SEMINAR NR. 1, REZOLVĂRI
Analiză matematică, AIA

CALCUL DIFERENŢIAL

1. Mulţimile $\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R}}$–A se vedea Curs

1.3. Şiruri de numere reale

De recapitulat Capitolul "Şiruri de numere reale" din liceu.

Peste tot în această secţiune fie $m \in \mathbb{N}$ un număr natural fixat şi $\mathbb{N}_m = \{m, m+1, ..., n, ...\}$ ($\mathbb{N}_0 = \mathbb{N}$ şi $\mathbb{N}_1 = \mathbb{N}^*$).

Noţiuni teoretice despre *şir, mulţimea termenilor unui şir, şiruri monotone,* $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}_m} x_n$, $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_m} x_n$, $\min\limits_{n\in\mathbb{N}_m} x_n$, $\max\limits_{n\in\mathbb{N}_m} x_n$, *şiruri mărginite*- A se vedea Curs.

Exemplul 1. **a)** Fie şirul constant $x_n = 3, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Şirul se poate descrie:

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} : \underbrace{3}_{x_1}, \underbrace{3}_{x_2}, \underbrace{3}_{x_3}, \underbrace{3}_{x_4}, ..., \underbrace{3}_{x_n}, ...$$

Are mulţimea termenilor $A = \{3\}$, care este mulţime finită şi mărginită. Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este şir mărginit.

b) Fie şirul neconstant $x_n = (-1)^{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Şirul se poate descrie:

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} : \underbrace{1}_{x_1}, \underbrace{-1}_{x_2}, \underbrace{1}_{x_3}, \underbrace{-1}_{x_4}, ..., \underbrace{(-1)^{n+1}}_{x_n}, ...$$

Are mulţimea termenilor $A = \{-1, 1\}$, care este mulţime finită şi mărginită. Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este şir mărginit.

c) $x_n = n^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Şirul se poate descrie:

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} : \underbrace{1^2}_{x_1}, \underbrace{2^2}_{x_2}, \underbrace{3^2}_{x_3}, \underbrace{4^2}_{x_4}, ..., \underbrace{n^2}_{x_n}, ...$$

Are mulţimea termenilor $A = \{1, 4, 9, ..., n^2, ...\}$, care este mulţime infinită şi nemărginită (este mărginită inferior de 1, dar este nemărginită superior). Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este şir nemărginit.

Exerciţiul 1. Să se determine minoranţii, majoranţii, $\inf A$, $\sup A$, $\min A$, $\max A$, mărginirea pentru $A \subseteq \mathbb{R}$ dată prin $A = \{x_n; n \in \mathbb{N}_m\}$, unde:

a) $x_n = \dfrac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$– A se vedea Curs;

b) $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$– A se vedea Curs;

c) $x_n = \dfrac{n+1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$;**d)** $x_n = \dfrac{n}{2n-5}, \forall n \in \mathbb{N}^*$;**e)** $x_n = (-1)^n \dfrac{n+1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$;

f) $x_n = (-1)^n \dfrac{n-1}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$;**g)** $x_n = n^{2(-1)^n}, \forall n \in \mathbb{N}$;**h)** $x_n = \dfrac{n^2}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$;

○**i)** $x_n = \begin{cases} \cos\dfrac{1}{n}, & n \text{ par} \\ \sin\dfrac{1}{n}, & n \text{ impar} \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$

Să se utilizeze notaţiile $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}_m} x_n$, $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_m} x_n$, $\min\limits_{n\in\mathbb{N}_m} x_n$, $\max\limits_{n\in\mathbb{N}_m} x_n$.

(studiul $\inf, \sup$ cu ε- NU)

Rezolvare. c) $x_n = \dfrac{n+1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Şirul se poate descrie:

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} : \underbrace{\frac{2}{1}}_{x_1}, \underbrace{\frac{3}{2}}_{x_2}, \underbrace{\frac{4}{3}}_{x_3}, \underbrace{\frac{5}{4}}_{x_4}, ..., \underbrace{\frac{n+1}{n}}_{x_n}, ...$$

Se ordonează mulţimea termenilor şirului, $A = \left\{\dfrac{n+1}{n}; n \in \mathbb{N}^*\right\}$, apoi se reprezintă pe axă.

Se studiază monotonia şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{n+2}{n+1} - \frac{n+1}{n} = -\frac{1}{n(n+1)} < 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$$

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este şir monoton strict descrescător$\Rightarrow$

$x_1 = \frac{2}{1} > x_2 = \frac{3}{2} > x_3 = \frac{4}{3} > .... > x_n = \frac{n+1}{n} > ... > 1.$

$A_{\leq} =]-\infty, 1]$ este mulţimea tuturor minoranţilor mulţimii A.

$A_{\geq} = [2, +\infty[$ este mulţimea tuturor majoranţilor mulţimii A.

$\inf A \overset{\text{se notează}}{=} \inf\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n = 1$ prin "densitate".

Cum $1 \notin A$ (1 nu este termen al şirului) $\Rightarrow \nexists \min A \overset{\text{se notează}}{=} \min\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$.

$\sup A \overset{\text{se notează}}{=} \sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n = 2$ prin "atingere".

Cum $2 \in A$ (2 este termen al şirului, $x_1 = 2$) $\Rightarrow \max A \overset{\text{se notează}}{=} \max\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n = 2$.

Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este şir mărginit, deoarece

$$1 \lneqq x_n \leq 2, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

De menţionat că A este mulţime infinită (numărabilă) şi mărginită.

d) $x_n = \dfrac{n}{2n-5}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Şirul se poate descrie:

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} : \underbrace{\frac{1}{-3}}_{x_1}, \underbrace{\frac{2}{-1}}_{x_2}, \underbrace{\frac{3}{1}}_{x_3}, \underbrace{\frac{4}{3}}_{x_4}, ..., \underbrace{\frac{n}{2n-5}}_{x_n}, ...$$

Se ordonează mulţimea termenilor şirului, $A = \left\{\dfrac{n}{2n-5}; n \in \mathbb{N}^*\right\}$, apoi se reprezintă pe axă.

Se studiază monotonia şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{n+1}{2n-3} - \frac{n}{2n-5} = \frac{-5}{(2n-3)(2n-5)} < 0, \forall n \in \mathbb{N}_3 \Rightarrow$$

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este şir monoton strict descrescător de la termenul de rang 3 încolo$\Rightarrow$

$x_1 = \frac{1}{-3}; x_2 = \frac{2}{-1};$

$x_3 = \frac{3}{1} > x_4 = \frac{4}{3}.... > x_n = \frac{n}{2n-5} > ... > \frac{1}{2}.$

$A_{\leq} =]-\infty, -2]$ este mulţimea tuturor minoranţilor mulţimii A.

$A_{\geq} = [3, +\infty[$ este mulţimea tuturor majoranţilor mulţimii A.

$\inf A \overset{\text{se notează}}{=} \inf\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n = -2$ "prin atingere".

Cum $-2 \in A$ (-2 este termen al şirului, $x_2 = -2$) $\Rightarrow \min A \overset{\text{se notează}}{=} \min\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n = -2$.

$\sup A \overset{\text{se notează}}{=} \sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n = 3$ "prin atingere".

Cum $3 \in A$ (3 este termen al şirului, $x_3 = 3$) $\Rightarrow \max A \overset{\text{se notează}}{=} \max\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n = 3$.

Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este şir mărginit, deoarece
$-2 \le x_n \le 3, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
De menţionat că A este mulţime infinită (numărabilă) şi mărginită.

e) $x_n = (-1)^n \dfrac{n+1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$; Deoarece $\mathbb{N}^* = \{2k; k \in \mathbb{N}^*\} \cup \{2k+1; k \in \mathbb{N}\}$, se explicitează

$$x_n = \begin{cases} \dfrac{n+1}{n}, & \text{dacă } n = 2k; k \in \mathbb{N}^* \\ -\dfrac{n+1}{n}, & \text{dacă } n = 2k+1; k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Se ordonează mulţimea termenilor şirului, $A = \left\{(-1)^n \dfrac{n+1}{n}; n \in \mathbb{N}^*\right\}$, apoi se reprezintă pe axă.

Se studiază monotonia şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$:

$(x_{2k})_{k\in\mathbb{N}^*} : x_{2k+2} - x_{2k} = \dfrac{2k+3}{2k+2} - \dfrac{2k+1}{2k} = -\dfrac{2}{2k(2k+2)} < 0, \forall k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$

$(x_{2k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ este subşir monoton strict descrescător$\Rightarrow$

$x_2 = \frac{3}{2} > x_4 = \frac{5}{4} > .... > x_{2k} = \frac{2k+1}{2k} > ... > 1$.

$(x_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}} : x_{2k+3} - x_{2k+1} = -\dfrac{2k+4}{2k+3} + \dfrac{2k+2}{2k+1} = \dfrac{2}{(2k+1)(2k+3)} > 0, \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$(x_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ este subşir monoton strict crescător$\Rightarrow$

$x_1 = \frac{-2}{1} < x_3 = \frac{-4}{3} < .... < x_{2k+1} = \frac{-2k-2}{2k+1} < ... < -1$.

Deci

$x_1 = \frac{-2}{1} < x_3 = \frac{-4}{3} < .... < x_{2k+1} = \frac{-2k-2}{2k+1} < ... < -1 <$
$< 1 < ... < x_{2k} = \frac{2k+2}{2k} < ... < x_4 = \frac{5}{4} < x_2 = \frac{3}{2}$.

Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ nu este monoton pe ansamblu, este monoton doar pe subşiruri.
$A_{\le} =]-\infty, -2]$ este mulţimea tuturor minoranţilor mulţimii A.
$A_{\ge} = \left[\frac{3}{2}, +\infty\right[$ este mulţimea tuturor majoranţilor mulţimii A.
$\inf A = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n = -2$ "prin atingere".

Cum $-2 \in A$ (-2 este termen al şirului, $x_1 = -2$) $\Rightarrow \min A = \min\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n = -2$.

$\sup A = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n = \frac{3}{2}$ "prin atingere".

Cum $\frac{3}{2} \in A$ ($\frac{3}{2}$ este termen al şirului, $x_2 = \frac{3}{2}$) $\Rightarrow \max A = \max\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n = \frac{3}{2}$.

Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este şir mărginit, deoarece
$-2 \le x_n \le \frac{3}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
De menţionat că A este mulţime infinită (numărabilă) şi mărginită.

f) $x_n = (-1)^n \dfrac{n-1}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$; Deoarece $\mathbb{N} = \{2k; k \in \mathbb{N}\} \cup \{2k+1; k \in \mathbb{N}\}$, se explicitează

$$x_n = \begin{cases} \dfrac{n-1}{n+1}, & \text{dacă } n = 2k; k \in \mathbb{N} \\ -\dfrac{n-1}{n+1}, & \text{dacă } n = 2k+1; k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Se ordonează mulţimea termenilor şirului, $A = \left\{(-1)^n \dfrac{n-1}{n+1}; n \in \mathbb{N}\right\}$, apoi se reprezintă pe axă.

Se studiază monotonia şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$(x_{2k})_{k\in\mathbb{N}} : x_{2k+2} - x_{2k} = \dfrac{2k+1}{2k+3} - \dfrac{2k-1}{2k+1} = \dfrac{4}{(2k+1)(2k+3)} > 0, \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$(x_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ este subşir monoton strict crescător$\Rightarrow$

$x_0 = -1 < x_2 = \frac{1}{3} < x_4 = \frac{3}{5} < ... < x_{2k} = \dfrac{2k-1}{2k+1} < ... < 1.$

$(x_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}} : x_{2k+3} - x_{2k+1} = -\dfrac{2k+2}{2k+4} + \dfrac{2k}{2k+2} = \dfrac{-4}{(2k+2)(2k+4)} < 0, \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$(x_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ este subşir monoton strict descrescător$\Rightarrow$

$x_1 = 0 > x_3 = -\frac{1}{2} > .... > x_{2k+1} = -\dfrac{2k}{2k+2} > ... > -1.$

Deci $x_0 = -1 < ... < x_{2k+1} = -\dfrac{2k}{2k+2} < ... < x_3 = -\frac{1}{2} < x_1 = 0 < x_2 = \frac{1}{3} < x_4 = \frac{3}{5} < ... < x_{2k} = \dfrac{2k-1}{2k+1} < ... < 1$. Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nu este monoton.

$A_{\leq} =]-\infty, -1]$ este mulţimea tuturor minoranţilor mulţimii A.

$A_{\geq} = [1, +\infty[$ este mulţimea tuturor majoranţilor mulţimii A.

$\inf A = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n = -1$ "prin densitate" sau "prin atingere".

Cum $-1 \in A$ (-1 este termen al şirului, $x_0 = -1$) $\Rightarrow \min A = \min\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n = -1.$

$\sup A = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n = 1$ "prin densitate".

Cum $1 \notin A$ (1 nu este termen al şirului) $\Rightarrow \nexists \max A = \max\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n.$

Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este şir mărginit, deoarece

$-1 \leq x_n < 1, \forall n \in \mathbb{N}.$

g) $x_n = n^{2(-1)^n}, \forall n \in \mathbb{N}$. Deoarece $\mathbb{N} = \{2k; k \in \mathbb{N}\} \cup \{2k+1; k \in \mathbb{N}\}$, se explicitează

$$x_n = \begin{cases} n^2, & \text{dacă } n = 2k; k \in \mathbb{N} \\ \dfrac{1}{n^2}, & \text{dacă } n = 2k+1; k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Se ordonează mulţimea termenilor şirului, $A = \left\{n^{2(-1)^n}; n \in \mathbb{N}\right\}$, apoi se reprezintă pe axă.

Se studiază monotonia şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$(x_{2k})_{k\in\mathbb{N}} : x_{2k+2} - x_{2k} = (2k+2)^2 - (2k)^2 = 8k + 4 > 0, \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$(x_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ este subşir monoton strict crescător$\Rightarrow$

$x_0 = 0 < x_2 = 2^2 < x_4 = 4^2 < ... < x_{2k} = (2k)^2 < ... + \infty.$

$(x_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}} : x_{2k+3} - x_{2k+1} = \dfrac{1}{(2k+3)^2} - \dfrac{1}{(2k+1)^2} = \dfrac{-8(k+1)}{(2k+1)^2(2k+3)^2} < 0, \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$(x_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ este subşir monoton strict descrescător$\Rightarrow$

$x_1 = 1 > x_3 = \frac{1}{9} > .... > x_{2k+1} = \frac{1}{(2k+1)^2} > ... > 0.$

Deci $x_0 = 0 < ... < x_{2k+1} = \frac{1}{(2k+1)^2} < ... < x_3 = \frac{1}{9} < x_1 = 1 < x_2 = 4 < x_4 = 16... < x_{2k} = (2k)^2 < ... < +\infty$. Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nu este monoton.

$A_{\leq} =]-\infty, 0]$ este mulţimea tuturor minoranţilor mulţimii A.

$A_{\geq} = \emptyset$ este mulţimea tuturor majoranţilor mulţimii A în $\mathbb{R}$.

$\inf A = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n = 0$ "prin densitate" sau sau "prin atingere".

Cum $0 \in A$ (0 este termen al şirului, $x_0 = 0$) $\Rightarrow \min A = \min\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n = 0.$

$\sup A = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n = +\infty$ deoarece$^{\bigcirc}$

(i)-(ii) $\forall\alpha > 0, \exists n_\alpha \in \mathbb{N} : x_{n_\varepsilon} > \alpha.$:○

"prin densitate": Într-adevăr, fie $\forall\alpha > 0$. Se caută $n_\alpha \in \mathbb{N} : x_{n_\varepsilon} > \alpha$.

-Se caută $n_\alpha \in \{2k; k \in \mathbb{N}\}$ astfel încât

$(2k_\alpha)^2 > \alpha \Leftrightarrow 2k_\alpha \in \left]-\infty, -\sqrt{\alpha}\right[\cup \left]\sqrt{\alpha}, +\infty\right[$.

Conform Proprietăţii lui Arhimede, se poate alege măcar acel $n_\alpha = [\sqrt{\alpha}]+1$ sau $n_\varepsilon = [\sqrt{\alpha}]+2$ care să fie par.

-Se caută $n_\alpha \in \{2k+1; k \in \mathbb{N}\}$ astfel încât

$\frac{1}{(2k+1)^2} > \alpha \Leftrightarrow (2k+1)^2 < \frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow 2k_\alpha + 1 \in \left]-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}, \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right[$. Dacă $\alpha > 0$ este mare, spre $+\infty$, nu găsim nici un n_α cu proprietăţile cerute (Nu se găseşte un n_α impar astfel încât $n_\alpha < \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$, s-ar contrazice Proprietatea lui Arhimede). Şi din reprezentarea pe axă se observă că se poate "apropia" de $+\infty$ cu termeni de pe ramura x_{2k}.

$\nexists \max A = \max\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$.

Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este nemărginit (este mărginit inferior şi nemărginit superior)

$0 \le x_n < +\infty, \forall n \in \mathbb{N}$.

De menţionat că A este mulţime infinită (numărabilă) şi nemărginită.

i)○ $x_n = \begin{cases} \cos\dfrac{1}{n}, & \text{dacă } n \text{ par} \\ \sin\dfrac{1}{n}, & \text{dacă } n \text{ impar} \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}^*;$

Deoarece $\mathbb{N}^* = \{2k; k \in \mathbb{N}^*\} \cup \{2k+1; k \in \mathbb{N}\}$, se explicitează

$$x_n = \begin{cases} \cos\dfrac{1}{n}, & \text{dacă } n = 2k; k \in \mathbb{N}^* \\ \sin\dfrac{1}{n}, & \text{dacă } n = 2k+1; k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Se ordonează mulţimea termenilor şirului, $A = \{x_n; n \in \mathbb{N}^*\}$, apoi se reprezintă pe axă.

Se studiază monotonia şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$:

$(x_{2k})_{k\in\mathbb{N}} : x_{2k+2} - x_{2k} = \cos\frac{1}{2k+2} - \cos\frac{1}{2k} > 0, \forall k \in \mathbb{N}^*$,

deoarece funcţia $f(x) = \cos x$ este monoton strict descrescătoare pe intervalul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, deci şi pe $]0, 1[\Rightarrow$

$(x_{2k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ este subşir monoton strict crescător$\Rightarrow$

$x_2 = \cos\frac{1}{2} < x_4 = \cos\frac{1}{4} < ... < x_{2k} = \cos\frac{1}{2k} < ... < 1.$

$(x_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}} : x_{2k+3} - x_{2k+1} = \sin\frac{1}{2k+3} - \sin\frac{1}{2k+3} < 0, \forall k \in \mathbb{N}$,

deoarece funcţia $g(x) = \sin x$ este monoton strict crescătoare pe intervalul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, deci şi pe $]0, 1[\Rightarrow$

$(x_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ este subşir monoton strict descrescător$\Rightarrow$

$x_1 = \sin 1 > x_3 = \sin\frac{1}{3} > .... > x_{2k+1} = \sin\frac{1}{2k+1} > ... > 0.$

Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ nu este monoton.

$A_\le =]-\infty, 0]$ este mulţimea tuturor minoranţilor mulţimii A.

$A_\ge = [1, +\infty[$ este mulţimea tuturor majoranţilor mulţimii A.

$\inf A = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n = 0$ "prin densitate".

Cum $0 \notin A$ (0 nu este termen al şirului) $\Rightarrow \nexists \min A = \min\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$.

$\sup A = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n = 1$ "prin densitate".
Cum $1 \notin A$ (1 nu este termen al şirului) $\Rightarrow \nexists \max A = \max\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$.

Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este şir mărginit, deoarece
$0 < x_n < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Observaţia 6. Un şir de numere reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ este şir mărginit$\Leftrightarrow$
$\exists M > 0$ astfel încât $|x_n| < M, \forall n \in \mathbb{N}_m$.
(toţi termenii şirului sunt într-o sferă deschisă de centru 0 şi rază M).
Exerciţiul 2. Să se studieze mărginirea şirului
a) $x_n = \frac{1}{n^n}\cos\frac{n!\pi}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
Rezolvare. Deoarece $\exists M = 2 > 0$ astfel încât
$|x_n| = \left|\frac{1}{n^n}\cos\frac{n!\pi}{2}\right| = \left|\frac{1}{n^n}\right|\cdot\left|\cos\frac{n!\pi}{2}\right| \le \frac{1}{n^n}\cdot 1 \le 1\cdot 1 < 2, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$
şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este mărginit.

Noţiuni teoretice despre *limita unui şir, şiruri convergente, puncte limită*- A se vedea Curs.

Exerciţiul 3. Să se studieze monotonia, $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}_m} x_n$, $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_m} x_n$, $\min\limits_{n\in\mathbb{N}_m} x_n$, $\max\limits_{n\in\mathbb{N}_m} x_n$, mărginirea, convergenţa în $\mathbb{R}$ pentru următoarele şiruri şi, $^{\bigcirc}$conform definiţiei limitei, să se arate că:
a) $x_n = \dfrac{1-n}{1+n}, \forall n \in \mathbb{N}^*; \lim\limits_{n\to\infty} x_n = -1;$**b)** $x_n = \dfrac{n}{1+n^2}, \forall n \in \mathbb{N}; \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0;$
c) $x_n = \dfrac{1+(-1)^n}{n+(-1)^n}, \forall n \in \mathbb{N}^*; \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0;$**d)** $x_n = \dfrac{n+(-1)^n}{2+(-1)^n}, \forall n \in \mathbb{N}; \lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty;$
e) $x_n = \dfrac{n+1}{2n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*; \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1}{2};$**f)** $x_n = \dfrac{(-1)^n n}{n^2+(-1)^n}, \forall n \in \mathbb{N}_2; \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0;$
g) $x_n = \dfrac{n^2}{1+n}, \forall n \in \mathbb{N}; \lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty;$**h)** $x_n = -5n^2+3, \forall n \in \mathbb{N}; \lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty.$
(studiul lim cu ε- NU)
Rezolvare. a) $x_n = \dfrac{1-n}{1+n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
•Se ordonează mulţimea termenilor şirului, $A = \left\{\dfrac{1-n}{1+n}; n \in \mathbb{N}^*\right\}$, apoi se reprezintă pe axă.
•Se studiază monotonia şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{-n}{2+n} - \frac{1-n}{1+n} = \frac{-2}{(n+1)(n+2)} < 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$$

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este şir monoton strict descrescător$\Rightarrow$
$x_1 = 0 > x_2 = \frac{-1}{3} > ... > x_n = \frac{1-n}{1+n} > ... > -1$.
•$A_{\le} =]-\infty, -1]$ este mulţimea tuturor minoranţilor mulţimii A.
$A_{\ge} = [0, +\infty[$ este mulţimea tuturor majoranţilor mulţimii A.
• $\inf A = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n = -1$.
Cum $-1 \notin A$ (-1 nu este termen al şirului) $\Rightarrow \nexists \min A = \min\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$.
$\sup A = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n = 0$.
Cum $0 \in A$ (0 este termen al şirului, $x_1 = 0$) $\Rightarrow \exists \max A = \max\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n = 0$.
•Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este şir mărginit, deoarece
$-1 < x_n \le 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

•Deoarece şirul este monoton şi mărginit$\Rightarrow$ şirul este convergent.
•Convergenţa se poate stabili şi arătând cu teorema de caracterizare că
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -1 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq n_\varepsilon$ să rezulte $|x_n - (-1)| < \varepsilon$.
Fie $\forall\varepsilon > 0$. Se caută $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq n_\varepsilon$ să rezulte
$|x_n - (-1)| = \left|\frac{1-n}{1+n} + 1\right| = \frac{2}{1+n} < \frac{2}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{2}{\varepsilon}$.
Se alege drept n_ε cel mai mic număr din $\mathbb{N}^*$ cu proprietatea anterioară, adică $n_\varepsilon = \left[\frac{2}{\varepsilon}\right] + 1$.q.e.d.

c) $x_n = \dfrac{1+(-1)^n}{n+(-1)^n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Deoarece $\mathbb{N} = \{2k; k \in \mathbb{N}^*\} \cup \{2k+1; k \in \mathbb{N}\}$, se explicitează

$$x_n = \begin{cases} \dfrac{2}{n+1}, & \text{dacă } n = 2k; k \in \mathbb{N}^* \\ 0, & \text{dacă } n = 2k+1; k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

•Se ordonează mulţimea termenilor şirului, $A = \left\{\dfrac{1+(-1)^n}{n+(-1)^n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$, apoi se reprezintă pe axă.
•Se studiază monotonia şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$:
$(x_{2k})_{k\in\mathbb{N}^*} : x_{2k+2} - x_{2k} = \dfrac{2}{2k+3} - \dfrac{2}{2k+1} = \dfrac{-4}{(2k+1)(2k+3)} < 0, \forall k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$
$(x_{2k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ este subşir monoton strict descrescător$\Rightarrow$
$x_2 = \frac{2}{3} > x_4 = \frac{2}{5} > ... > x_{2k} = \dfrac{2}{2k+1} > ... > 0$.
$(x_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}} : x_{2k+1} = 0, \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow$
$(x_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ este subşir constant$\Rightarrow$
$x_1 = x_3 = ... = x_{2k+1} = ... = 0$.
Deci $x_{2k+1} = 0 < ...x_{2k} = \dfrac{2}{2k+1} < ... < x_4 = \frac{2}{5} < x_2 = \frac{2}{3}$.
Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nu este monoton.
•$A_\leq = \left]-\infty, 0\right]$ este mulţimea tuturor minoranţilor mulţimii A.
$A_\geq = \left[\frac{2}{3}, +\infty\right[$ este mulţimea tuturor majoranţilor mulţimii A.
• $\inf A = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n = 0$ deoarece sau "prin densitate" sau "prin atingere".
Cum $0 \in A$ (0 este termen al şirului, $x_{2k+1} = 0, \forall k \in \mathbb{N}$) $\Rightarrow \min A = \min\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n = 0$.
$\sup A = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n = \frac{2}{3}$ "prin atingere".
Cum $\frac{2}{3} \in A$ ($\frac{2}{3}$ este termen al şirului, $x_2 = \frac{2}{3}$) $\Rightarrow \max A = \max\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n = \frac{2}{3}$.
•Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este şir mărginit, deoarece
$0 \leq x_n \leq \frac{2}{3}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
•Convergenţa se poate stabili arătând cu teorema de caracterizare că
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq n_\varepsilon$ să rezulte $|x_n - 0| < \varepsilon$.
Fie $\forall\varepsilon > 0$. Se caută $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^* = \{2k; k \in \mathbb{N}^*\} \cup \{2k+1; k \in \mathbb{N}\}$
-Se caută $n_\varepsilon \in \{2k; k \in \mathbb{N}^*\}$ astfel încât $\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq n_\varepsilon$, n par, să rezulte
$|x_n - 0| = \left|\frac{2}{n+1} - 0\right| = \frac{2}{n+1} < \frac{2}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{2}{\varepsilon}$.
Se alege drept n_ε^1 cel mai mic număr din $\{2k; k \in \mathbb{N}^*\}$ cu proprietatea anterioară, adică $n_\varepsilon^1 = \left[\frac{2}{\varepsilon}\right] + 1$ sau $n_\varepsilon^1 = \left[\frac{2}{\varepsilon}\right] + 2$ care să fie par.
-Se caută $n_\varepsilon \in \{2k+1; k \in \mathbb{N}\}$ astfel încât $\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq n_\varepsilon$, n impar să rezulte
$|x_n - 0| = |0 - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow$
Se alege drept n_ε^2 cel mai mic număr din $\{2k+1; k \in \mathbb{N}\}$ cu proprietatea anterioară, adică $n_\varepsilon^2 = 1$.

Atunci Se găseşte $n_\varepsilon = \max\left\{n_\varepsilon^1, n_\varepsilon^2\right\}$.
$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \in \mathbb{R} \Rightarrow$şirul este convergent.

d) $x_n = \dfrac{n+(-1)^n}{2+(-1)^n}, \forall n \in \mathbb{N}; \lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty, \bigcirc \lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq 1;$

Deoarece $\mathbb{N} = \{2k; k\in\mathbb{N}\} \cup \{2k+1; k\in\mathbb{N}\}$, se explicitează

$$x_n = \begin{cases} \dfrac{n+1}{3}, & \text{dacă } n = 2k; k\in\mathbb{N} \\ n-1, & \text{dacă } n = 2k+1; k\in\mathbb{N}\end{cases}$$

•Se ordonează mulţimea termenilor şirului, $A = \left\{\dfrac{n+(-1)^n}{2+(-1)^n}, n\in\mathbb{N}^*\right\}$, apoi se reprezintă pe axă.

•Se studiază monotonia şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$(x_{2k})_{k\in\mathbb{N}} : x_{2k+2} - x_{2k} = \dfrac{2k+3}{3} - \dfrac{2k+1}{3} = \dfrac{2}{3} > 0, \forall k\in\mathbb{N} \Rightarrow$

$(x_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ este subşir monoton strict crescător$\Rightarrow$

$x_0 = \frac{1}{3} < x_2 = 1 < ... < x_{2k} = \dfrac{2k+1}{3} < ... < +\infty.$

$(x_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}} : x_{2k+3} - x_{2k+1} = 2k+2-2k = 2 > 0, \forall k\in\mathbb{N} \Rightarrow$

$(x_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ este subşir monoton strict crescător$\Rightarrow$

$x_1 = 0 < x_3 = 2 < .... < x_{2k+1} = 2k < ... < +\infty.$

Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nu este monoton.

•$A_{\leq} =]-\infty, 0]$ este mulţimea tuturor minoranţilor mulţimii A.

$A_{\geq} = \emptyset$ este mulţimea tuturor majoranţilor mulţimii A.

• $\inf A = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n = 0$.

Cum $0 \in A$ (0 este termen al şirului, $x_1 = 0$) $\Rightarrow \min A = \min\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n = 0$.

$\sup A = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n = +\infty$.

$\nexists \max A = \max\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$.

•Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este şir nemărginit (este mărginit inferior, dar este nemărginit superior)

$0 \leq x_n < +\infty, \forall n\in\mathbb{N}$.

•Arătăm că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty \Leftrightarrow \forall\alpha > 0, \exists n_\alpha \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n\in\mathbb{N}, n \geq n_\alpha$ să rezulte $x_n > \alpha$.

Fie $\forall\alpha > 0$. Se caută $n_\alpha \in \mathbb{N}$ astfel încât

- $\forall n \in \{2k; k\in\mathbb{N}\}, n \geq n_\alpha$, să rezulte $\frac{n+1}{3} > \alpha, n = 2k \Rightarrow n > 3\alpha - 1$.

Se alege drept n_α^1 cel mai mic număr dintre $\{2k; k\in\mathbb{N}\}$ cu proprietatea anterioară, adică $n_\alpha^1 = [3\alpha - 1] + 1$ sau $n_\varepsilon^1 = [3\alpha - 1] + 2$ care să fie par.

-$\forall n \in \{2k+1; k\in\mathbb{N}\}, n \geq n_\alpha$, să rezulte $n - 1 > \alpha, n = 2k+1 \Rightarrow n > \alpha + 1$.

Se alege drept n_α^2 cel mai mic număr dintre $\{2k+1; k\in\mathbb{N}\}$ cu proprietatea anterioară, adică $n_\alpha^2 = [\alpha - 1] + 1$ sau $n_\varepsilon^2 = [\alpha - 1] + 2$ care să fie impar.

Atunci găsim $n_\alpha = \max\left\{n_\alpha^1, n_\alpha^2\right\}$.

$\Rightarrow$şirul nu este convergent.

Exerciţiul 4. Să se arate că şirul definit prin

$$x_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & \text{dacă } n \neq 3k \\ \dfrac{2}{n}, & \text{dacă } n = 3k \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

are valori pozitive, converge la 0 în $\mathbb{R}$ dar nu este monoton.

Indicaţie. Deoarece $\mathbb{N} = \{3k; k\in\mathbb{N}^*\} \cup \{3k+1; k\in\mathbb{N}\} \cup \{3k+2; k\in\mathbb{N}\}$, se explicitează

$$x_n = \begin{cases} \frac{2}{n}, & \text{dacă } n = 3k; k \in \mathbb{N}^* \\ \frac{1}{n}, & \text{dacă } n = 3k+1; k \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{n}, & \text{dacă } n = 3k+2; k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Exerciţiul 5. Să se studieze monotonia, $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}_m} x_n$, $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_m} x_n$, $\min\limits_{n\in\mathbb{N}_m} x_n$, $\max\limits_{n\in\mathbb{N}_m} x_n$, mărginirea, $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, şi să se verifice că

$$-\infty \le \inf_{n\in\mathbb{N}_m} x_n \le \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n \le \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n \le \sup_{n\in\mathbb{N}_m} x_n \le +\infty$$

pentru următoarele şiruri:

a) $x_n = \frac{(-1)^n}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*-$ A se vedea Curs;**b)** $x_n = (-1)^n \frac{n+1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$;

c) $x_n = (-1)^n \frac{2n+1}{3n}, \forall n \in \mathbb{N}^*-$ A se vedea Curs;**d)** $x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{(2+(-1)^n)^n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$;

e) $x_n = \frac{(1+(-1)^n)\,n}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$; **f)** $x_n = \frac{n+1+(-1)^n}{n\,(2+(-1)^n)}, \forall n \in \mathbb{N}^*$;

g) $x_n = (1+(-1)^n)\,n + \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*-$ A se vedea Curs;

h) $x_n = (-1)^{n-1}\left(2+\frac{3}{n}\right), \forall n \in \mathbb{N}^*$; **i)** $x_n = \frac{1}{n\,((-1)^n\,n+2)}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Rezolvare. b) $x_n = (-1)^n \frac{n+1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$;

•Deoarece $\mathbb{N} = \{2k; k \in \mathbb{N}^*\} \cup \{2k+1; k \in \mathbb{N}\}$, se explicitează

$$x_n = \begin{cases} \frac{n+1}{n}, & \text{dacă } n = 2k; k \in \mathbb{N}^* \\ -\frac{n+1}{n}, & \text{dacă } n = 2k+1; k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

La Exerciţiul $1, e)$ s-a ordonat mulţimea termenilor şirului, $A = \left\{(-1)^n \frac{n+1}{n}; n \in \mathbb{N}^*\right\}$, şi s-a reprezentat pe axă. S-a studiat monotonia şirului.

•$A_{\le} = \left]-\infty, -2\right]$ este mulţimea tuturor minoranţilor mulţimii A.
$A_{\ge} = \left[\frac{3}{2}, +\infty\right[$ este mulţimea tuturor majoranţilor mulţimii A.

•Ca la Exerciţiul $1, e)$, se arată că

$$\inf A = \inf_{n\in\mathbb{N}^*} x_n = -2; \exists \min A = \min_{n\in\mathbb{N}^*} x_n = -2;$$
$$\sup A = \sup_{n\in\mathbb{N}^*} x_n = \tfrac{3}{2}; \exists \min A = \max_{n\in\mathbb{N}^*} x_n = \tfrac{3}{2}.$$

•Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este şir mărginit, deoarece

$$-2 \le x_n \le \tfrac{3}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

•Se trece la limită pe subşiruri

$$\begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{2k+1}{2k} = 1; \\ \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k+1} = \lim\limits_{k\to\infty} \left(-\frac{2k+2}{2k+1}\right) = -1 \end{cases} \overset{\mathbb{N}=\{2k;k\in\mathbb{N}^*\}\cup\{2k+1;k\in\mathbb{N}\}}{\Rightarrow}$$

mulţimea punctelor limită ale şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este $\mathcal{L}\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\right) = \{-1, 1\} \Rightarrow$

$$\begin{cases} \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \liminf\limits_{n\to\infty} x_n = -1 \text{ (cel mai mic punct limită)} \\ \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \limsup\limits_{n\to\infty} x_n = 1 \text{ (cel mai mare punct limită)} \end{cases} \overset{\text{limitele extreme nu coincid}}{\Rightarrow} \nexists \lim_{n\to\infty} x_n.$$

•Se verifică

$\inf\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n \le \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n \le \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n \le \sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ $(-2 \le -1 \le 1 \le \frac{3}{2})$.

i) $x_n = \dfrac{1}{n\left((-1)^n n + 2\right)}, \forall n \in \mathbb{N}^*;$

•Deoarece $\mathbb{N} = \{2k; k \in \mathbb{N}^*\} \cup \{2k+1; k \in \mathbb{N}\}$, se explicitează

$$x_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n(n+2)}, & \text{dacă } n = 2k; k \in \mathbb{N}^* \\ \dfrac{1}{n(-n+2)}, & \text{dacă } n = 2k+1; k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Se ordonează mulţimea termenilor şirului, $A = \left\{\dfrac{1}{n\left((-1)^n n+2\right)}; n \in \mathbb{N}^*\right\}$, apoi se reprezintă pe axă.

Se studiază monotonia şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$:

$(x_{2k})_{k\in\mathbb{N}^*} : x_{2k+2} - x_{2k} = \dfrac{1}{(2k+2)(2k+4)} - \dfrac{1}{(2k)(2k+2)} =$

$= \dfrac{-4}{(2k)(2k+2)(2k+4)} < 0, \forall k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$

$(x_{2k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ este subşir monoton strict descrescător$\Rightarrow$

$x_2 = \frac{1}{8} > x_4 = \frac{1}{24} > ... > x_{2k} = \dfrac{1}{(2k)(2k+2)} > ... > 0.$

$(x_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}} : x_{2k+3} - x_{2k+1} = -\dfrac{1}{(2k+3)(2k+1)} + \dfrac{1}{(2k+1)(2k-1)} =$

$= \dfrac{2}{(2k+3)(2k+1)(2k-1)} > 0, \forall k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$

$(x_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}^*}$ este subşir monoton strict crescător de la x_3 încolo$\Rightarrow$

$x_1 = 1;$

$x_3 = -\frac{1}{3} < .... < x_{2k+1} = -\dfrac{1}{(2k+1)(2k-1)} > ... > 0.$

Deci $x_3 = -\frac{1}{3} < ... < x_{2k+1} = -\dfrac{1}{(2k+1)(2k-1)} < ... < 0 < ... < x_{2k} = \dfrac{1}{(2k)(2k+2)} < ... < x_2 = \frac{1}{2} < x_1 = 1$. Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nu este monoton.

$A_{\le} = \left]-\infty, -\frac{1}{3}\right]$ este mulţimea tuturor minoranţilor mulţimii A.

$A_{\ge} = [1, +\infty[$ este mulţimea tuturor majoranţilor mulţimii A.

$\inf A = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n = -\frac{1}{3}$ "prin atingere". Cum $-\frac{1}{3} \in A$ ($-\frac{1}{3}$ este termen al şirului, $x_3 = -\frac{1}{3}$) $\Rightarrow$ $\min A = \min\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n = -\frac{1}{3}$.

$\sup A = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n = 1$ "prin atingere". Cum $1 \in A$ (1 este termen al şirului, $x_1 = 1$) $\Rightarrow \max A = \max\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n = 1$.

•Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este şir mărginit, deoarece

$\frac{1}{-3} \le x_n \le 1, \forall n \in \mathbb{N}^*.$

•Se trece la limită pe subşiruri

$$\begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{2k(2k+2)} = 0; \\ \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k+1} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{(2k+1)(-2k+1)} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

mulţimea punctelor limită ale şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este $\mathcal{L}\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\right) = \{0\} \Rightarrow$

$$\begin{cases} \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \liminf\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \text{ (cel mai mic punct limită)} \\ \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \limsup\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \text{ (cel mai mare punct limită)} \end{cases} \overset{\text{limitele extreme coincid}}{\Rightarrow} \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0.$$

•Se verifică
$\inf\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n \leq \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n \leq \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n \leq \sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ $(\frac{1}{-3} \leq 0 \leq 0 \leq 1)$.

Exerciţiul 6. Să se studieze $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$, , $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ pentru următoarele şiruri:

a) $x_n = \dfrac{(1+(-1)^n)\,n^2+n}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$;**b)** $x_n = \sin\frac{n\pi}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$;
c) $x_n = \cos\frac{n\pi}{3}, \forall n \in \mathbb{N}$–A se vedea Curs.

Rezolvare. a) $x_n = \dfrac{(1+(-1)^n)\,n^2+n}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$;
•Deoarece $\mathbb{N} = \{2k; k\in\mathbb{N}\} \cup \{2k+1; k\in\mathbb{N}\}$, se explicitează

$$x_n = \begin{cases} \dfrac{2n^2+n}{n+1}, & \text{dacă } n = 2k; k\in\mathbb{N} \\ \dfrac{n}{n+1}, & \text{dacă } n = 2k+1; k\in\mathbb{N}. \end{cases}$$

•Se determină

$$\begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{2(2k)^2+2k}{2k+1} = +\infty; \\ \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k+1} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{2k}{2k+1} = 1 \end{cases} \overset{\mathbb{N}=\{2k;k\in\mathbb{N}\}\cup\{2k+1;k\in\mathbb{N}\}}{\Rightarrow}$$

mulţimea punctelor limită în $\overline{\mathbb{R}}$ ale şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este $\mathcal{L}\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = \{+\infty, 1\} \Rightarrow$

$$\begin{cases} \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \liminf\limits_{n\to\infty} x_n = 1 \text{ (cel mai mic punct limită)} \\ \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \limsup\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty \text{ (cel mai mare punct limită)} \end{cases} \overset{\text{limitele extreme nu coincid}}{\Rightarrow} \nexists \lim\limits_{n\to\infty} x_n.$$

b) Fie $x_n = \sin\frac{n\pi}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$.
•Se observă că
$x_0 = \sin\frac{0\cdot\pi}{2} = 0; x_1 = \sin\frac{1\cdot\pi}{2} = 1; x_2 = \sin\frac{2\cdot\pi}{2} = 0;$
$x_3 = \sin\frac{3\cdot\pi}{2} = -1; x_4 = \sin\frac{4\cdot\pi}{2} = 0; ...$
Din periodicitatea cu care x_n ia valori în funcţie de n $\Rightarrow$mulţimea punctelor limită ale şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este
$\mathcal{L}\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = \{0, 1, -1\} \Rightarrow$

$$\begin{cases} \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \liminf\limits_{n\to\infty} x_n = -1 \text{ (cel mai mic punct limită)} \\ \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \limsup\limits_{n\to\infty} x_n = 1 \text{ (cel mai mare punct limită)} \end{cases}$$

•Deoarece
$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = -1 = 1 = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n \Rightarrow \nexists \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Exerciţiul 7. Să se arate că şirul definit prin

$$x_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, n \text{ par} \\ 1 - \dfrac{1}{n}, n \text{ impar} \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

este mărginit, dar nu converge în $\mathbb{R}$.

Exerciţiul 8. Să se studieze monotonia, $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}_3} x_n$, $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_3} x_n$, $\min\limits_{n\in\mathbb{N}_3} x_n$, $\max\limits_{n\in\mathbb{N}_3} x_n$, mărginirea, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$, , $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, şi să se verifice că
$\inf\limits_{n\in\mathbb{N}_m} x_n \leq \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n \leq \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n \leq \sup\limits_{n\in\mathbb{N}_m} x_n$
pentru

$$x_n = \begin{cases} \dfrac{1}{k}, & \text{dacă } n = 3k; k \in \mathbb{N}^* \\ 1 - \dfrac{1}{k}, & \text{dacă } n = 3k+1; k \in \mathbb{N}^* \\ \dfrac{1}{k} - 1, & \text{dacă } n = 3k+2; k \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Exercițiul 9. Să se studieze $\underline{\lim}_{n\to\infty}$, $\overline{\lim}_{n\to\infty}$, $\lim_{n\to\infty}$, pentru şirurile $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$, $\left(\sqrt[n]{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}_m}$, $\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}_m}$ dacă:

a) $x_n = \dfrac{(-1)^n}{1+(-2)^n}, \forall n \in \mathbb{N}_2$; **b)** $x_n = \dfrac{3^n + (-2)^n}{n}, \forall n \in \mathbb{N}_2$;

c) $x_n = \dfrac{2+(-1)^n}{2n+(-1)^n}, \forall n \in \mathbb{N}_2$; **d)** $x_n = \left(\dfrac{2+(-1)^n}{5}\right)^n, \forall n \in \mathbb{N}_2$.

Să se verifice că

$$0 \le \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \le \underline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \le \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \le \overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \le +\infty.$$

Rezolvare. d)

—$x_n = \left(\dfrac{2+(-1)^n}{5}\right)^n = \begin{cases} \left(\frac{3}{5}\right)^n, & \text{dacă } n = 2k; k \in \mathbb{N}^* \\ \left(\frac{1}{5}\right)^n, & \text{dacă } n = 2k+1; k \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

$$\begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = \lim\limits_{k\to\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^{2k} = 0; \\ \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k+1} = \lim\limits_{k\to\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{2k+1} = 0 \end{cases} \overset{\mathbb{N}=\{2k;k\in\mathbb{N}^*\}\cup\{2k+1;k\in\mathbb{N}^*\}}{\Longrightarrow}$$

mulţimea punctelor limită în $\overline{\mathbb{R}}$ ale şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_2}$ este $\mathcal{L}\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}_2}\right) = \{0\} \Rightarrow$

$$\begin{cases} \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \liminf\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \text{ (cel mai mic punct limită)} \\ \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \limsup\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \text{ (cel mai mare punct limită)} \end{cases} \overset{\text{limitele extreme coincid}}{\Longrightarrow} \exists \lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

—$v_n = \sqrt[n]{x_n} = \sqrt[n]{\left(\dfrac{2+(-1)^n}{5}\right)^n} = \dfrac{2+(-1)^n}{5} = \begin{cases} \frac{3}{5}, & \text{dacă } n = 2k; k \in \mathbb{N}^* \\ \frac{1}{5}, & \text{dacă } n = 2k+1; k \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

$$\begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} v_{2k} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{3}{5} = \frac{3}{5}; \\ \lim\limits_{k\to\infty} v_{2k+1} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{5} = \frac{1}{5} \end{cases} \overset{\mathbb{N}=\{2k;k\in\mathbb{N}^*\}\cup\{2k+1;k\in\mathbb{N}^*\}}{\Longrightarrow}$$

mulţimea punctelor limită în $\overline{\mathbb{R}}$ ale şirului $(v_n)_{n\in\mathbb{N}_2}$ este $\mathcal{L}\left((v_n)_{n\in\mathbb{N}_2}\right) = \left\{\frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right\} \Rightarrow$

$$\begin{cases} \underline{\lim}_{n\to\infty} v_n = \liminf\limits_{n\to\infty} v_n = \frac{1}{5} \text{ (cel mai mic punct limită)} \\ \overline{\lim}_{n\to\infty} v_n = \limsup\limits_{n\to\infty} v_n = \frac{3}{5} \text{ (cel mai mare punct limită)} \end{cases} \overset{\text{limitele extreme nu coincid}}{\Longrightarrow} \nexists \lim_{n\to\infty} x_n$$

—$u_n = \frac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{\left(\dfrac{2+(-1)^{n+1}}{5}\right)^{n+1}}{\left(\dfrac{2+(-1)^n}{5}\right)^n} = \begin{cases} \dfrac{\left(\dfrac{1}{5}\right)^{n+1}}{\left(\dfrac{3}{5}\right)^n} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3^n}, & \text{dacă } n = 2k; k \in \mathbb{N}^* \\ \dfrac{\left(\dfrac{3}{5}\right)^{n+1}}{\left(\dfrac{1}{5}\right)^n} = \frac{1}{5} \cdot 3^{n+1}, & \text{dacă } n = 2k+1; k \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

$$\begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} u_{2k} = 0; \\ \lim\limits_{k\to\infty} u_{2k+1} = \infty \end{cases} \overset{\mathbb{N}=\{2k;k\in\mathbb{N}^*\}\cup\{2k+1;k\in\mathbb{N}^*\}}{\Longrightarrow}$$

mulţimea punctelor limită în $\overline{\mathbb{R}}$ ale şirului $(u_n)_{n\in\mathbb{N}_2}$ este $\mathcal{L}\left((u_n)_{n\in\mathbb{N}_2}\right) = \{0, \infty\} \Rightarrow$

$$\begin{cases} \underline{\lim}_{n\to\infty} u_n = \liminf_{n\to\infty} u_n = 0 \text{ (cel mai mic punct limită)} \\ \overline{\lim}_{n\to\infty} u_n = \limsup_{n\to\infty} u_n = \infty \text{ (cel mai mare punct limită)} \end{cases} \overset{\text{limitele extreme nu coincid}}{\Rightarrow} \nexists \lim_{n\to\infty} u_n$$

Noţiuni teoretice despre *şiruri convergente şi operaţii algebrice cu şiruri convergente*- A se vedea Curs.

Teorema 7. (**Weierstrass**) Orice şir monoton şi mărginit de numere reale este convergent:
a) Orice şir de numere reale monoton crescător şi mărginit superior este convergent şi
$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup_{n\in\mathbb{N}_m} x_n$.
b) Orice şir de numere reale monoton descrescător şi mărginit inferior este convergent şi
$\lim_{n\to\infty} x_n = \inf_{n\in\mathbb{N}_m} x_n$.

Exerciţiul 11. Să se studieze convergenţa următoarelor şiruri:
a) $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$;**b)** $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$;**c)** $x_1 = \sqrt{2}, x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Rezolvare. a) Fie $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$;

Şirul se poate descrie:

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} : \underbrace{\frac{1}{3^1+1}}_{x_1}, \underbrace{\frac{1}{3^1+1} + \frac{1}{3^2+1}}_{x_2}, ..., \underbrace{\frac{1}{3^1+1} + \frac{1}{3^2+1} + ... + \frac{1}{3^n+1}}_{x_n}, ...$$

Termenul general nu se poate exprima fără simbolul $\sum$.
•Se studiază monotonia şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$:

$$x_{n+1} - x_n = \left(\frac{1}{3^1+1} + \frac{1}{3^2+1} + ... + \frac{1}{3^n+1} + \frac{1}{3^{n+1}+1}\right) - \left(\frac{1}{3^1+1} + \frac{1}{3^2+1} + ... + \frac{1}{3^n+1}\right) =$$
$$= \frac{1}{3^{n+1}+1} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$$

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este şir monoton strict crescător$\Rightarrow$

$$x_1 = \frac{1}{4} < x_2 < x_3 < .... < x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k+1} < ...$$

•Se studiază mărginirea şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ .Deoarece

$$0 < \frac{1}{3^k+1} < \frac{1}{3^k}, \forall k \in \{1, ..., n\}, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 0 < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k+1} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ adică}$$
$$0 < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k+1} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{3} \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n - 1}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right] < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Deci $0 < x_n < \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$, chiar $\frac{1}{4} < x_n < \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$, adică şirul este mărginit (De menţionat că 0 nu este neapărat inf iar $\frac{1}{2}$ nu este neapărat sup din acest tip de studiu).
•Şir monoton şi mărginit $\Rightarrow$ este şir convergent, fără a şti limita (cu metode numerice).

$$\sum_{k=1}^{20} \frac{1}{3^k+1} = 0.404\,06; \sum_{k=1}^{200} \frac{1}{3^k+1} = 0.404\,06$$

b) Fie $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$;

Şirul se poate descrie:

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} : \underbrace{\frac{1}{1^2}}_{x_1}, \underbrace{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}}_{x_2}, ..., \underbrace{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{n^2}}_{x_n}, ...$$

Termenul general nu se poate exprima fără simbolul $\sum$.

•Se studiază monotonia şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$:

$$x_{n+1}-x_n=\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}\right)-\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{n^2}\right)=$$
$$=\frac{1}{(n+1)^2}>0,\forall n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow$$

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este şir monoton strict crescător$\Rightarrow$

$$x_1=1<x_2<x_3<....<x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2}<...$$

•Se studiază mărginirea şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$:

$$0<\frac{1}{k^2}<\frac{1}{(k-1)k}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k},\forall k\in\{2,...,n\},\forall n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow$$
$$0<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}<1+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right),\forall n\in\mathbb{N}^*, \text{ adică}$$
$$0<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}<1+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)=2-\frac{1}{n}<2,\forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Deci $0<x_n<2,\forall n\in\mathbb{N}^*$, chiar $1<x_n<2,\forall n\in\mathbb{N}^*$, adică şirul este mărginit (De menţionat că 0 nu este nepărat inf iar 2 nu este neapărat sup din acest tip de studiu).

•Şir monoton şi mărginit $\Rightarrow$ este şir convergent.

$$\sum_{k=1}^{100}\frac{1}{k^2}=1.6350;\sum_{k=1}^{1000}\frac{1}{k^2}=1.6439;\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{1}{6}\pi^2$$

c) Fie

$$x_1=\sqrt{2},x_{n+1}=\sqrt{2+x_n},\forall n\in\mathbb{N}^*;$$

Şirul se poate descrie:

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}:\underbrace{\sqrt{2}}_{x_1},\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2}}}_{x_2},...,\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...\sqrt{2}}}}}_{x_n},...$$

Termenul general nu se poate exprima.

•Se studiază monotonia şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ prin inducţie matematică:

$x_1=\sqrt{2}<\sqrt{2+\sqrt{2}}=x_2$.

Se presupune că $x_n<x_{n+1},\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Se demonstrează că $x_{n+1}<x_{n+2},\forall n\in\mathbb{N}^*$. Într-adevăr:

$x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}<\sqrt{2+x_{n+1}}=x_{n+2},\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Deci $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este şir monoton strict crescător$\Rightarrow$

$x_1=\sqrt{2}<x_2<x_3<....<x_n<...$

•Se studiază mărginirea şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ prin inducţie matematică:

$0<x_1=\sqrt{2}<2;$

$0<x_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}<\sqrt{2+2}=2$

Se presupune că $0<x_n<2,\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Se demonstrează că $0<x_{n+1}<2,\forall n\in\mathbb{N}^*$. Într-adevăr

$0<x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}<\sqrt{2+2}=2,\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Deci $0<x_n<2,\forall n\in\mathbb{N}^*$, chiar

$\sqrt{2}<x_n<2,\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Deci şirul este mărginit (De menţionat că 0 nu este inf iar 2 nu este sup din acest tip de studiu).

•Şir monoton şi mărginit $\Rightarrow$ este şir convergent.

•Mai mult, aici se poate găsi şi limita şirului, $l=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

Se trece la limită în relaţia de recurenţă

$x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow l = \sqrt{2+l} \Rightarrow l_1 = -1$ şi $l_2 = 2$.
Cum l este unică şi $\sqrt{2} < x_n < 2, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$.

Teorema 9. (**criteriul majorării de convergenţă, CS**) Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ un şir de numere reale. Dacă există un şir $(y_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ de numere reale pozitive şi un număr $x \in \mathbb{R}$ astfel încât
$$\begin{cases} |x_n - x| \le y_n, \forall n \in \mathbb{N}_m, n > n_0, \\ \exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0 \end{cases}$$
atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Exerciţiul 12. Să se studieze convergenţa următoarelor şiruri:
a) $x_n = \dfrac{(\cos n)^{2020}}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$;
Rezolvare. a) Se observă că:
$$\begin{cases} |x_n - 0| = \left|\frac{(\cos n)^{2020}}{n} - 0\right| \le \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \\ \exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \end{cases} \overset{\text{Crit. maj.}}{\Rightarrow} \exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(\cos n)^{2020}}{n} = 0.$$

Teorema 1.3.12. (**Şiruri remarcabile**)- A se vedea Curs.
LIMITE STANDARD- A se vedea Curs.
Exemplele de la Şiruri Remarcabile şi Limite Standard- A se vedea Curs.

Exerciţiul 13. Să se calculeze:
a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n-3} - n\right)$;**b)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\ln\left(2n^3+5n+7\right) - \ln\left(5n^3+2n+7\right)\right)$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2-2n+1}{5n^2-2}\right)^{\frac{2n^2-1}{5n}}$;**d)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n^2-4}{2n^2-n+1}\right)^{\frac{-4n}{n^2-1}}$;**e)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{7n^2+n+1}{4n^2-n+1}\right)^{\frac{2n^2-1}{7n}}$;

f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n^2-5}{4n^2-n+1}\right)^{\frac{n^2-1}{n}}$;**g)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2^n}{3^n+4^n}\right)^{-2^n}$.**h)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}\right)}{n^2+1}$.

Rezolvare.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n-3} - n\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+2n-3-n^2}{\sqrt{n^2+2n-3}+n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\left(2-\frac{3}{n}\right)}{n\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}-\frac{3}{n^2}}+1\right)} = 1.$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\ln\left(2n^3+5n+7\right) - \ln\left(5n^3+2n+7\right)\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\ln\dfrac{2n^3+5n+7}{5n^3+2n+7} = \ln\dfrac{2}{5}.$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2-2n+1}{5n^2-2}\right)^{\frac{2n^2-1}{5n}} = \left(\dfrac{2}{5}\right)^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2-1}{5n}} = 0;$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n^2-4}{2n^2-n+1}\right)^{\frac{-4n}{n^2-1}} = \left(\dfrac{5}{2}\right)^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-4n}{n^2-1}} = \left(\dfrac{5}{4}\right)^{0} = 1;$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{7n^2+n+1}{4n^2-n+1}\right)^{\frac{2n^2-1}{7n}} = \left(\dfrac{7}{4}\right)^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2-1}{7n}} = +\infty;$

f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n^2-5}{4n^2-n+1}\right)^{\frac{n^2-1}{n}} = 1^{+\infty}-$ nu atribuim nici un sens, procedând ca anterior; Atunci

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n^2-5}{4n^2-n+1}\right)^{\frac{n^2-1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\left(\frac{4n^2-5}{4n^2-n+1}-1\right)\right)^{\frac{n^2-1}{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{n-6}{4n^2-n+1}\right)^{\frac{4n^2-n+1}{n-6}}\right)^{\frac{n^2-1}{n}\frac{n-6}{4n^2-n+1}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{n}\frac{n-6}{4n^2-n+1}} =$$

$$= e^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{e}.$$

g) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2^n}{3^n+4^n}\right)^{-2^n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2^n}{3^n+4^n}\right)^{\frac{3^n+4^n}{2^n}\cdot\frac{2^n}{3^n+4^n}(-2^n)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{4^n}{3^n+4^n}\right)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^n+1}\right)} =$
e^{-1};

h) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}\right)}{n^2+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}\cdot\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}{n^2+1} = 0\cdot 0 = 0.$

Exerciţiul 14. Să se studieze convergenţa şirurilor
a) $x_n = \left(1+\frac{\cos n\pi}{n}\right)^n, \forall n\in\mathbb{N}^*$.**b)** $x_n = \left((-1)^n + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)^n, \forall n\in\mathbb{N}^*$;

c) $x_n = (-1)^n\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)^n, \forall n\in\mathbb{N}^*$–A se vedea Curs.

Rezolvare. **a)** Fie $x_n = \left(1+\frac{\cos n\pi}{n}\right)^n, \forall n\in\mathbb{N}^*$.
•Deoarece $\mathbb{N} = \{2k; k\in\mathbb{N}^*\}\cup\{2k+1; k\in\mathbb{N}\}$, se explicitează

$$x_n = \begin{cases} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, & \text{dacă } n=2k; k\in\mathbb{N}^* \\ \left(1-\frac{1}{n}\right)^n, & \text{dacă } n=2k+1; k\in\mathbb{N} \end{cases}$$

•Se trece la limită pe subşiruri

$$\begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = \lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{2k}\right)^{2k} = e; \\ \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k+1} = \lim\limits_{k\to\infty}\left(1-\frac{1}{2k+1}\right)^{2k+1} = \frac{1}{e} \end{cases} \overset{\mathbb{N}=\{2k;k\in\mathbb{N}^*\}\cup\{2k+1;k\in\mathbb{N}\}}{\Rightarrow}$$

mulţimea punctelor limită ale şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este $\mathcal{L}\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\right) = \left\{e, \frac{1}{e}\right\} \Rightarrow$

$$\begin{cases} \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = \liminf\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{e} \text{ (cel mai mic punct limită)} \\ \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = \limsup\limits_{n\to\infty} x_n = e \text{ (cel mai mare punct limită)} \end{cases}$$

•Deoarece

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{e} \neq e = \varlimsup_{n\to\infty} x_n \Rightarrow \nexists \lim_{n\to\infty} x_n.$$

b) Fie $x_n = \left((-1)^n + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)^n, \forall n\in\mathbb{N}^*$.
•Deoarece $\mathbb{N} = \{2k; k\in\mathbb{N}^*\}\cup\{2k+1; k\in\mathbb{N}\}$, se explicitează

$$x_n = \begin{cases} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n, & \text{dacă } n=2k; k\in\mathbb{N}^* \\ \left(-1+\frac{1}{n}\right)^n, & \text{dacă } n=2k+1; k\in\mathbb{N} \end{cases}$$

•Se trece la limită pe subşiruri

$$\begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = \lim\limits_{k\to\infty}\left(1-\frac{1}{2k}\right)^{2k} = \frac{1}{e}; \\ \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k+1} = \lim\limits_{k\to\infty}\left(-\left(1-\frac{1}{2k+1}\right)^{2k+1}\right) = -\frac{1}{e} \end{cases} \overset{\mathbb{N}=\{2k;k\in\mathbb{N}^*\}\cup\{2k+1;k\in\mathbb{N}\}}{\Rightarrow}$$

mulţimea punctelor limită ale şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este $\mathcal{L}\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\right)=\left\{-\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right\}\Rightarrow$
$$\begin{cases}\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=\liminf\limits_{n\to\infty}x_n=-\frac{1}{e}\text{ (cel mai mic punct limită)}\\ \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=\limsup\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{e}\text{ (cel mai mare punct limită)}\end{cases}$$
•Deoarece
$$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=-\frac{1}{e}\neq\frac{1}{e}=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n\Rightarrow\nexists\lim_{n\to\infty}x_n.$$

Teorema 11. (**criteriul cleştelui, CS**) Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_m},(b_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ şi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ şiruri de numere reale astfel încât
$$a_n\leq x_n\leq b_n,\forall n\in\mathbb{N}_m,n\geq n_0.$$
Dacă $\exists\lim\limits_{n\to\infty}a_n=x,\exists\lim\limits_{n\to\infty}b_n=x,x\in\overline{\mathbb{R}}$ atunci
$$\exists\lim_{n\to\infty}x_n=x.$$

Exerciţiul 15. Să se determine limitele următoarelor şiruri:
a) $x_n=\dfrac{n!}{n^n},\forall n\in\mathbb{N}^*$- A se vedea Curs.**b)** $x_n=\dfrac{n!}{(1+1^2)(1+2^2)\cdot...\cdot(1+n^2)},\forall n\in\mathbb{N}^*$;
c) $x_n=\dfrac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdot...\cdot(1+a^n)},\forall n\in\mathbb{N}^*$, pentru $a\in]0,+\infty[$ fixat.

Rezolvare. b) Fie $x_n=\dfrac{n!}{(1+1^2)(1+2^2)\cdot...\cdot(1+n^2)}$; Atunci
$$0<\frac{n!}{(1+1^2)(1+2^2)\cdot...\cdot(1+n^2)}<\frac{n!}{1^2\cdot2^2\cdot...\cdot n^2}=\frac{1}{n!},\forall n\in\mathbb{N}^*$$
Se alege: $a_n=0,\forall n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0;b_n=\dfrac{1}{n!},\forall n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0.$
Atunci, conform Criteriului Cleştelui$\Rightarrow\exists\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0.$

c) Fie $x_n=\dfrac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdot...\cdot(1+a^n)},\forall n\in\mathbb{N}^*$, pentru $a\in]0,+\infty[$ fixat.
-<u>dacă $a\in]0,1[$</u>$\Rightarrow 0<\dfrac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdot...\cdot(1+a^n)}<a^n,\forall n\in\mathbb{N}^*.$
Se alege: $a_n=0,\forall n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0;b_n=a^n,\forall n\in\mathbb{N}^*\overset{a\in]0,1[}{\Rightarrow}\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0.$
Atunci, conform Criteriului Cleştelui$\Rightarrow\exists\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0.$
-<u>dacă $a=1$</u>$\Rightarrow x_n=\dfrac{1}{2^n}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n,\forall n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow\exists\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0.$
-<u>dacă $a\in]1,+\infty[$</u>$\Rightarrow 0<\dfrac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdot...\cdot(1+a^n)}<\dfrac{a^n}{a^1\cdot a^2\cdot...\cdot a^n}=\dfrac{a^n}{a^{\frac{n(n+1)}{2}}},\forall n\in\mathbb{N}^*.$
Se alege: $a_n=0,\forall n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0;$
$$b_n=a^{n-\frac{n(n+1)}{2}}=a^{\frac{-n(n-1)}{2}}=\left(\tfrac{1}{a}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}},\forall n\in\mathbb{N}^*\overset{a\in]1,+\infty[}{\Rightarrow}\lim_{n\to\infty}b_n=0.$$
Atunci, conform Criteriului Cleştelui$\Rightarrow\exists\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0.$
<u>Concluzie:</u> pentru $\forall a\in]0,+\infty[$ fixat $\Rightarrow\exists\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0.$
Comentariu. Există şiruri cu altă limită decât 0 a căror limită se poate determina utilizând Criteriul cleştelui.

Observaţia 12. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ un şir de numere reale astfel încât
$$x_n=u_n\cdot v_n,\forall n\in\mathbb{N}_m.$$
Dacă **(i)** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ este şir mărginit;

(ii) $(v_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ are $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$,
atunci $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Exerciţiul 16. Să se studieze convergenţa şirului:

$$x_n = \frac{1}{(n+1)!}\cos\frac{(n+1)!}{3n+7^n}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Rezolvare. Se observă că

(i) $u_n = \cos\dfrac{(n+1)!}{3n+7^n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ este şir mărginit, deoarece $|u_n| \le 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$;

(ii) $v_n = \dfrac{1}{(n+1)!}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ are $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$.

Atunci, conform observaţiei anterioare, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \Rightarrow$şirul este convergent.

Teorema 13. (**Cesaro-Stolz**) Fie $(u_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ şi $(v_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ două şiruri de numere reale. Dacă
(i) $(v_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ este monoton strict crescător şi nemajorat,
(ii) există $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}-u_n}{v_{n+1}-v_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$,
atunci există $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n} = l$.

Exerciţiul 17. Să se determine, dacă există,

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\sqrt{2}+...+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$;**b)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$−A se vedea Curs.

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^3+2^3+...+n^3}{n^4}$;**d)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^p+2^p+...+n^p}{n^{p+1}}$, pentru $p \in \mathbb{N}^*$ fixat.

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\ln n}\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}\right)$.

Rezolvare. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\sqrt{2}+...+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$. Se alege:

$u_n = 1+\sqrt{2}+...+\sqrt{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ şi
$v_n = n\sqrt{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

(i) $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este monoton strict crescător deoarece

$v_{n+1}-v_n = (n+1)\sqrt{n+1} - n\sqrt{n} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$

şi este nemajorat deoarece $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} v_n = \lim\limits_{n\to\infty} v_n = +\infty$.

(ii) $$\frac{u_{n+1}-u_n}{v_{n+1}-v_n} = \frac{\sqrt{n+1}}{(n+1)\sqrt{n+1}-n\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+1}\left(\left(\sqrt{n+1}\right)^3+\left(\sqrt{n}\right)^3\right)}{\left(\sqrt{n+1}\right)^6-\left(\sqrt{n}\right)^6}$$

$$= \frac{(n+1)^2+\sqrt{n^3(n+1)}}{n^3+3n^2+3n+1-n^3} \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}-u_n}{v_{n+1}-v_n} = \tfrac{2}{3}.$$

Conform Teoremei Cesaro-Stolz$\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n} = \frac{2}{3}$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^3+2^3+...+n^3}{n^4}$. Se alege:

$u_n = 1^3+2^3+...+n^3, \forall n \in \mathbb{N}^*$ şi
$v_n = n^4, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

(i) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este monoton strict crescător deoarece

$v_{n+1}-v_n = (n+1)^4 - n^4 > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$

şi este nemajorat deoarece $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} v_n = \lim\limits_{n\to\infty} v_n = +\infty$.

(ii) $\dfrac{u_{n+1}-u_n}{v_{n+1}-v_n} = \dfrac{(n+1)^3}{(n+1)^4 - n^4} = \dfrac{n^3+3n^2+3n+1}{\left(C_4^0 n^4 + C_4^1 n^3 + C_4^2 n^2 + C_4^3 n + C_4^4 \cdot 1\right) - n^4}$

$= \dfrac{n^3+3n^2+3n+1}{C_4^1 n^3 + C_4^2 n^2 + C_4^3 n + C_4^4 \cdot 1} \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}-u_n}{v_{n+1}-v_n} = \frac{1}{C_4^1} = \frac{1}{4}.$

Conform Teoremei Cesaro-Stolz$\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \frac{1}{4}$.

Observaţie. La acest exerciţiu era posibil şi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^3+2^3+...+n^3}{n^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2}{n^4} = \frac{1}{4}.$$

d) Analog se poate arăta că

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{1^p+2^p+...+n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{C_{p+1}^1} = \frac{1}{p+1}, \text{ pentru } p \in \mathbb{N}^* \text{ fixat.}}$$

Exerciţiul 18. Să se determine, dacă există, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u^n}{n}$, unde $u > 0$.

Rezolvare. Fie $u > 0$ fixat. Se alege:

$u_n = u^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ şi

$v_n = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

(i) $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este monoton strict crescător şi nemajorat.

(ii) $\dfrac{u_{n+1}-u_n}{v_{n+1}-v_n} = \dfrac{u^{n+1}-u^n}{n+1-n} \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}-u_n}{v_{n+1}-v_n} = (u-1) \lim\limits_{n\to\infty} u^n$

Conform Teoremei Cesaro-Stolz$\Rightarrow$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{u^n}{n} = \begin{cases} 0, & \text{dacă } u \in]0,1] \\ +\infty, & \text{dacă } u > 1. \end{cases}.}$$

Consecinţa 1. Fie $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un şir de numere reale.

Dacă $\exists \lim\limits_{n\to\infty} u_n = u \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_1+...+u_n}{n} = u$.

Exerciţiul 19. Să se determine, dacă există,

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+...+\sqrt[n]{n}}{n}$; **b)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\left(\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + ... + \frac{1}{\ln n} + \frac{1}{\ln(n+1)}\right)$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}\right)$.

Rezolvare.a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+...+\sqrt[n]{n}}{n} = 1$, deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ şi se aplică Consecinţa 1.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\left(\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + ... + \frac{1}{\ln(n+1)}\right) = 0$, deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = 0$ şi se aplică Consecinţa 1.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}\right) = 0$, deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ şi se aplică Consecinţa 1.

Consecinţa 2. Fie $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un şir de numere reale strict pozitive.

Dacă $\exists \lim\limits_{n\to\infty} u_n = u \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_1 \cdot ... \cdot u_n} = u$.

Exerciţiul 20. Să se determine, dacă există,

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\ln 2 \cdot \ln 3 \cdot ... \cdot \ln(n+1)}$; **b)** $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\cos 1 \cdot \cos \frac{1}{2} \cdot ... \cdot \cos \frac{1}{n}}$;**c)** $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sin 1 \cdot \sin \frac{1}{2} \cdot ... \cdot \sin \frac{1}{n}}$.

Rezolvare.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\ln 2 \cdot \ln 3 \cdot ... \cdot \ln(n+1)} = +\infty$, deoarece $u_n = \ln(n+1) \gneqq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{n\to\infty}(\ln(n+1)) = \infty$ şi se aplică Consecinţa 2.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\cos 1 \cdot \cos \frac{1}{2} \cdot ... \cdot \cos \frac{1}{n}} = 1$,
deoarece $u_n = \cos \frac{1}{n} \gneqq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos \frac{1}{n}\right) = 1$ şi se aplică Consecinţa 2.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sin 1 \cdot \sin \frac{1}{2} \cdot ... \cdot \sin \frac{1}{n}} = 0$,
deoarece $u_n = \sin \frac{1}{n} \gneqq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin \frac{1}{n}\right) = 1$ şi se aplică Consecinţa 2.

Consecinţa 3. Fie $(u_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ un şir de numere reale strict pozitive.
Dacă $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$.

Exerciţiul 21. Să se calculeze

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$; **b)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$;**c)** $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{(n!)^2}{(2n+1)!}}$;**d)** $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{3^{3n}(n!)^3}{(3n)!}}$;

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}}$$-$vezi Cursul 2, Ex. 1.3.19; **f)** $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\ln n} = 1$.

Rezolvare. **a)** $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$; Se alege:

$$u_n = n \gneqq 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{n} \Rightarrow$$
$$\exists l = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

Conform Consecinţei 3 $\Rightarrow \boxed{\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$; Se observă că $\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \sqrt[n]{\dfrac{n!}{n^n}}$. Se alege:

$$u_n = \frac{n!}{n^n} \gneqq 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} \Rightarrow$$
$$\exists l = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}.$$

Conform Consecinţei 3 $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{n!}{n^n}} = l = \dfrac{1}{e}$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{(n!)^2}{(2n+1)!}}$; Se alege:

$$u_n = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} \gneqq 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{((n+1)!)^2}{(2n+3)!} \cdot \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)} \Rightarrow$$
$$\exists l = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{4}.$$

Conform Consecinţei 3 $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{(n!)^2}{(2n+1)!}} = l = \dfrac{1}{4}$.

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{3^{3n}(n!)^3}{(3n)!}}$; Se alege:

$$u_n = \frac{3^{3n}(n!)^3}{(3n)!} \gneqq 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3^{3n+3}((n+1)!)^3}{(3n+3)!} \cdot \frac{(3n)!}{3^{3n}(n!)^3} = \frac{3^3(n+1)^3}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)} \Rightarrow$$

$\exists l = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1.$

Conform Consecinţei 3 $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{3^{3n}(n!)^3}{(3n)!}} = l = 1.$

Definiţia 9. Şirul de numere reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ este *şir Cauchy* (*şir fundamental*) dacă

$[\forall\varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}_m$ a.î. $\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}_m, n \geq n_\varepsilon$ să rezulte $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon]$.

Teorema 14 (Criteriul Cauchy de convergenţă a şirurilor de nr. reale,CNS). Şirul de numere reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ este şir convergent $\Leftrightarrow$ este şir Cauchy.

Obervaţia 14. Şirul de numere reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ NU este *şir Cauchy* (*şir fundamental*) dacă

$[\exists\varepsilon_0 > 0$ a.î. $\forall n \in \mathbb{N}_m, \exists p_n \in \mathbb{N}^*$ şi $\exists\widetilde{n}_n \in \mathbb{N}_m, \widetilde{n}_n \geq n$ să rezulte $\left|x_{\widetilde{n}_n+p_n} - x_{\widetilde{n}_n}\right| \geq \varepsilon_0]$.

○**Exerciţiul 22**. Se dă şirul definit prin

a) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \forall n \in \mathbb{N}^*$–A se vedea Curs; **b)** $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Să se tragă concluziile asupra naturii şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, utilizând Criteriul lui Cauchy şi monotonia.

Rezolvare. b) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Şirul cu termenul general

$x_n = 1 + ... + \frac{1}{\sqrt{n}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

se poate da şi prin enumerare

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} : \underbrace{1}_{x_1}, \underbrace{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}_{x_2}, \underbrace{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}}_{x_3}, ...$$

•Se verifică dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este şir Cauchy, adică dacă

$[\forall\varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}_m$ a.î. $\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq n_\varepsilon$ să rezulte $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon]$.

Fie $\forall\varepsilon > 0$. Se caută $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ a.î. $\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq n_\varepsilon$ să rezulte

$$|x_{n+p} - x_n| = \left|\left(1 + ... + \tfrac{1}{\sqrt{n}} + \tfrac{1}{\sqrt{n+1}} ... + \tfrac{1}{\sqrt{n+p}}\right) - \left(1 + ... + \tfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\right| =$$

$$= \tfrac{1}{\sqrt{n+1}} ... + \tfrac{1}{\sqrt{n+p}} \underset{\frac{1}{n+k}<\frac{1}{n+1}, \forall k=\overline{1,p}}{\overset{n+k>n+1, \forall k=\overline{1,p}}{<}} \tfrac{1}{\sqrt{n+1}} ... + \tfrac{1}{\sqrt{n+1}} = \tfrac{p}{\sqrt{n+1}} < \varepsilon,$$

adică $\frac{p}{\sqrt{n+1}} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \left(\frac{p}{\varepsilon}\right)^2 - 1$.

Găsim $n_{p,\varepsilon} = \left[\left(\frac{p}{\varepsilon}\right)^2 - 1\right] + 1$ Am găsit n depinzând nu numai de ε, ci şi de p. Nu am reuşit să majorăm $\frac{p}{\sqrt{n+1}} < \frac{c}{\sqrt{n+1}} < \varepsilon$ cu c o constantă (deoarece mulţimea numerelor naturale nu este mărginită, încât $p < c, \forall p \in \mathbb{N}^*$), şi astfel nu am reuşit să găsim n depinzând doar de ε.

Intuim că:

-sau că am majorat în paşii intermediari prea tare,

-sau chiar că şirul nu este şir Cauchy.

•Se verifică dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ NU este şir Cauchy, adică dacă

$[\exists\varepsilon_0 > 0$ a.î. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists p_n \in \mathbb{N}^*$ şi $\exists\widetilde{n}_n \in \mathbb{N}^*, \widetilde{n}_n \geq n$ să rezulte $\left|x_{\widetilde{n}_n+p_n} - x_{\widetilde{n}_n}\right| \geq \varepsilon_0]$.

Se caută $\varepsilon_0 =$ ...astfel încât $\forall n \in \mathbb{N}^*$ să existe $p_n \in \mathbb{N}^*$ (încercăm $p_n = n$) şi să existe $\widetilde{n}_n \in \mathbb{N}^*, \widetilde{n}_n \geq n$ (încercăm $\widetilde{n}_n = n$) astfel încât

$$|x_{n+n} - x_n| = \left|\left(1 + ... + \tfrac{1}{\sqrt{n}} + \tfrac{1}{\sqrt{n+1}} ... + \tfrac{1}{\sqrt{n+n}}\right) - \left(1 + ... + \tfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\right| =$$

$$= \tfrac{1}{\sqrt{n+1}} + ... + \tfrac{1}{\sqrt{n+n}} \underset{\frac{1}{n+k}\geq\frac{1}{n+n}, \forall k=\overline{1,n}}{\overset{n+k\leq n+n, \forall k=\overline{1,n}}{\geq}} \tfrac{1}{\sqrt{n+n}} + ... + \tfrac{1}{\sqrt{n+n}} = \tfrac{n}{\sqrt{n+n}} > \tfrac{1}{\sqrt{2}}.$$

Încercările sunt bune, găsim şi $\varepsilon_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$\Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ NU este şir Cauchy

$\overset{\text{Criteriul Cauchy}}{\Rightarrow} (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ NU este şir convergent, este divergent.

•Dar $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este şir de numere pozitive, monoton crescător

$$x_{n+1} - x_n = \left(1 + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) - \left(1 + ... + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

• $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ fiind şir monoton strict crescător şi divergent$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

○**Exerciţiul 23**. Se dă şirul definit prin

a) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$-vezi Cursul 2,Ex. 1.3.22. **b)** $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}, \forall n \in \mathbb{N}^*$;**c)** $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\sin k}{k^3}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Să se tragă concluziile asupra naturii şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, utilizând Criteriul lui Cauchy.

Rezolvare. c) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\sin k}{k^3}, \forall n \in \mathbb{N}^*$; Şirul cu termenul general

$$x_n = \frac{\sin 1}{1^3} + ... + \frac{\sin n}{n^3}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

se poate da şi prin enumerare

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} : \underbrace{\frac{\sin 1}{1^3}}_{x_1}, \underbrace{\frac{\sin 1}{1^3} + \frac{\sin 2}{2^3}}_{x_2}, \underbrace{\frac{\sin 1}{1^3} + \frac{\sin 2}{2^3} + \frac{\sin 3}{3^3}}_{x_3}, ...$$

•Se verifică dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este şir Cauchy, adică dacă

$\forall\varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ a.î. $\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq n_\varepsilon$ să rezulte $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$.

Fie $\forall\varepsilon > 0$. Se caută $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ a.î. $\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq n_\varepsilon$ să rezulte

$$|x_{n+p} - x_n| = \left|\left(\frac{\sin 1}{1^3} + ... + \frac{\sin n}{n^3} + \frac{\sin(n+1)}{(n+1)^3} ... + \frac{\sin(n+p)}{(n+p)^3}\right) - \left(\frac{\sin 1}{1^3} + ... + \frac{\sin n}{n^3}\right)\right| =$$
$$= \left|\frac{\sin(n+1)}{(n+1)^3} ... + \frac{\sin(n+p)}{(n+p)^3}\right| \leq \left|\frac{\sin(n+1)}{(n+1)^3}\right| + ... + \left|\frac{\sin(n+p)}{(n+p)^3}\right| =$$
$$= \frac{|\sin(n+1)|}{(n+1)^3} + ... + \frac{|\sin(n+p)|}{(n+p)^3} \leq \frac{1}{(n+1)^3} + ... + \frac{1}{(n+p)^3}.$$

Dacă se majorează în sensul

$$\underset{\frac{1}{n+k} < \frac{1}{n+1}, \forall k=\overline{2,p}}{\overset{n+k>n+1, \forall k=\overline{2,p}}{<}} \frac{1}{(n+1)^3} + ... \frac{1}{(n+1)^3} = \frac{p}{(n+1)^3} < \varepsilon,$$

atunci, din $\frac{p}{(n+1)^3} < \varepsilon$ se va găsi $n_{\varepsilon,p}$ şi nu n_ε. Se intuieşte sau că s-a majorat în paşii intermediari prea tare, sau chiar că şirul nu este şir Cauchy.

Se încearcă să se majoreze în sensul următor (încât să se obţină sumă telescopică)

$$\frac{1}{(n+1)^3} + ... \frac{1}{(n+p)^3} < \frac{1}{(n+1)^2} ... + \frac{1}{(n+p)^2} \underset{\frac{1}{n+k} < \frac{1}{n+k-1}, \forall k=\overline{1,p}}{\overset{n+k>n+k-1, \forall k=\overline{1,p}}{<}} \frac{1}{n(n+1)} ... + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} =$$
$$= \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(n+k-1)(n+k)} = \sum_{k=1}^{p} \left(\frac{1}{n+k-1} - \frac{1}{n+k}\right) \underset{\text{cu sume finite}}{\overset{\text{operaţii algebrice}}{=}} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{n+k-1} - \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{n+k} =$$
$$= \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{n+p-1}\right) - \left(\frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{n+p-1} + \frac{1}{n+p}\right) =$$
$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} \overset{\text{scăpăm de } p, \text{ rămâne } n}{<} \frac{1}{n} < \varepsilon, \text{ adică } \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Se găseşte $n_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$.

$\Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este şir Cauchy

$\overset{\text{Criteriul Cauchy}}{\Rightarrow} (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este şir convergent.

Observaţia 15. Şirul $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ are proprietatea că

$$\begin{cases} \text{dacă } \alpha > 1, \text{ atunci este şir Cauchy} \Longrightarrow \text{este şir convergent} \\ \text{dacă } \alpha \leq 1, \text{ atunci nu este şir Cauchy} \Longrightarrow \\ \qquad \left.\begin{array}{l} \Rightarrow \text{este şir divergent} \\ \text{este monoton crescător} \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty. \end{cases}$$

○**Exerciţiul 24**. Pentru şirul definit prin

$x_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}, \forall n \in \mathbb{N}$

să se studieze monotonia, mărginirea, limita, iar apoi să se arate că este şir real Cauchy. Să se facă legatura cu Criteriul lui Cauchy.

Rezolvare. Şirul cu termenul general

$x_n = 1 + ... + \frac{1}{2^n}, \forall n \in \mathbb{N}$

se poate da şi prin enumerare

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \underbrace{1}_{x_1}, \underbrace{1 + \frac{1}{2}}_{x_2}, \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}}_{x_3}, ... \ .$$

• $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este şir de numere pozitive, monoton crescător

$x_{n+1} - x_n = \left(1 + ... + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}\right) - \left(1 + ... + \frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{2^{n+1}} > 0, \forall n \in \mathbb{N}.$

•Termenul general al acestui şir se poate exprima şi fără simbolul $\sum$

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)^0 + ... + \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right).$$

Se observă că $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este şir mărginit, deoarece

$0 < x_n < 2, \forall n \in \mathbb{N}.$

Mai mult $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1 \cdot \frac{0-1}{\frac{1}{2}-1} = 2$

$\Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este şir convergent.

•Se verifică dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este şir Cauchy, adică dacă

$[\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_\varepsilon$ să rezulte $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon]$.

Fie $\forall \varepsilon > 0$. Se caută $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_\varepsilon$ să rezulte

$$|x_{n+p} - x_n| = \left|\left(1 + ... + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} ... + \frac{1}{2^{n+p}}\right) - \left(1 + ... + \frac{1}{2^n}\right)\right| =$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}} + ... + \frac{1}{2^{n+p}} = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^p - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{1}{2^n}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^p\right) \overset{\text{scăpăm de } p, \text{ rămâne } n}{<} \frac{1}{2^n} \cdot 1 < \varepsilon,$$

adică $\frac{1}{2^n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln 2}$.Se găseşte $n_\varepsilon = \left[\frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln 2}\right] + 1$.

$\Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este şir Cauchy

$\overset{\text{Criteriul Cauchy}}{\Rightarrow} (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este şir convergent, ceea ce se stabilise deja.

○**Exerciţiul 25**. Pentru şirul definit prin

$x_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{\sin^2(k+1)}{3^k}, \forall n \in \mathbb{N}$

să se studieze convergenţa cu Criteriul lui Cauchy. -A se vedea Curs.

○**Exerciţiul 26**. Să se utilizeze Criteriul lui Cauchy de convergenţă a şirurilor reale pentru studiul convergenţei şirurilor:

a) $x_n = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} a^k, \forall n \in \mathbb{N}^*$ unde $a \in \mathbb{R}, |a| < 1$;**b)** $x_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}, \forall n \in \mathbb{N}$;

c) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\sin k}{a^k}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ unde $a \in \mathbb{R}, a > 1$;**d)** $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\cos k}{k(k+1)}, \forall n \in \mathbb{N}^*$;

e) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n}(1-\frac{1}{k})a^k, \forall n \in \mathbb{N}^*$ unde $a \in \mathbb{R}, |a| < 1$;**f)** $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k(k+1)(k+2)}, \forall n \in \mathbb{N}^*$;

g) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{2^k}{3^k k^2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$;**h)** $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{k+1}\cdot\frac{1}{a^k}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ unde $a \in \mathbb{R}, a > 1$.

Rezolvare.

a) $x_n = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} a^k, \forall n \in \mathbb{N}^*$ unde $a \in \mathbb{R}, |a| < 1$;

Indicaţie. $|x_{n+p} - x_n| = \left|\left(1 + a^1 + ... + a^n + a^{n+1} ... + a^{n+p}\right) - (1 + ... + a^n)\right| =$

$= \left|a^{n+1} ... + a^{n+p}\right| \le \left|a^{n+1}\right| + ... + \left|a^{n+p}\right| = |a|^{n+1} + ... + |a|^{n+p} =$

$= |a|^{n+1}\frac{|a|^p-1}{|a|-1} = \frac{|a|^{n+1}}{1-|a|}\left(1-|a|^p\right) \overset{\text{scăpăm de } p, \text{ rămâne } n}{<} \frac{|a|^{n+1}}{1-|a|} < \varepsilon.$

b) $x_n = \sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}, \forall n \in \mathbb{N}$; Şirul cu termenul general

$x_n = 1 + ... + \frac{1}{n!}, \forall n \in \mathbb{N}$

se poate da şi prin enumerare

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \underbrace{\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}}_{x_1}, \underbrace{\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}}_{x_2}, \underbrace{\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}}_{x_3}, \dots .$$

•Se verifică dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este şir Cauchy, adică dacă

$[\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}, n \ge n_\varepsilon$ să rezulte $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon]$.

Fie $\forall \varepsilon > 0$. Se caută $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}, n \ge n_\varepsilon$ să rezulte

$|x_{n+p} - x_n| = \left|\left(1 + ... + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} ... + \frac{1}{(n+p)!}\right) - \left(1 + ... + \frac{1}{n!}\right)\right| =$

$= \frac{1}{(n+1)!} ... + \frac{1}{(n+p)!} = \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{(n+1)} ... + \frac{1}{(n+1)\cdot ... \cdot(n+p)}\right) <$

$\underset{\frac{1}{n+k}<\frac{1}{n+1}, \forall k=\overline{1,p}}{\overset{n+k>n+1, \forall k=\overline{1,p}}{<}} \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{(n+1)} + ... \frac{1}{(n+1)^p}\right) = \frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{n+1}\cdot\frac{\left(\frac{1}{n+1}\right)^p - 1}{\frac{1}{n+1} - 1} =$

$= \frac{1}{n \cdot n!}\left(1 - \left(\frac{1}{n+1}\right)^p\right) \overset{\text{scăpăm de } p, \text{ rămâne } n}{<} \frac{1}{n\cdot n!}\cdot 1 < \frac{1}{n} < \varepsilon$,adică $\frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$.

Se găseşte $n_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$.

$\Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este şir Cauchy

$\overset{\text{Criteriul Cauchy}}{\Rightarrow} (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este şir convergent.

c) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\sin k}{a^k}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ unde $a \in \mathbb{R}, a > 1$;

Indicaţie. $|x_{n+p} - x_n| = \left|\left(\frac{\sin 1}{a^1} + ... + \frac{\sin n}{a^n} + \frac{\sin(n+1)}{a^{n+1}} ... + \frac{\sin(n+p)}{a^{n+p}}\right) - \left(\frac{\sin 1}{a^1} + ... + \frac{\sin n}{a^n}\right)\right| =$

$= \left|\frac{\sin(n+1)}{a^{n+1}} ... + \frac{\sin(n+p)}{a^{n+p}}\right| \le \left|\frac{\sin(n+1)}{a^{n+1}}\right| + ... + \left|\frac{\sin(n+p)}{a^{n+p}}\right| \le \frac{1}{a^{n+1}} + ... + \frac{1}{a^{n+p}} =$

$= \left(\frac{1}{a}\right)^{n+1}\frac{\left(\frac{1}{a}\right)^p - 1}{\frac{1}{a} - 1} = \left(\frac{1}{a}\right)^n\frac{1}{a-1}\left(1 - \left(\frac{1}{a}\right)^p\right) \overset{\text{scăpăm de } p, \text{ rămâne } n}{<} \left(\frac{1}{a}\right)^n\frac{1}{a-1} < \varepsilon.$

d) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\cos k}{k(k+1)}, \forall n \in \mathbb{N}^*$;

Indicaţie. $|x_{n+p} - x_n| =$

$= \left|\frac{\cos(n+1)}{(n+1)(n+2)} ... + \frac{\cos(n+p)}{(n+p-1)(n+p)}\right| \le \left|\frac{\cos(n+1)}{(n+1)(n+2)}\right| + ... + \left|\frac{\cos(n+p)}{(n+p-1)(n+p)}\right| =$

$= \frac{|\cos(n+1)|}{(n+1)(n+2)} + ... + \frac{|\cos(n+p)|}{(n+p-1)(n+p)} \le \frac{1}{(n+1)(n+2)} + ... + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} =$

$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} \overset{\text{scăpăm de } p, \text{ rămâne } n}{<} \frac{1}{n} < \varepsilon.$