SEMINAR NR. 4, REZOLVĂRI
Analiză matematică, AIA

7.1. Teoria derivabilităţii pentru $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ în $a \in A \cap A'$

De recapitulat din manualul de liceu.

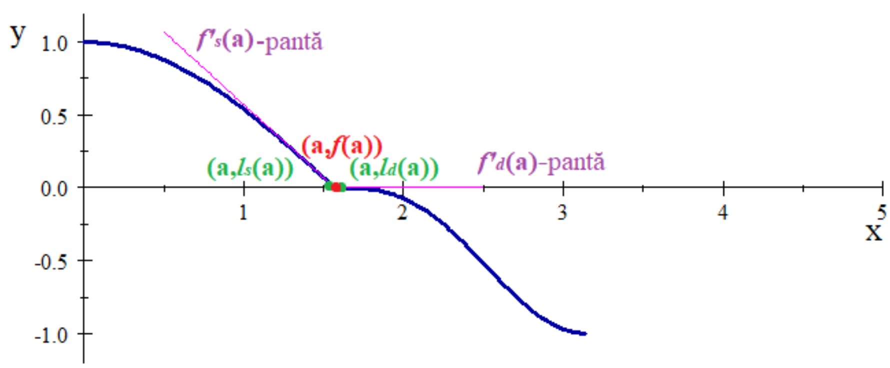
Exerciţiul 1. Să se studieze continuitatea şi derivabilitatea funcţiilor următoare pe domeniul lor de definiţie:
a) $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}, f(x) = \max\left(\cos x, \cos^3 x\right)$.

Rezolvare. •Se explicitează $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{dacă } \cos x > \cos^3 x \\ \text{valoarea comună}, & \text{dacă } \cos^3 x = \cos x \\ \cos^3 x, & \text{dacă } \cos^3 x > \cos x \end{cases}$.

Se studiază pe $[0,\pi]$ semnul pentru
$E(x) = \cos x - \cos^3 x = \cos x\left(1 - \cos^2 x\right) = \cos x \cdot \sin^2 x.$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos x$	1	$+++$	0	$---$	-1
$\sin^2 x$	0	$+++$	$+$	$+++$	0
$E(x)$	0	$+++$	0	$---$	0

Atunci $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{dacă } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\\ 0, & \text{dacă } x = \frac{\pi}{2} \\ \cos^3 x, & \text{dacă } x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}$.



•Se studiază dacă f este continuă pe $[0,\pi]$.
•• f este continuă pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ şi pe $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.
••În $a = \frac{\pi}{2} \in A \cap A'$, funcţia f este continuă $\Leftrightarrow \exists \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

$$\left.\begin{array}{l} l_s\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}, x < \frac{\pi}{2}} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}, x < \frac{\pi}{2}} \cos x = 0 \\ l_d\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}, x > \frac{\pi}{2}} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}, x > \frac{\pi}{2}} \cos^3 x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = 0.$$

Cum $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow f$ este continuă în $a = \frac{\pi}{2}$.
f continuă în a / pe $A \Rightarrow f$ "poate fi derivabilă" în a / pe A!
•Se studiază dacă f este derivabilă de ordinul 1 pe $[0,\pi]$.
•• f este derivabilă pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ şi $f'(x) = -\sin x, \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$
•• f este derivabilă pe $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ şi $f'(x) = 3\cos^2 x \cdot (-\sin x), \forall x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.
••În $a = \frac{\pi}{2} \in A \cap A'$ funcţia f este derivabilă $\Leftrightarrow \exists f'_s\left(\frac{\pi}{2}\right) = f'_d\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

modul 1.

$$\exists f'_s(1) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}, x<\frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}, x<\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - 0}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}, x<\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{x - \frac{\pi}{2}} = -1,$$

$$\exists f'_d(1) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}, x>\frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}, x>\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x - 0}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}, x>\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} \cdot \cos^2 x\right) = -1 \cdot 0 = 0$$

modul 2.

$$\exists f'_s(1) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}, x<\frac{\pi}{2}} (-\sin x) = -1.$$

$$\exists f'_d(1) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}, x>\frac{\pi}{2}} \left(3\cos^2 x \cdot (-\sin x)\right) = 0.$$

$$f'_s(1) \neq f'_d(1) \Rightarrow \nexists f'(1).$$

$$f' : [0,\pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\} \to \mathbb{R},\ f'(x) = \begin{cases} -\sin x, & \text{dacă } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\\ \nexists, & \text{dacă } x = \frac{\pi}{2} \\ 3\cos^2 x \cdot (-\sin x), & \text{dacă } x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}$$

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \min\left(x^2 + x, 4x - 2\right).$

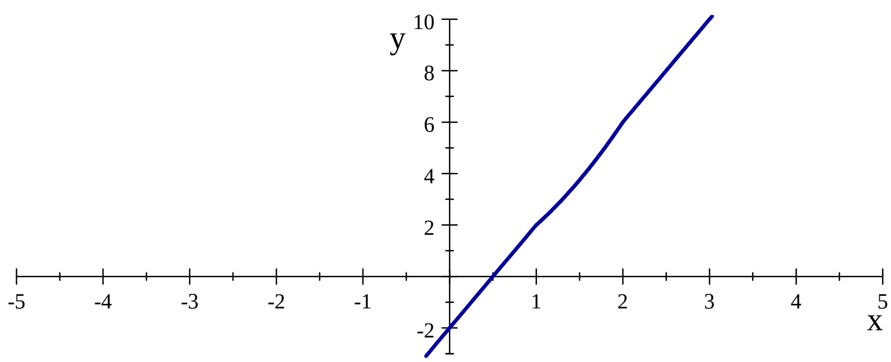
Se explicitează $f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & \text{dacă } 4x - 2 \geq x^2 + x \\ 4x - 2, & \text{dacă } x^2 + x \geq 4x - 2 \end{cases}$.

Se studiază pe $\mathbb{R}$ semnul pentru

$E(x) = \left(x^2 + x\right) - (4x - 2) = x^2 - 3x + 2.$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$x^2 - 3x + 2$		$+++$	0	$---$	0	$+++$	

Atunci $f(x) = \begin{cases} 4x - 2, & \text{dacă } x \in]-\infty, 1[\\ 2, & \text{dacă } x = 1 \\ x^2 + x, & \text{dacă } x \in]1, 2[\\ 6, & \text{dacă } x = 2 \\ 4x - 2, & \text{dacă } x \in]2, +\infty[\end{cases}$.



•Se studiază dacă f este continuă pe $\mathbb{R}$.

•• f este continuă pe $]-\infty, 1[$, $]1, 2[$ şi pe $]2, +\infty[$.

••În $a = 1 \in A \cap A'$ funcţia f este continuă $\Leftrightarrow \exists \lim_{x\to 1} f(x) = f(1).$

$$\left.\begin{array}{l} l_s(1) = \lim_{x\to 1, x<1} f(x) = \lim_{x\to 1, x<1} (4x - 2) = 2 \\ l_d(1) = \lim_{x\to 1, x>1} f(x) = \lim_{x\to 1, x>1} \left(x^2 + x\right) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \lim_{x\to 1} f(x) = 2.$$

Cum $f(1) = 2 \Rightarrow f$ este continuă în $a = 1$.

••În $a = 2 \in A \cap A'$ funcţia f este continuă $\Leftrightarrow \exists \lim_{x\to 2} f(x) = f(2).$

$$\left.\begin{array}{l} l_s(2) = \lim\limits_{x\to 2, x<2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2, x<2} \left(x^2+x\right) = 6 \\ l_d(2) = \lim\limits_{x\to 2, x>2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2, x>2} (4x-2) = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \lim_{x\to 1} f(x) = 6.$$

Cum $f(2) = 6 \Rightarrow f$ este continuă în $a = 2$.

f continuă în a / pe $A \Rightarrow f$ "poate fi derivabilă" în a / pe A!

•Se studiază dacă f este derivabilă de ordinul 1 pe $\mathbb{R}$.

•• f este derivabilă pe $]-\infty, 1[$ şi $f'(x) = 4, \forall x \in]-\infty, 1[$

•• f este derivabilă pe $]1, 2[$ şi $f'(x) = 2x+1, \forall x \in]1, 2[$

•• f este derivabilă pe $]2, +\infty[$ şi $f'(x) = 4, \forall x \in]2, +\infty[$

••În $a = 1 \in A \cap A'$ funcţia f este derivabilă $\Leftrightarrow \exists f'_s(1) = f'_d(1)$.

$$\exists f'_s(1) = \lim_{x\to 1, x<1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1, x<1} \frac{(4x-2)-2}{x-1} = 4,$$

$$\exists f'_d(1) = \lim_{x\to 1, x>1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1, x>1} \frac{\left(x^2+x\right)-2}{x-1} = 3.$$

$\nexists f'(1)$.

••În $a = 2 \in A \cap A'$ funcţia f este derivabilă $\Leftrightarrow \exists f'_s(2) = f'_d(2)$.

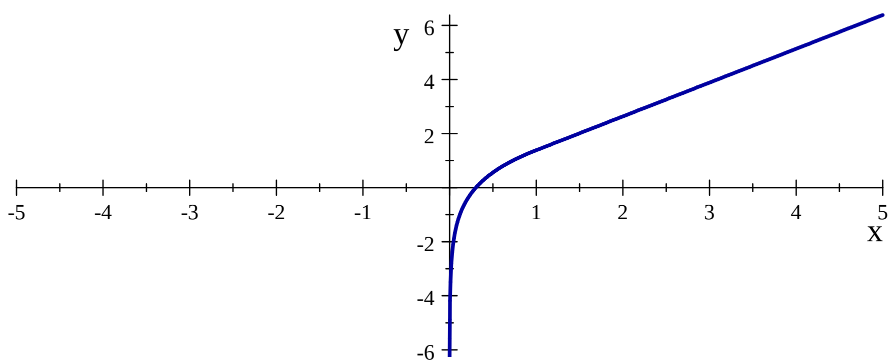
$$\exists f'_s(2) = \lim_{x\to 2, x<2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2, x<2} \frac{\left(x^2+x\right)-6}{x-2} = 5,$$

$$\exists f'_d(2) = \lim_{x\to 2, x>2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2, x>2} \frac{(4x-2)-6}{x-2} = 4.$$

$\nexists f'(2)$.

$$f' : \mathbb{R} \setminus \{1, 2\} \to \mathbb{R}, f'(x) = \begin{cases} 4, & \text{dacă } x \in]-\infty, 1[\\ \nexists, & \text{dacă } x = 1 \\ 2x+1, & \text{dacă } x \in]1, 2[\\ \nexists, & \text{dacă } x = 2 \\ 4, & \text{dacă } x \in]2, +\infty[\end{cases}$$

c) $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \ln\left(x^2+3x\right), & \text{dacă } 0 < x < 1 \\ \frac{5}{4}(x-1) + 2\ln 2, & \text{dacă } 1 \le x < +\infty \end{cases}$.



•Se studiază dacă f este continuă pe $]0, +\infty[$.

•• f este continuă pe $]0, 1[$ şi pe $]1, +\infty[$.

••În $a = 1 \in A \cap A'$ funcţia f este continuă $\Leftrightarrow \exists \lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$.

$$\left.\begin{array}{l} l_s(1) = \lim\limits_{x\to 1, x<1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1, x<1} \ln\left(x^2+3x\right) = \ln 4 \\ l_d(1) = \lim\limits_{x\to 1, x>1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1, x>1} \left(\frac{5}{4}(x-1) + 2\ln 2\right) = 2\ln 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \lim_{x\to 1} f(x) = 2\ln 2.$$

Cum $f(1) = 2\ln 2 \Rightarrow f$ este continuă în $a = 1$.

f continuă în a / pe $A \Rightarrow f$ "poate fi derivabilă" în a / pe A!

•Se studiază dacă f este derivabilă de ordinul 1 pe $]0,+\infty[$.

•• f este derivabilă pe $]0,1[$ şi $f'(x) = \dfrac{1}{x^2+3x}(2x+3), \forall x \in]0,1[$

•• f este derivabilă pe $]1,+\infty[$ şi $f'(x) = \dfrac{5}{4}, \forall x \in]1,+\infty[$

••În $a = 1 \in A \cap A'$ funcţia f este derivabilă $\Leftrightarrow \exists f'_s(1) = f'_d(1)$.

$$\exists f'_s(1) = \lim_{x\to 1, x<1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1, x<1} \frac{\ln\left(x^2+3x\right) - 2\ln 2}{x-1} = \lim_{x\to 1, x<1} \frac{\ln \frac{x^2+3x}{4}}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to 1, x<1} \frac{\ln\left(1+\frac{x^2+3x-4}{4}\right)}{\frac{x^2+3x-4}{4}} \cdot \frac{x^2+3x-4}{4} \cdot \frac{1}{x-1} = 1 \cdot \frac{5}{4},$$

$$\exists f'_d(1) = \lim_{x\to 1, x>1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1, x>1} \frac{\frac{5}{4}(x-1) + 2\ln 2 - 2\ln 2}{x-1} = \frac{5}{4}.$$

$$f' :]0,+\infty[\to \mathbb{R}, f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+3}{x^2+3x}, & \text{dacă } x < 1 \\ \frac{5}{4}, & \text{dacă } x = 1 \\ \frac{5}{4}, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$$

Exerciţiul 2. Să se studieze punctele de extrem local şi global pentru următoarele funcţii şi să se reprezinte graficul lor, precizând monotonia şi convexitatea:

a) $f : [0,5] \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x + 3.$

Rezolvare. Se studiază punctele de extrem local pentru f. Se observă că f este derivabilă de orice ordin pe $[0,5]$.

Etapa 1. Se determină punctele staţionare (critice) pentru f, adică cele în care

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 18x + 24 = 0 \Leftrightarrow [x = 2$ şi $x = 4]$

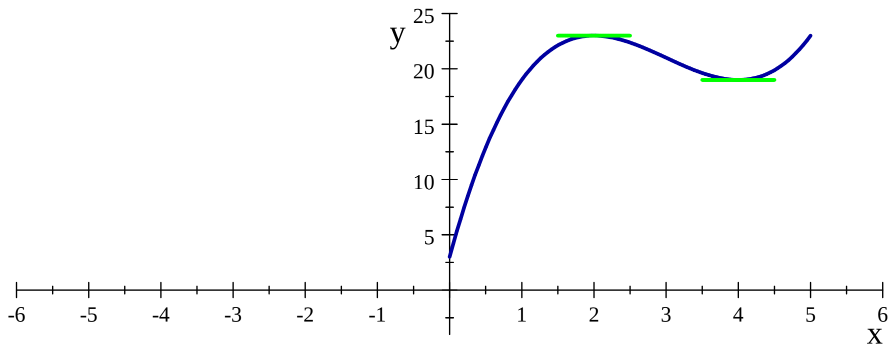
Etapa 2. Se studiază dacă punctele staţionare găsite, care sunt în domeniul funcţiei, sunt de extrem local, folosind tabelul de variaţie a funcţiei, completat şi cu derivata de ordinul al doilea pentru studiul convexităţii.

x	0		2		3		4		5
$f'(x) = 3\left(x^2 - 6x + 8\right)$	$+$	$+++$	0	$---$	$-$	$---$	0	$+++$	$+$
$f''(x) = 6(x-3)$	$-$	$---$	$-$	$---$	0	$+++$	$+$	$+++$	23
$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x + 3$	3	$\nearrow\nearrow\nearrow$ concavă	23	$\searrow\searrow\searrow$ concavă	21	$\searrow\searrow\searrow$ convexă	19	$\nearrow\nearrow\nearrow$ convexă	23

Se observă că $x = 2$ este punct de maxim local, cu $f(2) = 23$ valoarea maximă local şi că $x = 4$ este punct de minim local, cu $f(4) = 19$ valoarea minimă local.

Mai mult, comparând valorile în punctele de extrem local între ele şi cu valorile funcţiei în capetele intervalului de definiţie (eventual cu limite, în cazul intervalelor deschise şi / sau nemărginite), se observă că $x = 2$ şi $x = 5$ sunt puncte de maxim global, cu $f(2) = f(5) = 23$ valoarea maximă global şi că $x = 0$ este punct de minim global, cu $f(0) = 3$ valoarea minimă global.

Etapa 3. Se trasează graficul funcţiei f, folosind tabelul de variaţie a funcţiei, completat cu $f''(x)$.



Se observă că în punctele de extrem local, unde $f'(x) = 0$, dreptele tangente la reprezentarea G_f în acele puncte sunt paralele cu Ox.

Exerciţiul 8.Să se determine formula lui Taylor cu rest Lagrange de ordin $n \in \mathbb{N}^*$ oarecare şi să se scrie această formulă în punctul $a = 0$ pentru funcţiile:
a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^x$;**b)** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \cos x$;
c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sin x$;**d)** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{ch} x$;
e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{sh} x$;**f)** $f :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}, f(x) = \ln(1 + x)$;
g) pentru $\alpha \in \mathbb{R}^*$ fixat şi $f :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}, f(x) = (1 + x)^\alpha$.
Rezolvare. A se vedea Curs.

Exerciţiul 9. Să se determine ordinul maxim n al formulei lui Taylor cu rest Lagrange în $a = 1$ şi să se scrie această formulă pentru funcţiile:
a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^4 - 6x^2 + 1, & \text{dacă } x \leq 1 \\ 4x^4 - 8x^3, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$;
b) $f : [0, 2] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^4 + 6x^2 - 16x, & \text{dacă } 0 \leq x \leq 1 \\ 4x^3 - 12x - 1, & \text{dacă } 1 < x \leq 2 \end{cases}$
c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^x$;
d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 1$.
Rezolvare. **a)** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^4 - 6x^2 + 1, & \text{dacă } x \leq 1 \\ 4x^4 - 8x^3, & \text{dacă } x > 1. \end{cases}$
Etapa 0. Se studiază dacă f este continuă pe $\mathbb{R}$.
- f este continuă pe $]-\infty, 1[$.
- f este continuă pe $]1, +\infty[$.
- În $a = 1 \in A \cap A'$ funcţia f este continuă $\Leftrightarrow \exists \lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$.

$$\left. \begin{array}{l} l_s(1) = \lim\limits_{x \to 1, x < 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1, x < 1} \left(x^4 - 6x^2 + 1\right) = -4 \\ l_d(1) = \lim\limits_{x \to 1, x > 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1, x > 1} \left(4x^4 - 8x^3\right) = -4 \end{array} \right\} \Rightarrow \exists \lim_{x \to 1} f(x) = -4.$$

Cum $f(1) = 1^4 - 6 \cdot 1^2 + 1 = -4 \Rightarrow f$ este continuă în $a = 1$.
Etapa 1.Se studiază dacă f este derivabilă de ordinul 1 pe $\mathbb{R}$.
- f este derivabilă pe $]-\infty, 1[$ şi $f'(x) = 4x^3 - 12x, \forall x \in]-\infty, 1[$.
- f este derivabilă pe $]1, +\infty[$ şi $f'(x) = 16x^3 - 24x^2, \forall x \in]1, +\infty[$.
- În $a = 1 \in A \cap A'$ funcţia f este derivabilă $\Leftrightarrow \exists f'_s(1) = f'_d(1)$.

modul 1.

$$\exists f'_s(1) = \lim_{x \to 1, x < 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1, x < 1} \frac{x^4 - 6x^2 + 1 - (-4)}{x - 1} = \lim_{x \to 1, x < 1} \frac{\left(x^2 - 1\right)\left(x^2 - 5\right)}{x - 1} =$$

$$= \lim_{x\to1,x<1} (x+1)\left(x^2-5\right) = -8,$$

$$\exists f_d'(1) = \lim_{x\to1,x>1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1,x>1} \frac{4x^4-8x^3-(-4)}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to1,x>1} 4\left(x^3-x^2-x-1\right) = -8.$$

modul 2.

$$\exists f_s'(1) = \lim_{x\to1,x<1} \left(4x^3-12x\right) = -8,$$

$$\exists f_d'(1) = \lim_{x\to1,x>1} \left(16x^3-24x^2\right) - 8.$$

$$f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f'(x) = \begin{cases} 4x^3-12x, & \text{dacă } x<1 \\ -8, & \text{dacă } x=1 \\ 16x^3-24x^2, & \text{dacă } x>1 \end{cases}$$

Etapa 2. Se studiază dacă f este derivabilă de ordinul 2 pe $\mathbb{R}$.

•f' este derivabilă pe $]-\infty,1[$ şi $f''(x) = 12x^2-12, \forall x \in]-\infty,1[$

•f' este derivabilă pe $]1,+\infty[$ şi $f''(x) = 48x^2-48x, \forall x \in]1,+\infty[$

•În $a=1 \in A \cap A'$ funcţia f' este derivabilă $\Leftrightarrow \exists f_s''(1) = f_d''(1)$.

modul 1.

$$\exists f_s''(1) = \lim_{x\to1,x<1} \frac{f'(x)-f'(1)}{x-1} = \lim_{x\to1,x<1} \frac{4x^3-12x-(-8)}{x-1} = \lim_{x\to1,x<1} \frac{4(x+2)(x-1)^2}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to1,x<1} 4(x+2)(x-1) = 0,$$

$$\exists f_d''(1) = \lim_{x\to1,x>1} \frac{f'(x)-f'(1)}{x-1} = \lim_{x\to1,x>1} \frac{16x^3-24x^2-(-8)}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to1,x>1} 8(2x+1)(x-1) = 0.$$

modul 2.

$$\exists f_s''(1) = \lim_{x\to1,x<1} \left(12x^2-12\right) = 0,$$

$$\exists f_d''(1) = \lim_{x\to1,x>1} \left(48x^2-48x\right) = 0.$$

$$f'' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f''(x) = \begin{cases} 12x^2-12, & \text{dacă } x<1 \\ 0, & \text{dacă } x=1 \\ 48x^2-48x, & \text{dacă } x>1 \end{cases}$$

Etapa 3. Se studiază dacă f este derivabilă de ordinul 3 pe $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

•f'' este derivabilă pe $]-\infty,1[$ şi $f'''(x) = 24x, \forall x \in]-\infty,1[$

•f'' este derivabilă pe $]1,+\infty[$ şi $f'''(x) = 96x-48, \forall x \in]1,+\infty[$

•În $a=1 \in A \cap A'$ funcţia f'' nu este derivabilă, deoarece $\exists f_s''(1) \neq f_d''(1)$.

modul 1.

$$\exists f_s'''(1) = \lim_{x\to1,x<1} \frac{f''(x)-f''(1)}{x-1} = \lim_{x\to1,x<1} \frac{12x^2-12-0}{x-1} = \lim_{x\to1,x<1} 12(x+1) = 24,$$

$$\exists f_d'''(1) = \lim_{x\to1,x>1} \frac{f''(x)-f''(1)}{x-1} = \lim_{x\to1,x>1} \frac{48x^2-48x-0}{x-1} = \lim_{x\to1,x>1} (48x) = 48.$$

modul 2.

$$\exists f_s'''(1) = \lim_{x\to1,x<1} (24x) = 24,$$

$$\exists f_d'''(1) = \lim_{x\to1,x>1} (96x-48) = 48.$$

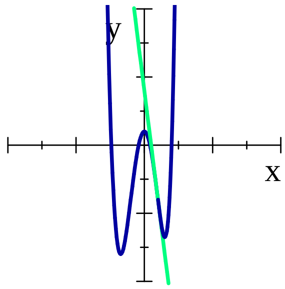
•Atunci $n+1=2 \Rightarrow n=1$ şi formula Taylor cu rest Lagrange este

$$f(x) = \underbrace{-4 + \frac{-8}{1!}(x-1)}_{T_{1,1}(x)} + \underbrace{\frac{f''(c_1)}{2!}(x-1)^2}_{R_{1,1}(x)}, \text{ cu } c_1 = 1+\theta_1(x-1), \theta_1 \in]0,1[.$$

Se reprezintă grafic pe $\mathbb{R}$ funcţia f şi polinomul Taylor

$T_{1,1}(x) = -4 + \frac{-8}{1!}(x-1)$

şi se observă că, într-o vecinătate a lui $x = 1$ se poate aproxima $f(x)$ cu $T_{1,1}(x)$ (graficul polinomului aproape se suprapune peste al lui f).



c) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^x$.

Se observă că, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, f este derivabilă de ordin n pe $\mathbb{R}$, şi în particular pe o vecinătate pentru $a = 1$.

$$\begin{array}{ll} f(x) = e^x & f(1) = e \\ f'(x) = e^x & f'(1) = e \\ f''(x) = e^x & f''(1) = e \\ \ldots & \ldots \\ f^{(n)}(x) = e^x & f^{(n)}(1) = e \\ f^{(n+1)}(x) = e^x & f^{(n+1)}(c_n) = e^{c_n} \end{array}$$

Atunci formula Taylor de ordin n ataşată lui f în $a = 1$ este

$$e^x = \underbrace{e + \frac{e}{1!}(x-1) + \frac{e}{2!}(x-1)^2 + \ldots + \frac{e}{n!}(x-1)^n}_{T_{n,1}(x)} + \underbrace{\frac{e^{1+\theta_n(x-1)}}{(n+1)!}(x-1)^{n+1}}_{R_{n,1}(x)}, \forall x \in \mathbb{R}$$

unde $\theta_n \in \left]0, 1\right[$.

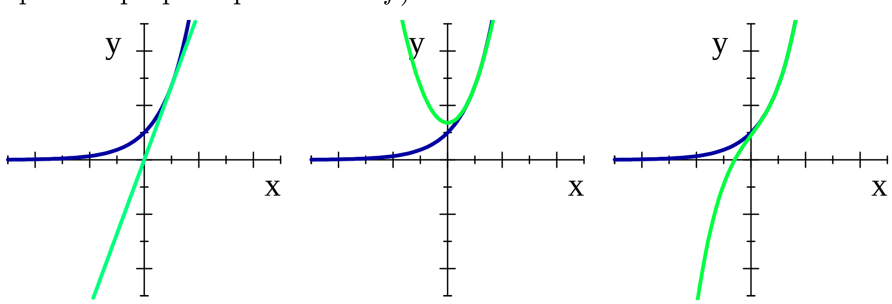
Se reprezintă grafic pe $\mathbb{R}$ funcţia f şi polinoamele Taylor

$T_{1,1}(x) = e + \frac{e}{1!}(x-1)$;

$T_{2,1}(x) = e + \frac{e}{1!}(x-1) + \frac{e}{2!}(x-1)^2$;

$T_{3,1}(x) = e + \frac{e}{1!}(x-1) + \frac{e}{2!}(x-1)^2 + \frac{e}{3!}(x-1)^3$

şi se observă că într-o vecinătate a lui $x = 1$ se poate aproxima $f(x)$ cu $T_{n,1}(x)$ (graficul polinomului aproape se suprapune peste al lui f).



d) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 1$.

Se observă că, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, f este derivabilă de ordin n pe $\mathbb{R}$, şi în particular pe o vecinătate pentru $a = 1$.

$$\begin{array}{ll} f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 1 & f(1) = 2 \\ f'(x) = 3x^2 - 10x + 7 & f'(1) = 0 \\ f''(x) = 6x - 10 & f''(1) = -4 \\ f'''(x) = 6 & f'''(1) = 6 \\ f^{(4)}(x) = 0 & f^{(4)}(1) = 0 \\ ... & ... \\ f^{(n)}(x) = 0, \forall n \in \mathbb{N}_4 & f^{(n)}(1) = 0, \forall n \in \mathbb{N}_4 \\ f^{(n+1)}(x) = 0, \forall n \in \mathbb{N}_3 & f^{(n+1)}(c_n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}_3 \end{array}$$

Atunci formula Taylor de ordin n oarecare, $n \geq 3$, ataşată lui f în $a = 1$ este

$$x^3 - 5x^2 + 7x - 1 = \underbrace{\left(2 + \frac{-4}{2!}(x-1)^2 + \frac{6}{3!}(x-1)^3 + 0 + ... + 0\right)}_{T_{n,1}(x)} + \underbrace{0}_{R_{n,1}(x)}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Adică un polinom de grad p "se dezvoltă" după un polinom Taylor în $x - a$, iar restul Lagrange este identic egal cu 0, dacă formula este de la ordinul $p - 1$ încolo.

La acest exerciţiu se pot scrie şi formulele Taylor de ordin

$n = 1$:

$$x^3 - 5x^2 + 7x - 1 = \underbrace{(2)}_{T_{1,1}(x)} + \underbrace{\frac{6(1 + \theta_1(x-1)) - 10}{2!}(x-1)^2}_{R_{1,1}(x)}, \forall x \in \mathbb{R},$$

unde $\theta_1 \in]0, 1[$, respectiv

$n = 2$:

$$x^3 - 5x^2 + 7x - 1 = \underbrace{\left(2 + \frac{-4}{2!}(x-1)^2\right)}_{T_{2,1}(x)} + \underbrace{\frac{6}{3!}(x-1)^3}_{R_{2,1}(x)}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$n = 3$:

$$x^3 - 5x^2 + 7x - 1 = \underbrace{\left(2 + \frac{-4}{2!}(x-1)^2 + \frac{6}{3!}(x-1)^3\right)}_{T_{3,1}(x)} + \underbrace{0}_{R_{3,1}(x)}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Se reprezintă grafic pe $\mathbb{R}$ funcţia f şi polinoamele Taylor

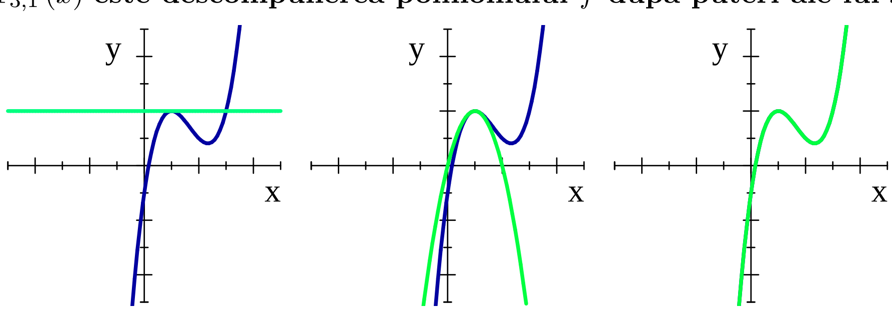
$T_{1,1}(x) = 2$;

$T_{2,1}(x) = 2 + \frac{-4}{2!}(x-1)^2$;

$T_{3,1}(x) = 2 + \frac{-4}{2!}(x-1)^2 + \frac{6}{3!}(x-1)^3$

şi se observă că într-o vecinătate a lui $x = 1$ se poate aproxima $f(x)$ cu $T_{n,1}(x)$ (graficul polinomului aproape se suprapune peste al lui f iar pentru $n = 3$ chiar se suprapune).

$T_{3,1}(x)$ **este descompunerea polinomului** f **după puteri ale lui** $x - 1$.



Exerciţiul 12. Fie $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{\operatorname{arctg} x}$.
Să se studieze dacă f este diferenţiabilă pe $]0, +\infty[$. Să se determine
$(df)(x), \forall x \in]0, +\infty[\,; (df)(1)\,; ((df)(1))(h), \forall h \in \mathbb{R};$
$((df)(x))(-3), \forall x \in]0, +\infty[\,; ((df)(1))(-3)\,.$
Rezolvare. A se vedea Curs