-A se vedea Curs.

$F : [a,b] \to \mathbb{R}, F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

T 7. Dacă $f \in \mathcal{R}([a,b])$ atunci F este continuă pe $[a,b]$.

T 8.Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Dacă $f \in \mathcal{R}([a,b])$ şi f este continuă în $x_0 \in [a,b]$, atunci F este derivabilă în x_0 şi

$F'(x_0) = f(x_0)$.

C 4. Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Dacă f este continuă pe $[a,b]$ atunci f admite primitive pe $[a,b]$ şi o primitivă este

$F : [a,b] \to \mathbb{R}, F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$

Exerciţiul 5. Determinaţi punctele de extrem local pentru

$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, F(x) = \int_0^x e^{t^2}\left(t^2 - 2\right) dt.$

Rezolvare. Conform $C4 \Rightarrow F$ este o primitivă pentru funcţia continuă

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^{x^2}\left(x^2 - 2\right),$

adică F este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $F'(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Atunci

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$F'(x)$	$+$	$+++$	0	$---$	0	$+++$	$+$
$F(x)$	$\nearrow$	$\nearrow\nearrow\nearrow$		$\searrow\searrow\searrow$		$\nearrow\nearrow\nearrow$	$\nearrow$

Deci $-\sqrt{2}$ este punct de maxim local pentru f, cu $F\left(-\sqrt{2}\right) = \int_0^{-\sqrt{2}} e^{t^2}\left(t^2 - 2\right) dt,$

iar $\sqrt{2}$ este punct de minim local pentru f, cu $F\left(\sqrt{2}\right) = \int_0^{\sqrt{2}} e^{t^2}\left(t^2 - 2\right) dt.$

Valorile de maxim şi de minim se determină cu metode numerice.

Exerciţiul 6 Să se studieze dacă

$G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, G(x) = \int_0^{x^3} e^{t^2} dt$

este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi, dacă da, să se determine derivata.

Rezilvare. Conform $C4 \Rightarrow F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, F(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$

este o primitivă pentru funcţia continuă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^{x^2}$,

adică F este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $F'(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Mai mult,

$G(x) = F\left(x^3\right) - F(0), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow G$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi

$G'(x) = F'\left(x^3\right) \cdot 3x^2 - 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow G'(x) = f\left(x^3\right) \cdot 3x^2 - 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$G'(x) = e^{x^6} \cdot 3x^2 - 0, \forall x \in \mathbb{R}.$

Exerciţiul 7. Să se arate că $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\int_0^{\sin x} e^{t^2} dt}{\int_0^{\operatorname{tg} x} e^{t^2} dt} = -1.$

Rezolvare. Conform $C4 \Rightarrow F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, F(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$

este o primitivă pentru funcţia continuă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^{x^2}$,

adică F este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $F'(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Fie $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, G(x) = \int_0^{\sin x} e^{t^2} dt$ şi $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, H(x) = \int_0^{\operatorname{tg} x} e^{t^2} dt$. Mai mult,

$$\left.\begin{array}{l} G(x)=F(\sin x)-F(0)\,,\forall x\in\mathbb{I} \\ H(x)=F(\operatorname{tg} x)-F(0)\,,\forall x\in\mathbb{I}\end{array}\right\}\Rightarrow G,H \text{ sunt derivabile pe } \mathbb{R} \text{ şi}$$

$$\left.\begin{array}{l} G'(x)=(F'(\sin x))\cdot\cos x-0,\forall x\in\mathbb{I} \\ H'(x)=(F'(\operatorname{tg} x))\cdot\frac{1}{\cos^2 x}-0,\forall x\in\mathbb{I}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to\pi}\frac{G'(x)}{H'(x)}=\lim_{x\to\pi}\frac{(f(\sin x))\cdot\cos x}{(f(\operatorname{tg} x))\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}=\lim_{x\to\pi}\frac{e^{\sin^2 x}\cdot\cos x}{e^{\operatorname{tg}^2 x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}=-1\Rightarrow\lim_{x\to\pi}\frac{\displaystyle\int_0^{\sin x}e^{t^2}dt}{\displaystyle\int_0^{\operatorname{tg} x}e^{t^2}dt}=-1.$$

Exerciţiul 8. Fie $f:[0,+\infty[\,\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă. Să se studieze continuitatea şi derivabilitatea funcţiei

$$F:\,]0,+\infty[\,\to\mathbb{R}, F(x)=\int_{\frac{1}{x}}^{x}f(t)\,dt.$$

○ **Aplicaţii ale integralei definite**- A se vedea Curs