SEMINAR NR. 2, REZOLVĂRI
Analiză matematică, AIA

1.4. Serii de numere reale

Peste tot în această secţiune fie $m \in \mathbb{N}$ un număr natural fixat şi
$\mathbb{N}_m = \{m, m+1, ..., n, ...\}$ ($\mathbb{N}_0 = \mathbb{N}$ şi $\mathbb{N}_1 = \mathbb{N}^*$).

Definiţia 1. Fie

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m} : x_m, x_{m+1}, ..., x_n, ...$

un şir de numere reale. Acestui şir i se ataşează *şirul sumelor parţiale*

$$(s_n)_{n\in\mathbb{N}_m} : \underbrace{x_m}_{s_m}, \underbrace{x_m + x_{m+1}}_{s_{m+1}}, ..., \underbrace{x_m + x_{m+1} + ... + x_n}_{s_n}, ...$$

cu termenul general

$$s_n = \sum_{k=m}^{n} x_k, \forall n \in \mathbb{N}_m.$$

a) Se numeşte *serie de numere reale, cu termenul general* x_n, perechea de şiruri $\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}, (s_n)_{n\in\mathbb{N}_m}\right)$.

b) Seria de numere reale cu termenul general x_n se numeşte *convergentă* dacă şirul sumelor parţiale $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ este convergent şi *divergentă* dacă şirul sumelor parţiale $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ este divergent.

c) Seria de numere reale cu termenul general x_n are *suma* s dacă $\exists \lim\limits_{n\to\infty} s_n = s \in \overline{\mathbb{R}}$. În acest caz se scrie

$$x_m + x_{m+1} + ... + x_n + ... = s \text{ sau } \sum_{n=m}^{\infty} x_n = s.$$

Convenţie. Se notează seria de numere reale cu termenul general x_n cu $\sum\limits_{n=m}^{\infty} x_n$.

Exerciţiul 1. Să se studieze, utilizând definiţia, natura şi suma următoarelor serii de numere reale:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{3^n}$; **b)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)(4n+5)}$; **c)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$; **d)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\frac{n+1}{n}$;

e) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$; **f)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$; **g)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{16n^2-8n-3}$; **h)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}$;

i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$; **j)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)}, \alpha > 0$; **k)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{\sqrt{4n^2-1}}$;

l) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+a+1} - 2\sqrt{n+a} + \sqrt{n+a-1})$, unde $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$;

m) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n-3}{n!}$; **n)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^{n+1} - 6^{n-1}}{12^n}$.

Rezolvare. a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{3^n}$;

Termenul general al seriei este:

$x_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{3^n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$, adică

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} : \frac{1}{3}, \frac{-1}{9}, \frac{1}{27}, ..., \underbrace{(-1)^{n+1}\frac{1}{3^n}}_{x_n}, ...$$

Şirul sumelor parţiale are termenul general:

$s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{1}{3^k}, \forall n \in \mathbb{N}^*$, adică

$(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*} : \frac{1}{3}, \frac{1}{3} + \frac{-1}{9}, \frac{1}{3} + \frac{-1}{9} + \frac{1}{27}, ..., \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{-1}{9} + \frac{1}{27} + ... + (-1)^{n+1} \frac{1}{3^n}}_{s_n}, ...$

Se determină limita şirului $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, dacă există:

$s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{1}{3^k} = -\sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{-1}{3}\right)^k = -\frac{-1}{3} \frac{\left(\frac{-1}{3}\right)^n - 1}{\frac{-1}{3} - 1} = \frac{1}{4}\left(1 - \left(\frac{-1}{3}\right)^n\right) \Rightarrow$

$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{4} \in \mathbb{R}$.

Atunci seria este convergentă şi are suma $s = \frac{1}{4}$. Se scrie

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{4}$, adică $\frac{1}{3} + \frac{-1}{9} + \frac{1}{27} + ... + (-1)^{n+1} \frac{1}{3^n} + ... = \frac{1}{4}$.

b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(4n+1)(4n+5)}$;

Termenul general al seriei este:

$x_n = \frac{1}{(4n+1)(4n+5)}, \forall n \in \mathbb{N}$, adică

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \frac{1}{1\cdot5}, \frac{1}{5\cdot9}, \frac{1}{9\cdot13}, ..., \underbrace{\frac{1}{(4n+1)(4n+5)}}_{x_n}, ...$

Şirul sumelor parţiale are termenul general:

$s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{(4k+1)(4k+5)}, \forall n \in \mathbb{N}$, adică

$(s_n)_{n\in\mathbb{N}} : \frac{1}{1\cdot5}, \frac{1}{1\cdot5} + \frac{1}{5\cdot9}, \frac{1}{1\cdot5} + \frac{1}{5\cdot9} + \frac{1}{9\cdot13}, ..., \underbrace{\frac{1}{1\cdot5} + \frac{1}{5\cdot9} + \frac{1}{9\cdot13} + ... + \frac{1}{(4n+1)(4n+5)}}_{s_n}, ...$

Se determină limita şirului $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dacă există:

$s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{(4k+1)(4k+5)} = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4k+1} - \frac{1}{4k+5}\right) \underset{\text{cu sume finite}}{\overset{\text{operaţii algebrice}}{=}} \frac{1}{4}\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{4k+1} - \frac{1}{4}\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{4k+5} =$

$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{5} + ... + \frac{1}{4n+1}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{5} + ... + \frac{1}{4n+1} + \frac{1}{4n+5}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\frac{1}{4n+5} \Rightarrow$

$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{4} \in \mathbb{R}$.

Atunci seria este convergentă şi are suma $s = \frac{1}{4}$. Se scrie

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)(4n+5)} = \frac{1}{4}$, adică $\frac{1}{1\cdot5} + \frac{1}{5\cdot9} + \frac{1}{9\cdot13} + ... + \frac{1}{(4n+1)(4n+5)} + ... = \frac{1}{4}$.

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$;

Termenul general al seriei este:

$x_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Şirul sumelor parţiale are termenul general:

$s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Se determină limita şirului $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, dacă există:

$s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) \underset{\text{cu sume finite}}{\overset{\text{operaţii algebrice}}{=}} \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{k+1} - \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{k} =$

$= \left(\sqrt{2} + ... + \sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right) - \left(\sqrt{1} + \sqrt{2} + ... + \sqrt{n}\right) = \sqrt{n+1} - \sqrt{1} \Rightarrow$
$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty.$

Atunci seria este divergentă şi are suma $s = +\infty$. Se scrie
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = +\infty$, adică $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} + ... = +\infty.$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln \dfrac{n+1}{n}$ −A se vedea Curs.

e) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$;

Termenul general al seriei este:
$x_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right), \forall n \in \mathbb{N}_2.$

Şirul sumelor parţiale are termenul general:
$s_n = \sum\limits_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right), \forall n \in \mathbb{N}_2.$

Se determină limita şirului $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_2}$, dacă există

$$s_n = \sum_{k=2}^{n} \ln \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \sum_{k=2}^{n} (\ln(k-1) + \ln(k+1) - 2\ln(k))$$
$$\underset{\text{cu sume finite}}{\overset{\text{operaţii algebrice}}{=}} \sum_{k=2}^{n} \ln(k-1) + \sum_{k=2}^{n} \ln(k+1) - 2\sum_{k=2}^{n} \ln(k) =$$
$$= (\ln 1 + \ln 2 ... + \ln(n-1)) + (\ln 3 ... + \ln n + \ln(n+1)) -$$
$$- (\ln 2 + ... + \ln(n-1) + \ln n) - (\ln 2 + \ln 3 + ... + \ln n)$$
$$= \ln 1 + \ln(n+1) - \ln n - \ln 2 = \ln \frac{n+1}{n} - \ln 2 \Rightarrow$$
$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = -\ln 2.$

Atunci seria este convergentă şi are suma $s = -\ln 2$. Se scrie
$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = -\ln 2.$

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ − A se vedea Curs.

Seria geometrică. Fie $q \in \mathbb{R}$. Seria geometrică $\sum\limits_{n=m}^{\infty} q^n$ este

$$\boxed{\begin{cases} \text{convergentă, cu suma } s = q^m \frac{1}{1-q}, & \text{dacă } q \in \left]-1, 1\right[\\ \text{divergentă, cu suma } s = +\infty, & \text{dacă } q \in \left[1, +\infty\right[\\ \text{divergentă şi nu are sumă,} & \text{dacă } q \in \left]-\infty, -1\right]. \end{cases}}$$

Pentru $m = 0$, convenţia este să se noteze $1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$, adică

$$\boxed{1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \text{ dacă } q \in \left]-1, 1\right[} \text{ sau } \boxed{1 + q + q^2 + ... + q^n + ... = \frac{1}{1-q}, \text{ dacă } q \in \left]-1, 1\right[}$$

Teorema 1. (**operaţii algebrice cu serii convergente**)-A se vedea Curs.

Propoziţia 1. Dacă se schimbă ordinea unui număr finit de termeni ai unei serii de numere reale, atunci se obţine o nouă serie de numere reale, care are aceeaşi natură (convergentă sau divergentă) cu seria iniţială. În caz de convergenţă, suma noii serii este egală cu suma seriei iniţiale.

Dacă se schimbă ordinea unui număr infinit de termeni, rezultatul anterior nu se mai păstrează.
Propoziţia 2. Dacă se adăugă / se suprimă un număr finit de termeni ai unei serii de numere reale, atunci se obţine o nouă serie de numere reale, care are aceeaşi natură (convergentă sau divergentă) cu seria iniţială. În caz de convergenţă, suma noii serii este egală cu suma seriei iniţiale la care se adună / se scade suma termenilor adăugaţi / suprimaţi.
Observaţia 1. Există serii pentru care şirul sumelor parţiale nu poate fi exprimat fară simbolul $\sum$ sau pentru care $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ nu poate fi determinată prin metode elementare. Se va studia natura acestor serii utilizând criterii.
Teorema 3.
a) CN de convergenţă. Dacă seria de numere reale $\sum\limits_{n=m}^{\infty} x_n$ este convergentă, atunci $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.
Reciproc nu.
b) CS de divergenţă. Dacă $\nexists \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ sau $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq 0$, atunci seria de numere reale $\sum\limits_{n=m}^{\infty} x_n$ este divergentă. Reciproc nu.
Obervaţia 2. La Exerciţiul 1, punctele c), d) se observă că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, dar seriile sunt divegente. Condiţia $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ este numai condiţie necesară de convergenţă, nu şi suficientă.

Exerciţiul 3. Să se studieze natura următoarelor serii:
a) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \sqrt[n]{0,07}$; **b)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1+(-1)^n}{2}$; **c)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \pi^n \cdot \dfrac{1}{e^n+1}$;
d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2+(-1)^n)^n}$; **e)** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}$; **f)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+n+1}}{n+2010}$.
Rezolvare. a) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \sqrt[n]{0,07}$;
Termenul general al seriei este
$x_n = \sqrt[n]{0,07}, \forall n \in \mathbb{N}_2$.
Şirul sumelor parţiale are termenul general:
$s_n = \sum\limits_{k=2}^{n} \sqrt[k]{0,07}, \forall n \in \mathbb{N}_2$.
Nu se poate exprima s_n fără simbolul $\sum \Rightarrow$nu se va aplica definiţia în studiul convergenţei seriei.
Cum $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{0,07} = \lim\limits_{n\to\infty} (0,07)^{\frac{1}{n}} = 1 \neq 0 \overset{\text{CS de divergenţă}}{\Rightarrow}$
seria $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \sqrt[n]{0,07}$ este divergentă.
b), c)-A se vedea Curs.

Definiţia 2. Seria de numere reale $\sum\limits_{n=m}^{\infty} x_n$ se numeşte *serie cu termeni pozitivi* (*cu termeni strict pozitivi*) dacă
$x_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}_m (x_n \gneqq 0, \forall n \in \mathbb{N}_m)$.
Definiţia 3. Seria de numere reale $\sum\limits_{n=m}^{\infty} x_n$ se numeşte *absolut convergentă* dacă seria $\sum\limits_{n=m}^{\infty} |x_n|$ este convergentă.

Teorema 2. Dacă seria de numere reale $\sum_{n=m}^{\infty} x_n$ este absolut convergentă atunci este convergentă.

Definiţia 3. Seria de numere reale $\sum_{n=m}^{\infty} x_n$ se numeşte *semiconvergentă* dacă este convergentă şi nu este absolut convergentă.

Obervaţia 3. Se vor enunţa criterii pentru serii cu termeni pozitivi (chiar strict pozitivi). Dacă o serie de numere reale $\sum_{n=m}^{\infty} x_n$ este cu termeni oarecare, atunci se ataşează seria modulelor $\sum_{n=m}^{\infty} |x_n|$, care este o serie cu termeni pozitivi. Se aplică criteriile seriei $\sum_{n=m}^{\infty} |x_n|$, şi, în caz că se obţine convergenţă, se deduce că seria cu termeni oarecare $\sum_{n=m}^{\infty} x_n$ este absolut convergentă.

Teorema 5. (**Criteriul comparaţiei cu inegalităţi, CS**). Fie seriile de numere reale $\sum_{n=m}^{\infty} x_n$ şi $\sum_{n=m}^{\infty} y_n$, cu termeni pozitivi.

a) Dacă

$$\underbrace{0 \leq}_{\text{în plus}} x_n \leq y_n, \forall n \in \mathbb{N}_m,$$

şi dacă seria $\sum_{n=m}^{\infty} y_n$ este convergentă, atunci seria $\sum_{n=m}^{\infty} x_n$ este convergentă.

b) Dacă

$$0 \leq y_n \leq x_n, \forall n \in \mathbb{N}_m$$

şi dacă seria $\sum_{n=m}^{\infty} y_n$ este divergentă, atunci seria $\sum_{n=m}^{\infty} x_n$ este divergentă.

Seria armonică generalizată. Fie $\alpha \in \mathbb{R}$. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ este divergentă dacă $\alpha \leq 1$ şi convergentă (chiar absolut convergentă) dacă $\alpha > 1$.

Exerciţiul 5. Să se studieze natura următoarelor serii de numere reale

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^7 + 3n^2 + 1}$; **b)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n \sqrt[3]{n+1}}$; **c)** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{1 + (-1)^n + \ln n}$;

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sin 3n$; **e)** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a^n}{\sqrt[n]{n!}}$, unde $a > 0$ e fixat;

Rezolvare. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^7+3n^2+1}$;

<u>Etapa 1.</u> Se studiază dacă $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Termenul general al seriei este

$$x_n = \frac{1}{n^7+3n^2+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \Rightarrow$seria *poate fi* convergentă.

<u>Etapa 2.</u> Se studiază natura seriei şi suma ei cu definiţia.

Şirul sumelor parţiale este

$s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^7+3k^2+1}, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$

Nu se va aplica definiţia în studiul convergenţei seriei.

Etapa 3. Se studiază natura seriei aplicând criterii.

•Criteriul comparaţiei cu inegalităţi. Deoarece şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ are termeni pozitivi şi

$$\left.\begin{array}{l} 0 \lneqq \frac{1}{n^7+3n^2+1} \le \frac{1}{n^7}, \forall n \in \mathbb{N}^*. \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^7} \text{ este serie convergentă} \\ \qquad \text{ca şi serie armonică cu } \alpha = 7 > 1 \end{array}\right\} \overset{\text{C. comparaţiei}}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^7+3n^2+1} \text{ este serie convergentă.}$$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n \sqrt[3]{n+1}}$;

Etapa 1. Se studiază dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Termenul general al seriei este

$x_n = \frac{1}{3^n \sqrt[3]{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \Rightarrow$seria *poate fi* convergentă.

Etapa 2. Se studiază natura seriei şi suma ei cu definiţia. Şirul sumelor parţiale este

$s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k \cdot \sqrt[3]{k+1}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Nu se va aplica definiţia în studiul convergenţei seriei.

Etapa 3. Se studiază natura seriei aplicând criterii.

•Criteriul comparaţiei cu inegalităţi Deoarece şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ are termeni pozitivi,

Se încearcă:

$$\left.\begin{array}{l} 0 \lneqq \frac{1}{3^n \sqrt[3]{n+1}} \le \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} < \frac{1}{\sqrt[3]{n}}, \forall n \in \mathbb{N}^*. \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \text{ este serie divergentă} \\ \qquad \text{ca şi serie armonică cu } \alpha = \frac{1}{3}. \end{array}\right\} \overset{\text{C. comparaţiei}}{\Rightarrow}$$

nu se poate afirma dacă seria este convergentă sau divergentă.

Se încearcă:

$$\left.\begin{array}{l} 0 \lneqq \frac{1}{3^n \sqrt[3]{n+1}} \le \frac{1}{3^n}, \forall n \in \mathbb{N}^*. \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n \text{ este serie convergentă} \\ \qquad \text{ca şi serie geometrică cu } q = \frac{1}{3} \in \left]-1, 1\right[\end{array}\right\} \overset{\text{C. comparaţiei}}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n \sqrt[3]{n+1}} \text{ este serie convergentă.}$$

c) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{1+(-1)^n+\ln n}$;

Etapa 1. Se studiază dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Termenul general al seriei este

$x_n = \frac{1}{1+(-1)^n+\ln n}, \forall n \in \mathbb{N}_2$.

Deoarece $\mathbb{N}_2 = \left\{2\widetilde{k}; \widetilde{k} \in \mathbb{N}^*\right\} \cup \left\{2\widetilde{k}+1; \widetilde{k} \in \mathbb{N}^*\right\}$, se explicitează

$$x_n = \begin{cases} \frac{1}{2+\ln n}, & \text{dacă } n = 2\widetilde{k}; \widetilde{k} \in \mathbb{N}^* \\ \frac{1}{\ln n}, & \text{dacă } n = 2\widetilde{k}+1; \widetilde{k} \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Se determină

$$\begin{cases} \lim\limits_{\widetilde{k}\to\infty} x_{2\widetilde{k}} = \lim\limits_{\widetilde{k}\to\infty} \frac{1}{2+\ln\left(2\widetilde{k}\right)} = 0 \\ \lim\limits_{\widetilde{k}\to\infty} x_{2\widetilde{k}+1} = \lim\limits_{\widetilde{k}\to\infty} \frac{1}{\ln\left(2\widetilde{k}+1\right)} = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathcal{L}\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}_2}\right) = \{0\} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 0 \\ \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \Rightarrow \text{seria } \textit{poate fi} \text{ convergentă.}$$

<u>Etapa 2.</u> Se studiază natura seriei şi suma ei cu definiţia. Şirul sumelor parţiale este

$s_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{1+(-1)^k+\ln k}, \forall n \in \mathbb{N}_2.$

Nu se va aplica definiţia în studiul convergenţei seriei.

<u>Etapa 3.</u> Se studiază natura seriei aplicând criterii.

•<u>Criteriul comparaţiei</u> cu inegalităţi. Deoarece şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_2}$ are şi termeni pozitivi şi cum $\ln n < n, \forall n \in \mathbb{N}_2 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} x_n > \frac{1}{n+2}, \forall n \in \mathbb{N}_2. \\ \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n+2} \overset{\text{are ac. natură}}{\sim} \sum\limits_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ este serie divergentă} \end{array}\right\} \overset{\text{C. comparaţiei}}{\Rightarrow} \sum_{n=2}^{\infty} x_n \text{ este serie divergentă.}$$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sin 3n;$

<u>Etapa 1.</u> Se studiază dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0.$

Termenul general al seriei este

$$x_n = \underbrace{\frac{1}{2^n}}_{\to 0} \underbrace{\sin 3n}_{\text{mărginit}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \Rightarrow$seria *poate fi* convergentă.

<u>Etapa 2.</u> Se studiază natura seriei şi suma ei cu definiţia. Şirul sumelor parţiale este

$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \sin 3k, \forall n \in \mathbb{N}^*.$

Nu se va aplica definiţia în studiul convergenţei seriei.

<u>Etapa 3.</u> Se studiază natura seriei aplicând criterii.

○<u>modul 1.</u> <u>Criteriul Cauchy</u> pentru serii. Se verifică dacă

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |x_{n+1} + ... + x_{n+p}| < \varepsilon.$

Fie $\forall \varepsilon > 0$. Se caută $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq n_\varepsilon \Rightarrow$

$$\begin{aligned} |x_{n+1} + ... + x_{n+p}| &= \left|\tfrac{1}{2^{n+1}} \sin 3(n+1) + ... + \tfrac{1}{2^{n+p}} \sin 3(n+p)\right| \leq \\ &\leq \left|\tfrac{1}{2^{n+1}} \sin 3(n+1)\right| + ... + \left|\tfrac{1}{2^{n+p}} \sin 3(n+p)\right| = \\ &= \tfrac{1}{2^{n+1}} |\sin 3(n+1)| + ... + \tfrac{1}{2^{n+p}} |\sin 3(n+p)| \leq \tfrac{1}{2^{n+1}} + ... + \tfrac{1}{2^{n+p}} = \\ &= \tfrac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^p - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \tfrac{1}{2^n}\left(1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^p\right) \overset{\text{scăpăm de } p, \text{ rămâne } n}{<} \tfrac{1}{2^n} \cdot 1 < \varepsilon, \end{aligned}$$

adică $\frac{1}{2^n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln 2}$. Se găseşte $n_\varepsilon = \left[\frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln 2}\right] + 1.$

$\Rightarrow$este verificat Criteriul Cauchy$\Rightarrow$seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sin 3n$ este converegentă.

<u>modul 2.</u> <u>Criteriul comparaţiei</u> cu inegalităţi. Deoarece şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ are şi termeni pozitivi şi termeni negativi$\Rightarrow$ nu se poate aplica direct Criteriul comparaţiei. Se va studia absoluta convergenţă a seriei cu termeni oarecare $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sin 3n$, adică vom studia dacă seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{2^n} \sin 3n\right|$ este convergentă.

$$\left.\begin{array}{l} 0 \le \left|\frac{1}{2^n}\sin 3n\right| \le \frac{1}{2^n}, \forall n \in \mathbb{N}^*. \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ este serie convergentă} \\ \qquad \text{ca şi serie geometrică cu } q = \frac{1}{2} \in \left]-1,1\right[\end{array}\right\} \overset{\text{C. comparaţiei}}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{2^n}\sin 3n\right| \text{ este serie convergentă} \Rightarrow$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\sin 3n$ este serie absolut convergentă.

e) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{a^n}{\sqrt[n]{n!}}$, unde $a > 0$ e fixat;

Direct: <u>etapa 3.</u> Se studiază natura seriei aplicând criterii.

<u>Criteriul comparaţiei</u> cu inegalităţi. Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_2}$ are termeni pozitivi.

Dacă $0 < a < 1 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} 0 \lneqq \dfrac{a^n}{\sqrt[n]{n!}} \le a^n, \forall n \in \mathbb{N}_2. \\ \sum\limits_{n=2}^{\infty} a^n \text{ este serie convergentă} \\ \qquad \text{ca şi serie geometrică cu } q = a \in \left]0,1\right[\end{array}\right\} \overset{\text{C. comparaţiei}}{\Rightarrow} \sum_{n=2}^{\infty}\frac{a^n}{\sqrt[n]{n!}} \text{ este serie convergentă.}$$

Dacă $a \ge 1 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} x_n = \dfrac{a^n}{\sqrt[n]{n!}} \ge \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} \overset{n! \le n^n, \forall n\in\mathbb{N}_2}{\ge} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n^n}} = \dfrac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}_2. \\ \sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n} \text{ este serie divergentă} \end{array}\right\} \overset{\text{C. comparaţiei}}{\Rightarrow} \sum_{n=2}^{\infty}\frac{a^n}{\sqrt[n]{n!}} \text{ este serie divergentă.}$$

○**Teorema 6**. (**Criteriul comparaţiei cu limită, forma tare, CS**). Fie seriile de numere reale $\sum\limits_{n=m}^{\infty} x_n$ şi $\sum\limits_{n=m}^{\infty} y_n$ cu termeni strict pozitivi astfel încât

$\exists \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = l \in [0,+\infty]$

a) Dacă $0 < l < +\infty$ atunci cele două serii au aceeaşi natură;

b) Dacă $l = 0$ şi seria $\sum\limits_{n=m}^{\infty} y_n$ este convergentă atunci seria $\sum\limits_{n=m}^{\infty} x_n$ este convergentă;

c) Dacă $l = +\infty$ şi seria $\sum\limits_{n=m}^{\infty} y_n$ este divergentă atunci seria $\sum\limits_{n=m}^{\infty} x_n$ este divergentă.

○**Teorema 7**. (**Criteriul în $\boldsymbol{\alpha}$, CS**). Fie seria de numere reale $\sum\limits_{n=m}^{\infty} x_n$ cu termeni pozitivi.

a) Dacă $\exists\alpha > 1$ a.î. $0 \le \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,(n^\alpha \cdot x_n) < +\infty$ atunci $\sum\limits_{n=m}^{\infty} x_n$ este convergentă;

b) Dacă $\exists\alpha \le 1$ a.î. $0 < \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,(n^\alpha \cdot x_n) \le +\infty$ atunci $\sum\limits_{n=m}^{\infty} x_n$ este divergentă.

○**Teorema 8**. (**Criteriul de condensare Cauchy**). Fie seria de numere reale $\sum\limits_{n=m}^{\infty} x_n$, cu termeni pozitivi $x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}_m$. Dacă şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ este monoton descrescător, atunci

$$\sum_{n=m}^{\infty} x_n \overset{\text{are aceeaşi natură}}{\sim} \sum_{n=m}^{\infty} 2^n x_{2^n}.$$

Exerciţiul 6. Să se studieze natura următoarelor serii de numere reale

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{1}{n^2}$; **b)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^3-n^2+11}$; **c)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}+1}$;**d)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^3-n^2+13}$;

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n}}{n+1}$; **f)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{5n}}{n^2+n+1}$;**g)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{2n}{4n^2-1}$;

Rezolvare. a), b), c) A se vedea Curs.

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3-n^2+13}$;

Etapa 1. Se studiază dacă $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

Termenul general al seriei este

$x_n=\frac{1}{n^3-n^2+13},\forall n\in\mathbb{N}^*$

$\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0\Rightarrow$seria *poate fi* convergentă.

Etapa 2. Cu definiţia-NU

Etapa 3. Se studiază natura seriei aplicând criterii.

•Criteriul comparaţiei cu inegalităţi. Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ are termeni pozitivi.

Se încearcă:

$$\left.\begin{array}{l} 0\lneqq\frac{1}{n^3-n^2+13}\leq ?,\forall n\in\mathbb{N}^*. \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\ ? \end{array}\right\}\overset{\text{C. comparaţiei}}{\Rightarrow}$$ nu se poate afirma dacă seria este convergentă sau divergentă.

•Criteriul comparaţiei cu limită. Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ are termeni strict pozitivi.

Se încearcă:

$$\left.\begin{array}{l} \exists\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^3-n^2+13}}{\frac{1}{n^3}}=1 \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\text{ este serie convergentă} \\ \qquad\text{ca şi serie armonică cu }\alpha=3 \end{array}\right\}\underset{\text{cu limită}}{\overset{\text{C. comparaţiei}}{\Rightarrow}}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3-n^2+13}\text{ este serie convergentă.}$$

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{n+1}$;

Etapa 1. Se studiază dacă $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

Termenul general al seriei este

$x_n=\frac{\sqrt[3]{n}}{n+1},\forall n\in\mathbb{N}^*$

$\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0\Rightarrow$seria *poate fi* convergentă.

Etapa 2. Cu definiţia-NU

Etapa 3. Se studiază natura seriei aplicând criterii.

•Criteriul comparaţiei cu inegalităţi. Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ are termeni pozitivi.

Se încearcă:

$$\left.\begin{array}{l} 0\lneqq\frac{\sqrt[3]{n}}{n+1}\leq\frac{\sqrt[3]{n}}{n}=\frac{1}{n^{1-\frac{1}{3}}},\forall n\in\mathbb{N}^*. \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}\text{ este serie divergentă} \\ \qquad\text{ca şi serie armonică cu }\alpha=\frac{2}{3} \end{array}\right\}\overset{\text{C. comparaţiei}}{\Rightarrow}$$ nu se poate afirma dacă seria este convergentă sau divergentă.

•Criteriul comparaţiei cu limită. Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ are termeni strict pozitivi.

Se încearcă:

$$\left.\begin{array}{l} \exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt[3]{n}}{n+1}}{\frac{1}{n^{\alpha}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{\alpha}\cdot\sqrt[3]{n}}{n+1} \overset{\alpha=\frac{2}{3}}{=} 1 \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}} \text{ este serie divergentă} \\ \qquad \text{ca şi serie armonică cu } \alpha = \frac{2}{3} \end{array}\right\} \underset{\text{cu limită}}{\overset{\text{C. comparaţiei}}{\Rightarrow}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{n+1} \text{ este serie convergentă.}$$

Teorema 9. (**Criteriul raportului, D'Alembert, forma slabă, CS**). Fie seria de numere reale $\sum\limits_{n=m}^{\infty} x_n$, cu termeni strict pozitivi $x_n \gneqq 0, \forall n \in \mathbb{N}_m$.

a) Dacă $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$, atunci seria $\sum\limits_{n=m}^{\infty} x_n$ este convergentă.

b) Dacă $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{x_{n+1}}{x_n} > 1$, atunci seria $\sum\limits_{n=m}^{\infty} x_n$ este divergentă.

c) Dacă $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1$, sau $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq 1$ atunci nu se poate preciza natura seriei.

Dacă $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$, atunci criteriul anterior se numeşte **forma tare**.

Teorema 10 (**Criteriul rădăcinii, Cauchy-Hadamard, forma slabă, CS**). Fie seria de numere reale $\sum\limits_{n=m}^{\infty} x_n$, cu termeni strict pozitivi $x_n \gneqq 0, \forall n \in \mathbb{N}_m$.

a) Dacă $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{x_n} < 1$ atunci seria $\sum\limits_{n=m}^{\infty} x_n$ este convergentă.

b) Dacă $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{x_n} > 1$ atunci seria $\sum\limits_{n=m}^{\infty} x_n$ este divergentă.

c) Dacă $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{x_n} = 1$ atunci nu se poate preciza natura seriei.

Dacă $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$ atunci criteriul anterior se numeşte **forma tare**.

Observaţia 2. Dacă $\sum\limits_{n=m}^{\infty} x_n$ este o serie cu termeni oarecare şi $\sum\limits_{n=m}^{\infty} |x_n|$ este divergentă pe baza criteriului raportului sau criteriului rădăcinii atunci $\sum\limits_{n=m}^{\infty} x_n$ este divergentă.

Teorema 11 (**Criteriul Raabe-Duhamel, forma slabă, CS**). Fie seria de numere reale $\sum\limits_{n=m}^{\infty} x_n$, cu termeni strict pozitivi $x_n \gneqq 0, \forall n \in \mathbb{N}_m$.

a) Dacă $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, n\left(\dfrac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) > 1$, atunci seria $\sum\limits_{n=m}^{\infty} x_n$ este convergentă.

b) Dacă $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, n\left(\dfrac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) < 1$, atunci seria $\sum\limits_{n=m}^{\infty} x_n$ este divergentă.

c) Dacă $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, n\left(\dfrac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) \leq 1$, sau $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, n\left(\dfrac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) \geq 1$ atunci nu se poate preciza natura seriei.

Dacă $\exists \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right)$ atunci criteriul anterior se numeşte **forma tare**.

$\bigcirc$**Teorema 12** (**Criteriul Bertrand, forma slabă, CS**). Fie seria de numere reale $\sum\limits_{n=m}^{\infty} x_n$, cu termeni strict pozitivi $x_n \gneqq 0, \forall n \in \mathbb{N}_m$.

a) Dacă $\varliminf\limits_{n\to\infty} \left(n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)-1\right)\ln n > 1$ atunci $\sum\limits_{n=m}^{\infty} x_n$ este convergentă;

b) Dacă $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \left(n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)-1\right)\ln n < 1$ atunci seria $\sum\limits_{n=m}^{\infty} x_n$ este divergentă;

c) Dacă $\varliminf\limits_{n\to\infty} \left(n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)-1\right)\ln n \leq 1$ sau $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \left[n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)-1\right]\ln n \geq 1$ atunci nu se poate preciza natura seriei.

Dacă $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \left(n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)-1\right)\ln n$ atunci criteriul anterior se numeşte **forma tare**.

○**Teorema 13** (**Criteriul logaritmic, CS**). Fie seria de numere reale $\sum\limits_{n=m}^{\infty} x_n$, cu termeni strict pozitivi $x_n \gneqq 0, \forall n \in \mathbb{N}_m$ a.î.

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln\frac{1}{x_n}}{\ln n} = l.$

a) Dacă $l > 1$ atunci $\sum\limits_{n=m}^{\infty} x_n$ este convergentă;

b) Dacă $l < 1$ atunci seria $\sum\limits_{n=m}^{\infty} x_n$ este divergentă;

c) Dacă $l = 1$ atunci nu se poate preciza natura seriei.

Exerciţiul 7. Să se studieze natura următoarelor serii de numere reale

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n+7^n}{n!}$; **b)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!\left(\frac{2}{n}\right)^n$; **c)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\left(2010+\frac{1}{n}\right)^n}$; **d)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[3]{n^3+n^2+1}-\sqrt[3]{n^3-n^2+1}\right)^n$;

d') $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+n+1}{7n^2+2n+2}\right)^n$;**e)** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(3+(-1)^n)^n}$; **f)** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\frac{5+(-1)^n}{2}\right)^n$; **g)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{\frac{(-1)^n}{n}-2n}$;

h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^{\ln n}, a > 0$; **i)** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(-1)^n+(-2)^{n+1}}$;

j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot(2n-1)}{2\cdot 5\cdot 8\cdot ...\cdot(3n-1)}$;**k)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot ...\cdot(2n)}\cdot\frac{1}{2n+1}$.

Rezolvare. a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n+7^n}{n!}$;

Etapa 1. Se studiază dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Termenul general al seriei este

$x_n = \frac{5^n+7^n}{n!}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \Rightarrow$seria *poate fi* convergentă.

Etapa 2. Cu definiţia-NU

Etapa 3. Se studiază natura seriei aplicând criterii.

Criteriul raportului, forma tare. Deoarece şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este cu termeni strict pozitivi şi

$\left.\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5^{n+1}+7^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{5^n+7^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\frac{5\left(\frac{5}{7}\right)^n+7}{\left(\frac{5}{7}\right)^n+1} = 0 < 1\right\} \underset{\text{forma tare}}{\overset{\text{C. raportului}}{\Rightarrow}} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n+7^n}{n!}$ este serie convergentă.

b) A se vedea Curs.

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\left(2010+\frac{1}{n}\right)^n}$;

Etapa 1. Se studiază dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Termenul general al seriei este

$x_n = \frac{n}{\left(2010+\frac{1}{n}\right)^n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \Rightarrow$seria *poate fi* convergentă.

Etapa 2. Cu definiţia-NU

Etapa 3. Se studiază natura seriei aplicând criterii.

Criteriul rădăcinii, forma tare. Deoarece şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este cu termeni strict pozitivi şi

$$\left.\exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{\left(2010+\frac{1}{n}\right)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{2010+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2010} < 1 \right\} \underset{\text{forma tare}}{\overset{\text{C. rădăcinii}}{\Rightarrow}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\left(2010+\frac{1}{n}\right)^n} \text{ este serie}$$

convergentă.

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[3]{n^3+n^2+1} - \sqrt[3]{n^3-n^2+1}\right)^n$;

Etapa 3. Se studiază natura seriei aplicând criterii.

Criteriul rădăcinii, forma tare. Deoarece şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este cu termeni strict pozitivi şi

$$\left.\begin{aligned} \exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\sqrt[3]{n^3+n^2+1} - \sqrt[3]{n^3-n^2+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n^3+n^2+1} - \sqrt[3]{n^3-n^2+1}\right) \\ &= \frac{\left(n^3+n^2+1\right)-\left(n^3-n^2+1\right)}{\left(\sqrt[3]{n^3+n^2+1}\right)^2 + \sqrt[3]{n^3+n^2+1}\sqrt[3]{n^3-n^2+1} + \left(\sqrt[3]{n^3-n^2+1}\right)^2} = \frac{2}{3} < 1 \end{aligned}\right\}$$

$$\underset{\text{forma tare}}{\overset{\text{C. rădăcinii}}{\Rightarrow}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[3]{n^3+n^2+1} - \sqrt[3]{n^3-n^2+1}\right)^n \text{ este serie convergentă.}$$

e) A se vedea Curs−este un ex. în care nu se poate aplica criteriul raportului, forma slabă, ci doar cel al rădăcinii, forma slabă.

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{\frac{(-1)^n}{n}-2n}$;

Etapa 1. Se studiază dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Termenul general al seriei este

$x_n = 2^{\frac{(-1)^n}{n}-2n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Deoarece $\mathbb{N}^* = \left\{2\widetilde{k}; \widetilde{k} \in \mathbb{N}^*\right\} \cup \left\{2\widetilde{k}+1; \widetilde{k} \in \mathbb{N}\right\}$, se explicitează

$$x_n = \begin{cases} 2^{\frac{1}{n}-2n}, & \text{dacă } n = 2\widetilde{k}; \widetilde{k} \in \mathbb{N}^* \\ 2^{\frac{-1}{n}-2n}, & \text{dacă } n = 2\widetilde{k}+1; \widetilde{k} \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Se determină

$$\begin{cases} \lim\limits_{\widetilde{k}\to\infty} x_{2\widetilde{k}} = \lim\limits_{\widetilde{k}\to\infty} 2^{\frac{1}{2\widetilde{k}}-2\left(2\widetilde{k}\right)} = 0; \\ \lim\limits_{\widetilde{k}\to\infty} x_{2\widetilde{k}+1} = \lim\limits_{\widetilde{k}\to\infty} 2^{\frac{-1}{2\widetilde{k}+1}-2\left(2\widetilde{k}+1\right)} = 0. \end{cases} \Rightarrow \mathcal{L}\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\right) = \{0\} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 0 \\ \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \Rightarrow \text{seria } \textit{poate fi} \text{ convergentă.}$$

Etapa 2. Se studiază natura seriei şi suma ei cu definiţia. Şirul sumelor parţiale este

$s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} 2^{\frac{(-1)^k}{k}-2k}, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$

Nu se va aplica definiţia în studiul convergenţei seriei.
Etapa 3. Se studiază natura seriei aplicând criterii.
Criteriul raportului:

$x_n \gneqq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

$$\underbrace{\frac{x_{n+1}}{x_n}}_{u_n} = \frac{2^{\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}-2(n+1)}}{2^{\frac{(-1)^n}{n}-2n}} = 2^{\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}-\frac{(-1)^n}{n}-2} = \begin{cases} 2^{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}-2}, & \text{dacă } n = 2\widetilde{k}; \widetilde{k} \in \mathbb{N}^* \\ 2^{\frac{-1}{n+1}+\frac{-1}{n}-2}, & \text{dacă } n = 2\widetilde{k}+1; \widetilde{k} \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Se determină

$$\begin{cases} \lim\limits_{\widetilde{k}\to\infty} u_{2\widetilde{k}} = 2^{-2}; \\ \lim\limits_{\widetilde{k}\to\infty} u_{2\widetilde{k}+1} = 2^{-2}. \end{cases} \Rightarrow \mathcal{L}\left(\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}\right) = \left\{\tfrac{1}{4}\right\} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{4} \\ \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{4}.$$

Cum $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{4} < 1 \Rightarrow$seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{\frac{(-1)^n}{n}-2n}$ este convergentă, chiar absolut convergentă.
Criteriul rădăcinii.

$x_n \gneqq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

$$\underbrace{\sqrt[n]{|x_n|}}_{v_n} = \sqrt[n]{2^{\frac{(-1)^n}{n}-2n}} = 2^{\frac{(-1)^n}{n^2}-2} = \begin{cases} 2^{\frac{1}{n^2}-2}, & \text{dacă } n = 2\widetilde{k}; \widetilde{k} \in \mathbb{N}^* \\ 2^{\frac{-1}{n^2}-2}, & \text{dacă } n = 2\widetilde{k}+1; \widetilde{k} \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Se determină

$$\begin{cases} \lim\limits_{\widetilde{k}\to\infty} v_{2\widetilde{k}} = 2^{-2}; \\ \lim\limits_{\widetilde{k}\to\infty} v_{2\widetilde{k}+1} = 2^{-2}. \end{cases} \Rightarrow \mathcal{L}\left(\left(\sqrt[n]{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}\right) = \left\{\tfrac{1}{4}\right\} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|x_n|} = \frac{1}{4} \\ \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|x_n|} = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \frac{1}{4}.$$

Cum $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{x_n} = \frac{1}{4} < 1 \Rightarrow$seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{\frac{(-1)^n}{n}-2n}$ este convergentă, chiar absolut convergentă.

h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^{\ln n}, a > 0;$

Etapa 1. Se studiază dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.
Termenul general al seriei este

$x_n = a^{\ln n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} 0, & \text{dacă } 0 < a < 1 \\ 1, & \text{dacă } a = 1 \\ +\infty, & \text{dacă } a > 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{dacă } a \geq 1, \text{ atunci seria este divergentă} \\ \text{dacă } a \in \left]0,1\right[, \text{ atunci seria } \textit{poate fi} \text{ convergentă} \end{cases}$$

Etapa 2. Cu Definiţia-NU
Etapa 3. Se studiază natura seriei aplicând criterii, când $a \in \left]0,1\right[$.
Criteriul raportului.

$x_n \gneqq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

$\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = a^{\ln(n+1)-\ln n} = a^{\ln\frac{n+1}{n}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = 1 \Rightarrow$Nu se poate preciza natura seriei.

Criteriul rădăcinii.

$x_n \gneqq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

$\sqrt[n]{x_n} = a^{\frac{\ln n}{n}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = 1 \Rightarrow$Nu se poate preciza natura seriei.

Criteriul lui Raabe-Duhamel.

$x_n \gneqq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

$n\left(\dfrac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = n\left(a^{-\ln(n+1)+\ln n} - 1\right) = n\left(a^{\ln\frac{n}{n+1}} - 1\right), \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = \lim\limits_{n\to\infty} n\left(a^{\ln\frac{n}{n+1}} - 1\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^{-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} - 1}{-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \cdot \dfrac{-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = (\ln a)(-1) =$
$-\ln a$.

Dacă $-\ln a > 1 \Leftrightarrow \ln a < -1 \Leftrightarrow 0 < a < \dfrac{1}{e} \Rightarrow$ seria este convergentă

Dacă $-\ln a < 1 \Leftrightarrow \ln a > -1 \Leftrightarrow 1 > a > \dfrac{1}{e} \Rightarrow$seria este divergentă.

Pentru $a = \dfrac{1}{e} \Rightarrow x_n = \left(\frac{1}{e}\right)^{\ln n} = \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ şi seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă.

Concluzii:

-dacă $0 < a < \dfrac{1}{e}$ atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^{\ln n}$ este convergentă;

-dacă $a \geq \dfrac{1}{e}$ atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^{\ln n}$ este divergentă.

i) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(-1)^n + (-2)^{n+1}}$;

Etapa 1. Se studiază dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Termenul general al seriei este

$x_n = \frac{1}{(-1)^n + (-2)^{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}_2$.

Deoarece $\mathbb{N}_2 = \left\{2\widetilde{k}; \widetilde{k} \in \mathbb{N}^*\right\} \cup \left\{2\widetilde{k}+1; \widetilde{k} \in \mathbb{N}^*\right\}$, se explicitează

$$x_n = \begin{cases} \frac{1}{1-2^{n+1}}, & \text{dacă } n = 2\widetilde{k}; \widetilde{k} \in \mathbb{N}^* \\ \frac{1}{-1+2^{n+1}}, & \text{dacă } n = 2\widetilde{k}+1; \widetilde{k} \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Se determină

$$\begin{cases} \lim\limits_{\widetilde{k}\to\infty} x_{2\widetilde{k}} = \lim\limits_{\widetilde{k}\to\infty} \frac{1}{1-2^{2\widetilde{k}+1}} = 0; \\ \lim\limits_{\widetilde{k}\to\infty} x_{2\widetilde{k}+1} = \lim\limits_{\widetilde{k}\to\infty} \frac{1}{-1+2^{2\widetilde{k}+2}} = 0. \end{cases} \Rightarrow \mathcal{L}\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}_2}\right) = \{0\} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = 0 \\ \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \Rightarrow \text{seria } \textit{poate fi} \text{ convergentă.}$$

Etapa 2. Cu Definiţia-NU.

Etapa 3. Se studiază natura seriei aplicând criterii.

Criteriul raportului. Deoarece şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_2}$ are şi termeni pozitivi şi termeni negativi$\Rightarrow$ nu se poate aplica direct Criteriul raportului. Se va studia absoluta convergenţă a seriei cu termeni oarecare $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(-1)^n + (-2)^{n+1}}$, adică se va studia dacă seria $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left|\frac{1}{(-1)^n + (-2)^{n+1}}\right|$ este convergentă.

$|x_n| \gneqq 0, \forall n \in \mathbb{N}_2$.

$$\underbrace{\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}}_{u_n} = \frac{\left|\frac{1}{(-1)^{n+1} + (-2)^{n+2}}\right|}{\left|\frac{1}{(-1)^n + (-2)^{n+1}}\right|} = \left|\frac{(-1)^n + (-2)^{n+1}}{(-1)^{n+1} + (-2)^{n+2}}\right| = \begin{cases} \frac{-1+2^{n+1}}{-1+2^{n+2}}, & \text{dacă } n = 2\widetilde{k}; \widetilde{k} \in \mathbb{N}^* \\ \frac{-1+2^{n+1}}{-1+2^{n+2}}, & \text{dacă } n = 2\widetilde{k}+1; \widetilde{k} \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Se determină

$$\begin{cases} \lim\limits_{\widetilde{k}\to\infty} u_{2\widetilde{k}} = \frac{1}{2}; \\ \lim\limits_{\widetilde{k}\to\infty} u_{2\widetilde{k}+1} = \frac{1}{2}. \end{cases} \Rightarrow \mathcal{L}\left(\left(\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}_2}\right) = \left\{\frac{1}{2}\right\} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \frac{1}{2} \\ \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \frac{1}{2}.$$

Cum $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ seria $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left|\frac{1}{(-1)^n+(-2)^{n+1}}\right|$ este convergentă $\Rightarrow$seria $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(-1)^n+(-2)^{n+1}}$ este absolut convergentă.

Criteriul rădăcinii. Deoarece şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_2}$ are şi termeni pozitivi şi termeni negativi$\Rightarrow$ nu se poate aplica direct Criteriul rădăcinii. Se va studia absoluta convergenţă a seriei cu termeni oarecare $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(-1)^n+(-2)^{n+1}}$, adică se va studia dacă seria $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left|\frac{1}{(-1)^n+(-2)^{n+1}}\right|$ este convergentă.

$|x_n| \gneqq 0, \forall n \in \mathbb{N}_2$.

$$\underbrace{\sqrt[n]{|x_n|}}_{v_n} = \sqrt[n]{\left|\frac{1}{(-1)^n+(-2)^{n+1}}\right|} = \frac{1}{\sqrt[n]{|(-1)^n+(-2)^{n+1}|}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[n]{-1+2^{n+1}}}, & \text{dacă } n = 2\widetilde{k}; \widetilde{k} \in \mathbb{N}^* \\ \frac{1}{\sqrt[n]{-1+2^{n+1}}}, & \text{dacă } n = 2\widetilde{k}+1; \widetilde{k} \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Se determină

$$\begin{cases} \lim\limits_{\widetilde{k}\to\infty} v_{2\widetilde{k}} = \frac{1}{2}; \\ \lim\limits_{\widetilde{k}\to\infty} v_{2\widetilde{k}+1} = \frac{1}{2}. \end{cases} \Rightarrow \mathcal{L}\left(\left(\sqrt[n]{|x_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}_2}\right) = \left\{\frac{1}{2}\right\} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|x_n|} = \frac{1}{2} \\ \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|x_n|} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} = \frac{1}{2}.$$

Cum $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|x_n|} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ seria $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left|\frac{1}{(-1)^n+(-2)^{n+1}}\right|$ este convergentă $\Rightarrow$seria $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(-1)^n+(-2)^{n+1}}$ este absolut convergentă.

Criteriul lui Leibniz. A se vedea Exerciţiul 9.

j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}$;

Etapa 3. Se studiază natura seriei aplicând criterii.

Criteriul raportului, forma tare. Deoarece şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este cu termeni strict pozitivi şi

$$\left.\begin{array}{l} \exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)(2n+1)}{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n-1)(3n+2)} \cdot \frac{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)} \\ \qquad = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n+2} = \frac{2}{3} < 1 \end{array}\right\} \underset{\text{forma tare}}{\overset{\text{C. raportului}}{\Longrightarrow}}$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}$ este serie convergentă.

k) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2n} \cdot \frac{1}{2n+1}$

Etapa 3. Se studiază natura seriei aplicând criterii.

Criteriul raportului, forma tare. Deoarece şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este cu termeni strict pozitivi şi

$$\left.\begin{array}{l} \exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)(2n+1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2n)(2n+2)} \cdot \frac{1}{2n+3} \cdot \frac{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2n)}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)} (2n+1) \\ \qquad = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n+2} \frac{2n+1}{2n+3} = 1 \end{array}\right\} \underset{\text{forma tare}}{\overset{\text{C. raportului}}{\Longrightarrow}}$$

nu se poate decide natura seriei pe baza criteriului raportului.

Criteriul Raabe-Duhamel, forma tare. Deoarece şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este cu termeni strict pozitivi şi

$$\left.\begin{array}{l}\exists \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)=\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{(2n+2)(2n+3)}{(2n+1)^2}-1\right)\\ =\lim\limits_{n\to\infty} n\frac{4n^2+10n-3-\left(4n^2+4n+1\right)}{(2n+1)^2}=\frac{3}{2}>1\end{array}\right\} \overset{\text{C. Raabe-Duhamel}}{\underset{\text{forma tare}}{\Rightarrow}}$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n}\cdot\frac{1}{2n+1}$ este convergentă.

Teorema 14 (**Criteriul Abel, CS**). Fie seria de numere reale $\sum\limits_{n=m}^{\infty}\alpha_n u_n$. Dacă

(i) şirul $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ este monoton descrescător şi mărginit;

(ii) seria $\sum\limits_{n=m}^{\infty} u_n$ este convergentă,

atunci seria $\sum\limits_{n=m}^{\infty}\alpha_n u_n$ este convergentă.

Teorema 15 (**Criteriul Dirichlet, CS**). Fie seria de numere reale $\sum\limits_{n=m}^{\infty}\alpha_n u_n$. Dacă

(i) şirul $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ este monoton descrescător cu $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$;

(ii) seria $\sum\limits_{n=m}^{\infty} u_n$ are şirul sumelor parţiale $s_n^u=\sum\limits_{k=m}^{n} u_k, \forall n\in\mathbb{N}_m$ şir mărginit,

atunci seria $\sum\limits_{n=m}^{\infty}\alpha_n u_n$ este convergentă.

Exerciţiul 8. Să se studieze natura următoarelor serii de numere reale

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}\sin 3n$; **b)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\sin n$;**c)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos n}{3^n}$;

Rezolvare. a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\sin 3n$;

Etapa 1, 2. Aceleaşi cu cele de la Exerciţiul.5, d) scrise anterior.

Etapa 3. Se studiază natura seriei aplicând criterii.

Criteriul Dirichlet. Se aleg:

(i) $\alpha_n=\frac{1}{2^n}, \forall n\in\mathbb{N}^*$. Se observă că şirul $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este monoton descrescător cu $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$.

(ii) $u_n=\sin 3n, \forall n\in\mathbb{N}^*$. Se studiază dacă şirul sumelor parţiale

$$s_n^u=\sum_{k=1}^{n}\sin 3k, \forall n\in\mathbb{N}^*$$

este şir mărginit. Se determină s_n^u.

Fie $n\in\mathbb{N}^*$. Se notează $A_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\cos 3k$ şi $B_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\sin 3k$. Atunci

$$\begin{aligned} A_n+iB_n&=\sum_{k=1}^{n}\cos 3k+i\sum_{k=1}^{n}\sin 3k=\sum_{k=1}^{n}(\cos 3k+i\sin 3k)\\ &=\sum_{k=1}^{n}(\cos 3+i\sin 3)^k=(\cos 3+i\sin 3)\,\frac{(\cos 3+i\sin 3)^n-1}{(\cos 3+i\sin 3)-1}\\ &=(\cos 3+i\sin 3)\,\frac{(\cos 3n+i\sin 3n)-1}{(\cos 3+i\sin 3)-1}=(\cos 3+i\sin 3)\,\frac{{}^{i)}2\sin^2\frac{3n}{2}-i2\sin\frac{3n}{2}\cos\frac{3n}{2}}{2\sin^2\frac{3}{2}-i2\sin\frac{3}{2}\cos\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

$$= (\cos 3 + i \sin 3) \frac{\sin \frac{3n}{2} \left(\cos \frac{3n}{2} + i \sin \frac{3n}{2}\right)}{\sin \frac{3}{2} \left(\cos \frac{3}{2} + i \sin \frac{3}{2}\right)} = \frac{\sin \frac{3n}{2}}{\sin \frac{3}{2}} \left(\cos \left(3 + \frac{3n}{2} - \frac{3}{2}\right) + i \sin \left(3 + \frac{3n}{2} - \frac{3}{2}\right)\right).$$

Deci $A_n = \frac{\sin \frac{3n}{2}}{\sin \frac{3}{2}} \cos \left(\frac{3n+3}{2}\right)$ şi $B_n = \frac{\sin \frac{3n}{2}}{\sin \frac{3}{2}} \sin \left(\frac{3n+3}{2}\right)$.

Atunci $\exists M = \frac{1}{\left|\sin \frac{3}{2}\right|} > 0$ astfel încât

$$|s_n^u| = \left|\frac{\sin \frac{3n}{2}}{\sin \frac{3}{2}} \sin \left(\frac{3n+3}{2}\right)\right| \leq \frac{1}{\left|\sin \frac{3}{2}\right|}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$\Rightarrow (s_n^u)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este şir mărginit.

Conform Criteriului Dirichlet, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sin 3n$ este convergentă.

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \sin n$;

Indicaţie. $\alpha_n = \ln \left(1 + \frac{1}{n^2}\right), \forall n \in \mathbb{N}^*; u_n = \sin n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{3^n}$;

Indicaţie.$\alpha_n = \frac{1}{3^n}, \forall n \in \mathbb{N}^*; u_n = \cos n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

În acest caz se poate aplica criteriul comparaţiei pentru $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\cos n}{3^n}\right|$.

Teorema 16 (**Criteriul Leibniz, CS**). Fie şirul de numere reale $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_m}$ cu

$$a_n \gneqq 0, \forall n \in \mathbb{N}_m.$$

Dacă şirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_m}$ este monoton descrescător cu $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$ atunci seria alternantă $\sum\limits_{n=m}^{\infty} (-1)^n a_n$ este convergentă. Rezultatul este valabil şi pentru seria alternantă $\sum\limits_{n=m}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$.

Seria armonică alternantă generalizată. Fie $\alpha \in \mathbb{R}$. Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ este divergentă dacă $\alpha \leq 0$ şi convergentă dacă $\alpha > 0$. Mai mult, pentru $\alpha \in]0,1]$ seria este semiconvergentă, iar pentru $\alpha > 1$ seria este absolut convergentă.

Exerciţiul 9. Să se studieze natura următoarelor serii de numere reale

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2^n}$; **b)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2+4n+5}$; **c)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{n}}{\cos \frac{1}{n}}$;

d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(-1)^n + (-2)^{n+1}}$; **e)** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!\,(2n+1)}$; **f)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2+5n+6}$;

Rezolvare. a), b), c) A se vedea Curs.

d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(-1)^n + (-2)^{n+1}}$;

Etapa 1, 2. Aceleaşi cu cele de la Ex. $7, i$).

Etapa 3. Se studiază natura seriei aplicând criterii.

Criteriul Leibniz. Şirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este şir alternant ($x_0 < 0$, $x_1 > 0$, $x_2 < 0$...), adică

$$x_n = (-1)^{n+1} \underbrace{\frac{1}{-1+2^{n+1}}}_{a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Cum $x_n = (-1)^{n+1} \cdot a_n, \forall n \in \mathbb{N}$, unde

$$\left\{\begin{array}{l} a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N} \\ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ este şir monoton descrescător} \\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \end{array}\right. \overset{\text{C. Leibniz}}{\Rightarrow} \text{seria } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(-1)^n + (-2)^{n+1}} \text{ este convergentă.}$$

e) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!\,(2n+1)}$;

Etapa 1. Se studiază dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Termenul general al seriei este

$$x_n = \underbrace{(-1)^n}_{\text{mărginit}} \cdot \underbrace{\frac{1}{n!\,(2n+1)}}_{\to 0}, \forall n \in \mathbb{N}_2$$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \Rightarrow$seria *poate fi* convergentă.

Etapa 2. Cu Definiţia-NU.

Etapa 3. Se studiază natura seriei aplicând criterii.

Criteriul Leibniz. Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este şir alternant, adică

$$x_n = (-1)^n \underbrace{\frac{1}{n!\,(2n+1)}}_{a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}_2}, \forall n \in \mathbb{N}_2.$$

şi, mai mult, $x_n = (-1)^n \cdot a_n, \forall n \in \mathbb{N}_2$, unde

$$\left\{\begin{array}{l} a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}_2 \\ (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ este şir monoton descrescător} \\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \end{array}\right. \overset{\text{C. Leibniz}}{\Rightarrow} \text{seria } \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!(2n+1)} \text{ este convergentă.}$$

Mai mult, seria $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!(2n+1)}$ este absolut convergentă, deoarece $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!(2n+1)}$ este convergentă.

Într-adevăr:

Criteriul raportului, forma tare. Deoarece şirul $(|x_n|)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este cu termeni strict pozitivi şi

$$\left.\begin{array}{l} \exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)!(2n+3)} \cdot n!\,(2n+1) \\ \quad = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{(n+1)(2n+3)} = 0 < 1 \end{array}\right\} \underset{\text{forma tare}}{\overset{\text{C. raportului}}{\Rightarrow}} \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!(2n+1)} \text{ este convergentă.}$$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2+5n+6}$;

Etapa 1. Se studiază dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Termenul general al seriei este

$$x_n = \underbrace{(-1)^{n+1}}_{\text{mărginit}} \cdot \underbrace{\frac{1}{n^2+5n+6}}_{\to 0}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \Rightarrow$seria *poate fi* convergentă.

Etapa 2. Cu Definiţia-NU.

Etapa 3. Se studiază natura seriei aplicând criterii.

Criteriul Leibniz. Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este şir alternant, adică

$$x_n = (-1)^{n+1} \underbrace{\frac{1}{n^2+5n+6}}_{a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

şi, mai mult, $x_n = (-1)^{n+1} \cdot a_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$, unde

$$\begin{cases} a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \\ (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ este şir monoton descrescător} \\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \end{cases} \overset{\text{C. Leibniz}}{\Rightarrow} \text{seria } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2+5n+6} \text{ este convergentă.}$$

Este chiar absolut convergentă (seria modulelor se studiază cu criteriul comparaţiei).

Exerciţiul 10. Să se studieze natura următoarelor serii de numere reale

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^{-\frac{5n+(-1)^{n+1}}{6}}$; **b)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n}{a^n}, a > 0$; **c)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(1+a^n), a \geq 0$;**d)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{1+a^{2n}}, a \in \mathbb{R}$;

e) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(-a)^n}, a > 0$; **f)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3+(-1)^n)^n}$; **g)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^{(-1)^{n+1}+n+1}, 0 < a < 1$;

h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^{n+(-1)^n}}$; **i)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{(-1)^n}+n}$; **j)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^{n+\frac{1}{n}}, a \geq 0$; **k)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^{\sqrt{n}}, a > 0$;

l) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+2}}$; **m)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \right)$.

n) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n^2} + \operatorname{arctg} \frac{(-1)^n}{n} \right)$; **o)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \sin n$;

p) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cos n^2}{n}$; **q)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$;

Rezolvare. a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^{-\frac{5n+(-1)^{n+1}}{6}}$;

Indicaţie. Se verifică dacă termenul general converge la zero. Criteriul de comparaţie cu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{\frac{1}{6}} \left(\frac{1}{2^{\frac{5}{6}}}\right)^n$.

Criteriul raportului. Criteriul rădăcinii. Criteriul Raabe-Duhamel.

b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n}{a^n}, a > 0$;

Indicaţie. Discuţie dupa a. Criteriul raportului.

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(1+a^n), a \geq 0$.

Etapa 1. Se studiază dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Termenul general al seriei este

$x_n = \ln(1+a^n), \forall n \in \mathbb{N}^*$.

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} 0, & \text{dacă } 0 \leq a < 1 \\ \ln 2, & \text{dacă } a = 1 \\ +\infty, & \text{dacă } a > 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{dacă } a \geq 1, \text{ atunci seria este divergentă} \\ \text{dacă } a \in [0,1[\,, \text{ atunci seria } \textit{poate fi} \text{ convergentă} \end{cases}$$

Etapa 2. Cu Definiţia-NU.

Etapa 3. Se aplică criterii atunci când $a \in [0,1[$.

Criteriul raportului.

$x_n \gneqq 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\ln(1+a^{n+1})}{\ln(1+a^n)} = \frac{\ln(1+a^{n+1})}{a^{n+1}} \cdot \frac{a^n}{\ln(1+a^n)} \cdot \frac{a^{n+1}}{a^n}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = a < 1$.Chiar şi $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{x_{n+1}}{x_n} = a < 1 \Rightarrow$seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(1+a^n)$ este absolut convergentă.

Concluzii:

-dacă $0 \leq a < 1$ atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(1+a^n)$ este absolut convergentă;

-dacă $a \geq 1$ atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(1+a^n)$ este divergentă.

d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{1+a^{2n}}, a \in \mathbb{R};$

Indicaţie. Se verifică dacă termenul general converge la zero. Criteriul raportului.

e) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(-a)^n}, a > 0;$

Indicaţie. Se verifică dacă termenul general converge la zero. Criteriul raportului.

f) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3+(-1)^n)^n};$

Indicaţie. Se verifică dacă termenul general converge la zero. Criteriul raportului, Criteriul rădăcinii.

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^{(-1)^{n+1}+n+1}, 0 < a < 1;$

Indicaţie. Se verifică dacă termenul general converge la zero. Criteriul rădăcinii.

h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^{n+(-1)^n}};$

Indicaţie. Se verifică dacă termenul general converge la zero. Criteriul raportului.

i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{(-1)^n}+n};$

Indicaţie. Se verifică dacă termenul general converge la zero. Criteriul raportului, Criteriul rădăcinii.

j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^{n+\frac{1}{n}}, a \geq 0;$

Indicaţie. Discuţie dupa a. Criteriul Rădăcinii.

k) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^{\sqrt{n}}, a > 0;$

Indicaţie. Se verifică dacă termenul general converge la zero. Criteriul raportului, Criteriul rădăcinii, Criteriul Raabe-Duhamel.

l) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+2}};$

Indicaţie. Se verifică dacă termenul general converge la zero. Criteriul Leibniz.

m) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right).$

Indicaţie. Se verifică dacă termenul general converge la zero. Criteriul Leibniz. Criteriul Abel. Criteriul raportului.

n) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n^2} + \operatorname{arctg} \frac{(-1)^n}{n}\right);$

Se studiază separat natura seriilor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{(-1)^n}{n}$.

•Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ este convergentă ca şi serie armonică alternantă cu $\alpha = 2 > 0$ sau ca şi serie căreia i se aplică Criteriul Leibniz, şi are suma s_1.

•Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{(-1)^n}{n}$

Etapa 1. Se studiază dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Termenul general al seriei este

$x_n = \operatorname{arctg} \frac{(-1)^n}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \Rightarrow$ seria *poate fi* convergentă.

Etapa 2. Cu Definiţia-NU.

Etapa 3. Criteriul Leibniz.

Cum

$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \operatorname{arctg} \frac{(-1)^n}{n} = (-1)^n \operatorname{arctg} \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Cum

$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^* \underset{\text{este strict crescătoare}}{\overset{f(x)=\operatorname{arctg} x}{\Rightarrow}} \operatorname{arctg} \frac{1}{n+1} < \operatorname{arctg} \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Deci şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este şir alternant, adică

$$x_n = (-1)^n \underbrace{\operatorname{arctg} \frac{1}{n}}_{a_n>0, \forall n\in\mathbb{N}^*}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

şi, mai mult, $x_n = (-1)^n \cdot a_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$, unde

$$\begin{cases} a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \\ (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ este şir monoton descrescător} \\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \end{cases} \overset{\text{C. Leibniz}}{\Rightarrow} \text{seria } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \operatorname{arctg} \tfrac{1}{n} \text{ este convergentă şi}$$

are suma s_2.

•Atunci, ca sumă a două serii convergente, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{n^2} + \operatorname{arctg} \frac{(-1)^n}{n}\right]$ este convergentă şi are suma $s_1 + s_2$.

o) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \sin n$;

Etapa 1. Se studiază dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Termenul general al seriei este

$$x_n = \underbrace{\ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}_{\to 0} \underbrace{\sin n}_{\text{mărginit}}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \Rightarrow$ seria *poate fi* convergentă.

Etapa 2. Cu Definiţia-NU

Etapa 3.

Criteriul Dirichlet. Se aleg:

(i) $\alpha_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right), \forall n \in \mathbb{N}^*$. Se observă că şirul $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este monoton descrescător. Într-adevăr

$\alpha_{n+1} - \alpha_n = \ln\left(1 + \frac{1}{(n+1)^2}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{(n+1)^2+1}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{n^2+1}\right) < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$, deoarece $\frac{(n+1)^2+1}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{n^2+1} = \frac{n^4+2n^3+2n^2}{n^4+2n^3+3n^2+2n+1} < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Mai mult, $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\to\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = 0$.

(ii) $u_n = \sin n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Se studiază dacă şirul sumelor parţiale $s_n^u = \sum\limits_{k=1}^{n} \sin k, \forall n \in \mathbb{N}^*$ este şir mărginit. Ca şi la Exerciţiul 2, b), se determină $s_n^u = \dfrac{\sin \frac{n}{2}}{\sin \frac{1}{2}} \sin\left(\frac{n+1}{2}\right)$.

Atunci $\exists M = \frac{1}{\left|\sin \frac{1}{2}\right|} > 0$ astfel încât

$|s_n^u| = \left|\frac{\sin \frac{n}{2}}{\sin \frac{1}{2}} \sin\left(\frac{n+1}{2}\right)\right| \le \frac{1}{\left|\sin \frac{1}{2}\right|}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow (s_n^u)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este şir mărginit.

Conform Criteriului Dirichlet, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\sin n$ este convergentă.

p), **q)** Criteriul Dirichlet.