SEMINAR NR. 3, REZOLVĂRI
Analiză matematică, AIA

A se studia Trigonometrie-din Anexa 2 şi de la Complemente de Matematică

A se studia Funcţii $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ elementare: **funcţia polinomială, funcţia raţională, funcţia putere, funcţia radical, funcţia logaritm, funcţia exponenţială, funcţii trigonometrice, funcţii hiperbolice. Definiţii, grafice şi lecturi grafice (intersecţia cu axele, monotonie, semn). Ecuaţii şi inecuaţii ataşate, sisteme de ecuaţii şi inecuaţii-**din Anexa 4 şi de la Complemente de Matematică

5.1. Limite de funcţii $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ în $a \in A'$

De recapitulat din manualele de liceu.

Exerciţiul 1. Trasând graficele şi precizând mulţimea $f(A)$, să se studieze $\inf f(A)$, $\sup f(A)$, $\min f(A)$, $\max f(A)$, mărginirea pentru:

a) $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^{|x|}, & -1 < x < 1 \text{ şi } x \neq 0 \\ e, & x = 0 \end{cases}$;

b) $f : [-2,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x+2, & -2 \leq x < -1 \\ 2, & x = -1 \\ |x|, & -1 < x \leq 1 \end{cases}$;

c) $f : [-2,+\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -2x-2, & -2 \leq x < -1 \\ 1, & x = 1 \\ x+1, & -1 < x \leq 0 \\ 1-x, & 0 < x < 1 \\ 1, & x = 1 \\ 2x-2, & x > 1 \end{cases}$;

d) $f :]-\infty,-1[\cup \{0\} \cup]1,+\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < -1 \\ 0, & x = 0 \\ x-1, & x > 1 \end{cases}$.

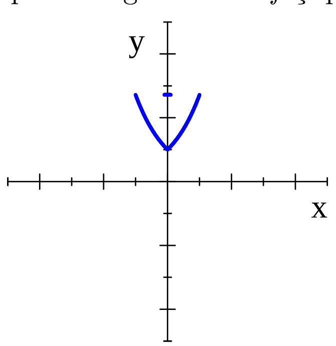
Rezolvare. Se reaminteşte:

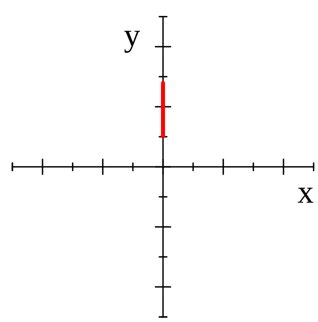
$f(A) = \{y \in \mathbb{R}; \exists x \in A \text{ a.î. } f(x) = y\}$ şi $G_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \in A \text{ şi } y = f(x)\right\}$.

<u>Geometric</u>, *reprezentarea geometrică a mulţimii $f(A)$ este proiecţia pe axa Oy a reprezentării graficului funcţiei, G_f.*

a) $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^{x}, & 0 < x < 1 \\ e^{-x}, & -1 < x < 0 \\ e, & x = 0 \end{cases}$;

Se reprezintă graficul lui f şi proiecţia acestuia pe $Oy \Rightarrow$





Se observă că $f(A) =]1, e]$. Atunci:

$\inf f(A) = \inf\limits_{x\in A} f(x) = 1.$

Deoarece $1 \notin f(A)$ $[1 \neq f(x), \forall x \in A] \Rightarrow \nexists \min f(A), \nexists \min\limits_{x\in A} f(x)$

$\sup f(A) = \sup\limits_{x\in A} f(x) = e.$

Deoarece $e \in f(A)$ $[\exists 0 \in A$ a.î. $e = f(0)] \Rightarrow \exists \max f(A) = \max\limits_{x\in A} f(x) = e.$

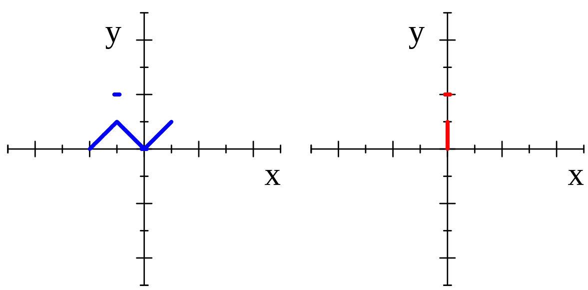
Funcţia f este mărginită deoarece: $1 < f(x) \leq e, \forall x \in A.$

Geometric, f este funcţie mărginită deoarece reprezentarea G_f se poate include în banda limitată de dreptele paralele cu Ox, $y = 1, y = e$ (cu desen).

Metric, f este funcţie mărginită deoarece $f(A)$ se poate include în sfera de pe axa Oy, centrată în 0 şi de rază 3, adică $\exists M = 3 > 0$ a.î. $|f(x) - 0| < 3, \forall x \in A$ (cu desen).

b) $f : [-2, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x+2, & -2 \leq x < -1 \\ 2, & x = -1 \\ -x, & -1 < x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$

Se reprezintă graficul lui f şi proiecţia acestuia pe Oy $\Rightarrow$



Se observă că $f(A) = [0, 1] \cup \{2\}$. Atunci:

$\inf f(A) = \inf\limits_{x\in A} f(x) = 0.$

Deoarece $0 \in f(A)$ $[\exists 0, -2 \in A$ a.î. $0 = f(0) = f(-2)] \Rightarrow \exists \min f(A) = \min\limits_{x\in A} f(x) = 0$

$\sup f(A) = \sup\limits_{x\in A} f(x) = 2.$

Deoarece $2 \in f(A)$ $[\exists -1 \in A$ a.î. $2 = f(-1)] \Rightarrow \exists \max f(A) = \max\limits_{x\in A} f(x) = 2.$

Funcţia f este mărginită deoarece: $0 \leq f(x) \leq 2, \forall x \in A.$

Geometric, f este funcţie mărginită deoarece reprezentarea G_f se poate include în banda limitată de dreptele paralele cu Ox, $y = 0, y = 2$.

Metric, f este funcţie mărginită deoarece $f(A)$ se poate include în sfera de pe axa Oy, centrată în 0 şi de rază 5, adică $\exists M = 5 > 0$ a.î. $|f(x) - 0| < 5, \forall x \in A$.

Observaţie. a) Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este monoton crescătoare pe $[a, b]$, atunci

$\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x) = f(a) \left(= \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)\right)$ şi $\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x) = f(b) \left(= \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)\right).$

Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este monoton descrescătoare pe $[a, b]$, atunci

$\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x) = f(b) \left(= \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)\right)$ şi $\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x) = f(a) \left(= \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)\right).$

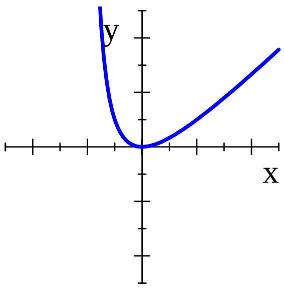
b) Dacă $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ este monoton crescătoare pe $]a,b[$, atunci

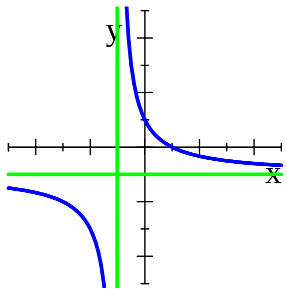
$$\inf_{x\in]a,b[} f(x) = \lim_{x\to a, x>a} f(a) \left(\nexists \min_{x\in]a,b[} f(x)\right) \text{ şi } \sup_{x\in]a,b[} f(x) = \lim_{x\to b, x<b} f(b) \left(\nexists \max_{x\in]a,b[} f(x)\right).$$

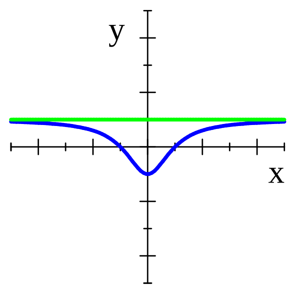
ş.a.m.d.

○**Exerciţiul 2**. Folosind una din caracterizările limitei unei funcţii într-un punct, să se arate că

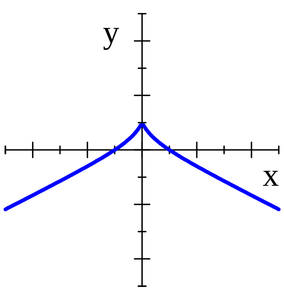
a) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2}{x+2} = 1$; **b)** $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1-x}{1+x} = -1$; **c)** $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2-1}{x^2+1} = 1$;

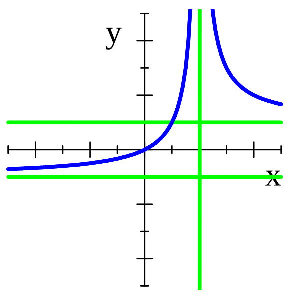


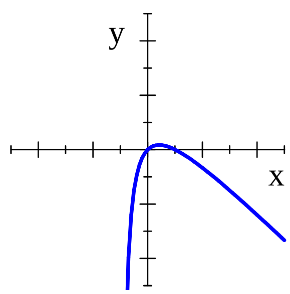




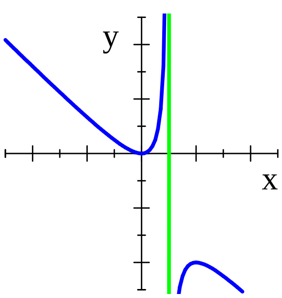
d) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1-x^2}{1+2|x|} = -\infty$; **e)** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x}{|x-2|} = +\infty$; **f)** $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x-x^2}{1+x} = -\infty$;

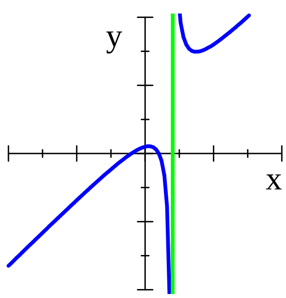






g) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2}{1-x} = +\infty$; **h)** $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2-1}{x-2} = +\infty$.





Rezolvare. Dacă se reuşeşte să se intuiască valoarea limitei, se aplică direct caracterizarea limitei cu $\varepsilon - \delta$. La acest exerciţiu valoarea limitei este precizată.

a) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2}{x+2} = 1$;

Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2}{x+2}$, $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Se alege $A \subseteq D$, $A =]-2, +\infty[$ a.î. $a = -1 \in A'$. Se studiază dacă

$$[x \to -1 \Rightarrow f(x) \to 1], \text{ adică } \exists \lim_{x\to -1} \frac{x^2}{x+2} = 1 \Leftrightarrow$$

$[\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$ a.î. $\forall x\in A$ cu $\underbrace{|x+1|<\delta}_{x \text{ este în o vecinatate a lui } -1} \Rightarrow \underbrace{|f(x)-1|<\varepsilon}_{f(x) \text{ este în ovecinătate a lui } 1}]$.

Fie $\forall\varepsilon>0$. Se caută $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ a.î. $\forall x\in A$ cu $|x+1|<\delta$ să rezulte

$$|f(x)-1|=\left|\frac{x^2}{x+2}-1\right|=\left|\frac{x^2-x-2}{x+2}\right|=\left|\frac{x-2}{x+2}\right||x+1|\le$$
$$\overset{\text{pentru } x>-2}{\le} 1\cdot|x+1| \underset{\text{rămâne }\delta}{\overset{\text{"scăpăm" de } x}{<}} \delta<\varepsilon.$$

Deci se caută $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ a.î. $0<\delta<\varepsilon$. Din Teorema de densitate a $\mathbb{R}$ în $\mathbb{R}$, între numerele reale 0 şi ε există un astfel de δ. Se poate alege, de exemplu, $\delta=\frac{1}{2}\varepsilon$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-x}{1+x}=-1$;

Fie $f:D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}, D=\mathbb{R}\backslash\{-1\}$. Se alege $A\subseteq D$, $A=\left]-\infty,-1\right[$ a.î. $a=-\infty\in A'$. Se studiază dacă

$[x\to-\infty\Rightarrow f(x)\to-1]$, adică $\exists\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-x}{1+x}=-1\Leftrightarrow$

$[\forall\varepsilon>0,\exists\beta=\beta(\varepsilon)<0$ a.î. $\forall x\in A$ cu $\underbrace{x<\beta}_{x \text{ este în o vecinatate a lui } -\infty} \Rightarrow \underbrace{|f(x)-(-1)|<\varepsilon}_{f(x) \text{ este în o vecinătate a lui } -1}]$.

Fie $\forall\varepsilon>0$. Se caută $\beta=\beta(\varepsilon)<0$ a.î. $\forall x\in A$ cu $x<\beta$ să rezulte

$$|f(x)+1|=\left|\frac{1-x}{1+x}+1\right|=\left|\frac{2}{1+x}\right|\overset{x\le-1}{=}\frac{2}{-1-x}\underset{\text{rămâne }\beta,\text{ din } x<\beta}{\overset{\text{"scăpăm" de } x}{<}}\frac{2}{-1-\beta}<\varepsilon.$$

Deci se caută $\beta=\beta(\varepsilon)<0$ a.î.

$0<\dfrac{2}{-1-\beta}<\varepsilon\overset{\text{caut }\beta<-1}{\Leftrightarrow}2<-\varepsilon-\beta\varepsilon\Leftrightarrow\beta<\dfrac{-2-\varepsilon}{\varepsilon}$.

Din Teorema "$\mathbb{R}$ este neminorată", $\exists\beta=\beta(\varepsilon)<-1$ ca mai sus. Se poate alege, de exemplu, $\beta=\min\left\{-1,\dfrac{-2-\varepsilon}{\varepsilon}-1\right\}$.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-1}{x^2+1}=1$;

Fie $f:D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}, D=\mathbb{R}$. Se alege $A\subseteq D$, $A=\mathbb{R}$ a.î. $a=+\infty\in A'$. Se studiază dacă

$[x\to+\infty\Rightarrow f(x)\to1]$, adică $\exists\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-1}{x^2+1}=1\Leftrightarrow$

$[\forall\varepsilon>0,\exists\beta=\beta(\varepsilon)>0$ a.î. $\forall x\in A$ cu $\underbrace{x>\beta}_{x \text{ este în o vecinatate a lui } +\infty} \Rightarrow \underbrace{|f(x)-1|<\varepsilon}_{f(x) \text{ este în o vecinătate a lui } 1}]$.

Fie $\forall\varepsilon>0$. Se caută $\beta=\beta(\varepsilon)>0$ a.î. $\forall x\in A$ cu $x>\beta$ să rezulte

$$|f(x)-1|=\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}-1\right|=\frac{2}{x^2+1}\underset{\text{rămâne }\beta\text{ din } x>\beta}{\overset{\text{"scăpăm" de } x}{<}}\frac{2}{\beta^2+1}<\frac{2}{\beta^2}\overset{\text{caut }\beta>1}{<}\frac{2}{\beta}<\varepsilon.$$

Deci se caută $\beta=\beta(\varepsilon)>0$ a.î. $0<\dfrac{2}{\beta}<\varepsilon\Leftrightarrow\beta>\dfrac{2}{\varepsilon}$. Din Teorema "$\mathbb{R}$ este nemajorată", $\exists\beta=\beta(\varepsilon)>1$ ca mai sus. Se poate alege, de exemplu, $\beta=\max\left\{1,\dfrac{2}{\varepsilon}+1\right\}$.

○**Exerciţiul 3**. Să se arate că următoarele funcţii nu au limită în $-\infty$, respectiv în $+\infty$:
a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\cos x$; **b)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sin x$.

○**Exerciţiul 4**. Să se arate că următoarele funcţii nu au limită în $a=0$:

a) $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \cos\dfrac{1}{x}$; **b)** $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$;

c) $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \operatorname{sgn}\left(x\cos\dfrac{1}{x}\right)$; **d)** $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \operatorname{sgn}\left(x\sin\dfrac{1}{x}\right)$;

e) $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{\cos x}{x}$.

Rezolvare. a) $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \cos\dfrac{1}{x}$;

Se alege $A = \mathbb{R}^*$ a.î. $a = 0 \in A'$. Se observă că

$\exists x_n = \dfrac{1}{0 + 2n\pi}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ un şir de numere reale din $A \setminus \{a\}$, cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$,

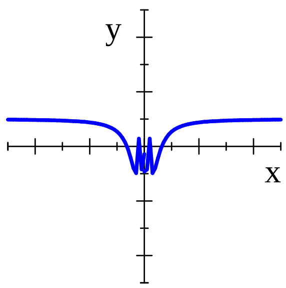
$\exists \widetilde{x}_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ un şir de numere reale din $A \setminus \{a\}$, cu $\lim\limits_{n\to\infty} \widetilde{x}_n = 0$.

Mai mult,

$f(x_n) = \cos(0 + 2n\pi) = \cos 0 = 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ este un şir de numere reale cu $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 1$,

$f(\widetilde{x}_n) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ este un şir de numere reale cu $\lim\limits_{n\to\infty} f(\widetilde{x}_n) = 0$.

Cum $1 \neq 0 \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to 0} \cos\frac{1}{x}$.

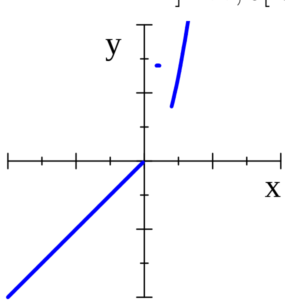


Teorema 12. (**limitele unor funcţii elementare**)$-$A se vedea Curs.
Exemple la Teorema 12$-$A se vedea Curs.
Teorema 13. (**limite remarcabile**)$-$A se vedea Curs.
Exemple la Teorema 13$-$A se vedea Curs.

Exerciţiul 5. Să se studieze:

a) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ pentru $f :]-\infty, 0[\cup \{1\} \cup]2, +\infty[\to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x, & x \in]-\infty, 0[\\ 7, & x = 1 \\ x^2, & x \in]2, +\infty[\end{cases}$.

Rezolvare. $A =]-\infty, 0[\cup \{1\} \cup]2, +\infty[$; $A' = [-\infty, 0] \cup [2, +\infty]$ în $\overline{\mathbb{R}}$.



$1 \notin A'$(1 nu este punct de acumulare pentru A, este punct izolat, chiar dacă $1 \in A$) $\Rightarrow$ nu are sens studiul limitei propuse.

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2}{x^2-3x+2}$ şi asimptotele verticale pentru f ataşată.

Rezolvare. Fie $f:]-\infty,1[\cup]1,2[\cup]2,+\infty[\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-3x+2}$.

$A=]-\infty,1[\cup]1,2[\cup]2,+\infty[;\ A'=\overline{\mathbb{R}}$.

$1\in A'\Rightarrow$are sens studiul limitei.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
x^2-3x+2		$+++$	0	$---$	0	$+++$	

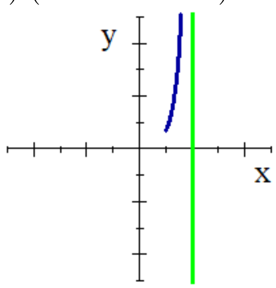
$l_s(1)=\lim\limits_{x\to 1, x<1}\dfrac{x^2}{x^2-3x+2}=\dfrac{1^2}{0_+}=+\infty;\ l_d(1)=\lim\limits_{x\to 1,x>1}\dfrac{x^2}{x^2-3x+2}=\dfrac{1^2}{0_-}=-\infty.$

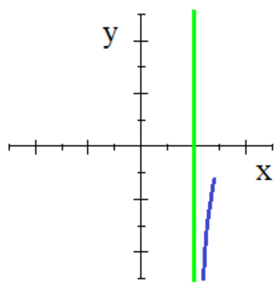
$l_s(1)\neq l_d(1)\Rightarrow\nexists\lim\limits_{x\to 1}f(x)$.

Mai mult,

$l_s(1)=\lim\limits_{x\to 1,x<1}f(x)=\dfrac{1^2}{0_+}=+\infty\Rightarrow$ dreapta $x=1$ este asimptotă verticală la stânga (spre $+\infty$) (cu desen local).

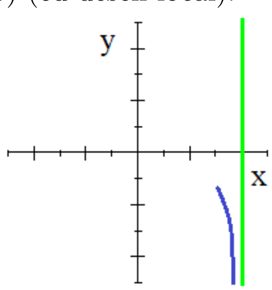
$l_d(1)=\lim\limits_{x\to 1,x>1}f(x)=\dfrac{1^2}{0_-}=-\infty\Rightarrow$ dreapta $x=1$ este asimptotă verticală la dreapta (spre $-\infty$) (cu desen local).

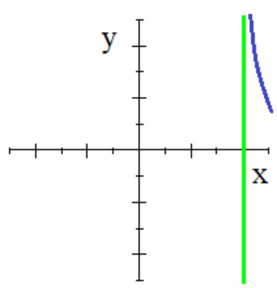




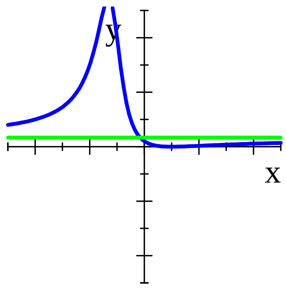
$l_s(2)=\lim\limits_{x\to 2,x<2}f(x)=\dfrac{2^2}{0_-}=-\infty\Rightarrow$ dreapta $x=2$ este asimptotă verticală la stânga (spre $-\infty$) (cu desen local).

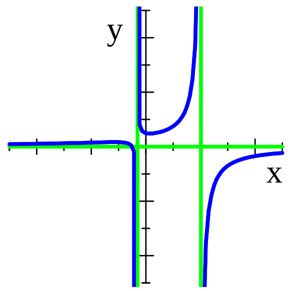
$l_d(2)=\lim\limits_{x\to 2,x>2}f(x)=\dfrac{2^2}{0_+}=+\infty\Rightarrow$ dreapta $x=2$ este asimptotă verticală la dreapta (spre $+\infty$) (cu desen local).





c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-2x+1}{3x^2+7x+5}=\dfrac{1}{3}$; **d)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+1}{-3x^2+5x+2}=0$;





e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{-2x^2+x+1}$ şi asimptotele orizontale / oblice pentru f ataşată.

Rezolvare. Fie $f:\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right[\cup\left]-\frac{1}{2},1\right[\cup\left]1,+\infty\right[\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x^3}{-2x^2+x+1}$.

$A=\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right[\cup\left]-\frac{1}{2},1\right[\cup\left]1,+\infty\right[; A'=\overline{\mathbb{R}}$.

$\infty\in A'\Rightarrow$are sens studiul limitei.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{-2x^2+x+1}=\left(\frac{1}{-2}\right)(+\infty)^{3-2}=-\infty\Rightarrow$ nu admite asimptotă orizontală spre $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\dfrac{x^3}{-2x^2+x+1}\right)=\dfrac{1}{-2}$ şi $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3}{-2x^2+x+1}-\dfrac{1}{-2}x\right)=-\dfrac{1}{4}\Rightarrow$

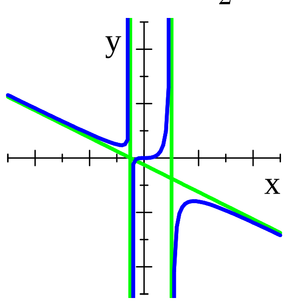
$\Rightarrow$ dreapta $y=-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{4}$ este asimptotă oblică spre $+\infty$.

$-\infty\in A'\Rightarrow$are sens studiul limitei.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{-2x^2+x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{x^2\left(-2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{1}{-2}(-\infty)^{3-2}=+\infty\Rightarrow$ nu admite asimptotă orizontală spre $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x}\dfrac{x^3}{-2x^2+x+1}\right)=\dfrac{1}{-2}$ şi $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^3}{-2x^2+x+1}-\dfrac{1}{-2}x\right)=-\dfrac{1}{4}\Rightarrow$

$\Rightarrow$ dreapta $y=-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{4}$ este asimptotă oblică spre $-\infty$.



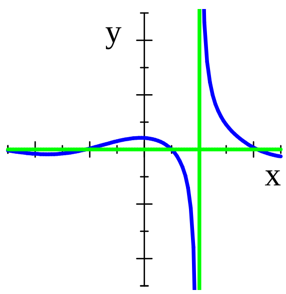
g) $\lim\limits_{x\to2,x>2}\dfrac{\sin(x-1)}{x-2}=\dfrac{\sin 1}{0_+}\overset{\sin 1>0}{=}+\infty$.

Rezolvare. Fie $f:\left]-\infty,2\right[\cup\left]2,+\infty\right[\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{\sin(x-1)}{x-2}$.

$A=\left]-\infty,2\right[\cup\left]2,+\infty\right[; A'=\overline{\mathbb{R}}$.

$2\in A'\Rightarrow$are sens studiul limitei.

$l_d(2)=\lim\limits_{x\to2,x>2}f(x)=+\infty\Rightarrow$ dreapta $x=2$ este asimptotă verticală la dreapta (spre $+\infty$).

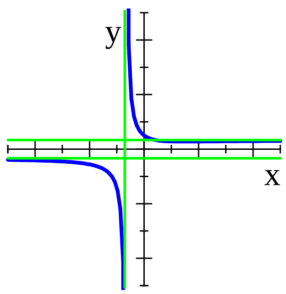


h) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ şi $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ pentru $f:\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{-2}{3}\right\}\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{3x+2}$; şi asimptotele orizontale.

Rezolvare. $A=\left]-\infty,\frac{-2}{3}\right[\cup\left]\frac{-2}{3},+\infty\right[;A'=\overline{\mathbb{R}}.$

$$+\infty\in A'\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{3x+2}\overset{\sqrt{x^2}=|x|}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(+x)\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x\left(3+\frac{2}{x}\right)}=\frac{1}{3}.$$

$$-\infty\in A'\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{3x+2}\overset{\sqrt{x^2}=|x|}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{(-x)\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x\left(3+\frac{2}{x}\right)}=\frac{-1}{3}.$$

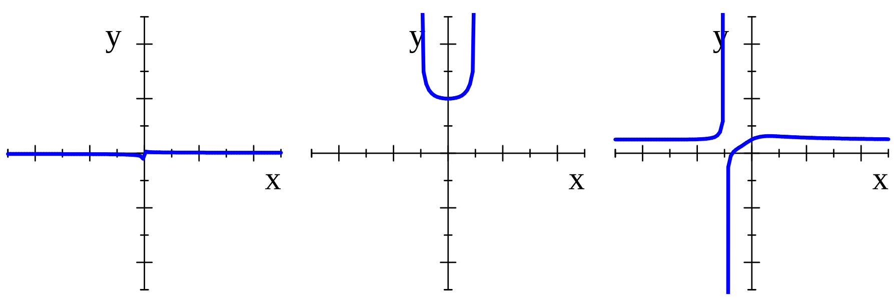


$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{1}{3}\Rightarrow$ dreapta $y=\dfrac{1}{3}$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$.

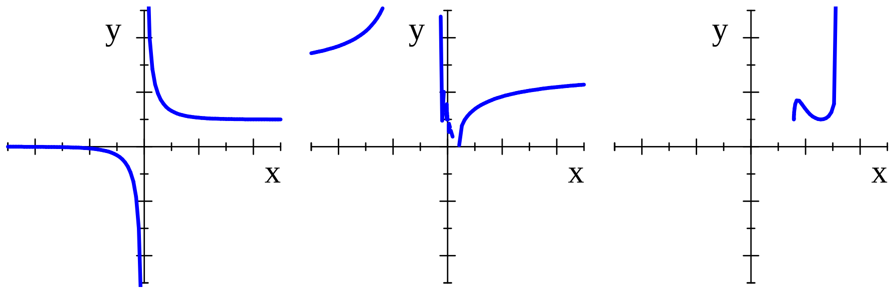
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\dfrac{1}{3}\Rightarrow$ dreapta $y=-\dfrac{1}{3}$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$.

Exerciţiul 6. Să se arate că:

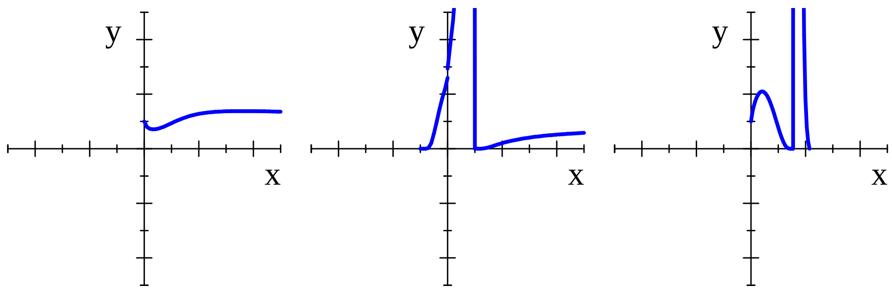
a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{8+x}-\sqrt[3]{8-x}}{x+5\sqrt[3]{x^4}}=\dfrac{1}{6}$; **b**) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{\operatorname{arctg}(1+x)-\operatorname{arctg}(1-x)}=2$; **c**) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(x^2+e^x\right)}{\ln\left(x^4+e^{2x}\right)}=\dfrac{1}{2}$



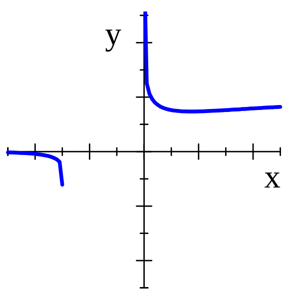
d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+e^x)}{x}=1$;**e)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x=e$; **f)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2},x>\frac{\pi}{2}}\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)^{\ln^2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}=1$;



g) $\lim\limits_{x\to 0, x>0}\left(x\cos\dfrac{x}{x^2+1}\right)^{\frac{x}{x^2+1}}=1$; **h)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2\,|x|-x}{(x+1)\,2}\right)^{\frac{1}{\ln|x|}}=e$;**i)** $\lim\limits_{x\to 0, x>0}\left(\dfrac{\sin(1+x)}{x}\right)^{x+\operatorname{tg}x}=1$;



j) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+2^x)\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)=3\ln 2$;



Rezolvare. a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+x}-\sqrt[3]{8-x}}{x+5\sqrt[3]{x^4}}\overset{\frac{0}{0}}{=}?$

Fie $f:\,]-8,8[\setminus\{0\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{8+x}-\sqrt[3]{8-x}}{x+5\sqrt[3]{x^4}}$.

Se alege $A=\,]-8,8[\setminus\{0\}\subseteq D_{\text{maximal}}$ astfel încât $a=0\in A'$.

$$l\overset{\text{dacă }\exists}{=}\lim_{x\to 0}\frac{(8+x)-(8-x)}{\left(x+5x\sqrt[3]{x}\right)\left(\left(\sqrt[3]{8+x}\right)^2+\left(\sqrt[3]{8+x}\right)\left(\sqrt[3]{8-x}\right)+\left(\sqrt[3]{8-x}\right)^2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x\left(1+5\sqrt[3]{x}\right)\left(\left(\sqrt[3]{8+x}\right)^2+\left(\sqrt[3]{8+x}\right)\left(\sqrt[3]{8-x}\right)+\left(\sqrt[3]{8-x}\right)^2\right)}=$$

$$=\frac{2}{(1+5\cdot 0)(4+4+4)}=\frac{1}{6}.$$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{\operatorname{arctg}(1+x)-\operatorname{arctg}(1-x)}\overset{\frac{0}{0}}{=}?$

Fie $f:\,]-1,1[\setminus\{0\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{\operatorname{arctg}(1+x)-\operatorname{arctg}(1-x)}$.

Se alege $A =]-1,1[\setminus \{0\}$ şi se observă că $a = 0 \in A'$.

$$l \overset{\text{dacă } \exists}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\ln \frac{1+x}{1-x}}{\operatorname{arctg} \frac{(1+x)-(1-x)}{1+(1+x)(1-x)}} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\ln\left(1+\frac{2x}{1-x}\right)}{\frac{2x}{1-x}}}_{\to 1} \cdot \frac{2x}{1-x} \cdot \underbrace{\frac{\frac{2x}{2-x^2}}{\operatorname{arctg}\frac{2x}{2-x^2}}}_{\to 1} \cdot \frac{2-x^2}{2x} = 2.$$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\left(x^2+e^x\right)}{\ln\left(x^4+e^{2x}\right)} \overset{\frac{0}{0}}{=} ?$

Fie $f : A \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{\ln\left(x^2+e^x\right)}{\ln\left(x^4+e^{2x}\right)}$.

Se alege $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ şi se observă că $a = 0 \in A'$.

$$l \overset{\text{dacă } \exists}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(e^x\left(\frac{x^2}{e^x}+1\right)\right)}{\ln\left(e^{2x}\left(\frac{x^4}{e^{2x}}+1\right)\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln e^x + \ln\left(\frac{x^2}{e^x}+1\right)}{\ln e^{2x} + \ln\left(\frac{x^4}{e^{2x}}+1\right)} \overset{(x}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1+\frac{1}{x}\ln\left(\frac{x^2}{e^x}+1\right)}{2+\frac{1}{x}\ln\left(\frac{x^4}{e^{2x}}+1\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1+\frac{1}{x}\frac{\ln\left(1+\frac{x^2}{e^x}\right)}{\frac{x^2}{e^x}}\frac{x^2}{e^x}}{2+\frac{1}{x}\frac{\ln\left(1+\frac{x^4}{e^{2x}}\right)}{\frac{x^4}{e^{2x}}}\frac{x^4}{e^{2x}}} = \lim_{x\to 0} \frac{1+\left(\underbrace{\frac{x}{e^x}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{\ln\left(1+\frac{x^2}{e^x}\right)}{\frac{x^2}{e^x}}}_{\to 1}\right)}{2+\left(\underbrace{\frac{x^4}{e^{2x}}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{\ln\left(1+\frac{x^4}{e^{2x}}\right)}{\frac{x^4}{e^{2x}}}}_{\to 1}\right)} = \frac{1}{2}.$$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(1+e^x)}{x} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} ?$

Fie $f : A \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{\ln(1+e^x)}{x}$.

Se alege $A =]0,+\infty[$ şi se observă că $a = +\infty \in A'$.

$$l \overset{\text{dacă } \exists}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln\left(e^x\left(1+e^{-x}\right)\right)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{\ln\left(1+e^{-x}\right)}{e^{-x}} \cdot \frac{e^{-x}}{x}\right) = 1+1\cdot 0 = 1.$$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x \overset{1^\infty}{=} ?$

Fie $f : A \to \mathbb{R}, f(x) = \left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x$.

Se alege $A =]\pi,+\infty[$ şi se observă că $a = +\infty \in A'$.

$$l \overset{\text{dacă } \exists}{=} \lim_{x\to +\infty} \left(1+\left(\sin\tfrac{1}{x}+\cos\tfrac{1}{x}-1\right)\right)^{\frac{1}{\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)x} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)x} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}-2\left(\frac{\sin\frac{1}{2x}}{\frac{1}{2x}}\right)^2\frac{1}{4x}\right)} = e.$$

f) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}, x>\frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)^{\ln^2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)} \overset{1^\infty}{=} ?$

Fie $f : A \to \mathbb{R}, f(x) = \left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)^{\ln^2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}$.

Se alege $A = \left]\frac{\pi}{2},+\infty\right[$ şi se observă că $a = \frac{\pi}{2} \in A'$.

$$l \overset{\text{dacă } \exists}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}, x>\frac{\pi}{2}} \left(1+\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right)\right)^{\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right)\ln^2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}, x>\frac{\pi}{2}}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right)\ln^2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)} = ... = 1.$$

Exerciţiul 7. Să se studieze dacă

$f :]-\infty, 1[\cup]1, 2[\cup]2, +\infty[\to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+8}-3}{x^2-3x+2}$

are limită în $a_1 = -\infty, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = +\infty$.

Rezolvare. $A =]-\infty, 1[\cup]1, 2[\cup]2, +\infty[\,; A' = \overline{\mathbb{R}}$.

$$+\infty \in A' \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+8}-3}{x^2-3x+2} \overset{\sqrt{x^2}=|x|}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{(+x)\left(\sqrt{1+\frac{8}{x^2}}-\frac{3}{x}\right)}{x^2\left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)} = 0.$$

$$-\infty \in A' \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+8}-3}{x^2-3x+2} \overset{\sqrt{x^2}=|x|}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{(-x)\left(\sqrt{1+\frac{8}{x^2}}-\frac{3}{x}\right)}{x^2\left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)} = 0.$$

$1 \in A' \Rightarrow$are sens studiul limitei.

$$l_s(1) = \lim_{\substack{x\to1\\x<1}} \frac{\sqrt{x^2+8}-3}{x^2-3x+2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\substack{x\to1\\x<1}} \frac{\left(x^2+8\right)-9}{\left(x^2-3x+2\right)\left(\sqrt{x^2+8}+3\right)} = \lim_{\substack{x\to1\\x<1}} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)\left(\sqrt{x^2+8}+3\right)} = \frac{-1}{3}.$$

$$l_d(1) = \lim_{\substack{x\to1\\x>1}} \frac{\sqrt{x^2+8}-3}{x^2-3x+2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\substack{x\to1\\x>1}} \frac{\left(x^2+8\right)-9}{\left(x^2-3x+2\right)\left(\sqrt{x^2+8}+3\right)} = \lim_{\substack{x\to1\\x>1}} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)\left(\sqrt{x^2+8}+3\right)} = \frac{-1}{3}.$$

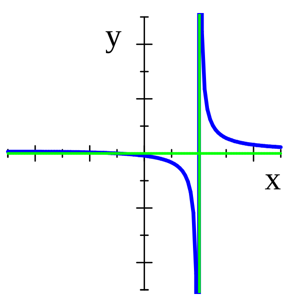
$l_s(1) = l_d(1) \Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to1} f(x) = \dfrac{-1}{3}$.

$2 \in A' \Rightarrow$are sens studiul limitei.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
x^2-3x+2		$+++$	0	$---$	0	$+++$	

$$l_s(2) = \lim_{\substack{x\to2\\x<2}} \frac{\sqrt{x^2+8}-3}{x^2-3x+2} = \frac{\sqrt{12}-3}{0_-} = -\infty; l_d(2) = \lim_{\substack{x\to2\\x>2}} \frac{\sqrt{x^2+8}-3}{x^2-3x+2} = \frac{\sqrt{12}-3}{0_+} = +\infty.$$

$l_s(2) \neq l_d(2) \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to2} f(x)$.



Exercițiul 8. Să se studieze dacă funcțiile următoare au limită în $a = 1$:

a) $f :]0, 2[\setminus \{1\} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(4(x-1))}{5(x-1)}, & \text{dacă } x \in]0, 1[\\ \dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{\operatorname{tg}(3(x-1))}{\sin(x-1)} + \dfrac{1}{5}, & \text{dacă } x \in]1, 2[\end{cases};$

Rezolvare. $A =]0, 1[\cup]1, 2[\,; A' = [0, 2]$.

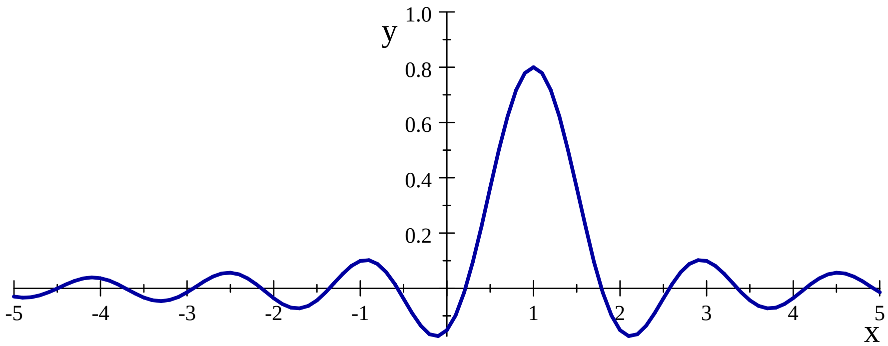
$1 \in A' \Rightarrow$are sens studiul limitei.

$$l_s(1) = \lim_{\substack{x\to1\\x<1}} \frac{\sin(4(x-1))}{5(x-1)} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\substack{x\to1\\x<1}} \frac{\sin(4(x-1))}{4(x-1)} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{5}.$$

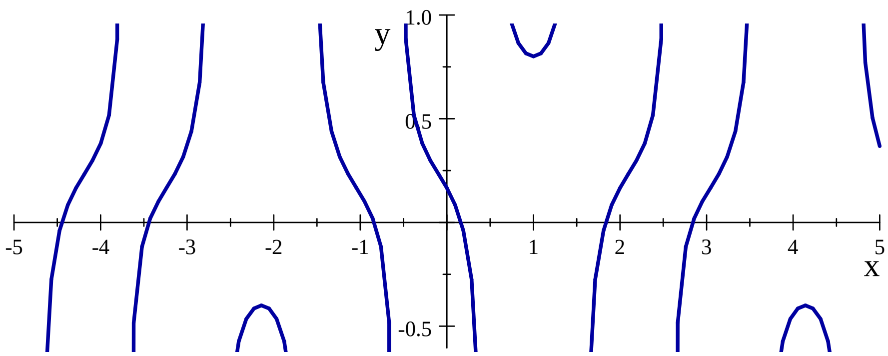
$$l_d(1) = \lim_{\substack{x\to1\\x>1}} \left(\frac{1}{5} \cdot \frac{\operatorname{tg}(3(x-1))}{\sin(x-1)} + \frac{1}{5}\right) \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\substack{x\to1\\x<1}} \left(\frac{1}{5} \cdot \frac{\operatorname{tg}(3(x-1))}{3(x-1)} \cdot \frac{(x-1)}{\sin(x-1)} \cdot 3 + \frac{1}{5}\right) = \frac{4}{5}.$$

$l_s(1) = l_d(1) \Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to1} f(x) = \dfrac{4}{5}$.

Reprezentarea graficului prelungirii prin continuitate la $\mathbb{R}$ pentru
$f_1 : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}, f_1(x) = \dfrac{\sin(4(x-1))}{5(x-1)}$ este



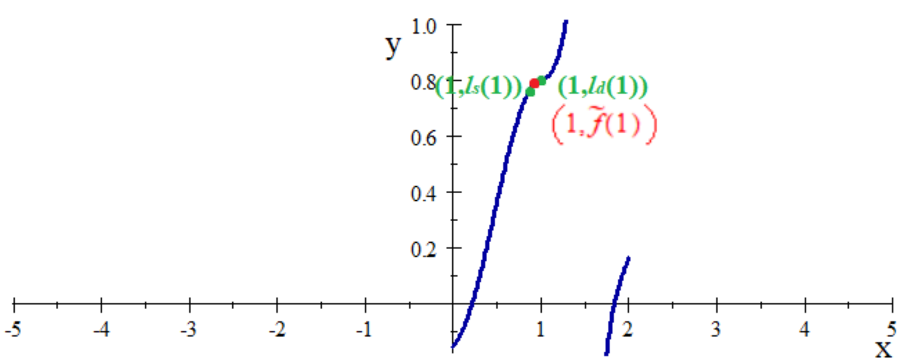
Reprezentarea graficului prelungirii prin continuitate la $\mathbb{R}$ pentru
$f_2 : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}, f_2(x) = \dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{\tan(3(x-1))}{\sin(x-1)} + \dfrac{1}{5}$ este



Reprezentarea graficului prelungirii prin continuitate la $]0,2[$ pentru f, adică al funcţiei

$$\widetilde{f} :]0,2[\to \mathbb{R}, \widetilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(4(x-1))}{5(x-1)}, & \text{dacă } x \in]0,1[\\ \dfrac{4}{5}, & \text{dacă } x = 0 \\ \dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{\operatorname{tg}(3(x-1))}{\sin(x-1)} + \dfrac{1}{5}, & \text{dacă } x \in]1,2[\end{cases},$$

este



b) $f:\left]0,2\right[\setminus\{1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln\left(x^4-x^2+1\right)}{x-1}, & \text{dacă } x\in\left]0,1\right[\\ \dfrac{\arcsin(1-x)}{1-x^2}, & \text{dacă } x\in\left]1,2\right[\end{cases};$

Rezolvare. $A=\left]0,1\right[\cup\left]1,2\right[;A'=[0,2].$

$1\in A'\Rightarrow$are sens studiul limitei.

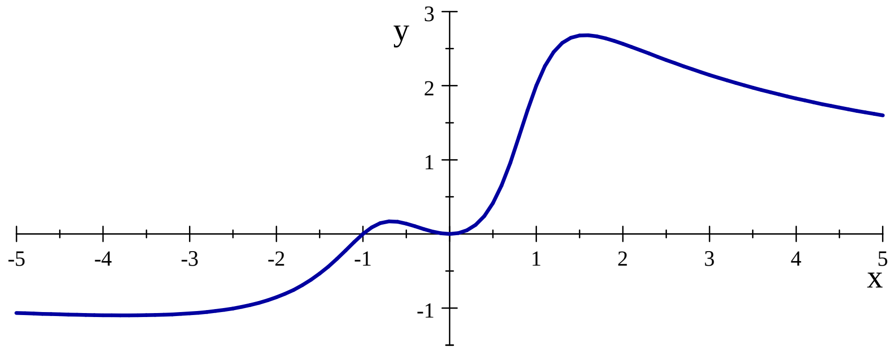
$l_s(1)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\dfrac{\ln\left(x^4-x^2+1\right)}{x-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\dfrac{\ln\left[1+\left(x^4-x^2\right)\right]}{x^4-x^2}\cdot\dfrac{x^2(x-1)(x+1)}{x-1}=2.$

$l_d(1)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\dfrac{\arcsin(1-x)}{1-x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\left(\dfrac{\arcsin(1-x)}{1-x}\cdot\dfrac{1}{1+x}\right)=\dfrac{1}{2}.$

$l_s(1)\neq l_d(1)\Rightarrow\nexists\lim\limits_{x\to1}f(x).$

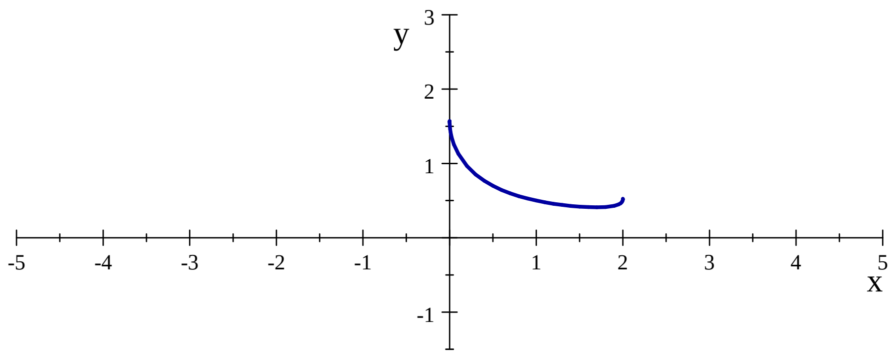
Reprezentarea graficului prelungirii prin continuitate la $\mathbb{R}$ pentru

$f_1:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}, f_1(x)=\dfrac{\ln\left(x^4-x^2+1\right)}{x-1}$ este:

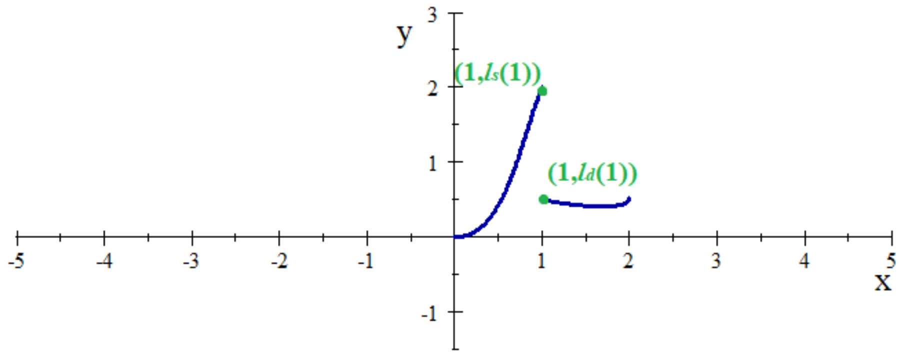


Reprezentarea graficului prelungirii prin continuitate la $[0,2]$ pentru

$f_2:[0,2]\setminus\{1\}\to\mathbb{R}, f_2(x)=\dfrac{\arcsin(1-x)}{1-x^2}$ este:



Reprezentarea graficului funcţiei f este:



ASIMPTOTE: A se vedea Curs; exerciţii suplimentare - A se vedea Complemente de Matematică

6.1. Funcţii $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue în $a \in A$

De recapitulat din manualele de liceu.

Teoremă (legătura dintre continuitate şi existenţa limitei)
Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $a \in A$. Atunci f este continuă în $a \Leftrightarrow$

-dacă $a \in A \cap A', \exists \lim\limits_{x \to a, x \in A} f(x) = f(a) \in \mathbb{R}$;

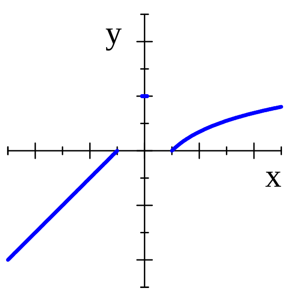
-dacă $a \in A \setminus A'$, adică este punct izolat, f este continuă prin Definiţie.

Exerciţiul 1. Să se studieze în ce puncte funcţia

$$f :]-\infty, -1[\cup \{0\} \cup]1, +\infty[\to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x+1, & x \in]-\infty, -1[\\ 2, & x = 0 \\ \ln x, & x \in]1, +\infty[\end{cases}.$$

este continuă.

Rezolvare. $A =]-\infty, -1[\cup \{0\} \cup]1, +\infty[$;



$A' = [-\infty, -1] \cup [1, +\infty]$.

În $\forall a \in]-\infty, -1[$ funcţia f este continuă ca şi funcţie elementară $\left(\exists \lim\limits_{x \to a, x \in A} f(x) = f(a) \right)$.

În $\forall a \in]1, +\infty[$ funcţia f este continuă ca şi funcţie elementară $\left(\exists \lim\limits_{x \to a, x \in A} f(x) = f(a) \right)$.

În $a = 0 \in A \setminus A'$?. 1 nu este punct de acumulare pentru A, este punct izolat$\Rightarrow$ nu are sens studiul limitei în 0. Dar $0 \in A$. În $a = 0 \in A \setminus A'$ funcţia f este continuă prin definiţie.

Deci f este continuă pe A.

Comentariu. Doar pentru $f : \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cu $A = \mathbb{I}$ interval, are loc interpretarea geometrică: "Dacă reprezentarea geometrică a G_f este parcursă de la stânga la dreapta cu creioul pe hârtie, atunci creionul rămâne cu vârful pe hârtie."

Exerciţiul 2. Să se determine $p \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin\left(x^2-4x+3\right)}{x-1}, & \text{dacă } x \in]0,1[\\ 4(x-1)+p, & \text{dacă } x \in [1,+\infty[\end{cases}$$

să fie continuă pe $]0,+\infty[$.

Rezolvare. $A =]0,+\infty[\,; A' = [0,+\infty]$.

Pe $]0,1[$ funcţia f este continuă, $\forall p \in \mathbb{R}$.

Pe $]1,+\infty[$ funcţia f este continuă, $\forall p \in \mathbb{R}$.

În $a = 1 \in A \cap A' \Rightarrow [f$ este continuă $\Leftrightarrow \exists \lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)]$

$f(1) = 4(1-1)+p = p.$

$$l_s(1) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{\sin\left(x^2-4x+3\right)}{x-1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{\sin\left(x^2-4x+3\right)}{x^2-4x+3} \cdot \frac{(x-3)(x-1)}{x-1} = 1\cdot(-2) = -2.$$

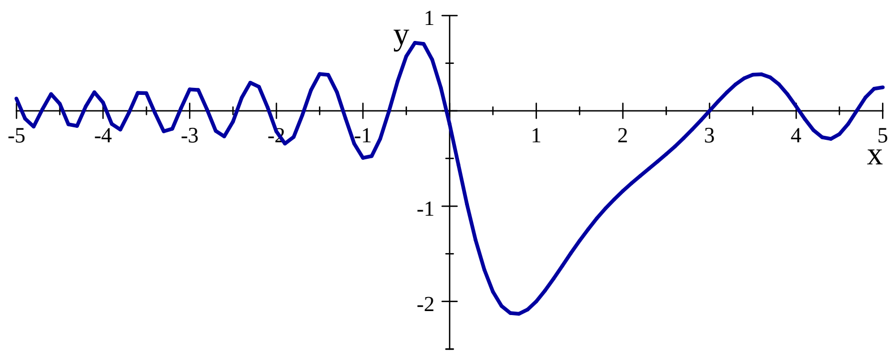
$$l_d(1) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} (4(x-1)+p) = p.$$

$\exists \lim\limits_{x\to 1} f(x) \Leftrightarrow l_s(1) = l_d(1) \Leftrightarrow p = -2.$

$\exists \lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1) \Rightarrow p = -2.$

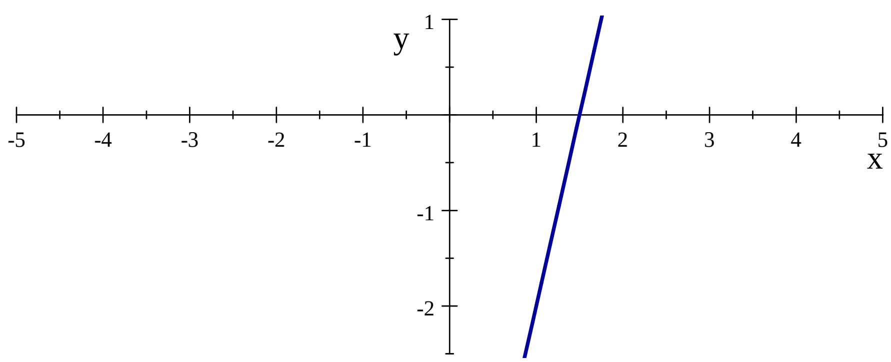
Reprezentarea graficului prelungirii prin continuitate la $\mathbb{R}$ pentru

$f_1 : \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}, f_1(x) = \dfrac{\sin\left(x^2-4x+3\right)}{x-1}$ este:

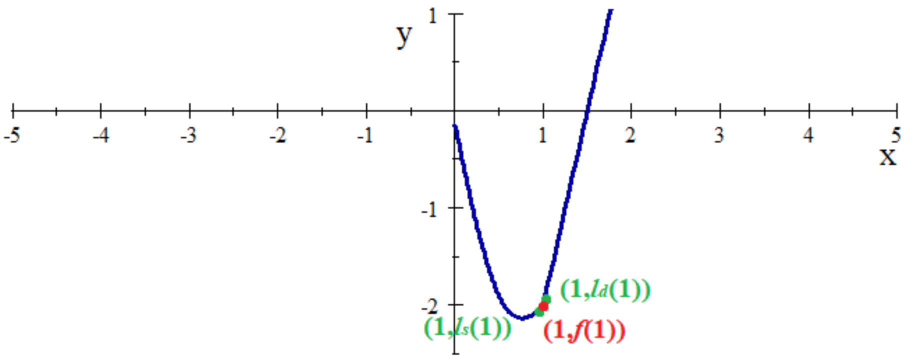


Reprezentarea graficului funcţiei

$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_2(x) = 4x-6$ este:



Reprezentarea graficului funcţiei f cu $p = -2$ este



Exercițiul 3.Să se determine $a \in \mathbb{R}$ şi $b \in \mathbb{R}^*$ astfel încât funcţia

$$f : \left]2\sqrt{2}, +\infty\right[\to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-3}{1-\sqrt{x^2-8}}, & \text{dacă } x \in \left]2\sqrt{2}, 3\right[\\ \dfrac{4}{3}x - a, & \text{dacă } x \in [3,4] \\ \dfrac{\sin(b(x-4))}{x-4}, & \text{dacă } x \in \left]4, +\infty\right[\end{cases}$$

să fie continuă pe $\left]2\sqrt{2}, +\infty\right[$.

Indicaţie. Reprezentarea graficului funcţiei cu $a = \frac{13}{3}$ şi $b = 1$ este: