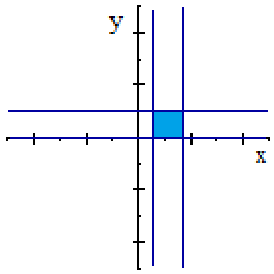
SEMINAR NR. 13, REZOLVĂRI
Analiză matematică, AIA

2. Integrale duble
2.0. **Domenii de integrare în $\mathbb{R}^2$**

Observaţia 1. Dacă
$\bullet D \subseteq \mathbb{R}^2$ este mulţime mărginită în $\mathbb{R}^2$ şi
$\bullet$ Fr D este o curbă simplă (injectivă), închisă, netedă pe porţiuni,
atunci D este *domeniu de integrare*.
Definiţia 3. Fie D_1 şi D_2 domenii de integrare din $\mathbb{R}^2$ cu proprietatea că $\operatorname{int} D_1 \cap \operatorname{int} D_1 = \emptyset$ şi că $D_1 \cup D_2$ este domeniu de integrare. Se numeşte *juxtapunerea domeniului D_1 cu domeniul D_2* domeniul $D_1 \cup D_2$.

2.1. **Integrale duble (proprii)**

Definiţia 1. $\mathcal{I} = \iint_D f(x,y)\,dxdy-$ A se vedea Curs.
Observaţie. Explicitări de curbe în plan (dreaptă, cerc, elipsă, parabolă ş.a.), utile pentru studiul Fr D- A se vedea seminarul la tablă.
Teorema 1.(**de reducere a unei integrale duble la integrale Riemann**)
a) Fie $D = [a,b] \times [c,d]$.
$D_y = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; a \le x \le b, c \le y \le d\right\}$ sau $D_x = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; c \le y \le d, a \le x \le b\right\}$ un dreptunghi cu interior, cu laturile paralele cu axele; este *domeniu compact simplu în raport cu ambele axe*;
Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă.
Atunci $f \in \mathcal{R}(D)$ şi $\boxed{\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right) dx \overset{\text{Fubini}}{=} \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right) dy.}$
b) Fie $D = D_y = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; a \le x \le b, g_1(x) \le y \le g_2(x)\right\}$, unde $g_{1,2} : [a,b] \to \mathbb{R}$ sunt funcţii continue; este *domeniu compact simplu în raport cu Oy*;
Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă.
Atunci $f \in \mathcal{R}(D)$ şi $\boxed{\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\right) dx.}$
c) Fie $D = D_x = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; c \le y \le d, h_1(y) \le x \le h_2(y)\right\}$, unde $h_{1,2} : [c,d] \to \mathbb{R}$ sunt funcţii continue; este *domeniu compact simplu în raport cu Ox*;
Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă.
Atunci $f \in \mathcal{R}(D)$ şi $\boxed{\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\right) dy.}$
Exerciţiul 1. Să se calculeze
a) $\mathcal{I} = \iint_D \dfrac{y^2}{1+x^2}\,dxdy$,
unde D este dreptunghiul cu interior mărginit de $x = \frac{1}{\sqrt{3}}, x = \sqrt{3}, y = 0, y = 1$.
Rezolvare. etapa 1. Se studiază domeniul D.
$\bullet$Se reprezintă grafic domeniul



• D este domeniu de integrare, deoarece:

$\begin{cases} \text{-}D \text{ este mulţime mărginită, } D \subsetneq [-2,2]\times[-2,2] \\ \text{- Fr } D \text{ este curbă simplă, închisă, netedă pe 4 porţiuni.} \end{cases}$

etapa 2. Se studiază integrantul f.

$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \dfrac{y^2}{1+x^2}$.

f este câmp scalar bine definit şi continuu pe D.

etapa 3. Se calculează integrala $\mathcal{I}$, aplicând T1.

modul 1. Se observă că D este dreptunghiul cu interior cu laturile paralele cu axele

$D = D_{xy} = \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right] \times [0,1]$.

Conform Teoremei de reducere, a)$\Rightarrow$

modul 1.1. $D = D_y = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; \frac{1}{\sqrt{3}} \le x \le \sqrt{3}, 0 \le y \le 1\right\}$.

$$\mathcal{I} = \iint_D \frac{y^2}{1+x^2}dxdy = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \underbrace{\left(\int_0^1 \frac{y^2}{1+x^2}dy\right)}_{\mathcal{I}(x)} dx.$$

$$\mathcal{I}(x) = \int_0^1 \frac{y^2}{1+x^2}dy \underset{\text{de integrare}}{\overset{y \text{ este var.}}{=}} \left(\frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{y^3}{3}\right)\Big|_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{1}{3}.$$

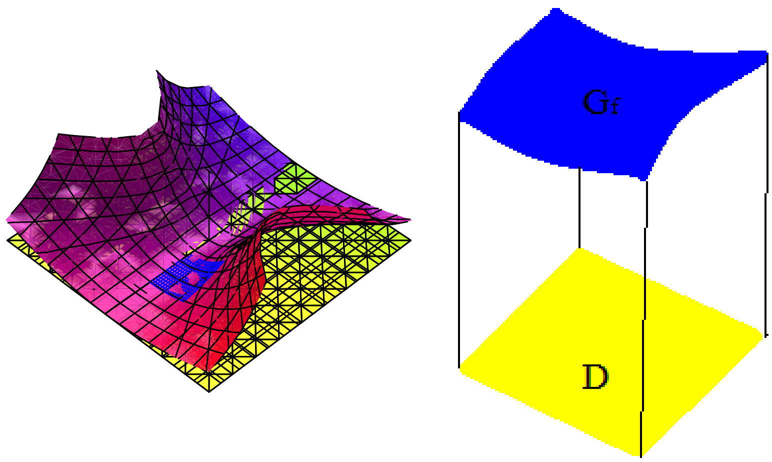
$$\mathcal{I} = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{1}{3}\right)dx \underset{\text{de integrare}}{\overset{x \text{ este var.}}{=}} \frac{1}{3}\left(\operatorname{arctg} x\right)\Big|_{x=\frac{1}{\sqrt{3}}}^{x=\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{3} - \operatorname{arctg}\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{18}.$$

modul 1.2. $D = D_x = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; 0 \le y \le 1, \frac{1}{\sqrt{3}} \le x \le \sqrt{3}\right\}$.

$$\mathcal{I} = \iint_D \frac{y^2}{1+x^2}dxdy = \int_0^1 \underbrace{\left(\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{y^2}{1+x^2}dx\right)}_{\mathcal{I}(y)} dy.$$

$$\mathcal{I}(y) = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{y^2}{1+x^2}dx \underset{\text{de integrare}}{\overset{x \text{ este var.}}{=}} \left(y^2\left(\operatorname{arctg} x\right)\right)\Big|_{x=\frac{1}{\sqrt{3}}}^{x=\sqrt{3}} = y^2\left(\operatorname{arctg}\sqrt{3} - \operatorname{arctg}\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = y^2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right) = y^2\frac{\pi}{6}.$$

$$\mathcal{I} = \int_0^1 \left(y^2\frac{\pi}{6}\right)dy \underset{\text{de integrare}}{\overset{y \text{ este var.}}{=}} \left(\frac{\pi}{6}\cdot\frac{y^3}{3}\right)\Big|_{y=0}^{y=1} = \frac{\pi}{18}.$$



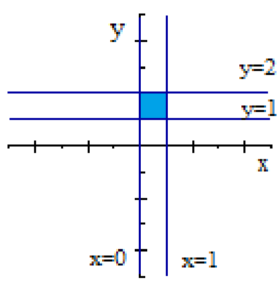
Comentariu. Fie $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \dfrac{y^2}{1+x^2} \geq 0, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$
o funcţie continuă şi al cărui grafic este suprafaţa reprezentată cu roşu-albastru. Fie $z=0$ planul xOy reprezentat cu galben. Fie $D = \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right] \times [0,1] \subseteq \mathbb{R}^2$. Atunci

$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \text{volum}(\Omega)$,

unde Ω este corpul cilindric cu generatoarele paralele cu axa Oz, mărginit de-a lungul cotei inferior de domeniul $D = pr_{xOy} G_{f|_D}$ şi superior de suprafaţa $G_{f|_D} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; f(x,y) = z, (x,y) \in D\right\}$, colorată cu bleu.

b) $\mathcal{I} = \iint_D \ln(x+y)\,dxdy$,
unde D este dreptunghiul cu interior mărginit de $x=0, x=1, y=1, y=2$.

Rezolvare. etapa 1. Se studiază domeniul D.
•Se reprezintă grafic domeniul



• D este domeniu de integrare, deoarece:

$$\begin{cases} \text{-}D \text{ este mulţime mărginită, } D \subsetneq [-2,2] \times [-2,2] \\ \text{- Fr } D \text{ este curbă simplă, închisă, netedă pe 4 porţiuni.} \end{cases}$$

etapa 2. Se studiază integrantul f.

$f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \ln(x+y)$.

f este câmp scalar bine definit şi continuu pe D ($x+y>0$ pe D).

etapa 3. Se calculează integrala $\mathcal{I}$, aplicând T1.
modul 1. Se observă că D este dreptunghiul cu interior cu laturile paralele cu axele

$D = D_{xy} = [0,1] \times [1,2]$.

Conform Teoremei de reducere, a)$\Rightarrow$

modul 1.1. $D = D_y = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2\right\}$.

$\mathcal{I} = \iint_D \ln(x+y)\,dxdy = \int_0^1 \underbrace{\left(\int_1^2 \ln(x+y)\,dy\right)}_{\mathcal{I}(x)} dx.$

$\mathcal{I}(x) = \int_1^2 (\ln(x+y)) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial y}(y)\right) dy \overset{y \text{ este var.}}{\underset{\text{de integrare}}{=}} (\ln(x+y)) \cdot (y)|_{y=1}^{y=2} - \int_1^2 \frac{0+1}{x+y} \cdot y dy =$

$= (\ln(x+2)) \cdot 2 - (\ln(x+1)) \cdot 1 - \int_1^2 \left(1 - \frac{x}{x+y}\right) dy = 2\ln(x+2) - \ln(x+1) - (y - x\ln(x+y))|_{y=1}^{y=2} =$

$= 2\ln(x+2) - \ln(x+1) - (2 - x\ln(x+2)) + (1 - x\ln(x+1)) =$

$= (x+2) \cdot \ln(x+2) - (x+1)\ln(x+1) - 1.$

$\mathcal{I} = \int_0^1 ((x+2) \cdot \ln(x+2) - (x+1) \cdot \ln(x+1) - 1)\,dx \overset{x \text{ este var.}}{\underset{\text{de integrare}}{=}}$

$= \int_0^1 (\ln(x+2)) \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2}{2} + 2x\right)\right) dx - \int_0^1 \ln(x+1) \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2}{2} + x\right)\right) dx - \int_0^1 1dx =$

$= (\ln(x+2)) \left(\frac{x^2}{2} + 2x\right)\Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \frac{1}{x+2} \left(\frac{x^2}{2} + 2x\right) dx -$

$- \left((\ln(x+1)) \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \frac{1}{x+1} \left(\frac{x^2}{2} + x\right) dx\right) - x|_{x=0}^{x=1} =$

$= \frac{5}{2}\ln 3 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2+2x+2x+4-4}{x+2} dx - \frac{3}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2+x+x+1-1}{x+1} dx - 1 =$

$= \frac{5}{2}\ln 3 - \frac{3}{2}\ln 2 - 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} + 2x - 4\ln(x+2)\right)\Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} + x - \ln(x+1)\right)\Big|_{x=0}^{x=1} =$

$= \frac{5}{2}\ln 3 - \frac{3}{2}\ln 2 - 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2} - 4\ln 3 + 4\ln 2\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - \ln 2\right) = \frac{9}{2}\ln 3 - 4\ln 2 - \frac{3}{2}$

<u>modul 1.2.</u> $D = D_x = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 1 \le y \le 2, 0 \le x \le 1\right\}.$

$\mathcal{I} = \iint_D \ln(x+y)\,dxdy = \int_1^2 \underbrace{\left(\int_0^1 \ln(x+y)\,dx\right)}_{\mathcal{I}(y)} dy.$

$\mathcal{I}(y) = \int_0^1 \ln(x+y) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}(x)\right) dx \overset{x \text{ este var.}}{\underset{\text{de integrare}}{=}} (\ln(x+y)) \cdot (x)|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \frac{1+0}{x+y} \cdot x dx =$

$= (\ln(1+y)) \cdot 1 - (\ln(0+y)) \cdot 0 - \int_0^1 \left(1 - \frac{y}{x+y}\right) dx = \ln(y+1) - (x - y\ln(x+y))|_{x=0}^{x=1} =$

$= \ln(y+1) - (1 - y\ln(1+y)) + (0 - y\ln(0+y)) = (y+1) \cdot \ln(y+1) - y\ln y - 1.$

$\mathcal{I} = \int_1^2 ((y+1) \cdot \ln(y+1) - y\ln y - 1)\,dy \overset{y \text{ este var.}}{\underset{\text{de integrare}}{=}}$

$= \int_1^2 (\ln(y+1)) \left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y^2}{2} + y\right)\right) dy - \int_1^2 (\ln y) \left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y^2}{2}\right)\right) dy - \int_1^2 1dy =$

$= (\ln(y+1)) \left(\frac{y^2}{2} + y\right)\Big|_{y=1}^{y=2} - \int_1^2 \frac{1}{y+1} \left(\frac{y^2}{2} + y\right) dy - \left((\ln y) \left(\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=1}^{y=2} - \int_1^2 \frac{1}{y} \left(\frac{y^2}{2}\right) dy\right) - y|_{y=1}^{y=2} =$

$= 4\ln 3 - \frac{3}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{y^2+y+y+1-1}{y+1} dy - 2\ln 2 + 0 + \frac{1}{2}\int_1^2 ydy - 1 =$

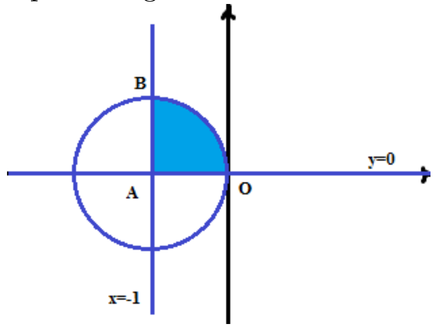
$= 4\ln 3 - \frac{3}{2}\ln 2 - 2\ln 2 - 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{2} + y - \ln(y+1)\right)\Big|_{y=1}^{y=2} + \frac{1}{2}\left.\frac{y^2}{2}\right|_{y=1}^{y=2} =$

$= 4\ln 3 - \frac{7}{2}\ln 2 - 1 - \frac{1}{2}\left(4 - \ln 3 - \frac{3}{2} + \ln 2\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{2}\ln 3 - 4\ln 2 - \frac{3}{2}.$

c) $\mathcal{I} = \iint_D (\cos(x+y) + \cos(x-y))\,dxdy,$
unde D este dreptunghiul cu interior mărginit de $x = 0, x = \frac{\pi}{2}, y = \frac{\pi}{4}, y = \frac{\pi}{2}$.-temă.

Exerciţiul 2. Să se calculeze
a) $\mathcal{I} = \iint_D (e^x y)\,dxdy$, unde $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 + 2x \le 0, x + 1 \ge 0, y \ge 0\right\}.$

Rezolvare. etapa 1. Se studiază domeniul D.
•Se reprezintă grafic domeniul



• $(x+1)^2 + y^2 = 1^2$ este cercul cu centrul $(-1, 0)$ cu raza 1
$x^2 + y^2 + 2x \leq 0 \Rightarrow ...$
•$x = -1$ este dreapta paralelă cu Oy ce trece prin $A(-1, 0)$
$x + 1 \geq 0 \Rightarrow ...$
•$y = 0$ este axa Ox
$y \geq 0 \Rightarrow ...$

Deci D este domeniul mărginit de segmentele $\left[\overrightarrow{AO}\right]$, $\left[\overrightarrow{BA}\right]$ şi arcul de cerc $\left[\overset{\frown}{OB}\right]$, cu $A(-1, 0)$, $B(-1, 1)$.

•D este domeniu de integrare, deoarece
$\begin{cases} \text{-}D \text{ este mulţime mărginită, } D \subsetneq [-1, 0] \times [0, 1] \\ \text{- Fr } D \text{ este curbă simplă, închisă, netedă pe 3 porţiuni.} \end{cases}$

etapa 2. Se studiază integrantul f.

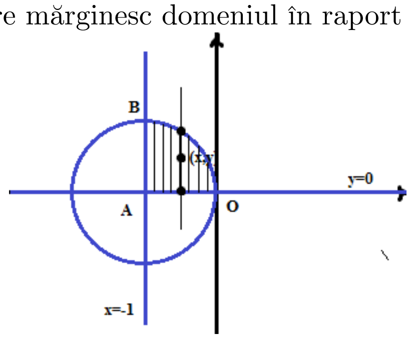
$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = e^x y.$

f este câmp scalar bine definit şi continuu pe D.

etapa 3. Se calculează integrala $\mathcal{I}$, aplicând T1.

modul 1. Se observă că D nu este dreptunghi cu interior, cu laturile paralele cu axele.-NU

modul 2. Se studiază dacă D este domeniu compact simplu în raport cu Oy. Se explicitează curbele care mărginesc domeniul în raport cu y.



Fie $(x, y) \in D$ un punct oarecare din domeniu. Se consideră paralele la Oy prin punctul (x, y) şi se observă că toate aceste paralele au ecuaţiile $\widetilde{x} = x$, cu $-1 \leq x \leq 0$ atunci când $(x, y) \in D$. Mai mult, când (x, y) variază în D pe o astfel de paralelă, y-ul variază între y-ul de pe segmentul $\left[\overrightarrow{AO}\right]$ şi y-ul de pe arcul de cerc $\left[\overset{\frown}{OB}\right]$, adică $0 \leq y \leq \sqrt{1^2 - (x+1)^2}$.

$$D = D_y = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; -1 \leq x \leq 0, \underbrace{0}_{y\text{-ul de pe } \left[\overrightarrow{AO}\right]} \leq y \leq \underbrace{\sqrt{1^2 - (x+1)^2}}_{y\text{-ul de pe } \left[\overset{\frown}{OB}\right]} \right\}$$

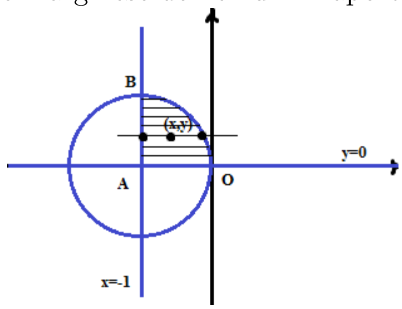
Conform Teoremei de reducere, b)$\Rightarrow$

$$\mathcal{I} = \iint_D (e^x y)\, dxdy = \int_{-1}^{0} \underbrace{\left(\int_0^{\sqrt{1^2-(x+1)^2}} (e^x y)\, dy \right)}_{\mathcal{I}(x)} dx.$$

$$\mathcal{I}(x) = \int_0^{\sqrt{1^2-(x+1)^2}} (e^x y)\, dy = \left(e^x \cdot \frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_{y=0}^{y=\sqrt{1^2-(x+1)^2}} = e^x \cdot \tfrac{1^2-(x+1)^2}{2} - e^x \cdot \tfrac{0}{2} = e^x \cdot \tfrac{-x^2-2x}{2}.$$

$$\mathcal{I} = \frac{1}{2} \int_{-1}^{0} \left(e^x \cdot \left(-x^2-2x\right)\right) dx \underset{\text{de integrare}}{\overset{x \text{ este var.}}{=}} \frac{1}{2} \left(-x^2 e^x\right)\Big|_{x=0}^{x=-1} = \frac{1}{2}\left(-\left(-1\right)^2 e^{-1} - 0\right) = \frac{1}{2} e^{-1}.$$

<u>modul 3.</u> Se studiază dacă D este domeniu compact simplu în raport cu Ox. Se explicitează curbele care mărginesc domeniul în raport cu x.



Fie $(x, y) \in D$ un punct oarecare din domeniu. Se consideră paralele la Ox prin punctul (x, y) şi se observă că toate aceste paralele au ecuaţiile $\widetilde{y} = y$, cu $0 \le y \le 1$ atunci când $(x, y) \in D$. Mai mult, când (x, y) variază în D pe o astfel de paralelă, x-ul variază între x-ul de pe segmentul $\left[\overrightarrow{BA}\right]$ şi x-ul de pe arcul de cerc $\left[\overset{\frown}{OB}\right]$, adică $-1 \le x \le -1 + \sqrt{1^2 - y^2}$.

$$D = D_x = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \le y \le 1, \underbrace{0}_{x\text{-ul de pe } \left[\overrightarrow{BA}\right]} \le x \le \underbrace{-1 + \sqrt{1^2 - y^2}}_{x\text{-ul de pe } \left[\overset{\frown}{OB}\right]} \right\}$$

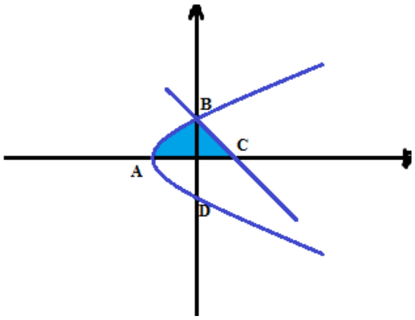
Conform Teoremei de reducere, c)$\Rightarrow$

$$\mathcal{I} = \iint_D (e^x y)\, dxdy = \int_0^1 \underbrace{\left(\int_0^{-1+\sqrt{1^2-y^2}} (e^x y)\, dx \right)}_{\mathcal{I}(y)} dy.$$

$$\mathcal{I}(y) = \int_0^{-1+\sqrt{1^2-y^2}} (e^x y)\, dx \underset{\text{de integrare}}{\overset{x \text{ este var.}}{=}} \left(y \cdot e^x\right)\Big|_{x=0}^{x=-1+\sqrt{1^2-y^2}} = y\left(e^{-1+\sqrt{1^2-y^2}} - e^0\right) = y\left(e^{-1+\sqrt{1^2-y^2}} - 1\right).$$

$\mathcal{I} = \int_0^1 y\left(e^{-1+\sqrt{1^2-y^2}} - 1\right) \underset{\text{de integrare}}{\overset{y \text{ este var.}}{=}}$ ...– este imposibil de determinat direct, cu metode elementare, dar se ştie de la modul anterior că are valoarea $\dfrac{1}{2} e^{-1}$.

Exerciţiul 3. Să se calculeze:
a) $\mathcal{I} = \iint_D (x + y)\, dxdy$, unde $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x - y^2 + 1 \ge 0, y \ge 0, x + y \le 1\right\}$.
Rezolvare. <u>etapa 1.</u> Se studiază domeniul D.
•Se reprezintă grafic domeniul:



$\bullet x-y^2+1=0$ este parabola prin $A(-1,0), B(0,1), D(0,-1)$
$x-y^2+1\leq 0\leq 0\Rightarrow ...$
$\bullet y=0$ este axa Ox
$y\geq 0\Rightarrow ...$
$\bullet x+y=1$ este dreapta ce trece prin $B(0,1), C(1,0)$
$x+y\leq 1\Rightarrow ...$

Deci D este domeniul mărginit de segmentele $\left[\overrightarrow{AC}\right], \left[\overrightarrow{CB}\right]$ şi arcul de parabolă $\left[\overset{\frown}{BA}\right]$, cu $A(-1,0), B(0,1), C(1,0)$.

$\bullet$Se studiază dacă D este domeniu de integrare. Este, deoarece
$\begin{cases} \text{-}D \text{ este mulţime mărginită, } D\subsetneq[-1,1]\times[0,1] \\ \text{- Fr } D \text{ este curbă simplă, închisă, netedă pe 3 porţiuni.}\end{cases}$

<u>etapa 2.</u> Se studiază integrantul f.

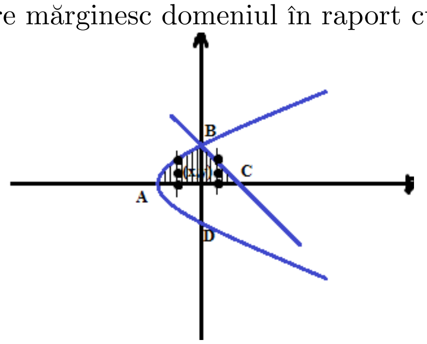
$f:D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, f(x,y)=x+y.$

f este câmp scalar bine definit şi continuu pe D.

<u>etapa 3.</u> Se calculează integrala $\mathcal{I}$, aplicând T1.

<u>modul 1.</u> Se observă că D nu este dreptunghi cu interior, cu laturile paralele cu axele.-NU

<u>modul 2.</u> Se studiază dacă D este domeniu compact simplu în raport cu Oy. Se explicitează curbele care mărginesc domeniul în raport cu y.



Fie $(x,y)\in D$ un punct oarecare din domeniu. Se consideră paralele la Oy prin punctul (x,y) şi se observă că toate aceste paralele au ecuaţiile $\widetilde{x}=x$, cu $-1\leq x\leq 1$ atunci când $(x,y)\in D$. Mai mult, când (x,y) variază în D pe o astfel de paralelă, y-ul variază între y-ul de pe segmentul $\left[\overrightarrow{AC}\right]$ şi y-ul de pe arcul de parabolă $\left[\overset{\frown}{BA}\right]$, adică $y=\sqrt{x+1}$ juxtapus cu y-ul de pe segmentul $\left[\overrightarrow{AC}\right]$, adică $y=1-x$. S-a împărţit domeniul D ca juxtapunere de două domenii simple în raport cu Oy, trasând o paralelă la Oy prin nodul B (în care Fr D îşi schimbă netezimea).

$D=D_y^1\cup D_y^2=$

$$=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; -1\leq x\leq 0, \underbrace{0}_{y\text{-ul de pe }\left[\overrightarrow{AO}\right]}\leq y\leq\underbrace{\sqrt{x+1}}_{y\text{-ul de pe }\left[\overset{\frown}{BA}\right]}\right\}\cup$$

$$\cup \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 \le x \le 1, \underbrace{0}_{y\text{-ul de pe } \left[\overrightarrow{OC}\right]} \le y \le \underbrace{1-x}_{y\text{-ul de pe } \left[\overrightarrow{CB}\right]} \right\}.$$

Conform Teoremei de aditivitate în raport cu domeniul, şi Teoremei de reducere, b)$\Rightarrow$

$$\mathcal{I} = \iint_{D_y^1} (x+y)\,dxdy + \iint_{D_y^2} (x+y)\,dxdy =$$

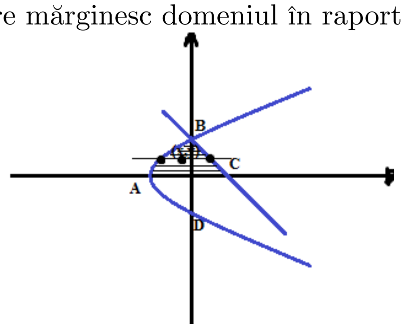
$$= \int_{-1}^{0} \underbrace{\left(\int_0^{\sqrt{x+1}} (x+y)\,dy \right)}_{\mathcal{I}_1(x)} dx + \int_0^1 \underbrace{\left(\int_0^{1-x} (x+y)\,dy \right)}_{\mathcal{I}_1(x)} dx =$$

$$\underset{\text{de integrare}}{\overset{y \text{ este var.}}{=}} \int_{-1}^{0} \left(xy + \frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_{y=0}^{y=\sqrt{x+1}} dx + \int_0^1 \left(\left(xy + \frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_{y=0}^{y=1-x} \right) dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} \left(x\sqrt{x+1} + \frac{x+1}{2} - 0 - 0 \right) dx + \int_0^1 \left(x(1-x) + \frac{(1-x)^2}{2} - 0 - 0 \right) dx =$$

$$\underset{\text{de integrare}}{\overset{x \text{ este var.}}{=}} -\frac{1}{60} + \frac{1}{3} = \frac{19}{60}.$$

<u>modul 3.</u> Se studiază dacă D este domeniu compact simplu în raport cu Ox. Se explicitează curbele care mărginesc domeniul în raport cu x.



Fie $(x,y) \in D$ un punct oarecare din domeniu. Se consideră paralele la Ox prin punctul (x,y) şi se observă că toate aceste paralele au ecuaţiile $\widetilde{y} = y$, cu $0 \le y \le 1$ atunci când $(x,y) \in D$. Mai mult, când (x,y) variază în D pe o astfel de paralelă, x-ul variază între x-ul de pe arcul de parabolă $\left[\overset{\frown}{BA}\right]$ şi x-ul de pe segmentul $\left[\overrightarrow{CB}\right]$, adică $y^2 - 1 \le x \le 1 - y$.

$$D = D_x = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 \le y \le 1, \underbrace{y^2 - 1}_{x\text{-ul de pe } \left[\overset{\frown}{BA}\right]} \le x \le \underbrace{1-y}_{x\text{-ul de pe } \left[\overrightarrow{CB}\right]} \right\}$$

Conform Teoremei de reducere, c)$\Rightarrow$

$$\mathcal{I} = \iint_D (x+y)\,dxdy = \int_0^1 \underbrace{\left(\int_{y^2-1}^{1-y} (x+y)\,dx \right)}_{\mathcal{I}(y)} dy \underset{\text{de integrare}}{\overset{x \text{ este var.}}{=}} \int_0^1 \left(\left(\frac{x^2}{2} + xy \right) \Bigg|_{x=y^2-1}^{x=1-y} \right) dy =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{(1-y)^2}{2} + (1-y)\,y - \frac{\left(y^2-1\right)^2}{2} - \left(y^2-1\right) y \right) dy \underset{\text{de integrare}}{\overset{y \text{ este var.}}{=}} \frac{19}{60}.$$

b) $\mathcal{I} = \iint_D (xy)\,dxdy$, unde $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2; y \ge x^2, y \le 2x+3 \right\}$.

Rezolvare. A se vedea Curs.

Teorema 2.(**o interpretare geometrică a unei integrale duble**) Fie D un domeniu de integrare din $\mathbb{R}^2$. Atunci D are arie şi

$\boxed{\text{aria}\,(D) = \iint_D 1dxdy.}$

Exerciţiul 4. Să se studieze dacă următorul domeniu are arie, şi dacă da, să se calculeze aria:

a) $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x - y^2 + 1 \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\right\}$.

Rezolvare. Se anticipează că, dacă există, aria $(D) = \iint_D 1dxdy$.

etapa 1. Se studiază domeniul $D-$la Exerciţiul $3, a)$.

etapa 2. Se studiază integrantul f.

$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = 1.$

f este câmp scalar bine definit şi continuu pe D.

etapa 3. Se calculează integrala $\mathcal{I}$, aplicând T1.

modul 3. Direct de la Exerciţiul $3, a) \Rightarrow$

$$D = D_x = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq y \leq 1, \quad \underbrace{y^2 - 1}_{x\text{-ul de pe } \left[\overset{\frown}{BA}\right]} \quad \leq x \leq \quad \underbrace{1 - y}_{x\text{-ul de pe } \left[\overrightarrow{CB}\right]}\right\}$$

Conform Teoremei de reducere, c)$\Rightarrow$

$$\mathcal{I} = \iint_D 1dxdy = \int_0^1 \underbrace{\left(\int_{y^2-1}^{1-y} 1dx\right)}_{\mathcal{I}(y)} dy \overset{x \text{ este var.}}{\underset{\text{de integrare}}{=}} \int_0^1 \left((x)\Big|_{x=y^2-1}^{x=1-y} \right) dy =$$

$$= \int_0^1 \left((1-y) - \left(y^2 - 1\right)\right) dy \overset{y \text{ este var.}}{\underset{\text{de integrare}}{=}} \frac{7}{6} > 0\text{!!! ca arie}$$

b) $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \geq x^2, y \leq 2x + 3\right\}$.-A se vedea Curs.

c) $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1, y^2 \leq x\right\}$.-A se vedea Curs.

$\circ$**Exerciţiul 5**. Să se calculeze valoarea următoarelor integrale folosind Teorema de reducere a calculului în integralele duble la calcul de integrale Riemann:

a) $\mathcal{I} = \int_0^1 \left(\int_{\arcsin y}^{\arcsin \sqrt{y}} \frac{x}{\sin x} dx\right) dy$; **b)** $\mathcal{I} = \int_0^8 \left(\int_{\sqrt[3]{y}}^2 \sqrt{x^4 + 1} dx\right) dy$;

c) $\mathcal{I} = \int_0^1 \left(\int_x^1 e^{y^2} dy\right) dx$; **d)** $\mathcal{I} = \int_0^3 \left(\int_{x^2}^0 x^3 e^{y^3} dy\right) dx$.

Rezolvare. a) Se observă că $\mathcal{I}(y) = \int_{\arcsin y}^{\arcsin \sqrt{y}} \frac{x}{\sin x} dx$ nu poate fi calculată cu teorema Leibniz-Newton, deoarece integrantul are primitive, dar acestea nu pot fi exprimate cu funcţii elementare. Deci $\mathcal{I}$ nu poate fi calculată direct.

Conform Teoremei de reducere, $c)$, se observă că

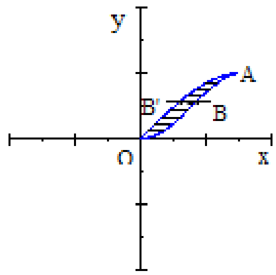
$\mathcal{I} = \int_0^1 \left(\int_{\arcsin y}^{\arcsin \sqrt{y}} \frac{x}{\sin x} dx\right) dy = \iint_D \frac{x}{\sin x} dxdy$, unde

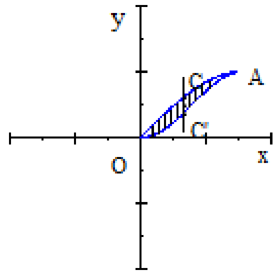
$$D = D_x = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq y \leq 1, \quad \underbrace{\arcsin y}_{x\text{-ul de pe } \left[O\overset{\frown}{B'}A\right]} \quad \leq x \leq \quad \underbrace{\arcsin \sqrt{y}}_{x\text{-ul de pe } \left[O\overset{\frown}{B}A\right]}\right\}$$

este domeniu de integrare, iar

$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \dfrac{x}{\sin x}$ este câmp scalar bine definit şi continuu pe D

(se lucrează cu prelungirea prin continuitate, folosind $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$).





Deoarece se poate rescrie

$$D=D_y=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;0\le x\le\tfrac{\pi}{2},\quad \underbrace{\sin^2 x}_{y\text{-ul de pe }\left[O\overset{\frown}{C'}A\right]}\le y\le \underbrace{\sin x}_{y\text{-ul de pe }\left[O\overset{\frown}{C}A\right]}\right\},$$

atunci, conform Teoremei de reducere, $b)\Rightarrow$

$$\mathcal{I}=\int_0^1\left(\int_{\arcsin y}^{\arcsin\sqrt{y}}\frac{x}{\sin x}dx\right)dy=\iint_D\frac{x}{\sin x}dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_{\sin^2 x}^{\sin x}\frac{x}{\sin x}dy\right)dx=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\left(\frac{x}{\sin x}\cdot y\right)\Big|_{y=\sin^2 x}^{y=\sin x}\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{x}{\sin x}\cdot\sin x-\frac{x}{\sin x}\cdot\sin^2 x\right)dx=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x-x\sin x)\,dx=\tfrac{1}{8}\pi^2-1.$$

c) Se observă că $\mathcal{I}(x)=\int_x^1 e^{y^2}dy$ nu poate fi calculată cu teorema Leibniz-Newton, deoarece integrantul are primitive, dar acestea nu pot fi exprimate cu funcţii elementare. Deci $\mathcal{I}$ nu poate fi calculată direct.

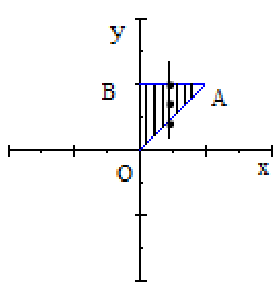
Conform Teoremei de reducere, $b)$, se observă că

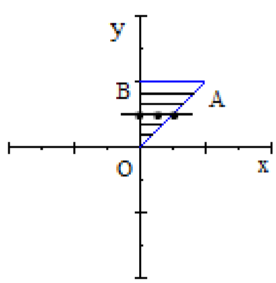
$\mathcal{I}=\int_0^1\left(\int_x^1 e^{y^2}dy\right)dx=\iint_D e^{y^2}dxdy$, unde

$$D=D_y=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;0\le x\le 1,\quad \underbrace{x}_{y\text{-ul de pe }\left[\overrightarrow{OA}\right]}\le y\le \underbrace{1}_{y\text{-ul de pe }\left[\overrightarrow{BA}\right]}\right\}$$

este domeniu de integrare, iar

$f:D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=e^{y^2}$ este câmp scalar bine definit şi continuu pe D.





Deoarece se poate rescrie

$$D=D_x=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;0\le y\le 1,\quad \underbrace{0}_{x\text{-ul de pe }\left[\overrightarrow{OB}\right]}\le x\le \underbrace{y}_{x\text{-ul de pe }\left[\overrightarrow{OA}\right]}\right\},$$

atunci, conform Teoremei de reducere, $c) \Rightarrow$

$$\mathcal{I} = \int_0^1 \left(\int_x^1 e^{y^2} dy \right) dx = \iint_D e^{y^2} dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^y e^{y^2} dx \right) dy = \int_0^1 \left(\left(e^{y^2} \cdot x \right) \Big|_{x=0}^{x=y} \right) dy =$$
$$= \int_0^1 \left(e^{y^2} \cdot y - e^{y^2} \cdot 0 \right) dy = \int_0^1 e^{y^2} \cdot y dy = \tfrac{1}{2} e - \tfrac{1}{2}.$$

Teorema 4.(**de schimbare de "variabile" de integrare în integrala dublă**) Fie D un domeniu de integrare din $\mathbb{R}^2$, fie $D_s \subseteq \mathbb{R}^2$. Fie

$F : D_s \subseteq \mathbb{R}^2 \to D \subseteq \mathbb{R}^2, F(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$

o funcţie bijectivă. Dacă F este difeomorfism pe $D_s \setminus \mathrm{Fr}\, D_s$, adică

-F este de clasă $\mathcal{C}^1$ pe $D_s \setminus \mathrm{Fr}\, D_s$

-$\det J_F(u,v) \neq 0, \forall (u,v) \in D_s \setminus \mathrm{Fr}\, D_s$

atunci F^{-1} duce bijectiv şi bicontinuu domeniul de integrare D în D_s, care este tot domeniu de integrare. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o funcţie. Dacă $f \in \mathcal{R}(D)$ atunci $f \circ F \in \mathcal{R}(D_s)$ şi are loc

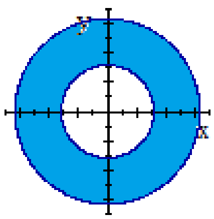
$$\boxed{\iint_D f(x,y)\, dxdy = \iint_{D_s} f(x(u,v), y(u,v)) \left| \det J_F(u,v) \right| dudv.}$$

Exerciţiul 6. Să se calculeze

a) $\mathcal{I} = \iint_D \arcsin \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{2\pi} dxdy$, unde $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2; \pi^2 \leq x^2+y^2 \leq (2\pi)^2 \right\}$.

Rezolvare. etapa 1. Se studiază domeniul D.

•Se reprezintă grafic domeniul



•$x^2+y^2 = \pi^2$ este cercul cu centrul $O(0,0)$ şi raza π

$x^2+y^2 \geq \pi^2 \Rightarrow$

•$x^2+y^2 = (2\pi)^2$ este cercul cu centrul $O(0,0)$ şi raza 2π

$x^2+y^2 \leq (2\pi)^2 \Rightarrow$

Deci D este "coroana circulară" cu interior, cu razele π şi 2π.

•D este domeniu de integrare, deoarece

$$\begin{cases} \text{-}D \text{ este mulţime mărginită, } D \subsetneq [-2\pi, 2\pi] \times [-2\pi, 2\pi] \\ \text{- Fr } D \text{ este, după o tăietură, curbă simplă, închisă, netedă pe porţiuni.} \end{cases}$$

etapa 2. Se studiază integrantul f.

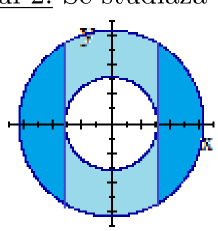
$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \arcsin \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{2\pi}$.

f este câmp scalar bine definit ($\pi^2 \leq x^2+y^2 \leq (2\pi)^2$) şi continuu pe D.

etapa 3. Se calculează integrala $\mathcal{I}$, aplicând T1-NU.

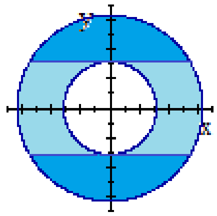
modul 1. Se observă că D nu este dreptunghi cu interior, cu laturile paralele cu axele.-NU

modul 2. Se studiază dacă D este domeniu compact simplu în raport cu Oy.



Ducând două paralele la Oy prin $(-\pi, 0)$, respectiv $(\pi, 0)$ obţinem D scris ca juxtapunere de 4 domenii simple în raport cu Oy. Din cauza integrantului integralele ce apar din teorema de reducere sunt greu de calculat $\Rightarrow$ NU se apelează la acest mod.

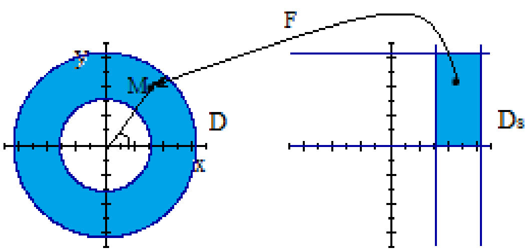
modul 3. Se studiază dacă D este domeniu compact simplu în raport cu Ox.



Ducând două paralele la Ox prin $(0,-\pi)$, respectiv $(0,\pi)$ obţinem D scris ca juxtapunere de 4 domenii simple în raport cu Ox. Din cauza integrantului integralele ce apar din teorema de reducere sunt greu de calculat $\Rightarrow$ NU se apelează la acest mod.

etapa 4. Se calculează integrala $\mathcal{I}$, aplicând Teorema de schimbare de "variabile".

Studiind forma integrantului şi forma domeniului (x^2+y^2 apare şi în legea de asociere a f şi în ecuaţiile curbelor ce mărginesc D), se face o schimbare de variabile legată de coordonate polare (generăm D cu cercuri concentrice).



Fie (x,y) coordonatele carteziene a unui punct M din D. Fie coordonatele polare ale M :

$$\begin{cases} \rho = \operatorname{dist}(O,M) \\ \theta = \mu\left(\overset{\frown}{Ox,OM}\right) \end{cases}, \text{ cu } \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

Se observă, având în vedere interpretarea geometrică, că

(x,y) parcurge $D \Leftrightarrow (\rho,\theta)$ parcurge D_s,

unde $D_s = \left\{(\rho,\theta)\in\mathbb{R}^2; \pi\le\rho\le 2\pi, 0\le\theta\le 2\pi\right\} = [\pi,2\pi]\times[0,2\pi]$. Alături de reprezentarea domeniului D în xOy, se reprezintă D_s în $\rho O_s\theta$.

Se alege $F: D_s \subseteq \mathbb{R}^2 \to D \subseteq \mathbb{R}^2, F(\rho,\theta) = \left(\underbrace{\rho\cos\theta}_{x(\rho,\theta)}, \underbrace{\rho\sin\theta}_{y(\rho,\theta)}\right)$.

Se observă că F este difeomorfism pe $D_s \setminus \operatorname{Fr} D_s$, adică

-F este de clasă $\mathcal{C}^1$ pe $D_s \setminus \operatorname{Fr} D_s$

-$\det J_F(\rho,\theta) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial\rho}(\rho,\theta) & \dfrac{\partial x}{\partial\theta}(\rho,\theta) \\ \dfrac{\partial y}{\partial\rho}(\rho,\theta) & \dfrac{\partial y}{\partial\theta}(\rho,\theta) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \cos\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho \ne 0, \forall(\rho,\theta)\in D_s\setminus \operatorname{Fr} D_s$.

Atunci F^{-1} duce bijectiv şi bicontinuu domeniul de integrare D în D_s, care este tot domeniu de integrare.

$$\mathcal{I} = \iint_D \arcsin\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2\pi}dxdy = \iint_{D_s}\arcsin\frac{\sqrt{(\rho\cos\theta)^2+(\rho\sin\theta)^2}}{2\pi}|\rho|\,d\rho d\theta =$$
$$= \iint_{D_s}\rho\left(\arcsin\frac{\rho}{2\pi}\right)d\rho d\theta.$$

$D_s = \left\{(\rho,\theta)\in\mathbb{R}^2; \pi\le\rho\le 2\pi, 0\le\theta\le 2\pi\right\} = [\pi,2\pi]\times[0,2\pi]$

este un dreptunghi cu interior, cu laturile paralele cu axele de coordonate $O_s\rho, O_s\theta$.

Folosind Teorema de reducere, a)$\Rightarrow$

$$\mathcal{I}=\iint_{D_s}\rho\left(\arcsin\frac{\rho}{2\pi}\right)d\rho d\theta=\int_\pi^{2\pi}\underbrace{\left(\int_0^{2\pi}\rho\left(\arcsin\frac{\rho}{2\pi}\right)d\theta\right)}_{\mathcal{I}(\rho)}d\rho \overset{\theta \text{ este var.}}{\underset{\text{de integrare}}{=}} \int_\pi^{2\pi}\left(\rho\left(\arcsin\frac{\rho}{2\pi}\right)\cdot\theta\right)\Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi}d\rho=$$

$$=\int_\pi^{2\pi}\rho\left(\arcsin\frac{\rho}{2\pi}\right)\cdot(2\pi)\,d\rho \overset{\rho \text{ este var.}}{\underset{\text{de integrare}}{=}} (2\pi)\int_\pi^{2\pi}\left(\arcsin\frac{\rho}{2\pi}\right)\left(\frac{\rho^2}{2}\right)'_\rho d\rho=...=$$

$$=\frac{(2\pi)^2}{4}\left(\frac{\rho}{2\pi}\sqrt{1-\left(\frac{\rho}{2\pi}\right)^2}+\left(2\left(\frac{\rho}{2\pi}\right)^2-1\right)\left(\arcsin\frac{\rho}{2\pi}\right)\right)\Bigg|_{\rho=\pi}^{\rho=2\pi}=\pi^3\left(\tfrac{7}{6}\pi-\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

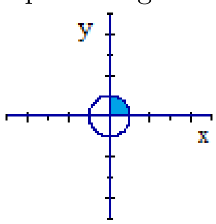
b) $\mathcal{I}=\iint_D\frac{1}{16-x^2-y^2}dxdy$, unde $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;x^2+y^2\le 4, 0\le x\le y\sqrt{3}, 0\le y\le x\sqrt{3}\right\}$.

Rezolvare. A se vedea Curs

c) $\mathcal{I}=\iint_D xye^{x^2+y^2}dxdy$, unde $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;x^2+y^2\le 1, x\ge 0, y\ge 0\right\}$ este sfertul discului de rază 1, cu centrul în origine, conţinut în primul cadran al planului raportat la reperul cartezian xOy.

Rezolvare. etapa 1. Se studiază domeniul D.

•Se reprezintă grafic domeniul



•$x^2+y^2=1$ este cercul cu centrul $O(0,0)$ şi raza 1

$x^2+y^2\le 1$ este interiorul cerului anterior reunit cu cercul

•$x=0$ este axa Oy

$x\ge 0$ este semiplanul drept reunit cu Oy

•$y=0$ este axa Ox

$y\ge 0$ este semiplanul superior reunit cu Ox

Deci D este sfertul discului de rază în 1, cu centrul n origine, conţinut în primul cadran al planului raportat la reperul cartezian xOy.

•D este domeniu de integrare, deoarece

$$\begin{cases}\text{-}D \text{ este mulţime mărginită, } D\subsetneq[0,1]\times[0,1]\\ \text{- Fr } D \text{ este curbă simplă, închisă, netedă pe 3 porţiuni.}\end{cases}$$

etapa 2. Se studiază integrantul f.

$f:D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, f(x,y)=xye^{x^2+y^2}$.

f este câmp scalar bine definit şi continuu pe $D=\mathbb{R}^2$.

etapa 3. Se calculează integrala $\mathcal{I}$, aplicând T1-NU.

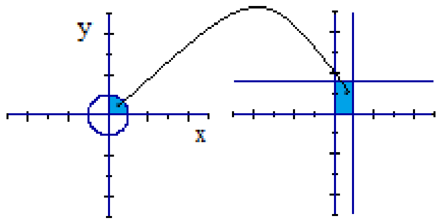
modul 1. Se observă că D nu este dreptunghi cu interior, cu laturile paralele cu axele.-NU

modul 2. Se studiază dacă D este domeniu compact simplu în raport cu Oy-este. Din cauza integrantului integralele ce apar din teorema de reducere sunt greu de calculat $\Rightarrow$ NU se apelează la acest mod.

modul 3. Se studiază dacă D este domeniu compact simplu în raport cu Ox-este. Din cauza integrantului integralele ce apar din teorema de reducere sunt greu de calculat $\Rightarrow$ NU se apelează la acest mod.

etapa 4. Se calculează integrala $\mathcal{I}$, aplicând Teorema de schimbare de "variabile".

Studiind forma integrantului şi forma domeniului (x^2+y^2 apare şi în legea de asociere a f şi în ecuaţiile curbelor ce mărginesc D), se face o schimbare de variabile legată de coordonate polare.



Fie (x, y) coordonatele carteziene a unui punct M din D. Fie coordonatele polare ale M :

$$\begin{cases} \rho = \operatorname{dist}(O, M) \\ \theta = \mu\left(\overset{\frown}{Ox, OM}\right) \end{cases}, \text{ cu } \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

Se observă, având în vedere interpretarea geometrică, că

(x, y) parcurge $D \Leftrightarrow (\rho, \theta)$ parcurge D_s,

unde $D_s = \left\{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right\} = [0, 1] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Alături de reprezentarea domeniului D,în xOy, se reprezintă D_s în $\rho O_s \theta$.

Se alege $F : D_s \subseteq \mathbb{R}^2 \to D \subseteq \mathbb{R}^2, F(\rho, \theta) = \left(\underbrace{\rho\cos\theta}_{x(\rho,\theta)}, \underbrace{\rho\sin\theta}_{y(\rho,\theta)}\right)$.

Se observă că F este difeomorfism pe $D_s \setminus \operatorname{Fr} D_s$, chiar dacă nu ştiam D_s, adică

-F este de clasă $\mathcal{C}^1$ pe $\mathbb{R}^2$ chiar, deci şi pe $D_s \setminus \operatorname{Fr} D_s$

-det $J_F(\rho, \theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho}(\rho, \theta) & \frac{\partial x}{\partial \theta}(\rho, \theta) \\ \frac{\partial y}{\partial \rho}(\rho, \theta) & \frac{\partial y}{\partial \theta}(\rho, \theta) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \cos\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho \neq 0, \forall (\rho, \theta) \in D_s \setminus \operatorname{Fr} D_s$.

Atunci F^{-1} duce bijectiv şi bicontinuu domeniul de integrare D în D_s, care este tot domeniu de integrare.

$\mathcal{I} = \iint_D xye^{x^2+y^2} dxdy = \iint_{D_s} (\rho\cos\theta)(\rho\sin\theta)|\rho| \, d\rho d\theta = \iint_{D_s} \rho^3 \cos\theta \sin\theta d\rho d\theta$.

$D_s = \left\{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right\} = [0, 1] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ este un dreptunghi cu interior, cu laturile paralele cu axele de coordonate $O_s u, O_s v$.

Folosind Teorema de reducere, a) $\Rightarrow$

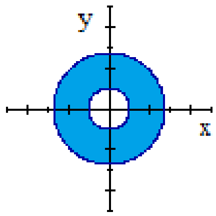
$$\mathcal{I} = \iint_{D_s} \rho^3 \cos\theta \sin\theta d\rho d\theta = \int_0^1 \underbrace{\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^3 \cos\theta \sin\theta d\theta\right)}_{\mathcal{I}(\rho)} d\rho \underset{\text{de integrare}}{\overset{\theta \text{ este var.}}{=}} \int_0^1 \left(\rho^3 \frac{(\sin\theta)^2}{2}\right)\Bigg|_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} d\rho =$$

$$= \int_0^1 \rho^3 \cdot \left(\frac{\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)^2}{2} - \frac{(\sin 0)^2}{2}\right) d\rho \underset{\text{de integrare}}{\overset{\rho \text{ este var.}}{=}} \frac{1}{2} \left.\frac{\rho^4}{4}\right|_{\rho=0}^{\rho=1} = \frac{1}{8}.$$

d) $\mathcal{I} = \iint_D \frac{\ln\left(x^2 + y^2\right)}{x^2 + y^2} dxdy$, unde $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 1^2 \leq x^2 + y^2 \leq e^2\right\}$ este o coroană circulară.

Rezolvare. etapa 1. Se studiază domeniul D.

•Se reprezintă grafic domeniul



$\bullet x^2+y^2=1^2$ este cercul cu centrul $O(0,0)$ şi raza 1
$x^2+y^2\geq 1^2$ este exteriorul cerului anterior reunit cu cercul
$\bullet x^2+y^2=e^2$ este cercul cu centrul $O(0,0)$ şi raza e
$x^2+y^2\leq e^2$ este interiorul cerului anterior reunit cu cercul

Deci D este coroana circulară centrată în $O(0,0)$ şi de raze $1,e$.
$\bullet D$ este domeniu de integrare, deoarece

$$\begin{cases} \text{-}D \text{ este mulţime mărginită, } D\subsetneq[-e,e]\times[-e,e] \\ \text{- Fr}\,D, \text{ după o tăietură, este curbă simplă, închisă, netedă pe porţiuni.}\end{cases}$$

etapa 2. Se studiază integrantul f.

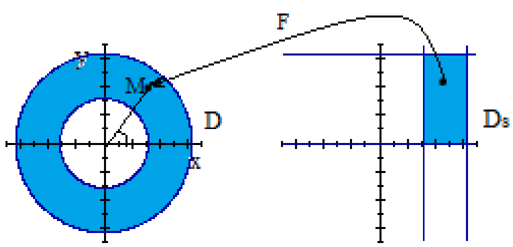
$$f:D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\, f(x,y)=\frac{\ln\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}.$$

f este câmp scalar bine definit şi continuu pe $D=\mathbb{R}^2$.
etapa 3. Se calculează integrala $\mathcal{I}$, aplicând T1.
modul 1. Se observă că D nu este dreptunghi cu interior, cu laturile paralele cu axele.-NU
modul 2. Se studiază dacă D este domeniu compact simplu în raport cu Oy.

Ducând două paralele la Oy prin $(-1,0)$, respectiv $(1,0)$ obţinem D scris ca juxtapunere de domenii simple în raport cu Oy. Din cauza integrantului integralele ce apar din teorema de reducere sunt greu de calculat $\Rightarrow$ NU se apelează la acest mod.
modul 3. Se studiază dacă D este domeniu compact simplu în raport cu Ox.

Ducând două paralele la Ox prin $(0,-1)$, respectiv $(0,1)$ obţinem D scris ca juxtapunere de domenii simple în raport cu Ox. Din cauza integrantului integralele ce apar din teorema de reducere sunt greu de calculat $\Rightarrow$ NU se apelează la acest mod.
etapa 4. Se calculează integrala $\mathcal{I}$, aplicând Teorema de schimbare de "variabile".

Studiind forma integrantului şi forma domeniului (x^2+y^2 apare şi în legea de asociere a f şi în ecuaţiile curbelor ce mărginesc D), se face o schimbare de variabile legată de coordonate polare.



Fie (x,y) coordonatele carteziene a unui punct M din D. Fie coordonatele polare ale M :

$$\begin{cases}\rho=\text{dist}\,(O,M)\\ \theta=\mu\left(Ox,\overset{\frown}{OM}\right)\end{cases},\text{ cu }\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$$

Se observă, având în vedere interpretarea geometrică, că
(x,y) parcurge $D\Leftrightarrow(\rho,\theta)$ parcurge D_s,
unde $D_s=\left\{(\rho,\theta)\in\mathbb{R}^2;1\leq\rho\leq e,0\leq\theta\leq 2\pi\right\}=[1,e]\times[0,2\pi]$. Alături de reprezentarea domeniului D în xOy, se reprezintă D_s în $\rho O_s\theta$.

$$\text{Se alege } F:D_s\subseteq\mathbb{R}^2\to D\subseteq\mathbb{R}^2, F(\rho,\theta)=\left(\underbrace{\rho\cos\theta}_{x(\rho,\theta)},\underbrace{\rho\sin\theta}_{y(\rho,\theta)}\right).$$

Se observă că F este difeomorfism pe $D_s\setminus\text{Fr}\,D_s$, chiar dacă nu se ştie D_s, adică

-F este de clasă $\mathcal{C}^1$ pe $\mathbb{R}^2$ chiar, deci şi pe $D_s \setminus \operatorname{Fr} D_s$

-$\det J_F(\rho,\theta) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho}(\rho,\theta) & \dfrac{\partial x}{\partial \theta}(\rho,\theta) \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho}(\rho,\theta) & \dfrac{\partial y}{\partial \theta}(\rho,\theta) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \cos\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho \neq 0, \forall (\rho,\theta) \in D_s \setminus \operatorname{Fr} D_s.$

Atunci F^{-1} duce bijectiv şi bicontinuu domeniul de integrare D în D_s, care este tot domeniu de integrare.

$\mathcal{I} = \iint_D \dfrac{\ln\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} dxdy = \iint_{D_s} \dfrac{\ln \rho^2}{\rho^2} |\rho|\, d\rho d\theta = \iint_{D_s} \dfrac{2\ln\rho}{\rho} d\rho d\theta.$

$D_s = \left\{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2; 1 \le \rho \le e, 0 \le \theta \le 2\pi\right\} = [1,e] \times [0,2\pi]$ este un dreptunghi cu interior, cu laturile paralele cu axele de coordonate $O_s u, O_s v$.

Folosind Teorema de reducere, a) $\Rightarrow$

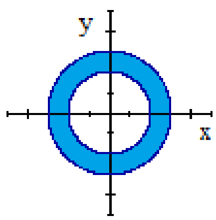
$\mathcal{I} = \iint_{D_s} \dfrac{2\ln\rho}{\rho} d\rho d\theta = \int_1^e \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} \dfrac{2\ln\rho}{\rho} d\theta\right)}_{\mathcal{I}(\rho)} d\rho \overset{\theta \text{ este var.}}{\underset{\text{de integrare}}{=}} \int_1^e \dfrac{2\ln\rho}{\rho} \cdot \theta \Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\rho = \int_1^e \dfrac{2\ln\rho}{\rho} (2\pi)\, d\rho =$

$$= 4\pi \int_1^e (\ln\rho)(\ln\rho)' \, d\rho \overset{\rho \text{ este var.}}{\underset{\text{de integrare}}{=}} 4\pi \left.\frac{(\ln\rho)^2}{2}\right|_{\rho=1}^{\rho=e} = 4\pi\left(\frac{(\ln e)^2}{2} - \frac{(\ln 1)^2}{2}\right) = 2\pi.$$

e) $\mathcal{I} = \iint_D \sin\left(x^2+y^2\right) dxdy$, unde $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 4 \le x^2+y^2 \le 9\right\}$ este o coroană circulară.

Rezolvare. etapa 1. Se studiază domeniul D.

•Se reprezintă grafic domeniul



•$x^2+y^2 = 2^2$ este cercul cu centrul $O(0,0)$ şi raza 2

$x^2+y^2 \ge 2^2$ este exteriorul cerului anterior reunit cu cercul

•$x^2+y^2 = 3^2$ este cercul cu centrul $O(0,0)$ şi raza 3

$x^2+y^2 \le 3^2$ este interiorul cerului anterior reunit cu cercul

Deci D este coroana circulară centrată în $O(0,0)$ şi de raze $2,3$.

•D este domeniu de integrare, deoarece

$\begin{cases} \text{-}D \text{ este mulţime mărginită, } D \subsetneq [-3,3] \times [-3,3] \\ \text{-}\operatorname{Fr} D, \text{ după o tăietură, este curbă simplă, închisă, netedă pe porţiuni.} \end{cases}$

etapa 2. Se studiază integrantul f.

$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \sin\left(x^2+y^2\right).$

f este câmp scalar bine definit şi continuu pe $D = \mathbb{R}^2$.

etapa 3. Se calculează integrala $\mathcal{I}$, aplicând T1.

modul 1. Se observă că D nu este dreptunghi cu interior, cu laturile paralele cu axele.-NU

modul 2. Se studiază dacă D este domeniu compact simplu în raport cu Oy.

Ducând două paralele la Oy prin $(-2,0)$, respectiv $(2,0)$ obţinem D scris ca juxtapunere de domenii simple în raport cu Oy. Din cauza integrantului integralele ce apar din teorema de reducere sunt greu de calculat $\Rightarrow$ NU se apelează la acest mod.

modul 3. Se studiază dacă D este domeniu compact simplu în raport cu Ox.

Ducând două paralele la Ox prin $(0,-2)$, respectiv $(0,2)$ obţinem D scris ca juxtapunere de domenii simple în raport cu Ox. Din cauza integrantului integralele ce apar din teorema de reducere sunt greu de calculat $\Rightarrow$ NU se apelează la acest mod.

etapa 4. Se calculează integrala $\mathcal{I}$„ aplicând Teorema de schimbare de "variabile".

Studiind forma integrantului şi forma domeniului (x^2+y^2 apare şi în legea de asociere a f şi în ecuaţiile curbelor ce mărginesc D), se face o schimbare de variabile legată de coordonate polare.

Fie (x, y) coordonatele carteziene a unui punct M din D. Fie coordonatele polare ale M :
$\begin{cases} \rho = \operatorname{dist}(O, M) \\ \theta = \mu\left(\widehat{Ox, OM}\right) \end{cases}$, cu $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$

Se observă, având în vedere interpretarea geometrică, că

(x, y) parcurge $D \Leftrightarrow (\rho, \theta)$ parcurge D_s,

unde $D_s = \left\{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2; 2 \le \rho \le 3, 0 \le \theta \le 2\pi\right\} = [2, 3] \times [0, 2\pi]$. Alături de reprezentarea domeniului D în xOy, se reprezintă D_s în $\rho O_s \theta$.

Se alege $F : D_s \subseteq \mathbb{R}^2 \to D \subseteq \mathbb{R}^2, (\rho, \theta) \in D_s \rightsquigarrow F(\rho, \theta) = \left(\underbrace{\rho\cos\theta}_{x(\rho,\theta)}, \underbrace{\rho\sin\theta}_{y(\rho,\theta)}\right)$.

Se observă că F este difeomorfism pe $D_s \setminus \operatorname{Fr} D_s$, chiar dacă nu se ştie D_s, adică

-F este de clasă $\mathcal{C}^1$ pe $\mathbb{R}^2$ chiar, deci şi pe $D_s \setminus \operatorname{Fr} D_s$

-$\det J_F(\rho, \theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho}(\rho, \theta) & \frac{\partial x}{\partial \theta}(\rho, \theta) \\ \frac{\partial y}{\partial \rho}(\rho, \theta) & \frac{\partial y}{\partial \theta}(\rho, \theta) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \cos\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho \ne 0, \forall (\rho, \theta) \in D_s \setminus \operatorname{Fr} D_s$.

Atunci F^{-1} duce bijectiv şi bicontinuu domeniul de integrare D în D_s, care este tot domeniu de integrare.

$\mathcal{I} = \iint_D \sin\left(x^2 + y^2\right) dxdy = \iint_{D_s} \left(\sin\rho^2\right) |\rho|\, d\rho d\theta = \iint_{D_s} \rho\sin\rho^2 d\rho d\theta$.

$D_s = \left\{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2; 2 \le \rho \le 3, 0 \le \theta \le 2\pi\right\} = [2, 3] \times [0, 2\pi]$ este un dreptunghi cu interior, cu laturile paralele cu axele de coordonate $O_s u, O_s v$.

Folosind Teorema de reducere, a) $\Rightarrow$

$\mathcal{I} = \iint_{D_s} \rho\sin\rho^2 d\rho d\theta = \int_2^3 \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} \rho\sin\rho^2 d\theta\right)}_{\mathcal{I}(\rho)} d\rho \underset{\text{de integrare}}{\overset{\theta \text{ este var.}}{=}} \int_2^3 \left(\rho\sin\rho^2\right) \cdot \theta\Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\rho =$

$= \int_2^3 \left(\rho\sin\rho^2\right)(2\pi)\, d\rho = \pi \int_2^3 \left(\sin\rho^2\right)\left(\rho^2\right)' d\rho \underset{\text{de integrare}}{\overset{\rho \text{ este var.}}{=}} \pi\left(-\cos\rho^2\right)\Big|_{\rho=2}^{\rho=3} = \pi\left(-\cos 9 + \cos 4\right)$.

Exerciţiul 7. Folosind coordonate polare generalizate în plan, să se calculeze:

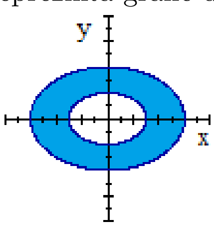
a) $\mathcal{I} = \iint_D \sqrt{2 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dxdy$, unde $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \le 0\right\}$

Rezolvare. A se vedea Curs.

b) $\mathcal{I} = \iint_D \frac{1}{\sqrt[3]{5 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} dxdy$, unde $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 1^2 \le \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 2^2\right\}$ este coroana eliptică limitată de elipsele omofocale $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ şi $\frac{x^2}{(2a)^2} + \frac{y^2}{(2b)^2} = 1$, iar $a > 0$ şi $b > 0$ sunt semiaxele elipsei interioare.

Rezolvare. etapa 1. Se studiază domeniul D.

•Se reprezintă grafic domeniul



•$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ este elipsa cu centrul $O(0, 0)$ şi semiaxele a, b

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \ge 1$ este exteriorul elipsei anterioare reunit cu elipsa

•$\frac{x^2}{(2a)^2} + \frac{y^2}{(2b)^2} = 1$ este elipsa cu centrul $O(0, 0)$ şi semiaxele a, b

$\frac{x^2}{(2a)^2} + \frac{y^2}{(2b)^2} \le 1$ este interiorul elipsei anterioare reunit cu elipsa

Deci D este coroana eliptică limitată de elipsele $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ şi $\frac{x^2}{(2a)^2} + \frac{y^2}{(2b)^2} = 1$.

•Se studiază dacă D este domeniu de integrare. Este, deoarece

$\left\{\begin{array}{l}\text{-}D \text{ este mulţime mărginită, } D \subsetneq [-2a,2a]\times[-2b,2b] \\ \text{-}\operatorname{Fr} D\text{, după o tăietură, este curbă simplă, închisă, netedă pe porţiuni.}\end{array}\right.$

etapa 2. Se studiază integrantul f.

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \frac{1}{\sqrt[3]{5 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}.$$

f este câmp scalar bine definit şi continuu pe D.

etapa 3. Se calculează integrala $\mathcal{I}$, aplicând T1.

modul 1. Se observă că D nu este dreptunghi cu interior, cu laturile paralele cu axele.-NU

modul 2. Se studiază dacă D este domeniu compact simplu în raport cu Oy.

Ducând două paralele la Oy prin $(-a,0)$, respectiv $(a,0)$ obţinem D scris ca juxtapunere de 4 domenii simple în raport cu Oy. Din cauza integrantului integralele ce apar din teorema de reducere sunt greu de calculat $\Rightarrow$ NU se apelează la acest mod.

modul 3. Se studiază dacă D este domeniu compact simplu în raport cu Ox.

Ducând două paralele la Ox prin $(-b,0)$, respectiv $(b,0)$ obţinem D scris ca juxtapunere de 4 domenii simple în raport cu Ox. Din cauza integrantului integralele ce apar din teorema de reducere sunt greu de calculat $\Rightarrow$ NU se apelează la acest mod.

etapa 4. Se calculează integrala $\mathcal{I}$„ aplicând Teorema de schimbare de "variabile".

Studiind forma integrantului şi forma domeniului ($\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ apare şi în legea de asociere a f şi în ecuaţiile curbelor ce mărginesc D), se face o schimbare de variabile legată de coordonate polare generalizate.

Fie (x,y) coordonatele carteziene a unui punct M din $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 1^2 \le \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 2^2\right\}$.
Fie coordonatele polare generalizate ale M :

$$\left\{\begin{array}{l}\rho == \text{parametru} \\ \theta = \mu\left(\widehat{Ox, OM}\right)\end{array}\right., \text{ cu } \left\{\begin{array}{l}x = a\rho\cos\theta \\ y = b\rho\sin\theta\end{array}\right.$$

Se observă, având în vedere interpretarea geometrică, că

(x,y) parcurge $D \Leftrightarrow (\rho,\theta)$ parcurge D_s,

unde $D_s = \left\{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2; 1 \le \rho \le 2, 0 \le \theta \le 2\pi\right\} = [1,2]\times[0,2\pi]$. Alături de reprezentarea domeniului D în xOy, se reprezintă D_s în $\rho O_s\theta$.

$$\text{Se alege } F : D_s \subseteq \mathbb{R}^2 \to D \subseteq \mathbb{R}^2, F(\rho,\theta) = \left(\underbrace{a\rho\cos\theta}_{x(\rho,\theta)}, \underbrace{a\rho\sin\theta}_{y(\rho,\theta)}\right).$$

Se observă că F este difeomorfism pe $D_s \setminus \operatorname{Fr} D_s$, chiar dacă nu se ştie D_s, adică

-F este de clasă $\mathcal{C}^1$ pe $\mathbb{R}^2$ chiar, deci şi pe $D_s \setminus \operatorname{Fr} D_s$

$$\text{-}\det J_F(\rho,\theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho}(\rho,\theta) & \frac{\partial x}{\partial \theta}(\rho,\theta) \\ \frac{\partial y}{\partial \rho}(\rho,\theta) & \frac{\partial y}{\partial \theta}(\rho,\theta) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos\theta & -a\rho\sin\theta \\ b\cos\theta & b\rho\cos\theta \end{vmatrix} = ab\rho \ne 0, \forall (\rho,\theta) \in D_s \setminus \operatorname{Fr} D_s.$$

Atunci F^{-1} duce bijectiv şi bicontinuu domeniul de integrare D în D_s, care este tot domeniu de integrare.

$$\mathcal{I} = \iint_D \frac{1}{\sqrt[3]{5 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} dxdy = \iint_{D_s} \frac{1}{\sqrt[3]{5-\rho^2}} |ab\rho|\, d\rho d\theta = ab \iint_{D_s} \frac{\rho}{\sqrt[3]{5-\rho^2}} d\rho d\theta.$$

$D_s = \left\{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2; 1 \le \rho \le 2, 0 \le \theta \le 2\pi\right\} = [1,2]\times[0,2\pi]$ este un dreptunghi cu interior, cu laturile paralele cu axele de coordonate $O_s u, O_s v$.

Folosind Teorema de reducere, a)$\Rightarrow$

$$\mathcal{I}=ab\iint_{D_s}\frac{\rho}{\sqrt[3]{5-\rho^2}}d\rho d\theta=\int_1^2\underbrace{\left(\int_0^{2\pi}\frac{\rho}{\sqrt[3]{5-\rho^2}}d\theta\right)}_{\mathcal{I}(\rho)}d\rho\ \overset{\theta\text{ este var.}}{\underset{\text{de integrare}}{=}}\ \int_1^2\left(\frac{\rho}{\sqrt[3]{5-\rho^2}}\cdot\theta\right)\Bigg|_{\theta=0}^{\theta=2\pi}d\rho=$$

$$=\int_1^2\frac{\rho}{\sqrt[3]{5-\rho^2}}\cdot(2\pi)\,d\rho=-\pi\int_1^2\left(5-\rho^2\right)^{\frac{-1}{3}}\left(5-\rho^2\right)'d\rho\ \overset{\rho\text{ este var.}}{\underset{\text{de integrare}}{=}}\ -\pi\left.\frac{\left(5-\rho^2\right)^{\frac{-1}{3}+1}}{\frac{-1}{3}+1}\right|_{\rho=1}^{\rho=2}=$$

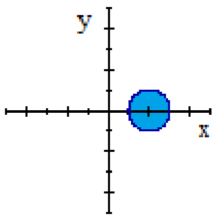
$$=-\pi\frac{(5-4)^{\frac{-1}{3}+1}}{\frac{-1}{3}+1}+\pi\frac{(5-1)^{\frac{-1}{3}+1}}{\frac{-1}{3}+1}=\left(-\tfrac{3}{2}+\tfrac{3}{2}\sqrt[3]{4^2}\right)\pi.$$

Exerciţiul 8. Untilizând o schimbare de variabile adecvată, să se calculeze

a) $\mathcal{I}=\iint_D\left(4x-3-x^2-y^2\right)dxdy$, unde $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;x^2+y^2-4x+3\leq 0\right\}$.

Rezolvare. etapa 1. Se studiază domeniul D.

•Se reprezintă grafic domeniul



•$x^2+y^2-4x+3=0\Leftrightarrow(x-2)^2+y^2=1$ este cercul cu centrul $C(2,0)$ şi raza 1

$x^2+y^2-4x+3\leq 0$ este interiorul cercului anterior reunit cu cercul

•D este domeniu de integrare, deoarece

$$\begin{cases}\text{-}D\text{ este mulţime mărginită, } D\subsetneq[1,3]\times[-1,1]\\ \text{- Fr }D\text{ este curbă simplă, închisă, netedă pe porţiuni.}\end{cases}$$

etapa 2. Se studiază integrantul f.

$f:D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, f(x,y)=4x-3-x^2-y^2$.

f este câmp scalar bine definit şi continuu pe D.

etapa 3. Se calculează integrala $\mathcal{I}$, aplicând T1-NU.

modul 1. Se observă că D nu este dreptunghi cu interior, cu laturile paralele cu axele.-NU

modul 2. Se studiază dacă D este domeniu compact simplu în raport cu $Oy-$ este Din cauza integrantului integralele ce apar din teorema de reducere sunt greu de calculat $\Rightarrow$ NU se apelează la acest mod.

modul 3. Se studiază dacă D este domeniu compact simplu în raport cu $Ox-$este. Din cauza integrantului integralele ce apar din teorema de reducere sunt greu de calculat $\Rightarrow$ NU se apelează la acest mod.

etapa 4. Se calculează integrala $\mathcal{I}$, aplicând Teorema de schimbare de "variabile".

Studiind forma integrantului şi forma domeniului (x^2+y^2-4x+3 apare şi în legea de asociere a f şi în ecuaţiile curbei ce mărgineşte D), se face o schimbare de variabile legată de ecuaţiile parametrice ale cercului ce mărgineşte domeniul.

Fie (x,y) coordonatele carteziene a unui punct M din $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;x^2+y^2-4x+3\leq 0\right\}$. Fie

$$\begin{cases}u=\operatorname{dist}(C,M)\\ v=\mu\left(Ox,\overset{\frown}{CM}\right)-\text{ unghi cu vârful } C\end{cases},\text{ cu }\begin{cases}x=2+u\cos v\\ y=0+u\sin v\end{cases}$$

Se observă, având în vedere interpretarea geometrică, că

(x,y) parcurge $D\Leftrightarrow(u,v)$ parcurge D_s,

unde $D_s=\left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2;0\leq u\leq 1,0\leq v\leq 2\pi\right\}=[0,1]\times[0,2\pi]$. Alături de reprezentarea domeniului D în xOy, se reprezintă D_s în uO_sv.

Se alege $F : D_s \subseteq \mathbb{R}^2 \to D \subseteq \mathbb{R}^2, F(u,v) = \left(\underbrace{2 + u\cos v}_{x(u,v)}, \underbrace{u \sin v}_{y(u,v)} \right)$.

Se observă că F este difeomorfism pe $D_s \setminus \mathrm{Fr}\, D_s$, chiar dacă nu se ştie D_s, adică

-F este de clasă $\mathcal{C}^1$ pe $\mathbb{R}^2$ chiar, deci şi pe $D_s \setminus \mathrm{Fr}\, D_s$

-$\det J_F(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos v & -u\sin v \\ \cos v & u\cos v \end{vmatrix} = u \neq 0, \forall (u,v) \in D_s \setminus \mathrm{Fr}\, D_s$.

Atunci F^{-1} duce bijectiv şi bicontinuu domeniul de integrare D în D_s, care este tot domeniu de integrare.

$\mathcal{I} = \iint_D \left(4x - 3 - x^2 - y^2\right) dxdy = \iint_D \left(1 - (x-2)^2 - y^2\right) dxdy =$

$= \iint_{D_s} \left(1 - u^2\right) |u|\, dudv = \iint_{D_s} \left(u - u^3\right) dudv$

$D_s = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2; 0 \le u \le 1, 0 \le v \le 2\pi\right\} = [0,1] \times [0, 2\pi]$ este un dreptunghi cu interior, cu laturile paralele cu axele de coordonate $O_s u, O_s v$.

Folosind Teorema de reducere, a)$\Rightarrow$

$\mathcal{I} = \iint_{D_s} \left(u - u^3\right) dudv = \int_0^1 \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} \left(u - u^3\right) dv \right)}_{\mathcal{I}(u)} du \overset{v \text{ este var.}}{\underset{\text{de integrare}}{=}} \int_0^1 \left(\left(u - u^3\right) \cdot v \right)\Big|_{v=0}^{v=2\pi} du =$

$= \int_0^1 \left(u - u^3\right) \cdot (2\pi)\, du \overset{u \text{ este var.}}{\underset{\text{de integrare}}{=}} 2\pi \left(\frac{u^2}{2} - \frac{u^4}{4} \right)\Big|_{u=0}^{u=1} = 2\pi \frac{1}{4}.$

b) $\iint_D (x-y)^2 \sin^2(x+y)\, dxdy$, unde $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \pi \le x + y \le 3\pi, -\pi \le x - y \le \pi\right\}$.

Rezolvare. A se vedea Curs.

Exerciţiul 9. Să se calculeze aria domeniului D din planul Oxy, mărginit de curbele

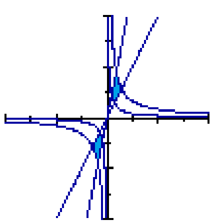
$xy = a, xy = b, b > a > 0$ şi $y = \alpha x, y = \beta x, \beta > \alpha > 0$

situat în primul cadran al sistemului de coordonate Oxy.

Rezolvare. Se anticipează că $\text{aria}(D) \overset{\text{dacă } \exists}{=} \iint_D 1 dxdy = \mathcal{I}$.

etapa 1. Se studiază domeniul D.

•Se reprezintă grafic domeniul



•$xy = a, a > 0$ este hiperbola echilateră ce trece prin $(\sqrt{a}, \sqrt{a})$

•$xy = b, b > 0$ este hiperbola echilateră ce trece prin $\left(\sqrt{b}, \sqrt{b}\right)$

•$y = \alpha x$ este dreapta ce trece prin $O(0,0), (1, \alpha)$

•$y = \beta x$ este dreapta ce trece prin $O(0,0), (1, \beta)$

Se reprezintă arcele de hiperbolă şi semidreptele din primul cadran, ţinând cont că $b > a > 0$ şi $\beta > \alpha > 0$. Se intersectează hiperbolele cu dreptele şi se aleg doar punctele de intersecţie din primul cadran

$\begin{cases} xy = a \\ y = \alpha x \\ (x,y) \in C1 \end{cases} \Rightarrow A_1 \left(\sqrt{\frac{a}{\alpha}}, \sqrt{a \cdot \alpha} \right); \begin{cases} xy = b \\ y = \alpha x \\ (x,y) \in C1 \end{cases} \Rightarrow A_2 \left(\sqrt{\frac{b}{\alpha}}, \sqrt{b \cdot \alpha} \right)$

$$\begin{cases} xy = b \\ y = \beta x \\ (x,y) \in C1 \end{cases} \Rightarrow A_3\left(\sqrt{\frac{b}{\beta}}, \sqrt{b\cdot\beta}\right); \begin{cases} xy = a \\ y = \beta x \\ (x,y) \in C1 \end{cases} \Rightarrow A_4\left(\sqrt{\frac{a}{\beta}}, \sqrt{a\cdot\beta}\right)$$

Deci $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \alpha x \le y \le \beta x, \frac{a}{y} \le x \le \frac{b}{y}\right\}$ este domeniul mărginit de segmentul $\left[\overrightarrow{A_1A_2}\right]$, de arcul de hiperbolă $\left[\overset{\frown}{A_2A_3}\right]$, de segmentul $\left[\overrightarrow{A_3A_4}\right]$ şi de arcul de hiperbolă $\left[\overset{\frown}{A_4A_1}\right]$.

•D este domeniu de integrare, deoarece

$$\begin{cases} \text{-}D \text{ este mulţime mărginită, } D \subsetneq \left[\sqrt{\frac{a}{\beta}}, \sqrt{\frac{b}{\alpha}}\right] \times \left[\sqrt{a\cdot\alpha}, \sqrt{b\cdot\beta}\right] \\ \text{- Fr}\, D \text{ este curbă simplă, închisă, netedă pe 4 porţiuni.} \end{cases}$$

etapa 2. Se studiază integrantul f.

$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = 1.$

f este câmp scalar bine definit şi continuu pe D.

etapa 3. Se calculează integrala $\mathcal{I}$, aplicând T1−NU.

modul 1. Se observă că D nu este dreptunghi cu interior, cu laturile paralele cu axele.-NU

modul 2. Se studiază dacă D este domeniu compact simplu în raport cu Oy.

Ducând două paralele la Oy prin A_1, respectiv A_3 (cu discuţie dacă $y_{A_1} = y_{A_3}$) se obţine D scris ca juxtapunere de domenii simple în raport cu Oy. Din cauza integrantului integralele ce apar din teorema de reducere sunt greu de calculat $\Rightarrow$ NU se apelează la acest mod.

modul 3. Se studiază dacă D este domeniu compact simplu în raport cu Ox.

Ducând două paralele la Ox prin A_4, respectiv A_2 (cu discuţie dacă $x_{A_4} = x_{A_2}$) obţinem D scris ca juxtapunere de domenii simple în raport cu Ox. Din cauza integrantului integralele ce apar din teorema de reducere sunt greu de calculat $\Rightarrow$ NU se apelează la acest mod.

etapa 4. Se calculează integrala $\mathcal{I}$, aplicând Teorema de schimbare de "variabile".

Studiind forma integrantului şi forma domeniului ($xy, \frac{y}{x}$ apar în ecuaţiile curbelor ce mărginesc D), se face o schimbare de variabile legată de $xy, \frac{y}{x}$.

Se notează $\begin{cases} xy = u \\ \frac{y}{x} = v \end{cases} \overset{(x,y)\in C1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x = \sqrt{\frac{u}{v}} \\ y = \sqrt{u\cdot v} \end{cases}$.

Nu există interpretări geometrice pentru noile variabile (u,v).

Se alege $F : D_s \subseteq \mathbb{R}^2 \to D \subseteq \mathbb{R}^2, F(u,v) = \left(\underbrace{\sqrt{\frac{u}{v}}}_{x(u,v)}, \underbrace{\sqrt{u\cdot v}}_{y(u,v)}\right)$.

Se observă că F este difeomorfism pe $D_s \setminus \mathrm{Fr}\, D_s$, fără să se ştie D_s, adică

-F este de clasă $\mathcal{C}^1$ pe $\mathbb{R}^2$ chiar, deci şi pe $D_s \setminus \mathrm{Fr}\, D_s$

-$\det J_F(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{\frac{u}{v}}}\frac{u}{v} & \frac{1}{2\sqrt{\frac{u}{v}}}\frac{-u}{v^2} \\ \frac{1}{2\sqrt{u\cdot v}}v & \frac{1}{2\sqrt{u\cdot v}}u \end{vmatrix} = \frac{1+u}{4v} \neq 0, \forall (u,v) \in D_s \setminus \mathrm{Fr}\, D_s$.

Atunci F^{-1} duce bijectiv şi bicontinuu domeniul de integrare D în D_s, care este tot domeniu de integrare. Se înlocuiesc x, y cu u, v în ecuaţiile lui

$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\dfrac{a}{y}\le x\le\dfrac{b}{y},\alpha x\le y\le\beta x\right\}\Rightarrow$

$D_s=\left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2;a\le u\le b,\alpha\le v\le\beta\right\}=[a,b]\times[\alpha,\beta]$.

Alături de reprezentarea domeniului D, se reprezintă D_s în uO_sv.

$\mathcal{I}=\iint_D 1dxdy=\iint_{D_s}1\left|\dfrac{1+u}{4v}\right|dudv.$

$D_s=\left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2;a\le u\le b,\alpha\le v\le\beta\right\}=[a,b]\times[\alpha,\beta]$ este un dreptunghi cu interior, cu laturile paralele cu axele de coordonate O_su,O_sv.

Folosind Teorema de reducere, a)$\Rightarrow$

$$\text{aria}\,(D)=\mathcal{I}=\iint_{D_s}1\left|\dfrac{1+u}{4v}\right|dudv=\frac{1}{4}\int_a^b\underbrace{\left(\int_\alpha^\beta\dfrac{1+u}{v}dv\right)}_{\mathcal{I}(u)}du\overset{v\text{ este var.}}{\underset{\text{de integrare}}{=}}\frac{1}{4}\int_a^b\left((1+u)\cdot\ln v\right)\Big|_{v=\alpha}^{v=\beta}du=$$

$$=\frac{1}{4}\int_a^b(1+u)\cdot(\ln\beta-\ln\alpha)\,du\overset{u\text{ este var.}}{\underset{\text{de integrare}}{=}}\frac{1}{4}(\ln\beta-\ln\alpha)\cdot\left(u+\frac{u^2}{2}\right)\Big|_{u=a}^{u=b}=$$

$$=\frac{1}{4}(\ln\beta-\ln\alpha)\left(\left(b+\frac{b^2}{2}\right)-\left(a+\frac{a^2}{2}\right)\right).$$

Teorema 5.(**formula Riemann-Green de legătură între integrala dublă şi integrala curbilinie de speţa a 2-a**)

Fie D un domeniu de integrare din $\mathbb{R}^2$ bordat şi orientat. Fie $P,Q:D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ funcţii de clasă $\mathcal{C}^1$ pe D. Atunci

$$\boxed{\int_{FrD}[P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy]=\iint_D\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y)-\dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right)dxdy.}$$

Corolar. În ipotezele Teoremei 5 $\Rightarrow$

a) $\boxed{\text{aria}\,(D)=\iint_D 1dxdy=\frac{1}{2}\int_{FrD}(-ydx+xdy)}$; **b)** $\boxed{\text{aria}\,(D)=\iint_D 1dxdy=\int_{FrD}(0dx+xdy)}$

Exerciţiul 10. Fie $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}\le1\right\}$.

a) Să se determine aria domeniului D folosind integrala dublă, apoi să se verifice rezultatul folosind Corolarul de la Formula Riemann-Green.

b) Să se calculeze următoarea integrală dublă direct, apoi să se verifice rezultatul cu Formula Riemann-Green:

$\iint_D\left(\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}\right)dxdy$, unde $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}\le1\right\}$.

Rezolvare. A se vedea Curs

Exerciţiul 11. Să se calculeze direct, apoi să se verifice rezultatul cu formula lui Green:

a) $\int_\gamma(x+y)\,dx-dy$, unde γ este frontiera domeniului $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;x^2+y^2\le2x,y\ge0\right\}$.

b) $\int_\gamma2\left(x^2+y^2\right)dx+(x-y)\,dy$, unde γ este frontiera triunghiului determinat de punctele $A(1,1),B(2,2),C(2,3)$.