SEMINAR NR. 12, REZOLVĂRI
Analiză matematică, AIA

Teoria integrabilităţii pentru $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

1. Integrale curbilinii

1.1. Integrale curbilinii de speţa 1 (în raport cu elementul de arc) pentru $n = 2, 3$

Teorema 1.(**de reducere a unei integrale curbilinii de speţa 1 la o integrală Riemann**)
a) $\boxed{n = 2.}$ Dacă

$$\left.\begin{array}{l}\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (x(t), y(t)) \text{ este curbă netedă}\\ f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \text{ cu } \operatorname{Im}\gamma \subset D \text{ este continuă}\end{array}\right\} \text{atunci } f \in \mathcal{R}(\gamma; 1) \text{ şi}$$

$$\boxed{\int_\gamma f(x,y)\,ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt.}$$

$\boxed{ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt}$ se numeşte *element de arc.*

Mai mult, $\boxed{\operatorname{lung}(\gamma) = \int_\gamma 1 \cdot ds = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt.}$

b) $\boxed{n = 3.}$ Dacă

$$\left.\begin{array}{l}\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3, \gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)) \text{ este curbă netedă}\\ f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \text{ cu } \operatorname{Im}\gamma \subset D \text{ este continuă}\end{array}\right\} \text{atunci } f \in \mathcal{R}(\gamma; 1) \text{ şi}$$

$$\boxed{\int_\gamma f(x,y,z)\,ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt.}$$

$\boxed{ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt}$ se numeşte *element de arc.*

Mai mult, $\boxed{\operatorname{lung}(\gamma) = \int_\gamma 1 \cdot ds = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt.}$

Observaţie. Au loc proprietăţile **de liniaritate în raport cu integrantul** (**aditivitatea, omogeneitatea** în raport cu funcţia integrant) **a integralei curbilinii de speţa întâi**, **de invarianţă la schimbarea de parametru**, legată de **integrala drumului opus**, **de aditivitate a integralei curbilinii de speţa întâi în raport cu drumul**.

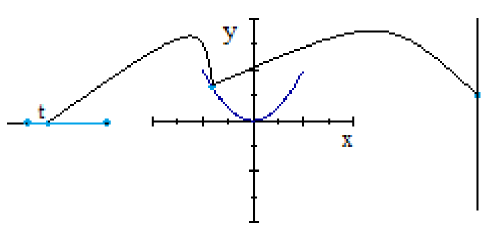
De asemenea, au loc teoremele legate **de masa unui fir material, de coordonatele centrului de greutate ale unui fir material**- A se vedea Curs.

Exerciţiul 1. Să se calculeze

a) $\int_\gamma xyds$, unde un reprezentant al curbei γ are ecuaţia explicită $\operatorname{Im}\gamma : \{y = x^2, x \in [-1, 1]\,.$

Rezolvare. etapa 1. Se studiază curba

•Se parametrizează un reprezentant al curbei, deoarece aceasta nu este dată parametric.



Aleg $\operatorname{Im}\gamma : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \end{cases}, t \in [-1, 1]\,,$ adică

$\gamma : [-1,1] \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) = \left(\underbrace{t}_{x(t)}, \underbrace{t^2}_{y(t)}\right).$

Există şi alţi posibili reprezentanţi, precum

$\mathrm{Im}\gamma : \begin{cases} x(t) = t^3 \\ y(t) = t^6 \end{cases}, t \in [-1,1], \ \mathrm{Im}\gamma : \begin{cases} x(t) = t^5 \\ y(t) = t^{10} \end{cases}, t \in [-1,1],$ ş.a.m.d

•Se studiază dacă γ este curbă netedă. Este, deoarece

$$\begin{cases} \exists \gamma' : [-1,1] \to \mathbb{R}^2, \gamma'(t) = \left(\underbrace{1}_{x'(t)}, \underbrace{2t}_{y'(t)}\right). \\ \gamma'\text{- este continuă pe } [-1,1] \text{ şi } (x'(t))^2 + (y'(t))^2 \neq 0, \forall t \end{cases}$$

etapa 2. Se studiază integrantul f.

$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = xy.$

$D = \mathbb{R}^2, \mathrm{Im}\,\gamma \subset D. f$ este continuă pe $\mathbb{R}^2$.

etapa 3. Se determină $\mathcal{I} = \int_\gamma xyds$, aplicând Teorema de reducere, caz $n = 2$.

Se calculează elementul de arc

$ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt \Rightarrow ds = \sqrt{(1)^2 + (2t)^2}dt = \sqrt{1+4t^2}dt.$

Se înlocuieşte în formulă

$\mathcal{I} = \int_\gamma xyds = \int_{-1}^1 t \cdot t^2 \cdot \sqrt{1+4t^2}dt = \int_{-1}^1 t^3 \cdot \sqrt{1+4t^2}dt = 0.$

În plus, dacă s-ar fi cerut,

$\mathrm{lung}(\gamma) = \int_\gamma 1 \cdot ds = \int_{-1}^1 \sqrt{1+4t^2}dt = 2\int_{-1}^1 \sqrt{t^2 + \frac{1}{4}}dt =$

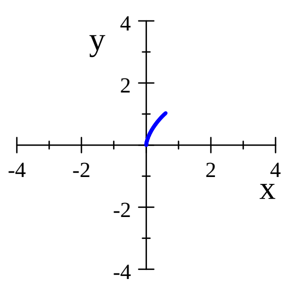
$$= 2 \cdot \frac{1}{2}\left[t\sqrt{t^2+\frac{1}{4}} + \frac{1}{4}\ln\left(t + \sqrt{t^2+\frac{1}{4}}\right)\right]\Bigg|_{t=-1}^{t=1} = \sqrt{5} + \frac{1}{4}\ln\frac{1+\sqrt{\frac{5}{4}}}{-1+\sqrt{\frac{5}{4}}} > 0.$$

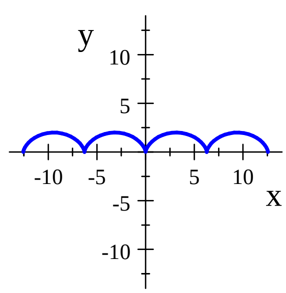
b) $\int_\gamma \sqrt{y(2-y)}ds$, unde un reprezentant al curbei γ are ecuaţiile parametrice

$\mathrm{Im}\gamma : \begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = 1 - \cos t \end{cases}, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$

Rezolvare. etapa 1. Se studiază curba

•Se parametrizează un reprezentant al curbei, dacă aceasta nu este dată parametric. Aici este dată, adică





(este o porţiune din cicloida cu $a = 1$ desenată alături, pentru $t \in [-4\pi, 4\pi]$)

$\gamma : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) = \left(\underbrace{t - \sin t}_{x(t)}, \underbrace{1 - \cos t}_{y(t)}\right).$

•Se studiază dacă γ este curbă netedă. Este, deoarece

$$\begin{cases} \exists \gamma' : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2, \gamma'(t) = \left(\underbrace{1-\cos t}_{x'(t)}, \underbrace{\sin t}_{y'(t)}\right) = (1-\cos t, \sin t) \\ \gamma'\text{- este continuă pe } \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ şi } (x'(t))^2 + (y'(t))^2 \neq 0, \forall t \end{cases}$$

etapa 2. Se studiază integrantul f.

$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \sqrt{y(2-y)}$.

$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \in [0,2]\right\}$,

$\operatorname{Im}\gamma \subset D$ (pentru $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \sin t \in [0,1] \subseteq [0,2]$).$f$ este continuă pe D.

etapa 3. Se determină $\mathcal{I} = \int_\gamma \sqrt{y(2-y)}ds$, aplicând Teorema de reducere, caz $n = 2$.

Se calculează elementul de arc $ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt \Rightarrow$

$$ds = \sqrt{(1-\cos t)^2 + (\sin t)^2}dt = \sqrt{2 - 2\cos t}dt = 2\left|\sin \tfrac{t}{2}\right| dt.$$

Se înlocuieşte în formulă

$$\mathcal{I} = \int_\gamma \sqrt{y(2-y)}ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(1-\cos t)(2-1+\cos t)} \cdot 2\left|\sin \tfrac{t}{2}\right| dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin t| \cdot 2\left|\sin \tfrac{t}{2}\right| dt =$$

$$\overset{t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}{=} 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cdot \sin \tfrac{t}{2} dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \tfrac{t}{2} \cdot \cos \tfrac{t}{2} dt = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin \tfrac{t}{2}\right)^2 \cdot \left(\sin \tfrac{t}{2}\right)' dt =$$

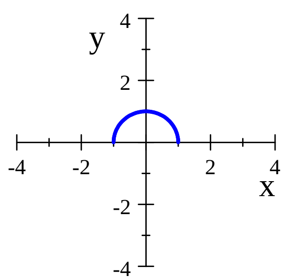
$$= 8 \left.\frac{\left(\sin \frac{t}{2}\right)^3}{3}\right|_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} = 8\frac{\left(\sin \frac{\pi}{4}\right)^3}{3} - \frac{(\sin 0)^3}{3} = 8\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3}{3} = \tfrac{2\sqrt{2}}{3}.$$

c) $\int_\gamma \left(2 + x^2 y\right) ds$, unde imaginea curbei γ este semicercul unitate superior parcurs direct.

Rezolvare. etapa 1. Se studiază curba

•Se parametrizează un reprezentant al curbei, deoarece aceasta nu este dată parametric.

$\operatorname{Im}\gamma : \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases}, t \in [0, \pi],$ adică



$$\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) = \left(\underbrace{\cos t}_{x(t)}, \underbrace{\sin t}_{y(t)}\right).$$

•Se studiază dacă γ este curbă netedă. Este, deoarece

$$\begin{cases} \exists \gamma' : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2, \gamma'(t) = \left(\underbrace{-\sin t}_{x'(t)}, \underbrace{\cos t}_{y'(t)}\right) \\ \gamma'\text{- este continuă pe } [0,\pi] \text{ şi } (x'(t))^2 + (y'(t))^2 \neq 0, \forall t \end{cases}$$

etapa 2. Se studiază integrantul f.

$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = 2 + x^2 y$.

$D = \mathbb{R}^2, \operatorname{Im}\gamma \subset D$.$f$ este continuă pe D.

etapa 3. Se determină $\mathcal{I} = \int_\gamma \left(2 + x^2 y\right) ds$, aplicând Teorema de reducere, caz $n = 2$.

Se calculează elementul de arc

$ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt \Rightarrow ds = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2}dt = 1dt.$
Se înlocuieşte în formulă

$$\mathcal{I} = \int_\gamma (2 + x^2 y)\, ds = \int_0^\pi \left(2 + (\cos t)^2 \sin t\right) \cdot 1dt = 2\, t|_{t=0}^{t=\pi} + \left.\frac{(\cos t)^3}{3}\right|_{t=0}^{t=\pi} = 2\pi + \tfrac{2}{3}.$$

d) $\int_\gamma ye^{-x}ds$, unde un reprezentant al curbei γ are ecuaţiile parametrice

$$\mathrm{Im}\gamma : \begin{cases} x(t) = \ln(1+t^2) \\ y(t) = 2\operatorname{arctg} t - t + 1 \end{cases}, t \in [0,1].$$

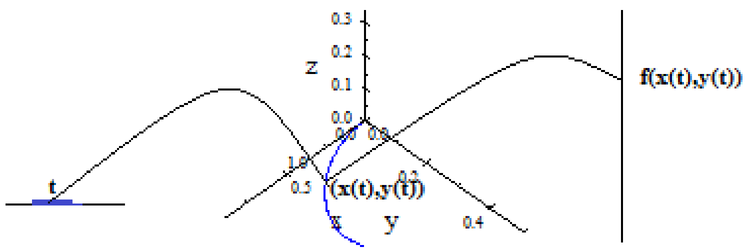
Rezolvare. A se vedea Curs.

Exerciţiul 2. Să se calculeze

a) $\int_\gamma \sqrt{2y}ds$, unde un reprezentant al curbei γ este $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3, \gamma(t) = \left(t, \dfrac{t^2}{2}, \dfrac{t^3}{3}\right)$.

Rezolvare. etapa 1. Se studiază curba

•Se parametrizează un reprezentant al curbei- aici nu este necesar, deoarece curba este dată parametric, adică



$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3, \gamma(t) = \left(\underbrace{t}_{x(t)}, \underbrace{\frac{t^2}{2}}_{y(t)}, \underbrace{\frac{t^3}{3}}_{z(t)}\right).$$

•Se studiază dacă γ este curbă netedă. Este, deoarece

$$\begin{cases} \exists \gamma' : [0,1] \to \mathbb{R}^3, \gamma'(t) = \left(\underbrace{1}_{x'(t)}, \underbrace{t}_{y'(t)}, \underbrace{t^2}_{z'(t)}\right). \\ \gamma'\text{- este continuă pe } [0,1] \text{ şi } (x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2 \neq 0, \forall t \end{cases}$$

etapa 2. Se studiază integrantul f.

$f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x,y,z) = \sqrt{2y}$.

$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; y > 0\}, \mathrm{Im}\,\gamma \subset D$ (deoarece $y(t) = \frac{t^2}{2} > 0, \forall t \in [0,1]$)

f este câmp scalar continuu pe D.

etapa 3. Se determină $\mathcal{I} = \int_\gamma \sqrt{2y}ds$, aplicând Teorema de reducere, caz $n = 3$.

Se calculează elementul de arc $ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt \Rightarrow$

$ds = \sqrt{(1)^2 + (t)^2 + (t^2)^2}dt = \sqrt{1 + t^2 + t^4}dt.$

Se înlocuieşte în formulă

$$\mathcal{I} = \int_0^1 \sqrt{2\frac{t^2}{2}}\sqrt{1+t^2+t^4}dt = \int_0^1 t\sqrt{1+t^2+t^4}dt \overset{t^2=v}{=}$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{1+v+v^2}dv = \tfrac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{\left(v+\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\left(v+\tfrac{1}{2}\right)' dv =$$

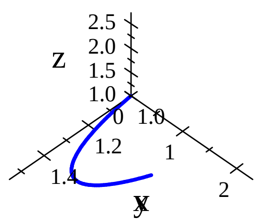
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left[\left(v+\frac{1}{2}\right)\sqrt{1+v+v^2}+\frac{3}{4}\ln\left(v+\frac{1}{2}+\sqrt{1+v+v^2}\right)\right]\Big|_{u=0}^{u=1} =$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\sqrt{3}+\frac{3}{4}\ln\left(\frac{3}{2}+\sqrt{3}\right)-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\ln\left(\frac{1}{2}+1\right)\right).$$

b) $\int_\gamma \frac{1}{x^2+y^2+z^2}ds$, unde un reprezentant curbei γ are ecuaţiile implicite $\mathrm{Im}\gamma : \begin{cases} x^2+y^2=2^2 \\ \mathrm{tg}\,\frac{z}{3}=\frac{y}{x} \end{cases}$, considerate a.î. $M(x,y,z)$ să parcurgă curba (elice circulară) între $A(2,0,0)$ şi $B\left(0,2,\frac{3\pi}{2}\right)$.
Rezolvare. A se vedea Curs.

c) $\int_\gamma (x^2+y^2)\ln z\cdot ds$, unde arcul de curbă în spaţiu γ are ecuaţiile parametrice

$$\mathrm{Im}\gamma : \begin{cases} x(t)=e^t\cos t \\ y(t)=e^t\sin t \\ z(t)=e^t \end{cases}, t\in[0,1].$$

Rezolvare. etapa 1. Se studiază curba
•Se parametrizează un reprezentant al curbei, dacă aceasta nu este dată parametric. Aici este dată, adică



$$\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^3, \gamma(t)=\left(\underbrace{e^t\cos t}_{x(t)},\underbrace{e^t\sin t}_{y(t)},\underbrace{e^t}_{z(t)}\right).$$

•Se studiază dacă γ este curbă netedă. Este, deoarece

$$\begin{cases} \exists\gamma':[0,1]\to\mathbb{R}^3, \gamma'(t)=\left(\underbrace{e^t\cos t-e^t\sin t}_{x'(t)},\underbrace{e^t\sin t+e^t\cos t}_{y'(t)},\underbrace{e^t}_{z'(t)}\right) \\ \gamma'\text{- este continuă pe } [0,1] \text{ şi } (x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2\neq 0, \forall t \end{cases}$$

etapa 2. Se studiază integrantul f.
$f:D\subseteq\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}, f(x,y,z)=(x^2+y^2)\ln z$.
$D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3; z>0\}, \mathrm{Im}\,\gamma\subset D$ (deoarece $z(t)=e^t>0, \forall t\in[0,1]$).
f este câmp scalar continuu pe D.
etapa 3. Se determină $\mathcal{I}=\int_\gamma (x^2+y^2)\ln z\cdot ds$, aplicând Teorema, caz $n=3$.
Se calculează elementul de arc $ds=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}dt \Rightarrow$
$ds=\sqrt{(e^t\cos t-e^t\sin t)^2+(e^t\sin t+e^t\cos t)^2+e^{2t}}dt=\sqrt{3}e^tdt$
Se înlocuieşte în formulă

$$\mathcal{I}=\int_\gamma (x^2+y^2)\ln z ds=\int_0^1\left[\left(e^t\cos t\right)^2+\left(e^t\cos t\right)^2\right]\left(\ln e^t\right)\sqrt{3}e^tdt=\sqrt{3}\int_0^1 te^{3t}dt=$$
$$=\sqrt{3}\left(\frac{1}{3}te^{3t}-\frac{1}{9}e^{3t}\right)\Big|_{t=0}^{t=1}=\sqrt{3}\left(\frac{2}{9}e^3+\frac{1}{9}\right).$$

d) $\int_{AB}(x+y+z)\cdot ds$, unde arcul de curbă în spaţiu AB are ecuaţiile parametrice

$$AB : \begin{cases} x(t)=a\cos t \\ y(t)=a\sin t \\ z(t)=bt \end{cases}, t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right], \text{ iar } a,b \text{ sunt constante pozitive.}$$

Rezolvare.etapa 1. Se studiază curba
•Se parametrizează un reprezentant al curbei, dacă aceasta nu este dată parametric. Aici este dată $AB = \mathrm{Im}\gamma$, adică

$$\gamma : \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^3, \gamma(t) = \left(\underbrace{a\cos t}_{x(t)}, \underbrace{a\sin t}_{y(t)}, \underbrace{bt}_{z(t)}\right).$$

•Se studiază dacă γ este curbă netedă. Este, deoarece

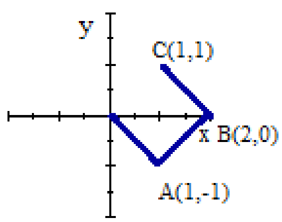
$$\begin{cases} \exists\gamma' : \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^3, \gamma'(t) = \left(\underbrace{-a\sin t}_{x'(t)}, \underbrace{a\cos t}_{y'(t)}, \underbrace{b}_{z'(t)}\right) \\ \gamma'\text{- este continuă pe } \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right] \text{ şi } (x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2 \neq 0, \forall t \end{cases}$$

etapa 2. Se studiază integrantul f.
$f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x, y, z) = x + y + z.$
$D = \mathbb{R}^3, \mathrm{Im}\,\gamma \subset D. f$ este câmp scalar continuu pe $\mathbb{R}^3$.
etapa 3. Se determină $\mathcal{I} = \int_\gamma (x + y + z) \cdot ds$, aplicând Teorema, caz $n = 3$.

Se calculează elementul de arc $ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt \Rightarrow$
$ds = \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + b^2}dt = \sqrt{a^2 + b^2}dt$
Se înlocuieşte în formulă

$$\mathcal{I} = \int_\gamma (x + y + z)\, ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a\cos t + a\sin t + bt) \sqrt{a^2 + b^2}dt =$$
$$= \sqrt{a^2 + b^2}\left(a\sin t - a\cos t + b\frac{t^2}{2}\right)\Big|_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} = \sqrt{a^2 + b^2}\left(2a + b\frac{\pi^2}{8}\right).$$

Exerciţiul 3. Să se calculeze $\int_\gamma (x + y)\, ds$, unde $\mathrm{Im}\gamma$ este linia poligonală $\left[\overrightarrow{OA}\right] \cup \left[\overrightarrow{AB}\right] \cup \left[\overrightarrow{BC}\right]$ cu vârfurile $A(1, -1)$, $B(2, 0)$, $C(1, 1)$, $O(0, 0)$.
Rezolvare. etapa 1. Se studiază curba
•Se parametrizează un reprezentant al curbei, deoarece aceasta nu este dată parametric.



Se observă că $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$, ca şi juxtapunere, unde:

$$\mathrm{Im}\,\gamma_1 = \left[\overrightarrow{OA}\right] : \begin{cases} x(t) = 0 + t(1 - 0) \\ y(t) = 0 + t(-1 - 0) \end{cases}, t \in [0, 1]\,;\ \gamma_1 : [0, 1] \to \mathbb{R}^2, \gamma_1(t) = \left(\underbrace{t}_{x_1(t)}, \underbrace{-t}_{y_1(t)}\right).$$

$$\mathrm{Im}\,\gamma_2 = \left[\overrightarrow{AB}\right] : \begin{cases} x(t) = 1 + t(2 - 1) \\ y(t) = -1 + t(0 + 1) \end{cases}, t \in [0, 1]\,;\ \gamma_2 : [0, 1] \to \mathbb{R}^2, \gamma_2(t) = \left(\underbrace{1 + t}_{x_2(t)}, \underbrace{-1 + t}_{y_2(t)}\right).$$

$$\mathrm{Im}\,\gamma_3 = \left[\overrightarrow{BC}\right] : \begin{cases} x(t) = 2 + t(1 - 2) \\ y(t) = 0 + t(1 - 0) \end{cases}, t \in [0, 1]\,;\ \gamma_3 : [0, 1] \to \mathbb{R}^2, \gamma_3(t) = \left(\underbrace{2 - t}_{x_3(t)}, \underbrace{t}_{y_3(t)}\right).$$

•Se studiază dacă γ este curbă netedă. Este netedă pe 3 porţiuni, deoarece

$$\begin{cases} \exists \gamma_1' : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \gamma_1'(t) = \left(\underbrace{1}_{x_1'(t)}, \underbrace{-1}_{y_1'(t)} \right). \\ \gamma_1' \text{- este continuă pe } [0,1] \text{ şi } (x'(t))^2 + (y'(t))^2 \neq 0, \forall t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \exists \gamma_2' : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \gamma_1'(t) = \left(\underbrace{1}_{x_2'(t)}, \underbrace{1}_{y_2'(t)} \right). \\ \gamma_2' \text{- este continuă pe } [0,1] \text{ şi } (x'(t))^2 + (y'(t))^2 \neq 0, \forall t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \exists \gamma_3' : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \gamma_1'(t) = \left(\underbrace{-1}_{x_3'(t)}, \underbrace{1}_{y_3'(t)} \right). \\ \gamma_3' \text{- este continuă pe } [0,1] \text{ şi } (x'(t))^2 + (y'(t))^2 \neq 0, \forall t \end{cases}$$

etapa 2. Se studiază integrantul f.

$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = x + y.$

$D = \mathbb{R}^2, \operatorname{Im}\gamma \subset D. f$ este continuă pe $\mathbb{R}^2$.

etapa 3. Se determină $\mathcal{I} = \int_\gamma (x+y)\, ds$, aplicând Teorema de aditivitate în raport cu drumul şi Teorema de reducere, caz $n = 2$.

$$\mathcal{I} = \int_\gamma (x+y)\, ds = \int_{\gamma_1} (x+y)\, ds + \int_{\gamma_2} (x+y)\, ds + \int_{\gamma_3} (x+y)\, ds =$$
$$= \int_0^1 (t + (-t)) \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} dt + \int_0^1 (1 + t + (-1+t)) \sqrt{(1)^2 + (1)^2} dt +$$
$$+ \int_0^1 (2 - t + t) \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} dt = 0 + \int_0^1 2\sqrt{2} t dt + \int_0^1 2\sqrt{2} dt = \sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}.$$

Exerciţiul 4. Să se calculeze lungimea curbei

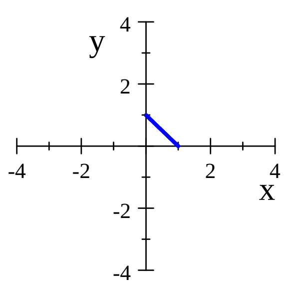
a) $\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) = \left(\underbrace{\cos^2 t}_{x(t)}, \underbrace{\sin^2 t}_{y(t)} \right)$

Rezolvare. Se anticipează că $\operatorname{lung}(\gamma) = \int_\gamma 1 \cdot ds$.

etapa 1. Se studiază curba

•Se parametrizează un reprezentant al curbei, dacă aceasta nu este dată parametric. Aici este dată

$$\operatorname{Im}\gamma : \begin{cases} x(t) = \cos^2 t \\ y(t) = \sin^2 t \end{cases}, t \in [0,\pi], \text{ adică}$$



(în grafic apare un segment parcurs de la $(1,0)$ la $(0,1)$ şi înapoi spre $(1,0)$; este o curbă închisă cu interior vid)

$$\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) = \left(\underbrace{\cos^2 t}_{x(t)}, \underbrace{\sin^2 t}_{y(t)} \right).$$

•Se studiază dacă γ este curbă netedă. Este pe 2 porţiuni, deoarece

$$\begin{cases} \exists\gamma' : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2, \gamma'(t) = \left(\underbrace{2\cos t \sin t}_{x'(t)}, \underbrace{2(\sin t)(-\cos t)}_{y'(t)} \right) \\ \gamma'\text{- este continuă pe } [0,\pi] \text{ şi şi } (x'(t))^2 + (y'(t))^2 \neq 0, \forall t \neq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

etapa 2. Se studiază integrantul f.

$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = 1.$

$D = \mathbb{R}^2, \operatorname{Im}\gamma \subset D. f$ este continuă pe $\mathbb{R}^2$.

etapa 3. Se determină $\mathcal{I} = \int_\gamma 1 \cdot ds$, aplicând Teorema, caz $n = 2$.

Se calculează elementul de arc $ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt \Rightarrow$

$ds = \sqrt{(2\cos t \sin t)^2 + (2(\sin t)(-\cos t))^2} dt = 2\sqrt{2}\sqrt{\cos^2 t \sin^2 t} dt = 2\sqrt{2}\,|\cos t|\,|\sin t|\, dt.$

Se înlocuieşte în formulă

$\mathcal{I} = \int_\gamma 1 ds = \int_0^\pi 2\sqrt{2}\,|\cos t|\,|\sin t|\, dt = \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos t \sin t dt + \sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2(-\cos t)\sin t dt = 2\sqrt{2} > 0.$

b) arc de cicloidă

$$\operatorname{Im}\gamma : \begin{cases} x(t) = a(t - \sin t) \\ y(t) = a(1 - \cos t) \end{cases}, t \in [0, 2\pi], \text{ unde } a > 0 \text{ este un număr real fixat.}$$

Rezolvare. A se vedea Curs.

c) γ, unde un reprezentant al curbei γ are ecuaţiile parametrice

$$\operatorname{Im}\gamma : \begin{cases} x(t) = 2\cos t \\ y(t) = 2\sin t \\ z(t) = 3t \end{cases}, t \in \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right].$$

Rezolvare. Se anticipează că $\operatorname{lung}(\gamma) = \int_\gamma 1 \cdot ds$.

etapa 1. Se studiază curba

•Se parametrizează un reprezentant al curbei, dacă aceasta nu este dată parametric. Aici este dată, adică

$$\gamma : \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^3, \gamma(t) = \left(\underbrace{2\cos t}_{x(t)}, \underbrace{2\sin t}_{y(t)}, \underbrace{3t}_{z(t)} \right).$$

•Se studiază dacă γ este curbă netedă. Este, deoarece

$$\begin{cases} \exists\gamma' : \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^3, \gamma'(t) = \left(\underbrace{-2\sin t}_{x'(t)}, \underbrace{2\cos t}_{y'(t)}, \underbrace{3}_{z'(t)} \right) \\ \gamma'\text{- este continuă pe } \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right] \text{ şi } (x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2 \neq 0, \forall t \end{cases}$$

etapa 2. Se studiază integrantul f.

$f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x,y,z) = 1.$

$D = \mathbb{R}^3, \operatorname{Im}\gamma \subset D. f$ este continuă pe $\mathbb{R}^3$.

etapa 3. Se determină $\mathcal{I} = \int_\gamma 1 \cdot ds$, aplicând Teorema, caz $n = 3$.

Se calculează elementul de arc $ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt \Rightarrow$

$ds = \sqrt{(-2\sin t)^2 + (2\cos t)^2 + 3^2} dt = 5dt$

Se înlocuieşte în formulă

$\mathcal{I} = \int_\gamma 1 ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 5dt = \frac{5}{2}\pi > 0.$

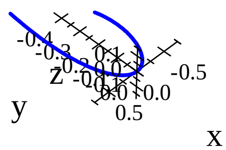
d) γ, unde curba are ecuaţiile parametrice

$$\operatorname{Im}\gamma:\begin{cases} x(t)=t\\ y(t)=\sqrt{2}\ln\cos t\\ z(t)=\operatorname{tg}t-t\end{cases},\ t\in\left[-\tfrac{\pi}{4},\tfrac{\pi}{4}\right].$$

Rezolvare. Anticipăm că $\operatorname{lung}(\gamma)=\int_\gamma 1\cdot ds$.

etapa 1. Se studiază curba

•Se parametrizează un reprezentant al curbei, dacă aceasta nu este dată parametric. Aici este dată, adică



$$\gamma:\left[-\tfrac{\pi}{4},\tfrac{\pi}{4}\right]\to\mathbb{R}^3,\gamma(t)=\left(\underbrace{t}_{x(t)},\underbrace{\sqrt{2}\ln\cos t}_{y(t)},\underbrace{\operatorname{tg}t-t}_{z(t)}\right).$$

•Se studiază dacă γ este curbă netedă. Este, deoarece

$$\begin{cases}\exists\gamma':\left[-\tfrac{\pi}{4},\tfrac{\pi}{4}\right]\to\mathbb{R}^3,\gamma'(t)=\left(\underbrace{1}_{x'(t)},\underbrace{\sqrt{2}\frac{1}{\cos t}(-\sin t)}_{y'(t)},\underbrace{\frac{1}{\cos^2 t}-1}_{z'(t)}\right).\\ \gamma'\text{- este continuă pe }\left[-\tfrac{\pi}{4},\tfrac{\pi}{4}\right]\text{ şi }(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2\neq 0,\forall t\end{cases}$$

etapa 2. Se studiază integrantul f.

$f:D\subseteq\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}, f(x,y,z)=1.$

$D=\mathbb{R}^3,\operatorname{Im}\gamma\subset D.f$ este continuă pe D.

etapa 3. Se determină $\mathcal{I}=\int_\gamma 1\cdot ds$, aplicând Teorema de reducere, caz $n=3$.

Se calculează elementul de arc $ds=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}dt\Rightarrow$

$ds=\sqrt{1^2+\left(\sqrt{2}\frac{-\sin t}{\cos t}\right)^2+\left(\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}\right)^2}dt=\left|1+\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}\right|dt.$

Se înlocuieşte în formulă

$\mathcal{I}=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}1\cdot\left(1+\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}\right)dt=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^2 t}dt=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg}t)'\,dt=(\operatorname{tg}t)\Big|_{t=-\frac{\pi}{4}}^{t=\frac{\pi}{4}}=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)=2>0.$

e)$^{\bigcirc}$ γ, unde un reprezentant al curbei γ are ecuaţiile parametrice

$$\operatorname{Im}\gamma:\begin{cases} x(t)=ae^{-t}\cos t\\ y(t)=ae^{-t}\sin t\\ z(t)=be^{-t}\end{cases},\ t\in[0,+\infty[\text{, unde }a,b\text{ sunt constante reale.}$$

Rezolvare. -A se vedea Curs.

1.2. Integrale curbilinii de speţa a-2-a (pentru o formă diferenţială), $n = 2, 3$

Teorema 1.(**de reducere a unei integrale curbilinii de speţa a 2-a la o integrală Riemann**)
a) $n = 2$. Dacă

$$\left.\begin{array}{l} \gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (x(t), y(t)) \text{ este curbă netedă} \\ \omega = Pdx + Qdy, \text{ formă diferenţială cu coeficienţii} \\ \quad P, Q : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \text{ câmpuri scalare continue cu } \operatorname{Im}\gamma \subset D \end{array}\right\} \text{atunci } \omega \in \mathcal{R}(\gamma; 2) \text{ şi}$$

$$\boxed{\int_\gamma [P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy] = \int_a^b [P(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t), y(t)) \cdot y'(t)]\,dt.}$$

b) $n = 3$. Dacă

$$\left.\begin{array}{l} \gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3, \gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)) \text{ este curbă netedă} \\ \omega = Pdx + Qdy + Rdz, \text{ formă diferenţială cu coeficienţii} \\ \quad P, Q, R : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \text{ câmpuri scalare continue cu } \operatorname{Im}\gamma \subset D \end{array}\right\} \text{atunci } \omega \in \mathcal{R}(\gamma; 2) \text{ şi}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \int_\gamma [P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z,)\,dy + R(x,y,z)\,dz] = \\ \quad = \int_a^b [P(x(t), y(t), z(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t)) \cdot y'(t) + R(x(t), y(t), z(t)) \cdot z'(t)]\,dt. \end{array}}$$

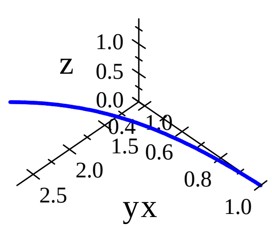
Observaţie. Au loc proprietăţile **de liniaritate în raport cu integrantul** (**aditivitatea, omogeneitatea** în raport cu forma integrant) **a integralei curbilinii de speţa a doua**, **de invarianţă la schimbarea de parametru**, legată de **integrala drumului opus**, **de aditivitate a integralei curbilinii de speţa a doua în raport cu drumul**.

De asemenea, au loc teoremele legate **de lucrul mecanic**- A se vedea Curs.

Exerciţiul 5. Să se calculeze
a) a$_1$) $\int_\gamma xdx + xydy + xyzdz$, unde un reprezentant al curbei γ are ecuaţiile parametrice

$$\operatorname{Im}\gamma : \begin{cases} x(t) = e^t \\ y(t) = e^{-t} \\ z(t) = \sqrt{2}t \end{cases}, t \in [0,1].$$

○**a$_2$)** Să se calculeze $\int_{\gamma^-} xdx + xydy + xyzdz$ folosind proprietatea integralei legată de opusul drumului, apoi direct, folosind definiţia lui γ^-.
Rezolvare. a$_1$) $\int_\gamma xdx + xydy + xyzdz = ?$
etapa 1. Se studiază curba
•Se parametrizează un reprezentant al curbei, dacă aceasta nu este dată parametric. Aici este, adică



$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3, \gamma(t) = \left(\underbrace{e^t}_{x(t)}, \underbrace{e^{-t}}_{y(t)}, \underbrace{\sqrt{2} \cdot t}_{z(t)} \right).$$

•Se studiază dacă γ este curbă netedă. Este, deoarece

$$\begin{cases} \exists\gamma' : [0,1] \to \mathbb{R}^3, \gamma'(t) = \left(\underbrace{e^t}_{x'(t)}, \underbrace{-e^{-t}}_{y'(t)}, \underbrace{\sqrt{2}}_{z'(t)} \right). \\ \gamma'\text{- este continuă pe } [0,1] \text{ şi } (x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2 \neq 0, \forall t \end{cases}$$

etapa 2. Se studiază integrantul ω

$$\omega(x,y,z) = \underbrace{x}_{P(x,y,z)} dx + \underbrace{xy}_{Q(x,y,z)} dy + \underbrace{xyz}_{R(x,y,z)} dz.$$

Coeficienţii formei diferenţiale, $P, Q, R : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sunt câmpuri scalare continue cu $D = \mathbb{R}^3$ şi $\operatorname{Im}\gamma \subset D$.

SAU Se studiază integrantul $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, f(x,y,z) = \left(\underbrace{x}_{P(x,y,z)}, \underbrace{xy}_{Q(x,y,z)}, \underbrace{xyz}_{R(x,y,z)} \right).$

$D = \mathbb{R}^3, \operatorname{Im}\gamma \subset D. f$ este continuă pe $\mathbb{R}^3$.

Integrala dată ar fi circulaţia câmpului f de-a lungul curbei γ.

etapa 3. Se determină $\mathcal{I} = \int_\gamma xdx + xydy + xyzdz$, aplicând Teorema de reducere, caz $n = 3$.

$$\begin{cases} x(t) = e^t \\ y(t) = e^{-t} \\ z(t) = \sqrt{2}t \end{cases}, t \in [0,1] \Rightarrow \begin{cases} dx(t) = e^t dt \\ dy(t) = -e^{-t} dt \\ dz(t) = \sqrt{2} dt \end{cases}, t \in [0,1].$$

Se înlocuieşte în formulă

$$\mathcal{I} = \int_\gamma xdx + xydy + xyzdz = \int_0^1 \left((e^t)(e^t) + (e^t \cdot e^{-t})(-e^{-t}) + (e^t \cdot e^{-t} \cdot \sqrt{2}t)(\sqrt{2}) \right) dt =$$
$$= \int_0^1 \left(e^{2t} - e^{-t} + 2t \right) dt = \tfrac{1}{2}e^2 + e^{-1} - \tfrac{1}{2}.$$

○**a$_2$)** $\int_{\gamma^-} xdx + xydy + xyzdz = ?$

$*$ Folosind proprietatea integralei de speţa a doua legată de opusul drumului$\Rightarrow$

$$\int_{\gamma^-} xdx + xydy + xyzdz = -\int_\gamma xdx + xydy + xyzdz = -\left(\tfrac{1}{2}e^2 + e^{-1} - \tfrac{1}{2} \right)$$

$*$ Folosind definiţia drumului opus γ^-.

$$\gamma^- : [0,1] \to \mathbb{R}^3, \gamma^-(\tau) = \gamma(0 + 1 - \tau) = \left(e^{1-\tau}, e^{-(1-\tau)}, \sqrt{2}(1-\tau) \right)$$

etapa 1^-. Se studiază curba

•Se parametrizează un reprezentant al curbei, dacă aceasta nu este dată parametric. Aici este

$$\operatorname{Im}\gamma^- : \begin{cases} x(\tau) = e^{1-\tau} \\ y(\tau) = e^{-(1-\tau)} \\ z(\tau) = \sqrt{2}(1-\tau) \end{cases}, t \in [0,1], \text{ adică}$$

$$\gamma^- : [0,1] \to \mathbb{R}^3, \gamma^-(\tau) = \left(\underbrace{e^{1-\tau}}_{x(\tau)}, \underbrace{e^{-(1-\tau)}}_{y(\tau)}, \underbrace{\sqrt{2}(1-\tau)}_{z(\tau)} \right).$$

•Se studiază dacă γ este curbă netedă. Este, deoarece

$$\begin{cases} \exists (\gamma^-)' : [0,1] \to \mathbb{R}^3, (\gamma^-)'(\tau) = \left(\underbrace{-e^{1-\tau}}_{x'(\tau)}, \underbrace{e^{-(1-\tau)}}_{y'(\tau)}, \underbrace{-\sqrt{2}}_{z'(\tau)} \right). \\ (\gamma^-)'\text{- este continuă pe } [0,1] \text{ şi } (x'(\tau))^2 + (y'(\tau))^2 + (z'(\tau))^2 \neq 0, \forall t \end{cases}$$

etapa 2^-. Se studiază integrantul ω

$$\omega(x,y,z) = \underbrace{x}_{P(x,y,z)} dx + \underbrace{xy}_{Q(x,y,z)} dy + \underbrace{xyz}_{R(x,y,z)} dz.$$

Coeficienţii formei diferenţiale, $P, Q, R : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sunt câmpuri scalare continue cu $D = \mathbb{R}^3$ şi $\operatorname{Im}\gamma \subset D$.

SAU Se studiază integrantul $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, f(x,y,z) = \left(\underbrace{x}_{P(x,y,z)}, \underbrace{xy}_{Q(x,y,z)}, \underbrace{xyz}_{R(x,y,z)} \right)$.

$D = \mathbb{R}^3, \operatorname{Im}\gamma \subset D. f$ este câmp vectorial continuu pe $\mathbb{R}^3$.

Integrala dată ar fi circulaţia câmpului f de-a lungul curbei γ.

etapa 3^-. Se determină $\mathcal{I} = \int_{\gamma^-} xdx + xydy + xyzdz$, aplicând Teorema de reducere, caz $n = 3$.

$$\begin{cases} x(\tau) = e^{1-\tau} \\ y(\tau) = e^{-(1-\tau)} \\ z(\tau) = \sqrt{2}(1-\tau) \end{cases}, t \in [0,1] \Rightarrow \begin{cases} dx(\tau) = -e^{1-\tau} \\ dy(\tau) = e^{-(1-\tau)} \\ dz(\tau) = -\sqrt{2} \end{cases}, t \in [0,1].$$

Se înlocuieşte în formulă

$\mathcal{I} = \int_{\gamma^-} xdx + xydy + xyzdz =$

$$= \int_0^1 \left(\left(e^{1-\tau}\right)\left(-e^{1-\tau}\right) + \left(e^{1-\tau} \cdot e^{-(1-\tau)}\right)\left(e^{-(1-\tau)}\right) + \left(e^{1-\tau} \cdot e^{-(1-\tau)} \cdot \sqrt{2}(1-\tau)\right)\left(-\sqrt{2}\right) \right) d\tau =$$

$$= \int_0^1 \left(-e^{2-2\tau} + e^{-1+\tau} + 2(\tau - 1) \right) d\tau = -\left(\tfrac{1}{2}e^2 + e^{-1} - \tfrac{1}{2} \right).$$

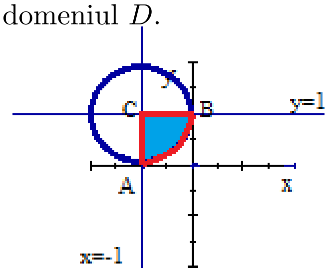
b) $\int_\gamma ydx - x^2dy$, unde γ este curba ce are $\operatorname{Im}\gamma$ drept frontiera domeniului

$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 \leq 0, x + 1 \geq 0, y \leq 1 \right\}$,

parcursă în sens direct (trigonometric).

Rezolvare. etapa 1. Se studiază curba

•Se parametrizează un reprezentant al curbei, deoarece aceasta nu este dată parametric. Se reprezintă domeniul D.



• $(x+1)^2 + (y-1)^2 \leq 1^2 \Rightarrow ...$
• $x \geq -1 \Rightarrow ...$
• $y \leq 1 \Rightarrow ...$

Din reprezentare, se obţine că

$\gamma = \left[\overset{\frown}{AB}\right] \cup \left[\overrightarrow{BC}\right] \cup \left[\overrightarrow{CA}\right]$ prin juxtapunere, cu $A(-1,0), B(0,1), C(-1,1)$. Atunci

$$\left[\overset{\frown}{AB}\right] : \begin{cases} x(t) = -1 + 1\cos t \\ y(t) = 1 + 1\sin t \end{cases}, t \in \left[\tfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$$

$$\left[\overrightarrow{BC}\right] : \begin{cases} x(t) = 0 + t(-1-0) \\ y(t) = 1 + t(1-1) \end{cases}, t \in [0,1]$$

$$\left[\overrightarrow{CA}\right] : \begin{cases} x(t) = -1 + t(-1-(-1)) \\ y(t) = 1 + t(0-1) \end{cases}, t \in [0,1]$$

•Se studiază dacă γ este curbă netedă. Se verifică faptul că este netedă pe cele 3 porţiuni.

etapa 2. Se studiază integrantul ω

$$\omega(x,y) = \underbrace{y}_{P(x,y)} dx + \underbrace{\left(-x^2\right)}_{Q(x,y)} dy.$$

Coeficienţii formei diferenţiale, $P, Q : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sunt câmpuri scalare continue cu $D = \mathbb{R}^2$ şi $\operatorname{Im}\gamma \subset D$.

SAU Se studiază integrantul $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x,y) = \left(\underbrace{y}_{P(x,y)}, \underbrace{-x^2}_{Q(x,y)} \right)$.

$D = \mathbb{R}^2, \operatorname{Im}\gamma \subset D. f$ este continuă pe $\mathbb{R}^2$.

Integrala dată ar fi circulaţia câmpului f de-a lungul curbei γ.

etapa 3. Se determină $\mathcal{I} = \int_\gamma ydx - x^2dy$, aplicând Proprietatea de aditivitate în raport cu drumul şi Teorema de reducere, caz $n = 2$.

$$\left[\overset{\frown}{AB}\right] : \begin{cases} x(t) = -1 + 1\cos t \\ y(t) = 1 + 1\sin t \end{cases}, t \in \left[\tfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right] \Rightarrow \begin{cases} dx(t) = -\sin t dt \\ dy(t) = \cos t dt \end{cases}$$

$$\left[\overrightarrow{BC}\right] : \begin{cases} x(t) = 0 + t(-1-0) \\ y(t) = 1 + t(1-1) \end{cases}, t \in [0,1] \Rightarrow \begin{cases} dx(t) = (-1)dt \\ dy(t) = 0dt \end{cases}$$

$$\left[\overrightarrow{CA}\right] : \begin{cases} x(t) = -1 + t(-1-(-1)) \\ y(t) = 1 + t(0-1) \end{cases}, t \in [0,1] \Rightarrow \begin{cases} dx(t) = 0dt \\ dy(t) = (-1)dt \end{cases}$$

Sunt posibile şi alte parametrizări, nu după formulă, ci intuite, pentru $\left[\overrightarrow{BC}\right]$ şi $\left[\overrightarrow{CA}\right]$.

Se înlocuieşte în formulă

$$\mathcal{I} = \int_\gamma ydx - x^2dy = \int_{\left[\overset{\frown}{AB}\right]} \left(ydx - x^2dy\right) + \int_{\left[\overrightarrow{BC}\right]} \left(ydx - x^2dy\right) + \int_{\left[\overrightarrow{CA}\right]} \left(ydx - x^2dy\right) =$$

$$= \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \Big((1 + 1\sin t)(-\sin t) - (-1 + 1\cos t)^2(\cos t)\Big) dt +$$

$$+ \int_0^1 \Big(1 \cdot (-1) - (-t)^2 \cdot 0\Big) dt + \int_0^1 \Big((-t) \cdot 0 - (-1)^2 \cdot (-1)\Big) dt =$$

$$= \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \left(-\sin t - \sin^2 t - \cos t + 2\cos^2 t - \cos^3 t\right) dt - \int_0^1 dt + \int_0^1 dt = \tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{2}{3}.$$

c) $\int_\gamma ydx - (x-3)\,dy$, unde γ este elipsa

$$\operatorname{Im}\gamma : \left\{ \frac{(x-3)^2}{3^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1 \right.$$

parcursă o singură dată, în sens direct (trigonometric).

Rezolvare. A se vedea Curs.

d) $\int_\gamma \frac{1}{1+y^2}dx + \frac{1}{1+x^2}dy$, unde unde un reprezentant al curbei γ are ecuaţiile parametrice

$$\operatorname{Im}\gamma : \begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = t \end{cases}, t \in [0,1].$$

Rezolvare. A se vedea Curs.

Observaţie.Pentru noţiunile de **integrală independentă de drum, formă diferenţială exactă, formă diferenţială închisă, primitivă pentru o formă diferenţială, cât şi pentru teorema de tip Leibniz-Newton**-A se vedea Curs.

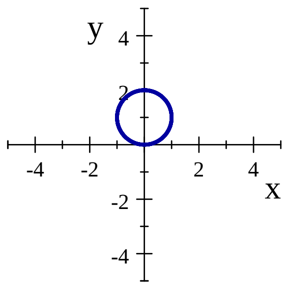
Exerciţiul 6. Să se calculeze

a) $\int_\gamma \left(2y^2 - 4y + x\right) dx + 4x(y-1)\,dy$, unde un reprezentant al curbei γ are

$$\operatorname{Im}\gamma : \left\{ x^2 + y^2 - 2y = 0 \right.$$

Rezolvare. etapa 1. Se studiază curba

•Se parametrizează un reprezentant al curbei, deoarece aceasta nu este dată parametric.



$\mathrm{Im}\gamma : \left\{ x^2 + (y-1)^2 = 1^2 \right. \Rightarrow \mathrm{Im}\gamma : \begin{cases} x(t) = 0 + 1\cos t \\ y(t) = 1 + 1\sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$, adică

$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) = \left(\underbrace{\cos t}_{x(t)}, \underbrace{1 + \sin t}_{y(t)} \right).$

•Se studiază dacă γ este curbă netedă. Este, deoarece

$$\begin{cases} \exists \gamma' : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \gamma'(t) = \left(\underbrace{-\sin t}_{x'(t)}, \underbrace{\cos t}_{y'(t)} \right). \\ \gamma'\text{- este continuă pe } [0, 2\pi] \text{ şi } (x'(t))^2 + (y'(t))^2 \neq 0, \forall t \end{cases}$$

<u>etapa 2.</u> Se studiază integrantul ω

$\omega(x, y) = \underbrace{\left(2y^2 - 4y + x\right)}_{P(x,y)} dx + \underbrace{(4xy - 4x)}_{Q(x,y)} dy.$

Coeficienţii formei diferenţiale, $P, Q : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sunt câmpuri scalare continue cu $D = \mathbb{R}^2$ şi $\mathrm{Im}\,\gamma \subset D$.

SAU Se studiază integrantul $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x, y) = \left(\underbrace{2y^2 - 4y + x}_{P(x,y)}, \underbrace{4xy - 4x}_{Q(x,y)} \right).$

$D = \mathbb{R}^2, \mathrm{Im}\,\gamma \subset D. f$ este continuă pe $\mathbb{R}^2$.

<u>etapa 3.</u> Se determină $\mathcal{I} = \int_\gamma \left(2y^2 - 4y + x\right) dx + 4x(y-1)\,dy$, aplicând Teorema de reducere, caz $n = 2-$foarte mult de calcul-NU

$\mathrm{Im}\gamma : \begin{cases} x(t) = 0 + 1\cos t \\ y(t) = 1 + 1\sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi] \Rightarrow \begin{cases} dx(t) = -\sin t dt \\ dy(t) = \cos t dt \end{cases}$

$\mathcal{I} = \int_\gamma \left(2y^2 - 4y + x\right) dx + 4x(y-1)\,dy =$

$= \int_0^{2\pi} \left(\left(2(1 + \sin t)^2 - 4(1 + \sin t) + \cos t \right) (-\sin t) + 4(\cos t \sin t)(\cos t) \right) dt = ...$

mult calcul

<u>etapa 4.</u> Se determină $\mathcal{I}$ aplicând Corolarul 1, dacă este posibil.

•$D = \mathbb{R}^2$ este mulţime simplu conexă.

$\omega(x, y) = \underbrace{\left(2y^2 - 4y + x\right)}_{P(x,y)} dx + \underbrace{(4xy - 4x)}_{Q(x,y)} dy$

•P, Q sunt funcţii de clasă $\mathcal{C}^1$ pe D.

•$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y}(x, y) = 4y - 4 \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = 4y - 4 \end{cases}, \forall (x, y) \in D \Rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ pe $D \Rightarrow \omega$ este formă închisă.

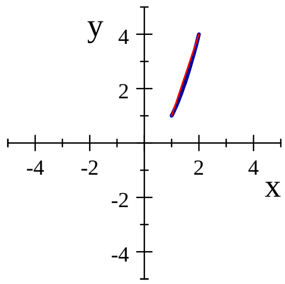
•γ este curbă închisă, deoarece $\gamma(0) = (1, 1) = \gamma(2\pi)$

Conform Corolarului 1 $\Rightarrow \int_\gamma \omega(x) = 0.$

Exerciţiul 7. Să se calculeze

a) $\int_\gamma \left(2y^2 - 4y + x\right) dx + 4x(y-1)\, dy$, unde $\gamma : [1,2] \to \mathbb{R}^2$ este o curbă netedă cu $\gamma(1) = (1,1)$ şi $\gamma(2) = (2,4)$. Să se studieze anticipat dacă integrala din $\omega = \left(2y^2 - 4y + x\right) dx + 4x(y-1)\, dy$ este independentă de drum.

Rezolvare. Cu Etapele $1,2,3$ nu se poate rezolva exerciţiul, deoarece nu se cunoaşte o parametrizare a curbei γ.



Ştim doar că $\gamma : [1,2] \to \mathbb{R}^2$ este o curbă netedă cu $\gamma(1) = (1,1)$ şi $\gamma(2) = (2,4)$. Poate fi un segment $\left[\overrightarrow{M_1M_2}\right]$, un arc de parabolă $y = x^2, x \in [1,2]$ sau orice altă curbă netedă ce uneşte $M_1(1,1)$ cu $M_2(2,4)$.

etapa 4. Se determină $\mathcal{I}$ aplicând Corolarul 1, dacă este posibil -nu se poate deoarece γ nu este curbă închisă $\gamma(1) = (1,1) \neq (2,4) = \gamma(2)$. NU

Etapa 5. Se aplică Teorema de tip Leibniz-Newton, dacă este posibil.

pasul 5.1. Se studiază o CN (este şi CS dacă D este simplu conex) pentru ca forma diferenţială ω să fie exactă, adică se studiază dacă este închisă.

$$\omega(x,y) = \underbrace{\left(2y^2 - 4y + x\right)}_{P(x,y)} dx + \underbrace{(4xy - 4x)}_{Q(x,y)} dy$$

$P : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, P(x,y) = 2y^2 - 4y + x,$

$Q : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, Q(x,y) = 4xy - 4x.$

$\bullet D = \mathbb{R}^2$-este mulţime deschisă, chiar simplu conexă.

$\bullet P, Q$ sunt funcţii de clasă $\mathcal{C}^1$ pe D.

$$\bullet \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 4y - 4 \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = 4y - 4 \end{cases}, \forall (x,y) \in D \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow \omega \text{ este formă închisă}$$

Deci D este mulţime simplu conexă şi ω este formă închisă şi atunci rezultă că ω este exactă, adică ω admite primitive pe $D = \mathbb{R}^2$.

Mai mult, integrala din ω este independentă de drum, adică indiferent de ce drum parametrizat γ s-ar alege care să unească $(1,1)$ cu $(2,4)$, s-ar obţine acelaşi număr $\int_\gamma \omega(x,y)$

pasul 5.2. Se determină o primitivă g pentru ω.

modul 1. Se determină o funcţie $g : D = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenţiabilă a.î. $\omega = dg \Leftrightarrow$

$$\left(2y^2 - 4y + x\right) dx + (4xy - 4x)\, dx = \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\, dx + \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\, dy, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (1.1)\, \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 2y^2 - 4y + x \\ (1.2)\, \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 4xy - 4x \end{cases}, \forall (x,y) \in D$$

<u>modul 1.1</u> (1.1) $\left| \int (\cdot)\, dx \Rightarrow \right.$

$\int \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\, dx = \int \left(2y^2 - 4y + x\right) dx, \forall (x,y) \in D \Rightarrow$

$g(x,y) \underset{\text{de integrare}}{\overset{x \text{ este var.}}{=}} 2y^2x - 4yx + \frac{x^2}{2} + \underbrace{\varphi(y)}_{\substack{\text{constantă în raport} \\ \text{cu variabila de integr. } x}}, \forall (x,y) \in D \left| \frac{\partial}{\partial y}(\cdot) \Rightarrow \right.$

$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \underset{\text{de derivare}}{\overset{y \text{ este var.}}{=}} 4yx - 4x + 0 + \varphi'(y), \forall (x,y) \in D$

Se înlocuieşte (1.2) $\Rightarrow 4xy - 4x = 4yx - 4x + \varphi'(y), \forall (x,y) \in D \Rightarrow$

$\varphi'(y) = 0, \forall (x,y) \in D \left| \int (\cdot)\, dy \Rightarrow \varphi(y) = c_1, \forall (x,y) \in D, \forall c_1 \in \mathbb{R}. \right.$

Deci $g(x,y) = 2y^2x - 4yx + \frac{x^2}{2} + c_1, \forall (x,y) \in D, \forall c_1 \in \mathbb{R}$
sunt toate primitivele formei diferenţiale ω, mulţimea primitivelor fiind indexată dupa constanta c_1.

<u>modul 1.2</u> (1.2) $\left| \int (\cdot)\, dy \Rightarrow \right.$

$\int \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\, dy = \int (4xy - 4x)\, dy, \forall (x,y) \in D \Rightarrow$

$g(x,y) \underset{\text{de integrare}}{\overset{y \text{ este var.}}{=}} 4x \cdot \frac{y^2}{2} - 4xy + \underbrace{\psi(x)}_{\substack{\text{constantă în raport} \\ \text{cu variabila de integr. } y}}, \forall (x,y) \in D \left| \frac{\partial}{\partial x}(\cdot) \Rightarrow \right.$

$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) \underset{\text{de derivare}}{\overset{x \text{ este var.}}{=}} 4 \cdot \frac{y^2}{2} - 4y + 0 + \psi'(x), \forall (x,y) \in D$

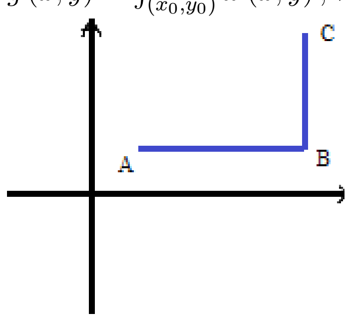
Se înlocuieşte (1.1) $\Rightarrow 2y^2 - 4y + x = 4 \cdot \frac{y^2}{2} - 4y + \psi'(x), \forall (x,y) \in D \Rightarrow$

$\psi'(x) = x, \forall (x,y) \in D \left| \int (\cdot)\, dx \Rightarrow \psi(x) = \frac{x^2}{2} + c_2, \forall (x,y) \in D, \forall c_2 \in \mathbb{R}. \right.$

Deci $g(x,y) = 2y^2x - 4yx + \frac{x^2}{2} + c_2, \forall (x,y) \in D, \forall c_2 \in \mathbb{R}$
sunt toate primitivele formei diferenţiale ω, mulţimea primitivelor fiind indexată dupa constanta c_2.

○<u>modul 2.</u> Deoarece ω este exactă, are integrala independentă de drum, şi se poate scrie, pentru $\forall (x_0, y_0)$ fixaţi în D,

$g(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \omega(x,y), \forall (x,y) \in D.$



Se alege drept drum ce uneste (x_0, y_0) cu (x,y) linia poligonală cu vârfurile $A(x_0, y_0)$, $B(x, y_0)$, $C(x,y)$. Din reprezentările parametrice ale

$\left[\overrightarrow{AB}\right] : \begin{cases} \widetilde{x}(t) = t \\ \widetilde{y}(t) = y_0 \end{cases}, t \in [x_0, x], \begin{cases} d\widetilde{x}(t) = 1dt \\ d\widetilde{y}(t) = 0dt \end{cases}, t \in [x_0, x],$

$$\left[\overrightarrow{BC}\right] : \begin{cases} \widetilde{x}(t) = x \\ \widetilde{y}(t) = t \end{cases}, t \in [y_0, y] \begin{cases} d\widetilde{x}(t) = 0dt \\ d\widetilde{y}(t) = 1dt \end{cases}, t \in [y_0, y]$$

deducem

$$g(x,y) = \int_{\left[\overrightarrow{AB}\right]} \omega(x,y) + \int_{\left[\overrightarrow{BC}\right]} \omega(x,y), \forall (x,y) \in D.$$

$$\boxed{g(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(t, y_0)\,dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,t)\,dt, \forall (x,y) \in D,} \text{adică}$$

$$g(x,y) = \int_{x_0}^{x} \left(2y_0^2 - 4y_0 + t\right) dt + \int_{y_0}^{y} (4xt - 4x)\,dt = \left(2y_0^2 t - 4y_0 t + \frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_{t=x_0}^{t=x} + \left(4x\frac{t^2}{2} - 4xt\right)\Bigg|_{t=y_0}^{t=y} =$$

$$= \left(2y_0^2 x - 4y_0 x + \frac{x^2}{2}\right) - \left(2y_0^2 x_0 - 4y_0 x_0 + \frac{x_0^2}{2}\right) + \left(4x\frac{y^2}{2} - 4xy\right) - \left(4x\frac{y_0^2}{2} - 4xy_0\right) =$$

$$= \left(2y^2 x - 4yx + \frac{x^2}{2}\right) - \underbrace{\left(2y_0^2 x_0 - 4y_0 x_0 + \frac{x_0^2}{2}\right)}_{-c \in \mathbb{R}}, \forall (x,y) \in D.$$

Concluzie pasul 5.2 :

$$g(x,y) = 2y^2 x - 4yx + \frac{x^2}{2} + c, \forall (x,y) \in D, \forall c \in \mathbb{R}$$

sunt toate primitivele formei diferenţiale ω, mulţimea primitivelor fiind indexată dupa constanta c.

pasul 5.3. Deoarece

$$\left.\begin{array}{l} \gamma \text{ este curbă netedă} \\ \text{coeficienţii formei } \omega,\ P \text{ şi } Q \text{ sunt câmpuri scalare continue pe } D \\ \omega \text{ admite o primitivă } g(x,y) = 2y^2 x - 4yx + \dfrac{x^2}{2} \text{ pe } D \end{array}\right\} \text{atunci}$$

$$\int_{\gamma} \omega(x,y) = g(\gamma(2)) - g(\gamma(1)) = g(2,4) - g(1,1) =$$

$$= \left(2 \cdot 4^2 \cdot 2 - 4 \cdot 4 \cdot 2 + \frac{2^2}{2}\right) - \left(2 \cdot 1^2 \cdot 1 - 4 \cdot 1 \cdot 1 + \frac{1^2}{2}\right) = 36 - \frac{1}{2}.$$

Etapa 6. Se aplică în locul etapei 5, mai ales dacă în etapa 5, indiferent de mod, nu s-a putut exprima o primitivă g cu funcţii elementare. Se aplică independeţa de drum a integralei şi se alege ca drum pe care se calculează integrale un segment ce uneşte capetele.Teorema de tip Leibniz-Newton, dacă este posibil

pasul 6.1. Se studiază o CN (este şi CS dacă D este simplu conex) pentru ca integrala să fie independentă de drum, adică se studiază dacă forma diferenţială ω este închisă. -este acelaşi cu pasul 5.1.

pasul 6.2.Ecuaţiile parametrice ale segmentului $\left[\overrightarrow{M_1 M_2}\right]$, cu $M_1(1,1)$ şi $M_2(2,4)$, sunt

$$\operatorname{Im}\gamma = \left[\overrightarrow{M_1 M_2}\right] : \begin{cases} x(t) = 1 + t(2-1) \\ y(t) = 1 + t(4-1) \end{cases}, t \in [0,1] \text{ adică}$$

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) = \left(\underbrace{1+t}_{x(t)}, \underbrace{1+3t}_{y(t)}\right).$$

γ este curbă netedă, deoarece

$$\begin{cases} \exists \gamma' : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \gamma'(t) = \left(\underbrace{1}_{x'(t)}, \underbrace{3}_{y'(t)}\right). \\ \gamma'\text{- este continuă pe } [0,1] \text{ şi } (x'(t))^2 + (y'(t))^2 \neq 0, \forall t \end{cases}$$

Mai mult, $\operatorname{Im}\gamma \subseteq D$ şi

$$\operatorname{Im}\gamma = \left[\overrightarrow{M_1 M_2}\right] : \begin{cases} x(t) = 1 + t \\ y(t) = 1 + 3t \end{cases}, t \in [0,1] \Rightarrow \begin{cases} dx(t) = 1dt \\ dy(t) = 3dt \end{cases}$$

Atunci
$\int_\gamma \left(2y^2-4y+x\right)dx+4x\left(y-1\right)dy=\int_{\left[\overrightarrow{M_1M_2}\right]}\left(2y^2-4y+x\right)dx+4x\left(y-1\right)dy=$
$$=\int_0^1\left(\left(2\left(1+3t\right)^2-4\left(1+3t\right)+\left(1+t\right)\right)\cdot 1+4\left(1+t\right)\left(1+3t-1\right)\cdot 3\right)dt=36-\frac{1}{2}$$

b) $\int_\gamma \omega\left(x,y\right)$, unde $\omega\left(x,y\right)=\dfrac{-y}{x^2+y^2}dx+\dfrac{x}{x^2+y^2}dy, x>0, y>0$ şi
$\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^2$ este o curbă netedă cu $\gamma\left(0\right)=\left(1,1\right)$ şi $\gamma\left(1\right)=\left(2,2\right)$.

Rezolvare. Cu Etapele $1,2,3$ nu se poate rezolva exerciţiul, deoarece nu se ştie o parametrizare a curbei γ. Se ştie doar că $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^2$ este o curbă netedă cu $\gamma\left(0\right)=\left(1,1\right)$ şi $\gamma\left(1\right)=\left(2,2\right)$.
<u>etapa 4.</u> Se determină $\mathcal{I}$ aplicând Corolarul 1, dacă e posibil -nu se poate, deoarece γ nu este curbă închisă $\gamma\left(0\right)=\left(1,1\right)\neq\left(2,2\right)=\gamma\left(1\right)$.
<u>Etapa 5.</u> Se aplică Teorema de tip Leibniz-Newton, dacă este posibil.
<u>pasul 5.1.</u> Se studiază o CN (este şi CS, dacă D este simplu conex) pentru ca forma diferenţială ω să fie exactă, adică se studiază dacă este formă închisă.

$$\omega\left(x,y\right)=\underbrace{\frac{-y}{x^2+y^2}}_{P(x,y)}dx+\underbrace{\frac{x}{x^2+y^2}}_{Q(x,y)}dy$$

$P:D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, P\left(x,y\right)=\dfrac{-y}{x^2+y^2}$,
$Q:D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, Q\left(x,y\right)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$.
•$D=\left\{\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2; x>0, y>0\right\}$-este mulţime deschisă, chiar simplu conexă
•P,Q sunt funcţii de clasă $\mathcal{C}^1$ pe D.

$$\bullet\begin{cases}\dfrac{\partial P}{\partial y}\left(x,y\right)=-\dfrac{1\cdot\left(x^2+y^2\right)-y\left(0+2y\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}=-\dfrac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}\left(x,y\right)=\dfrac{1\cdot\left(x^2+y^2\right)-x\left(2x+0\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\dfrac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\end{cases},\forall\left(x,y\right)\in D\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}\Rightarrow\omega \text{ este formă închisă}$$

Deci D este mulţime simplu conexă şi ω este formă închisă şi atunci rezultă că ω este exactă, adică ω admite primitive pe $D=\left\{\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2; x>0, y>0\right\}$.
<u>pasul 5.2.</u> Se determină o primitivă g pentru ω.
<u>modul 1.</u> Se determină o funcţie $g:D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ diferenţiabilă a.î. $\omega=dg\Leftrightarrow$

$$\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)dx+\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)dx=\frac{\partial g}{\partial x}\left(x,y\right)dx+\frac{\partial g}{\partial y}\left(x,y\right)dy,\forall\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}(1.1)\ \dfrac{\partial g}{\partial x}\left(x,y\right)=\dfrac{-y}{x^2+y^2}\\ (1.2)\ \dfrac{\partial g}{\partial y}\left(x,y\right)=\dfrac{x}{x^2+y^2}\end{cases},\forall\left(x,y\right)\in D$$

<u>modul 1.1</u> $(1.1)|\int\left(\cdot\right)dx\Rightarrow$

$$\int\frac{\partial g}{\partial x}\left(x,y\right)dx=\int\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)dx,\forall\left(x,y\right)\in D\Rightarrow$$

$$g\left(x,y\right)\underset{\text{de integrare}}{\overset{x\text{ este var.}}{=}}-y\frac{1}{y}\operatorname{arctg}\frac{x}{y}+\underbrace{\varphi\left(y\right)}_{\substack{\text{constantă în raport}\\ \text{cu variabila de integr. } x}},\forall\left(x,y\right)\in D|\frac{\partial}{\partial y}\left(\cdot\right)\Rightarrow$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \overset{y \text{ este var.}}{\underset{\text{de derivare}}{=}} -\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\frac{-x}{y^2}+\varphi'(y), \forall (x,y)\in D$$

Se înlocuieşte (1.2) $\Rightarrow \dfrac{x}{x^2+y^2}=\dfrac{x}{x^2+y^2}+\varphi'(y), \forall (x,y)\in D \Rightarrow$

$\varphi'(y)=0, \forall (x,y)\in D | \int(\cdot)\,dy \Rightarrow \varphi(y)=c_1, \forall (x,y)\in D, \forall c_1\in\mathbb{R}.$

Deci $g(x,y)=-\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}+c_1, \forall (x,y)\in D, \forall c_1\in\mathbb{R}$

sunt toate primitivele formei diferenţiale ω, mulţimea primitivelor fiind indexată dupa constanta c_1.

modul 1.2 (1.2)$| \int(\cdot)\,dy \Rightarrow$

$$\int\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\,dy=\int\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)dy, \forall (x,y)\in D \Rightarrow$$

$$g(x,y) \overset{y \text{ este var.}}{\underset{\text{de integrare}}{=}} x\frac{1}{x}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+\underbrace{\psi(x)}_{\substack{\text{constantă în raport}\\ \text{cu variabila de integr. } y}}, \forall (x,y)\in D | \frac{\partial}{\partial x}(\cdot) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) \overset{x \text{ este var.}}{\underset{\text{de derivare}}{=}} \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{-y}{x^2}+\psi'(x), \forall (x,y)\in D$$

Înlocuim (1.1) $\Rightarrow \dfrac{-y}{x^2+y^2}=\dfrac{-y}{x^2+y^2}+\psi'(x), \forall (x,y)\in D \Rightarrow$

$\psi'(x)=0, \forall (x,y)\in D | \int(\cdot)\,dx \Rightarrow \psi(x)=c_2, \forall (x,y)\in D, \forall c_2\in\mathbb{R}.$

Deci $g(x,y)=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}+c_2, \forall (x,y)\in D, \forall c_2\in\mathbb{R}$

sunt toate primitivele formei diferenţiale ω, mulţimea primitivelor fiind indexată dupa constanta c_2.

○modul 2. Deoarece ω este exactă, are integrala independentă de drum şi se poate scrie, pentru $\forall (x_0,y_0)$ fixaţi în D,

$g(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}\omega(x,y), \forall (x,y)\in D.$

Se alege drept drum ce uneşte (x_0,y_0) cu (x,y) linia poligonală cu vârfurile $A(x_0,y_0)$, $B(x,y_0)$, $C(x,y)$. Ca la a),

$\boxed{g(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(t,y_0)\,dt+\int_{y_0}^{y}Q(x,t)\,dt, \forall (x,y)\in D,}$ adică

$$g(x,y)=\int_{x_0}^{x}\left(\frac{-y_0}{t^2+y_0^2}\right)dt+\int_{y_0}^{y}\left(\frac{x}{x^2+t^2}\right)dt==\left(-y_0\frac{1}{y_0}\operatorname{arctg}\frac{t}{y_0}\right)\Bigg|_{t=x_0}^{t=x}+\left(x\frac{1}{x}\operatorname{arctg}\frac{t}{x}\right)\Bigg|_{t=y_0}^{t=y}=$$

$$=\left(-\operatorname{arctg}\frac{x}{y_0}\right)-\left(-\operatorname{arctg}\frac{x_0}{y_0}\right)+\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)-\left(\operatorname{arctg}\frac{y_0}{x}\right)=$$

$$=\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)-\underbrace{\left(\underbrace{\operatorname{arctg}\frac{x}{y_0}+\operatorname{arctg}\frac{y_0}{x}}_{\frac{\pi}{2}}-\operatorname{arctg}\frac{x_0}{y_0}\right)}_{-c\in\mathbb{R}}, \forall (x,y)\in D.$$

Concluzie pasul 5.2 :

$g(x,y)=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}+c, \forall (x,y)\in D, \forall c\in\mathbb{R}$

sunt toate primitivele formei diferenţiale ω, mulţimea primitivelor fiind indexată dupa constanta c.

S-a folosit că

$$\boxed{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+\operatorname{arctg}\frac{x}{y}=\frac{\pi}{2}, \forall (x,y)\in D.}$$

pasul 5.3. Deoarece

$$\left.\begin{array}{l} \gamma \text{ este curbă netedă} \\ \text{coeficienţii formei } \omega,\ P \text{ şi } Q \text{ sunt câmpuri scalare continue pe } D \\ \omega \text{ admite o primitivă } g(x,y)=\operatorname{arctg}\frac{y}{x} \text{ pe } D \end{array}\right\}$$

atunci

$$\int_\gamma \omega(x,y)=g(\gamma(1))-g(\gamma(0))=g(2,2)-g(1,1)=\operatorname{arctg}\frac{2}{2}-\operatorname{arctg}\frac{1}{1}=0.$$

Exerciţiul 8. Fie

$$\omega(x,y,z)=\left(1-\frac{1}{y}+\frac{y}{z}\right)dx+\left(\frac{x}{z}+\frac{x}{y^2}\right)dy+\left(-\frac{xy}{z^2}\right)dz, x>0, y>0, z>0.$$

Să se studieze dacă ω este formă diferenţială exactă pe D şi, dacă da, să se determine o primitivă pentru forma ω.

Rezolvare. Etapa 1°. Se studiază o CN (este şi CS, dacă D este simplu conex) pentru ca forma diferenţială ω să fie exactă, adică se studiază dacă este închisă.

$$\omega(x,y,z)=\underbrace{\left(1-\frac{1}{y}+\frac{y}{z}\right)}_{P(x,y,z)}dx+\underbrace{\left(\frac{x}{z}+\frac{x}{y^2}\right)}_{Q(x,y,z)}dy+\underbrace{\left(-\frac{xy}{z^2}\right)}_{R(x,y,z)}dy,$$

$P:D\subseteq\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}, P(x,y,z)=1-\frac{1}{y}+\frac{y}{z},$

$Q:D\subseteq\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}, Q(x,y,z)=\frac{x}{z}+\frac{x}{y^2},$

$R:D\subseteq\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}, R(x,y,z)=-\frac{xy}{z^2}.$

•$D=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3; x>0, y>0, z>0\right\}$-este mulţime deschisă, chiar simplu conexă

•P,Q,R sunt funcţii de clasă $\mathcal{C}^1$ pe D.

•Se verifică dacă $\begin{cases}\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}\\ \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}\\ \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}\end{cases}$. Într-adevăr

$$\begin{cases}\frac{\partial P}{\partial y}(x,y,z)=0+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z}\\ \frac{\partial Q}{\partial z}(x,y,z)=\frac{-x}{z^2}\\ \frac{\partial R}{\partial x}(x,y,z)=\frac{-y}{z^2}\end{cases} \text{ şi } \begin{cases}\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y,z)=\frac{1}{z}+\frac{1}{y^2}\\ \frac{\partial R}{\partial y}(x,y,z)=\frac{-x}{z^2}\\ \frac{\partial P}{\partial z}(x,y,z)=\frac{-y}{z^2}\end{cases}, \forall (x,y,z)\in D$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}\\ \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}\\ \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}\end{cases} \Rightarrow \omega \text{ este formă închisă}$$

Deci D este mulţime simplu conexă şi ω este formă închisă şi atunci rezultă că ω este exactă, adică ω admite primitive pe $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^3; x>0, y>0, z>0\right\}$.

Etapa 2°. Se determină o primitivă g pentru ω.

modul 1. Se determină o funcţie $g:D\subseteq\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ diferenţiabilă a.î. $\omega=dg \Leftrightarrow$

$\left(1-\frac{1}{y}+\frac{y}{z}\right)dx+\left(\frac{x}{z}+\frac{x}{y^2}\right)dy+\left(-\frac{xy}{z^2}\right)dz=\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z)\,dx+\frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z)\,dy+\frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z)\,dy, \forall (x,y,z)\in D \Leftrightarrow$

$$\left\{\begin{array}{l}(1.1)\ \frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z)=1-\frac{1}{y}+\frac{y}{z}\\ (1.2)\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z)=\frac{x}{z}+\frac{x}{y^2}\\ (1.3)\ \frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z)=-\frac{xy}{z^2}\end{array}\right., \forall (x,y,z)\in D$$

<u>modul 1.1</u> $(1.1)|\int(\cdot)\,dx \Rightarrow$

$$\int\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z)\,dx=\int\left(1-\frac{1}{y}+\frac{y}{z}\right)dx, \forall (x,y,z)\in D \Rightarrow$$

$$g(x,y,z)\underset{\text{de integrare}}{\overset{x\text{ este var.}}{=}}x-\frac{1}{y}x+\frac{y}{z}x+\underbrace{\varphi(y,z)}_{\substack{\text{constantă în raport}\\ \text{cu variabila de integr. } x}}, \forall (x,y,z)\in D|\ \frac{\partial}{\partial y}(\cdot), \frac{\partial}{\partial z}(\cdot) \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z)\underset{\text{de derivare}}{\overset{y\text{ este var.}}{=}}0+\frac{1}{y^2}x+\frac{1}{z}x+\frac{\partial\varphi}{\partial y}(y,z)\\ \frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z)\underset{\text{de derivare}}{\overset{z\text{ este var.}}{=}}0+0-\frac{y}{z^2}x+\frac{\partial\varphi}{\partial z}(y,z)\end{array}\right., \forall (x,y,z)\in D.$$

Se înlocuiesc (1.2) şi (1.3) $\Rightarrow$

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{x}{z}+\frac{x}{y^2}=0+\frac{1}{y^2}x+\frac{1}{z}x+\frac{\partial\varphi}{\partial y}(y,z)\\ -\frac{xy}{z^2}=0+0-\frac{y}{z^2}x+\frac{\partial\varphi}{\partial z}(y,z)\end{array}\right., \forall (x,y,z)\in D \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}(2.1)\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}(y,z)=0\\ (2.2)\ \frac{\partial\varphi}{\partial z}(y,z)=0\end{array}\right., \forall (x,y,z)\in D.$$

<u>modul 1.1. – 2.1</u> $(2.1)|\int(\cdot)\,dy \Rightarrow \int\frac{\partial\varphi}{\partial y}(y,z)\,dy=\int 0dy, \forall (y,z) \Rightarrow$

$$\varphi(y,z)\underset{\text{de integrare}}{\overset{y\text{ este var.}}{=}}\underbrace{\phi(z)}_{\substack{\text{constantă în raport}\\ \text{cu variabila de integr. } y}}, \forall (y,z)|\ \frac{\partial}{\partial z}(\cdot) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}(x,y)\underset{\text{de derivare}}{\overset{z\text{ este var.}}{=}}\phi'(z), \forall (y,z)$$

Se înlocuieşte (2.2) $\Rightarrow 0=\phi'(z), \forall (y,z) \Rightarrow \phi'(z)=0, \forall (y,z)|\int(\cdot)\,dz \Rightarrow \phi(z)=c_1, \forall (y,z), \forall c_1\in\mathbb{R}$.

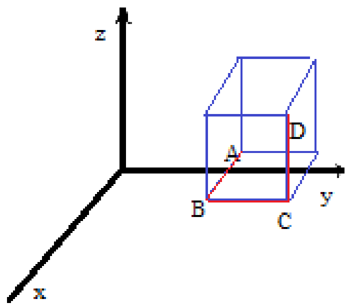
Deci $\varphi(y,z)=c_1, \forall (y,z), \forall c_1\in\mathbb{R}$

Analog modul 1.1. – 2.2. Analog modurile 1.2 şi 1.3.

Atunci $g(x,y,z)=x-\frac{1}{y}x+\frac{y}{z}x+c_1, \forall (x,y,z)\in D, \forall c_1\in\mathbb{R}$
sunt toate primitivele formei diferenţiale ω, mulţimea primitivelor fiind indexată dupa constanta c_1.

<u>modul 2.</u>NU SE CERE Deoarece ω este exactă, are integrala independentă de drum, şi se poate scrie, pentru $\forall (x_0,y_0,z_0)$ fixaţi în D,

$g(x,y)=\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)}\omega(x,y,z), \forall (x,y,z)\in D.$



Se alege drept drum ce uneste (x_0, y_0, z_0) cu (x, y, z) linia poligonală cu vârfurile $A(x_0, y_0, z_0)$, $B(x, y_0, z_0)$, $C(x, y, z_0)$, $D(x, y, z)$. Din reprezentările parametrice ale

$$\left[\overrightarrow{AB}\right]: \begin{cases} \widetilde{x}(t) = t \\ \widetilde{y}(t) = y_0 \\ \widetilde{z}(t) = z_0 \end{cases}, t \in [x_0, x], \begin{cases} d\widetilde{x}(t) = 1dt \\ d\widetilde{y}(t) = 0dt \\ d\widetilde{z}(t) = 0dt \end{cases}, t \in [x_0, x],$$

$$\left[\overrightarrow{BC}\right]: \begin{cases} \widetilde{x}(t) = x \\ \widetilde{y}(t) = t \\ \widetilde{z}(t) = z_0 \end{cases}, t \in [y_0, y] \begin{cases} d\widetilde{x}(t) = 0dt \\ d\widetilde{y}(t) = 1dt \\ d\widetilde{z}(t) = 0dt \end{cases}, t \in [y_0, y]$$

$$\left[\overrightarrow{CD}\right]: \begin{cases} \widetilde{x}(t) = x \\ \widetilde{y}(t) = y \\ \widetilde{z}(t) = t \end{cases}, t \in [y_0, y] \begin{cases} d\widetilde{x}(t) = 0dt \\ d\widetilde{y}(t) = 0dt \\ d\widetilde{z}(t) = 1dt \end{cases}, t \in [z_0, z]$$

se deduce

$$g(x, y, z) = \int_{\left[\overrightarrow{AB}\right]} \omega(x, y, z) + \int_{\left[\overrightarrow{BC}\right]} \omega(x, y, z) + \int_{\left[\overrightarrow{CD}\right]} \omega(x, y, z), \forall (x, y, z) \in D.$$

$$\boxed{g(x, y, z) = \int_{x_0}^{x} P(t, y_0, z_0), dt + \int_{y_0}^{y} Q(x, t, z_0)\, dt + \int_{z_0}^{z} R(x, y, t)\, dt, \forall (x, y, z) \in D.}$$

Adică $g(x, y, z) = \int_{x_0}^{x} \left(1 - \frac{1}{y_0} + \frac{y_0}{z_0}\right) dt + \int_{y_0}^{y} \left(\frac{x}{z_0} + \frac{x}{t^2}\right) dt + \int_{z_0}^{z} \left(-\frac{xy}{t^2}\right) dt =$

$$= \left(t - \frac{1}{y_0}t + \frac{y_0}{z_0}t\right)\Big|_{t=x_0}^{t=x} + \left(\frac{x}{z_0}t + \frac{x}{-t}\right)\Big|_{t=y_0}^{t=y} + \left(\frac{xy}{t}\right)\Big|_{t=z_0}^{t=z} =$$

$$= \left(x - \frac{1}{y_0}x + \frac{y_0}{z_0}x\right) - \left(x_0 - \frac{1}{y_0}x_0 + \frac{y_0}{z_0}x_0\right) + \left(\frac{x}{z_0}y + \frac{x}{-y}\right) - \left(\frac{x}{z_0}y_0 + \frac{x}{-y_0}\right) + \left(\frac{xy}{z}\right) - \left(\frac{xy}{z_0}\right)$$

$$= \left(x - \frac{1}{y}x + \frac{y}{z}x\right) - \underbrace{\left(x_0 - \frac{1}{y_0}x_0 + \frac{y_0}{z_0}x_0\right)}_{-c \in \mathbb{R}}, \forall (x, y, z) \in D.$$

Concluzie Etapa 2° :

$$g(x, y, z) = \left(x - \frac{1}{y}x + \frac{y}{z}x\right) + c, \forall (x, y, z) \in D, \forall c \in \mathbb{R}$$

sunt toate primitivele formei diferenţiale ω, mulţimea primitivelor fiind indexată dupa constanta c.

Exerciţiul 9. Fie forma diferenţială

$$\omega(x, y) = \left(3x^2y + \sin x\right) dx + \left(x^3 - \cos y\right) dy,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Să se arate că este o formă diferenţială exactă şi să se determine o primitivă a sa.

Rezolvare. Fie

$P : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, P(x, y) = 3x^2y + \sin x,$

$Q : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, Q(x, y) = x^3 - \cos y.$

$D = \mathbb{R}^2$-este mulţime deschisă. De precizat că

$\bullet D = \mathbb{R}^2$-este mulţime simplu conexă.
$\bullet P, Q$ sunt de clasă $\mathcal{C}^1$ pe $D = \mathbb{R}^2$.

$$\bullet \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 3x^2 \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = 3x^2 \end{cases}, \forall (x,y) \in D \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow \omega \text{ este formă închisă}$$

Deoarece D este mulţime simplu conexă şi că ω este formă închisă şi atunci rezultă că ω este exactă, adică ω admite primitive pe $D = \mathbb{R}^2$. Se determină o primitivă g pentru ω

modul 1. Se determină o funcţie $g : D = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenţiabilă a.î. $\omega = dg \Leftrightarrow$

$$\left(3x^2y + \sin x\right) dx + \left(x^3 - \cos y\right) dx = \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\, dx + \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\, dy, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (1.1)\ \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 3x^2y + \sin x \\ (1.2)\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = x^3 - \cos y \end{cases}, \forall (x,y) \in D$$

modul 1.1 $(1.1)| \int (\cdot)\, dx \Rightarrow$

$$\int \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\, dx = \int \left(3x^2y + \sin x\right) dx, \forall (x,y) \in D \Rightarrow$$

$$g(x,y) \underset{\text{de integrare}}{\overset{x \text{ este var.}}{=}} 3y \cdot \frac{x^3}{3} - \cos x + \underbrace{\varphi(y)}_{\substack{\text{constantă în raport} \\ \text{cu variabila de integr. } x}}, \forall (x,y) \in D | \frac{\partial}{\partial y}(\cdot) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \underset{\text{de derivare}}{\overset{y \text{ este var.}}{=}} 3 \cdot \frac{x^2}{3} + \varphi'(y), \forall (x,y) \in D$$

Se înlocuieşte $(1.2) \Rightarrow x^3 - \cos y = x^3 + \varphi'(y), \forall (x,y) \in D \Rightarrow$

$\varphi'(y) = -\cos y, \forall (x,y) \in D | \int (\cdot)\, dy \Rightarrow \varphi(y) = -\sin y + c_1, \forall (x,y) \in D, \forall c_1 \in \mathbb{R}.$

Deci $g(x,y) = x^3y - \cos x - \sin y + c_1, \forall (x,y) \in D, \forall c_1 \in \mathbb{R}$
sunt toate primitivele formei diferenţiale ω, mulţimea primitivelor fiind indexată dupa constanta c_1.

modul 1.2 $(1.2)| \int (\cdot)\, dy \Rightarrow$

$$\int \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\, dy = \int \left(x^3 - \cos y\right) dy, \forall (x,y) \in D \Rightarrow$$

$$g(x,y) \underset{\text{de integrare}}{\overset{y \text{ este var.}}{=}} x^3y - \sin y + \underbrace{\psi(x)}_{\substack{\text{constantă în raport} \\ \text{cu variabila de integr. } y}}, \forall (x,y) \in D | \frac{\partial}{\partial x}(\cdot) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) \underset{\text{de derivare}}{\overset{x \text{ este var.}}{=}} 3x^2y + 0 + \psi'(x), \forall (x,y) \in D$$

Se înlocuieşte $(1.1) \Rightarrow 3x^2y + \sin x = 3x^2y + \psi'(x), \forall (x,y) \in D \Rightarrow$

$\psi'(x) = \sin x, \forall (x,y) \in D | \int (\cdot)\, dx \Rightarrow \psi(x) = -\cos x + c_2, \forall (x,y) \in D, \forall c_2 \in \mathbb{R}.$

Deci $g(x,y) = x^3y - \sin y - \cos x + c_2, \forall (x,y) \in D, \forall c_2 \in \mathbb{R}$
sunt toate primitivele formei diferenţiale ω, mulţimea primitivelor fiind indexată dupa constanta c_2.

modul 2.NU SE CERE Deoarece ω este exactă, are integrala independentă de drum, şi se poate scrie, pentru $\forall (x_0, y_0)$ fixaţi în D,

$g(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \omega(x,y), \forall (x,y) \in D.$

Se alege drept drum ce uneste (x_0, y_0) cu (x,y) linia poligonală cu vârfurile $A(x_0, y_0)$, $B(x, y_0)$, $C(x,y)$. Ca la exerciţiul 7,

$\boxed{g(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(t, y_0)\, dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,t)\, dt, \forall (x,y) \in D.}$

Adică $g(x,y) = \int_{x_0}^{x} \left(3t^2 y_0 + \sin t\right) dt + \int_{y_0}^{y} \left(x^3 - \cos t\right) dt =$

$$= \left(3y_0 \cdot \frac{t^3}{3} - \cos t\right)\Big|_{t=x_0}^{t=x} + \left(x^3 t - \sin t\right)\Big|_{t=y_0}^{t=y} =$$

$$= \left(3y_0 \cdot \frac{x^3}{3} - \cos x\right) - \left(3y_0 \cdot \frac{x_0^3}{3} - \cos x_0\right) + \left(x^3 y - \sin y\right) - \left(x^3 y_0 - \sin y_0\right)$$

$$= \left(x^3 y - \cos x - \sin y\right) - \underbrace{\left(x_0^3 y_0 - \cos x_0 - \sin y_0\right)}_{-c \in \mathbb{R}}, \forall (x,y) \in D,$$

este o primitivă pentru forma ω pe D.

<u>Concluzii.</u> Indiferent de mod, se obţine că

$$g(x,y) = x^3 y - \cos x - \sin y + c, \forall (x,y) \in D, \forall c \in \mathbb{R}$$

sunt toate primitivele formei diferenţiale ω, mulţimea primitivelor fiind indexată dupa constanta c.

Exerciţiul 10. Să se arate că integrala curbilinie de al doilea tip

$$I = \int_\gamma e^{\left(-x^2+y^2\right)} \left(\cos(2xy)\, dx + \sin(2xy)\, dy\right)$$

pe o curbă γ închisă, netedă pe porţiuni, este nulă.

Rezolvare. Fie forma diferenţială

$$\omega(x,y) = e^{\left(-x^2+y^2\right)} \left(\cos(2xy)\, dx + \sin(2xy)\, dy\right),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Fie $P : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, P(x,y) = e^{\left(-x^2+y^2\right)} \cos(2xy)$,

$Q : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, Q(x,y) = e^{\left(-x^2+y^2\right)} \sin(2xy)$.

$D = \mathbb{R}^2$-este mulţime deschisă.

Cu Teorema de calcul a integralei curbilinii de speţa a doua nu putem rezolva exerciţiul, deoarece nu ştim o parametrizare a curbei γ. Se va utiliza

•$D = \mathbb{R}^2$-este mulţime simplu conexă.

•P, Q sunt de clasă $\mathcal{C}^1$ pe $D = \mathbb{R}^2$.

$$\bullet \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y) = e^{\left(-x^2+y^2\right)}(2y)\cos(2xy) + e^{\left(-x^2+y^2\right)}(-\sin(2xy))(2x) \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = e^{\left(-x^2+y^2\right)}(-2x)\sin(2xy) + e^{\left(-x^2+y^2\right)}(\cos(2xy))(2y) \end{cases}, \forall (x,y) \in D \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow \omega \text{ este formă diferenţială închisă}$$

•γ este curbă închisă

Atunci, conform Corolar 1 $\Rightarrow \int_\gamma \omega(x,y) = 0$.