SEMINAR NR. 5, REZOLVĂRI
Analiză matematică, AIA

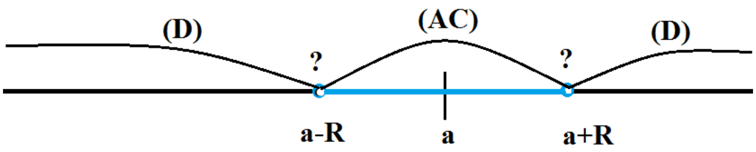
8.2. Serii de puteri în $\mathbb{R}$

Definiţia 1. Fie $a \in \mathbb{R}$ şi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale. Se numeşte *serie de puteri ale* $x-a$ sau *centrată în* a seria

$$a_0 + a_1 (x-a)^1 + a_2 (x-a)^2 + ... + a_n (x-a)^n + ..., \forall x \in \mathbb{R} \text{ sau}$$
$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-a)^n, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Observaţia 1. O serie de puteri centrată în a este o serie de funcţii putere reale
$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_n(x) = a_n (x-a)^n$.

Teorema 1 (**Cauchy-Hadamard**). Fie $\boxed{\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} \in [0, +\infty]}$ şi $\boxed{R = \frac{1}{\rho},}$ numită *rază de convergenţă*. Atunci:
a) Seria de puteri centrată în a este o serie absolut convergentă, pentru $\forall x \in \mathbb{R}$ cu $|x-a| < R$, adică pentru $\forall x \in]a-R, a+R[$.
b) Seria de puteri centrată în a este o serie divergentă, pentru $\forall x \in \mathbb{R}$ cu $|x-a| > R$, adică pentru $\forall x \in]-\infty, a-R[\cup]a+R, +\infty[$.
c) Pentru $x \in \mathbb{R}$ cu $|x-a| = R$, adică pentru $x = a-R$ şi $x = a+R$ nu se poate preciza natura seriei, se face studiu separat.



Observaţia 2. Dacă în Teorema 1,
$\boxed{\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \Rightarrow R = +\infty}$ $\Rightarrow$seria este absolut convergentă pentru $\forall x \in \mathbb{R}$.
$\boxed{\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty \Rightarrow R = 0}$ $\Rightarrow$seria este absolut convergentă pentru $x = a$ şi divergentă pentru $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{a\}$.

Observaţia 3. Dacă $a_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, şi $\boxed{\exists \rho_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}}$ atunci $\boxed{R = \frac{1}{\rho_1}.}$

Observaţia 4. Fie $m \in \mathbb{N}$. Teoria anterioară este valabilă şi pentru $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ şi

$$a_m (x-a)^m + a_{m+1} (x-a)^{m+1} + ... + a_n (x-a)^n + ..., \forall x \in \mathbb{R} \text{ sau}$$
$$\sum_{n=m}^{\infty} a_n (x-a)^n, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Exerciţiul 1. Să se studieze natura următoarelor serii de puteri:
a) $1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} 3^n (x+2)^n, \forall x \in \mathbb{R}$-Cursul 6; **b)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^n}{n} x^n, \forall x \in \mathbb{R}$-Cursul 6;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{n+1}}{n}(x+1)^n, \forall x \in \mathbb{R}$; **d)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}(x-2)^n, \forall x \in \mathbb{R}$; **e)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{n^2}x^n, \forall x \in \mathbb{R}$;

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} n\right) x^n, \forall x \in \mathbb{R}$; **h)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^{2n+1}}{2n^2+7}x^n, \forall x \in \mathbb{R}$; **i)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}x^n, \forall x \in \mathbb{R}$;

j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2+n} \cdot x^n, \forall x \in \mathbb{R}$; **k)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n - 3^n}{n}x^n, \forall x \in \mathbb{R}$;

l) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{n^2 \cdot 2^n}x^n, \forall x \in \mathbb{R}$; **m)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{(-1)^n}x^n, \forall x \in \mathbb{R}$;

n) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^{(-1)^n}x^n, \forall x \in \mathbb{R}$, unde $a \in \mathbb{R}^*$; **o)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} e^n x^{2n}, \forall x \in \mathbb{R}$;

p) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n (x+1)^{n^2}, \forall x \in \mathbb{R}$; **q)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n^2}, \forall x \in \mathbb{R}$; **r)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n}x^n$;

s) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^{n^2}x^n, a > 0$; **t)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}(x+1)^n, \forall x \in \mathbb{R}$ -Cursul 6;

u) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n (x-\pi)^n, \forall x \in \mathbb{R}$ -Cursul 6; **v)** $1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{n(-1)^n}x^n, \forall x \in \mathbb{R}$-Cursul 6.

Rezolvare. c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{n+1}}{n}(x+1)^n, \forall x \in \mathbb{R}$

Este o serie de puteri ale $(x+1)$ sau centrată în $a=-1$, cu

$a_n = \frac{(-2)^{n+1}}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Etapa 1. Se determină raza de convergenţă a seriei

Modul 1. $\boxed{\rho = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} \Rightarrow R = \frac{1}{\rho}}$

$$\text{Aici } \rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|\frac{(-2)^{n+1}}{n}\right|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{\left|(-1)^{n+1}\right| \left|2^{n+1}\right|}{|n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt[n]{2}}{\sqrt[n]{n}} = \frac{2\cdot 1}{1} \Rightarrow R = \tfrac{1}{2}.$$

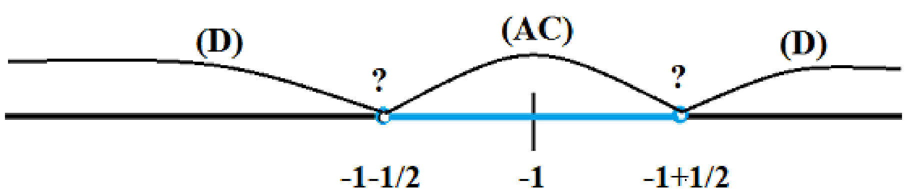
Modul 2. $\boxed{a_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N} \text{ şi } \exists \rho_1 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \Rightarrow R = \frac{1}{\rho_1}}$

Aici $a_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ şi

$$\exists \rho_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{(-2)^{n+2}}{n+1}\right|}{\left|\frac{(-2)^{n+1}}{n}\right|} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{n+2}}{2^{n+1}} \cdot \frac{n}{n+1}\right) = 2 \Rightarrow R = \tfrac{1}{2}.$$

Etapa 2. Se aplică Teorema Cauchy-Hadamard.

•Seria este absolut convergentă pentru $\forall x \in \mathbb{R}$ cu $|x+1| < \frac{1}{2}$, adică pentru $\forall x \in \left]-1-\frac{1}{2}, -1+\frac{1}{2}\right[= \left]-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right[$.



•Seria este divergentă pentru $\forall x \in \mathbb{R}$ cu $|x+1| > \frac{1}{2}$, adică pentru $\forall x \in \left]-\infty, -\frac{3}{2}\right[\cup \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$.
•Pentru $x \in \mathbb{R}$ cu $|x+1| = \frac{1}{2}$ nu se poate preciza natura seriei, se face studiu separat.
-pentru $x = -\frac{3}{2}$ se obţine seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-2)^{n+1}}{n} \left(-\frac{3}{2}+1\right)^n \overset{\text{are aceeaşi natură}}{\sim} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1} \cdot 2^n \cdot 2}{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \overset{\text{are aceeaşi natură}}{\sim}$ $(-2) \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ care este divergentă, ca serie armonică cu $\alpha = 1$.
-pentru $x = -\frac{1}{2}$ se obţine seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-2)^{n+1}}{n} \left(-\frac{1}{2}+1\right)^n \overset{\text{are aceeaşi natură}}{\sim} (-2) \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ care este semiconvergentă, ca serie armonică alternantă cu $\alpha = 1$.
Concluzie. Seria este:
absolut convergentă pentru $\forall x \in \left]-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right[$,
semiconvergentă pentru $x = -\frac{1}{2}$.
divergentă pentru $\forall x \in \left]-\infty, -\frac{3}{2}\right] \cup \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

Rezultate de folosit la studiul naturii seriilor de puteri

Seria geometrică $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ este $\begin{cases} \text{(AC)}, & \text{dacă } q \in]-1,1[\\ \text{(D)}, & \text{dacă } q \in]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[\end{cases}$

Seria armonică generalizată $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$ este $\begin{cases} \text{(AC)}, & \text{dacă } \alpha > 1 \\ \text{(D)}, & \text{dacă } \alpha \le 1 \end{cases}$

Seria armonică generalizată alternantă $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ este $\begin{cases} \text{(AC)}, & \text{dacă } \alpha > 1 \\ \text{(SC)}, & \text{dacă } \alpha \in]0,1] \\ \text{(D)}, & \text{dacă } \alpha \le 0 \end{cases}$

Condiţia suficientă de divergenţă: Dacă $\nexists \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ sau $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq 0$, atunci seria de numere reale $\sum\limits_{n=m}^{\infty} x_n$ este divergentă.

Toate criteriile de la serii de numere reale, precum şi definiţia.

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} (x-2)^n, \forall x \in \mathbb{R}$;
Este o serie de puteri ale $(x-2)$ sau centrată în $a = 2$, cu
$a_n = \dfrac{1}{n^2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
Etapa 1. Se determină raza de convergenţă a seriei.
Modul 1. $\rho = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|\dfrac{1}{n^2}\right|} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{1}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2} = 1 \Rightarrow R = 1$.
Modul 2. $a_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ şi
$\exists \rho_1 = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left|\frac{1}{(n+1)^2}\right|}{\left|\frac{1}{n^2}\right|} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1 \Rightarrow R = 1$.
Etapa 2. Se aplică Teorema Cauchy-Hadamard.
•Seria este absolut convergentă pentru $\forall x \in \mathbb{R}$ cu $|x-2| < 1$, adică pentru $\forall x \in]2-1, 2+1[=]1,3[$.
•Seria deste divergentă pentru $\forall x \in \mathbb{R}$ cu $|x-2| > 1$, adică pentru $\forall x \in]-\infty,1[\cup]3,+\infty[$.
•Pentru $x \in \mathbb{R}$ cu $|x-2| = 1$ nu se poate preciza natura seriei, se face studiu separat.
-pentru $x = 1$ se obţine seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (1-2)^n \overset{\text{are aceeaşi natură}}{\sim} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ care este absolut convegentă

ca serie armonică generalizată alternantă cu $\alpha = 2$.
-pentru $x = 3$ se obţine seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}(3-2)^n \overset{\text{are aceeaşi natură}}{\sim} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ care este absolut convegentă ca serie armonică generalizată cu $\alpha = 2$..
Concluzie. Seria este:
absolut convergentă pentru $\forall x \in [1,3]$,
divergentă pentru $\forall x \in]-\infty, 1[\cup]3, +\infty[$.

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^{n+1}}{n^2} x^n, \forall x \in \mathbb{R}$;
Este o serie de puteri ale $(x-0)$ sau centrată în $a = 0$, cu
$a_n = \dfrac{3^{n+1}}{n^2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
Etapa 1. Se determină raza de convergenţă a seriei.
Modul 1. $\rho = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|\dfrac{3^{n+1}}{n^2}\right|} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{(\sqrt[n]{3^n})(\sqrt[n]{3})}{(\sqrt[n]{n})^2} = 3 \Rightarrow R = \frac{1}{3}$.
Modul 2. $a_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ şi
$\exists \rho_1 = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left|\frac{3^{n+1+1}}{(n+1)^2}\right|}{\left|\frac{3^{n+1}}{n^2}\right|} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3 \cdot n^2}{(n+1)^2} = 3 \Rightarrow R = \frac{1}{3}$.
Etapa 2. Se aplică Teorema Cauchy-Hadamard.
•Seria este absolut convergentă pentru $\forall x \in \mathbb{R}$ cu $|x-0| < \frac{1}{3}$, adică pentru $\forall x \in \left]\frac{-1}{3}, \frac{1}{3}\right[$
•Seria deste divergentă pentru $\forall x \in \mathbb{R}$ cu $|x-0| > \frac{1}{3}$, adică pentru $\forall x \in \left]-\infty, \frac{-1}{3}\right[\cup \left]\frac{1}{3}, +\infty\right[$.
•Pentru $x \in \mathbb{R}$ cu $|x-0| = \frac{1}{3}$ nu se poate preciza natura seriei, se face studiu separat.
-pentru $x = \frac{-1}{3}$ se obţine seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^{n+1}}{n^2}\left(\frac{-1}{3} - 0\right)^n \overset{\text{are aceeaşi natură}}{\sim} 3\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$, care este absolut convegentă ca serie armonică alternantă generalizată cu $\alpha = 2$..
-pentru $x = \frac{1}{3}$ se obţine seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^{n+1}}{n^2}\left(\frac{1}{3} - 0\right)^n \overset{\text{are aceeaşi natură}}{\sim} 3\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, care este absolut convergentă ca serie armonică generalizată cu $\alpha = 2$.
Concluzie. Seria este:
absolut convergentă pentru $\forall x \in \left[\frac{-1}{3}, \frac{1}{3}\right]$,
divergentă pentru $\forall x \in \left]-\infty, \frac{-1}{3}\right[\cup \left]\frac{1}{3}, +\infty\right[$.

○**g)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} n\right) x^n, \forall x \in \mathbb{R}$;
Este o serie de puteri ale $(x-0)$ sau centrată în $a = 0$, cu
$a_n = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
Etapa 1. Se determină raza de convergenţă a seriei
Modul 1. $\rho = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} n\right|}$ greoi de calculat.
Modul 2. $a_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ şi
$\exists \rho_1 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(n+1)\right|}{\left|\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} n\right|} \overset{-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}, \forall x \in \mathbb{R}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(n+1)}{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} n} \underset{\text{funcţii ataşate}}{\overset{\text{L'Hospital pentru}}{=}} 1 \Rightarrow R = 1$.
Etapa 2. Se aplică Teorema Cauchy-Hadamard.
•Seria este absolut convergentă pentru $\forall x \in \mathbb{R}$ cu $|x| < 1$, adică pentru $\forall x \in]-1, -1[$.
•Seria deste divergentă pentru $\forall x \in \mathbb{R}$ cu $|x| > 1$, adică pentru $\forall x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

•Pentru $x \in \mathbb{R}$ cu $|x| = 1$ nu se poate preciza natura seriei, se face studiu separat.

-pentru $x = -1$ se obţine seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} n\right)(-1)^n \overset{\text{are aceeaşi natură}}{\sim} \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} n\right)$ care este semiconvergentă. Într-adevăr:

Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} n\right)$ este convergentă cu Criteriul Leibniz. Într-adevăr, şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este şir alternant, adică

$$x_n = (-1)^n \underbrace{\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} n\right)}_{a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

şi, mai mult, $x_n = (-1)^n \cdot a_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$, unde

$$\begin{cases} a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \\ (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ este şir monoton descrescător} \\ \qquad \text{deoarece } (\operatorname{arctg} n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ este şir monoton crescător} \\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0. \end{cases}$$

$\overset{\text{C. Leibniz}}{\Rightarrow}$ seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} n\right)$ este convergentă.

Seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} n\right)$ nu este absolut convergentă deoarece seria modulelor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} n\right)$ este divergentă. Într-adevăr, se aplică Criteriul comparaţiei cu inegalităţi. Fie

$f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, f(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x - \frac{1}{x} + 1 - \frac{\pi}{4}$

$\exists f' :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, f'(x) = -\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2(1+x^2)} > 0$

Cum $f'(x) > 0, \forall x \in]0, +\infty[\Rightarrow f$ este monoton strict crescătoare

$\Rightarrow f(n) > f(1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} - 1 + 1 - \frac{\pi}{4} = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*.$

Atunci

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} n > \frac{1}{n} - 1 + \frac{\pi}{4}, \forall n \in \mathbb{N}^*. \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - 1 + \frac{\pi}{4}\right) \text{ este serie divergentă, deoarece } \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} - 1 + \frac{\pi}{4}\right) = -1 + \frac{\pi}{4} \neq 0 \end{array}\right\}$$

$\overset{\text{C. comparaţiei}}{\Rightarrow} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} n\right)$ este divergentă.

-pentru $x = 1$ se obţine seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} n\right)$ care este divergentă.

Concluzie. Seria este:

absolut convergentă pentru $\forall x \in]-1, 1[$,

divergentă pentru $\forall x \in]-\infty, -1[\cup [1, +\infty[$

semiconvergentă pentru $x = -1$.

h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^{2n+1}}{2n^2+7} x^n, \forall x \in \mathbb{R};$

Este o serie de puteri ale $(x - 0)$ sau centrată în $a = 0$, cu

$$a_n = \frac{5^{2n+1}}{2n^2+7}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Etapa 1. Se determină raza de convergenţă a seriei.

Modul 1. $\rho = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|\frac{5^{2n+1}}{2n^2+7}\right|} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{5^{\frac{2n+1}{n}}}{\left(\sqrt[n]{2n^2+7}\right)} = 5^2 \Rightarrow R = \frac{1}{5^2}.$

Modul 2. $a_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ şi

$$\exists\rho_1=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\dfrac{5^{2(n+1)+1}}{2(n+1)^2+7}\right|}{\left|\dfrac{5^{2n+1}}{2n^2+7}\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{5^{2n+3-2n-1}\left(2n^2+7\right)}{2(n+1)^2+7}=\lim_{n\to\infty}\left(5^2\cdot\frac{2n^2+7}{2n^2+4n+9}\right)=5^2\Rightarrow$$

$R=\frac{1}{5^2}$.

Etapa 2. Se aplică Teorema Cauchy-Hadamard.

•Seria este absolut convergentă pentru $\forall x\in\mathbb{R}$ cu $|x-0|<\frac{1}{5^2}$, adică pentru $\forall x\in\left]\frac{-1}{5^2},\frac{1}{5^2}\right[$

•Seria deste divergentă pentru $\forall x\in\mathbb{R}$ cu $|x-0|>\frac{1}{5^2}$, adică pentru $\forall x\in\left]-\infty,\frac{-1}{5^2}\right[\cup\left]\frac{1}{5^2},+\infty\right[$.

•Pentru $x\in\mathbb{R}$ cu $|x-0|=\frac{1}{5^2}$ nu se poate preciza natura seriei, se face studiu separat.

-pentru $x=\frac{-1}{5^2}$ se obţine seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^{2n+1}}{2n^2+7}\left(\frac{-1}{5^2}-0\right)^n\overset{\text{are aceeaşi natură}}{\sim}5\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n^2+7}$, care este absolut convegentă. Într-adevăr:

$$\left.\begin{array}{l}0\le\left|\frac{(-1)^n}{2n^2+7}\right|\le\frac{1}{n^2},\forall n\in\mathbb{N}^*.\\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\text{ este serie convergentă}\\ \qquad\text{ca şi serie armonică cu }\alpha=2>1\end{array}\right\}\overset{\text{C. comparaţiei}}{\Rightarrow}\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{2n^2+7}\right|\text{ este serie convergentă.}$$

-pentru $x=\frac{1}{5^2}$ se obţine seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^{2n+1}}{2n^2+7}\left(\frac{1}{5^2}-0\right)^n\overset{\text{are aceeaşi natură}}{\sim}5\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2+7}$, care este absolut convergentă ca anterior.

Concluzie. Seria este:

absolut convergentă pentru $\forall x\in\left[\frac{-1}{5^2},\frac{1}{5^2}\right]$,

divergentă pentru $\forall x\in\left]-\infty,\frac{-1}{5^2}\right[\cup\left]\frac{1}{5^2},+\infty\right[$.

i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}x^n,\forall x\in\mathbb{R};$

Este o serie de puteri ale $(x-0)$ sau centrată în $a=0$, cu

$a_n=\dfrac{1}{n(n+1)},\forall n\in\mathbb{N}^*.$

Etapa 1. Se determină raza de convergenţă a seriei

Modul 1. $\rho=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left|\dfrac{1}{n(n+1)}\right|}=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{1}{\left(\sqrt[n]{n}\right)\left(\sqrt[n]{n+1}\right)}=1\Rightarrow R=\frac{1}{1}.$

Modul 2. $a_n\neq0,\forall n\in\mathbb{N}^*$ şi

$$\exists\rho_1=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right|}{\left|\dfrac{1}{n(n+1)}\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)}=1\Rightarrow R=\frac{1}{1}.$$

Etapa 2. Se aplică Teorema Cauchy-Hadamard.

•Seria este absolut convergentă pentru $\forall x\in\mathbb{R}$ cu $|x-0|<1$, adică pentru $\forall x\in\left]-1,1\right[$

•Seria deste divergentă pentru $\forall x\in\mathbb{R}$ cu $|x-0|>1$, adică pentru $\forall x\in\left]-\infty,-1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$.

•Pentru $x\in\mathbb{R}$ cu $|x-0|=1$ nu se poate preciza natura seriei, se face studiu separat.

-pentru $x=-1$ se obţine seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}(-1-0)^n\overset{\text{are aceeaşi natură}}{\sim}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n(n+1)}$ care este absolut convegentă. Într-adevăr:

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leq \left|\dfrac{(-1)^n}{n(n+1)}\right| \leq \frac{1}{n^2}, \forall n \in \mathbb{N}^*. \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ este serie convergentă} \\ \qquad \text{ca şi serie armonică cu } \alpha = 2 > 1 \end{array}\right\} \overset{\text{C. comparaţiei}}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n(n+1)}\right| \text{ este serie convergentă.}$$

-pentru $x = 1$ se obţine seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}(1-0)^n \overset{\text{are aceeaşi natură}}{\sim} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$ care este absolut convergentă ca anterior.

Concluzie. Seria este:

absolut convergentă pentru $\forall x \in [-1, 1]$,

divergentă pentru $\forall x \in \left]-\infty, -1\right[\cup \left]1, +\infty\right[$.

○**j)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n^2+n} \cdot x^n, \forall x \in \mathbb{R};$

Este o serie de puteri ale $(x - 0)$ sau centrată în $a = 0$, cu

$a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n^2+n}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$

Etapa 1. Se determină raza de convergenţă a seriei

Modul 1. $\rho = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n^2+n}\right|} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{\frac{n^2+n}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1} = e \Rightarrow R = \frac{1}{e}.$

Modul 2. $a_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ şi $\exists \rho_1$ =greoi= $e \Rightarrow R = \frac{1}{e}$.

Etapa 2. Se aplică Teorema Cauchy-Hadamard.

•Seria este absolut convergentă pentru $\forall x \in \mathbb{R}$ cu $|x - 0| < \frac{1}{e}$, adică pentru $\forall x \in \left]\frac{-1}{e}, \frac{1}{e}\right[$

•Seria deste divergentă pentru $\forall x \in \mathbb{R}$ cu $|x - 0| > \frac{1}{e}$, adică pentru $\forall x \in \left]-\infty, \frac{-1}{e}\right[\cup \left]\frac{1}{e}, +\infty\right[$.

•Pentru $x \in \mathbb{R}$ cu $|x - 0| = \frac{1}{e}$ nu se poate preciza natura seriei, se face studiu separat.

-pentru $x = \frac{-1}{e}$ se obţine seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n^2+n} \left(\frac{-1}{e}\right)^n \overset{\text{are aceeaşi natură}}{\sim} \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{e}\right)^n$ care este divergentă din Condiţia suficientă de divergenţă. Într-adevăr,

$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{e} \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$dacă există, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq 0.$

-pentru $x = \frac{1}{e}$ se obţine seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n^2+n} \left(\frac{1}{e}\right)^n \overset{\text{are aceeaşi natură}}{\sim} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{e}\right)^n$ care este care este divergentă din Condiţia suficientă de divergenţă. Într-adevăr,

$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{e} \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$dacă există, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq 0.$

Concluzie. Seria este:

absolut convergentă pentru $\forall x \in \left]\frac{-1}{e}, \frac{1}{e}\right[$,

divergentă pentru $\forall x \in \left]-\infty, \frac{-1}{e}\right] \cup \left[\frac{1}{e}, +\infty\right[$.

○**k)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-2)^n - 3^n}{n} x^n, \forall x \in \mathbb{R};$

Este o serie de puteri ale $(x - 0)$ sau centrată în $a = 0$, cu

$a_n = \dfrac{(-2)^n - 3^n}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$

Deoarece $\mathbb{N}^* = \left\{2\widetilde{k}; \widetilde{k} \in \mathbb{N}^*\right\} \cup \left\{2\widetilde{k} + 1; \widetilde{k} \in \mathbb{N}\right\}$, se explicitează

$$a_n = \begin{cases} \frac{2^n-3^n}{n}, & \text{dacă } n = 2\widetilde{k}; \widetilde{k} \in \mathbb{N}^* \\ \frac{-2^n-3^n}{n}, & \text{dacă } n = 2\widetilde{k}+1; \widetilde{k} \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Etapa 1. Se determină raza de convergenţă a seriei

Modul 1. $\rho = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|\frac{(-2)^n-3^n}{n}\right|} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{3^n\left|\left(\frac{-2}{3}\right)^n-1\right|}{n}} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{\sqrt[n]{3^n}\cdot\sqrt[n]{\left|\left(\frac{-2}{3}\right)^n-1\right|}}{\sqrt[n]{n}} = 3.$

SAU, Deoarece $\mathbb{N}^* = \left\{2\widetilde{k}; \widetilde{k} \in \mathbb{N}^*\right\} \cup \left\{2\widetilde{k}+1; \widetilde{k} \in \mathbb{N}\right\}$, se explicitează

$$v_n = \sqrt[n]{\left|\frac{(-2)^n-3^n}{n}\right|} = \begin{cases} \frac{\sqrt[n]{3^n}\cdot\sqrt[n]{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}}{\sqrt[n]{n}}, & \text{dacă } n = 2\widetilde{k}; \widetilde{k} \in \mathbb{N}^* \\ \frac{\sqrt[n]{3^n}\cdot\sqrt[n]{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}}{\sqrt[n]{n}}, & \text{dacă } n = 2\widetilde{k}+1; \widetilde{k} \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Se determină

$$\begin{cases} \lim\limits_{\widetilde{k}\to\infty} v_{2\widetilde{k}} = \frac{3\cdot 1}{1} \\ \lim\limits_{\widetilde{k}\to\infty} v_{2\widetilde{k}+1} = \frac{3\cdot 1}{1} \end{cases} \Rightarrow \mathcal{L}\left((v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\right) = \{3\} \Rightarrow \begin{cases} \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} v_n = 3 \\ \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} v_n = 3 \end{cases}$$

$\Rightarrow \rho = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} v_n = 3$. Deci $R = \frac{1}{3}$.

Modul 2. $a_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ şi

$$\exists ?\rho_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{(-2)^{n+1}-3^{n+1}}{n+1}\right|}{\left|\frac{(-2)^n-3^n}{n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-2)^{n+1}-3^{n+1}}{(-2)^n-3^n}\frac{n}{n+1}\right| = \lim_{n\to\infty} \left(\left|\frac{3^{n+1}\left(\left(\frac{-2}{3}\right)^{n+1}-1\right)}{3^n\left(\left(\frac{-2}{3}\right)^n-1\right)}\right|\cdot\frac{n}{n+1}\right) = 3.$$

SAU, Deoarece $\mathbb{N}^* = \left\{2\widetilde{k}; \widetilde{k} \in \mathbb{N}^*\right\} \cup \left\{2\widetilde{k}+1; \widetilde{k} \in \mathbb{N}\right\}$, se explicitează

$$u_n = \frac{\left|\frac{(-2)^{n+1}-3^{n+1}}{n+1}\right|}{\left|\frac{(-2)^n-3^n}{n}\right|} = \left|\frac{(-2)^{n+1}-3^{n+1}}{(-2)^n-3^n}\frac{n}{n+1}\right| = \begin{cases} \frac{3^{n+1}+2^{n+1}}{3^n-2^n}\cdot\frac{n}{n+1}, & \text{dacă } n = 2\widetilde{k}; \widetilde{k} \in \mathbb{N}^* \\ \frac{3^{n+1}+2^{n+1}}{3^n-2^n}\cdot\frac{n}{n+1}, & \text{dacă } n = 2\widetilde{k}+1; \widetilde{k} \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Se determină

$$\begin{cases} \lim\limits_{\widetilde{k}\to\infty} u_{2\widetilde{k}} = 3 \\ \lim\limits_{\widetilde{k}\to\infty} u_{2\widetilde{k}+1} = 3 \end{cases} \Rightarrow \mathcal{L}\left((u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\right) = \{3\} \Rightarrow \begin{cases} \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} u_n = 3 \\ \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} u_n = 3 \end{cases}$$

$\Rightarrow \rho_1 = \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 3$. Deci $R = \frac{1}{3}$.

Etapa 2. Se aplică Teorema Cauchy-Hadamard.

•Seria este absolut convergentă pentru $\forall x \in \mathbb{R}$ cu $|x| < \frac{1}{3}$, adică pentru $\forall x \in \left]\frac{-1}{3}, \frac{1}{3}\right[$.

•Seria deste divergentă pentru $\forall x \in \mathbb{R}$ cu $|x| > \frac{1}{3}$, adică pentru $\forall x \in \left]-\infty, \frac{-1}{3}\right[\cup \left]\frac{1}{3}, +\infty\right[$.

•Pentru $x \in \mathbb{R}$ cu $|x| = \frac{1}{3}$ nu se poate preciza natura seriei, se face studiu separat.

-pentru $x = \frac{-1}{3}$ se obţine seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n-3^n}{n}\left(\frac{-1}{3}\right)^n \overset{\text{are aceeaşi natură}}{\sim} \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{(-1)^n}{n}\right)$. Ultima serie este semiconvergentă ca sumă de seriile ulterioare. Într-adevăr:

* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ este absolut convergentă din Criteriul raportului, deoarece termenul general al seriei,

$$x_n = \frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

verifică

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{2}{3} < 1.$$

* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ este semiconvergentă, ca serie armonică alternantă cu $\alpha = 1$.

-pentru $x = \frac{1}{3}$ se obţine seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n-3^n}{n}\left(\frac{1}{3}\right)^n \overset{\text{are aceeaşi natură}}{\sim} \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\left(\frac{-2}{3}\right)^n - \frac{1}{n}\right)$. Ultima serie este divergentă ca sumă de seriile ulterioare. Într-adevăr

$*\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{-2}{3}\right)^n$ este absolut convergentă din Criteriul raportului, deoarece termenul general al seriei modulelor,

$y_n=\left|\frac{1}{n}\left(\frac{-2}{3}\right)^n\right|>0, \forall n\in\mathbb{N}^*$

verifică

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_{n+1}}{y_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n}=\frac{2}{3}<1.$

$*\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ este divergentă, ca serie armonică cu $\alpha=1$.

Concluzie. Seria este:

absolut convergentă pentru $\forall x\in\left]\frac{1}{3},\frac{-1}{3}\right[$,

semiconvergentă pentru $x=\frac{-1}{3}$

divergentă pentru $\forall x\in\left]-\infty,\frac{-1}{3}\right[\cup\left[\frac{1}{3},+\infty\right[$.

l) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{n^2\cdot 2^n}x^n, \forall x\in\mathbb{R};$

Este o serie de puteri ale $(x-0)$ sau centrată în $a=0$, cu

$a_n=\frac{2+(-1)^n}{n^2\cdot 2^n}, \forall n\in\mathbb{N}^*.$

Deoarece $\mathbb{N}^*=\left\{2\widetilde{k};\widetilde{k}\in\mathbb{N}^*\right\}\cup\left\{2\widetilde{k}+1;\widetilde{k}\in\mathbb{N}\right\}$, se explicitează

$$a_n=\begin{cases}\frac{3}{n^2\cdot 2^n}, & \text{dacă } n=2\widetilde{k};\widetilde{k}\in\mathbb{N}^*\\ \frac{1}{n^2\cdot 2^n}, & \text{dacă } n=2\widetilde{k}+1;\widetilde{k}\in\mathbb{N}\end{cases}$$

Etapa 1. Se determină raza de convergenţă a seriei

Modul 1. $\rho=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left|\frac{2+(-1)^n}{n^2\cdot 2^n}\right|}$.

Deoarece $\mathbb{N}^*=\left\{2\widetilde{k};\widetilde{k}\in\mathbb{N}^*\right\}\cup\left\{2\widetilde{k}+1;\widetilde{k}\in\mathbb{N}\right\}$, se explicitează

$$v_n=\sqrt[n]{\left|\frac{2+(-1)^n}{n^2 2^n}\right|}=\begin{cases}\frac{\sqrt[n]{3}}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2\cdot 2}, & \text{dacă } n=2\widetilde{k};\widetilde{k}\in\mathbb{N}^*\\ \frac{1}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2\cdot 2}, & \text{dacă } n=2\widetilde{k}+1;\widetilde{k}\in\mathbb{N}.\end{cases}$$

Se determină

$$\begin{cases}\lim\limits_{\widetilde{k}\to\infty}v_{2\widetilde{k}}=\frac{1}{2}\\ \lim\limits_{\widetilde{k}\to\infty}v_{2\widetilde{k}+1}=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\mathcal{L}\left((v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\right)=\left\{\frac{1}{2}\right\}\Rightarrow\begin{cases}\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}v_n=\frac{1}{2}\\ \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}v_n=\frac{1}{2}\end{cases}$$

$\Rightarrow\rho=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}v_n=\frac{1}{2}\Rightarrow R=2.$

Modul 2. $a_n\neq 0, \forall n\in\mathbb{N}^*$ şi $\exists?\rho_1=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left|\frac{2+(-1)^{n+1}}{(n+1)^2\cdot 2^{n+1}}\right|}{\left|\frac{2+(-1)^n}{n^2\cdot 2^n}\right|}$.

Deoarece $\mathbb{N}^*=\left\{2\widetilde{k};\widetilde{k}\in\mathbb{N}^*\right\}\cup\left\{2\widetilde{k}+1;\widetilde{k}\in\mathbb{N}\right\}$, se explicitează

$$u_n=\frac{\left|\frac{2+(-1)^{n+1}}{(n+1)^2\cdot 2^{n+1}}\right|}{\left|\frac{2+(-1)^n}{n^2\cdot 2^n}\right|}=\left|\frac{2+(-1)^{n+1}}{2+(-1)^n}\frac{n^2\cdot 2^n}{(n+1)^2\cdot 2^{n+1}}\right|=\begin{cases}\frac{1}{3}\cdot\frac{n^2}{2(n+1)^2}, & \text{dacă } n=2\widetilde{k};\widetilde{k}\in\mathbb{N}^*\\ \frac{3}{1}\cdot\frac{n^2}{2(n+1)^2}, & \text{dacă } n=2\widetilde{k}+1;\widetilde{k}\in\mathbb{N}.\end{cases}$$

Se determină

$$\begin{cases} \lim\limits_{\widetilde{k}\to\infty} u_{2\widetilde{k}} = \frac{1}{6} \\ \lim\limits_{\widetilde{k}\to\infty} u_{2\widetilde{k}+1} = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \mathcal{L}\left((u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\right) = \left\{\frac{1}{6}, \frac{3}{2}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, u_n = \frac{1}{6} \\ \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, u_n = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow \nexists \rho_1 = \lim\limits_{n\to\infty} u_n \Rightarrow$nu se poate aplica Modul 2.

Etapa 2. Se aplică Teorema Cauchy-Hadamard.

•Seria este absolut convergentă pentru $\forall x \in \mathbb{R}$ cu $|x| < 2$, adică pentru $\forall x \in \left]-2, 2\right[$.

•Seria deste divergentă pentru $\forall x \in \mathbb{R}$ cu $|x| > 2$, adică pentru $\forall x \in \left]-\infty, -2\right[\cup \left]2, +\infty\right[$.

•Pentru $x \in \mathbb{R}$ cu $|x| = 2$ nu se poate preciza natura seriei, se face studiu separat.

-pentru $x = -2$ se obţine seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{n^2\cdot 2^n}(-2)^n \overset{\text{are aceeaşi natură}}{\sim} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot(-1)^n+1}{n^2}$. Ultima serie este absolut convergentă. Într-adevăr

*Se studiază dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Termenul general al seriei este

$x_n = \frac{2\cdot(-1)^n+1}{n^2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Deoarece $\mathbb{N} = \left\{2\widetilde{k}; \widetilde{k} \in \mathbb{N}^*\right\} \cup \left\{2\widetilde{k}+1; \widetilde{k} \in \mathbb{N}\right\}$, se explicitează

$$x_n = \begin{cases} \frac{3}{n^2}, & \text{dacă } n = 2\widetilde{k}; \widetilde{k} \in \mathbb{N}^* \\ \frac{-1}{n^2}, & \text{dacă } n = 2\widetilde{k}+1; \widetilde{k} \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Se determină

$$\begin{cases} \lim\limits_{\widetilde{k}\to\infty} x_{2\widetilde{k}} = 0; \\ \lim\limits_{\widetilde{k}\to\infty} x_{2\widetilde{k}+1} = 0. \end{cases} \Rightarrow \mathcal{L}\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\right) = \{0\} \Rightarrow \begin{cases} \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = 0 \\ \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$$ $\Rightarrow$seria *poate fi* convergentă.

*Se aplică Criteriul comparaţiei cu inegalităţi.

$$\left.\begin{array}{l} 0 \le \left|\frac{2\cdot(-1)^n+1}{n^2}\right| \le \frac{3}{n^2}, \forall n \in \mathbb{N}^*. \\ 3\sum\limits_{n=1}^{n} \frac{1}{n^2} \text{ este serie convergentă ca şi serie} \\ \qquad \text{armonică generalizată cu } \alpha = 2 > 1. \end{array}\right\} \overset{\text{C. comparaţiei}}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{2\cdot(-1)^n+1}{n^2}\right| \text{ este serie convergentă} \Rightarrow$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot(-1)^n+1}{n^2}$ este serie absolut convergentă

-pentru $x = 2$ se obţine seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{n^2\cdot 2^n}2^n \overset{\text{are aceeaşi natură}}{\sim} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{n^2}$. Ultima serie este absolut convergentă, ca anterior.

Concluzie. Seria este:

absolut convergentă pentru $\forall x \in [-2, 2]$,

divergentă pentru $\forall x \in \left]-\infty, -2\right[\cup \left]2, +\infty\right[$.

m) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{(-1)^n} x^n, \forall x \in \mathbb{R}$;

Este o serie de puteri ale $(x - 0)$ sau centrată în $a = 0$, cu

$a_n = n^{(-1)^n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Deoarece $\mathbb{N}^* = \left\{2\widetilde{k}; \widetilde{k} \in \mathbb{N}^*\right\} \cup \left\{2\widetilde{k}+1; \widetilde{k} \in \mathbb{N}\right\}$, se explicitează

$$a_n = \begin{cases} n, & \text{dacă } n = 2\widetilde{k}; \widetilde{k} \in \mathbb{N}^* \\ \frac{1}{n}, & \text{dacă } n = 2\widetilde{k}+1; \widetilde{k} \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Etapa 1. Se determină raza de convergenţă a seriei.

Modul 1. $\rho = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|n^{(-1)^n}\right|}$.

Deoarece $\mathbb{N}^* = \left\{2\widetilde{k}; \widetilde{k} \in \mathbb{N}^*\right\} \cup \left\{2\widetilde{k}+1; \widetilde{k} \in \mathbb{N}\right\}$, se explicitează

$$v_n = \sqrt[n]{\left|n^{(-1)^n}\right|} = \begin{cases} \sqrt[n]{n}, & \text{dacă } n = 2\widetilde{k}; \widetilde{k} \in \mathbb{N}^* \\ \frac{1}{\sqrt[n]{n}}, & \text{dacă } n = 2\widetilde{k}+1; \widetilde{k} \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Se determină

$$\begin{cases} \lim\limits_{\widetilde{k}\to\infty} v_{2\widetilde{k}} = 1 \\ \lim\limits_{\widetilde{k}\to\infty} v_{2\widetilde{k}+1} = 1 \end{cases} \Rightarrow \mathcal{L}\left((v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\right) = \{1\} \Rightarrow \begin{cases} \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, v_n = 1 \\ \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, v_n = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow \rho = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, v_n = 1 \Rightarrow R = 1.$

Modul 2. $a_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ şi $\exists ?\rho_1 = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left|(n+1)^{(-1)^{n+1}}\right|}{\left|n^{(-1)^n}\right|}$.

Deoarece $\mathbb{N}^* = \left\{2\widetilde{k}; \widetilde{k} \in \mathbb{N}^*\right\} \cup \left\{2\widetilde{k}+1; \widetilde{k} \in \mathbb{N}\right\}$, se explicitează

$$u_n = \frac{\left|(n+1)^{(-1)^{n+1}}\right|}{\left|n^{(-1)^n}\right|} = \begin{cases} \frac{1}{n(n+1)}, & \text{dacă } n = 2\widetilde{k}; \widetilde{k} \in \mathbb{N}^* \\ n\,(n+1)\,, & \text{dacă } n = 2\widetilde{k}+1; \widetilde{k} \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Se determină

$$\begin{cases} \lim\limits_{\widetilde{k}\to\infty} u_{2\widetilde{k}} = 0 \\ \lim\limits_{\widetilde{k}\to\infty} u_{2\widetilde{k}+1} = +\infty \end{cases} \Rightarrow \mathcal{L}\left((u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\right) = \{0, +\infty\} \Rightarrow \begin{cases} \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, u_n = 0 \\ \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, u_n = +\infty \end{cases}$$

$\Rightarrow \nexists \rho_1 = \lim\limits_{n\to\infty} u_n \Rightarrow$nu se poate aplica Modul 2.

Etapa 2. Se aplică Teorema Cauchy-Hadamard.

•Seria este absolut convergentă pentru $\forall x \in \mathbb{R}$ cu $|x| < 1$, adică pentru $\forall x \in \left]-1, 1\right[$.

•Seria deste divergentă pentru $\forall x \in \mathbb{R}$ cu $|x| > 1$, adică pentru $\forall x \in \left]-\infty, -1\right[\cup \left]1, +\infty\right[$.

•Pentru $x \in \mathbb{R}$ cu $|x| = 1$ nu se poate preciza natura seriei, se face studiu separat.

-pentru $x = -1$ se obţine seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{(-1)^n} (-1)^n$ care este divergentă din Condiţia suficientă de divergenţă. Într-adevăr, termenul general al seriei este

$$x_n = n^{(-1)^n} (-1)^n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Deoarece $\mathbb{N} = \left\{2\widetilde{k}; \widetilde{k} \in \mathbb{N}^*\right\} \cup \left\{2\widetilde{k}+1; \widetilde{k} \in \mathbb{N}\right\}$, se explicitează

$$x_n = \begin{cases} n, & \text{dacă } n = 2\widetilde{k}; \widetilde{k} \in \mathbb{N}^* \\ -\frac{1}{n}, & \text{dacă } n = 2\widetilde{k}+1; \widetilde{k} \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Se determină

$$\begin{cases} \lim\limits_{\widetilde{k}\to\infty} x_{2\widetilde{k}} = +\infty; \\ \lim\limits_{\widetilde{k}\to\infty} x_{2\widetilde{k}+1} = 0. \end{cases} \Rightarrow \mathcal{L}\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\right) = \{0, +\infty\} \Rightarrow \begin{cases} \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = 0 \\ \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = +\infty \end{cases} \Rightarrow \nexists \lim\limits_{n\to\infty} x_n \Rightarrow \text{seria}$$

este divergentă.

-pentru $x = 1$ se obţine seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{(-1)^n}$ care este serie divergentă, analog cu anterior.

Concluzie. Seria este:

absolut convergentă pentru $\forall x \in \left]-1, 1\right[$,

divergentă pentru $\forall x \in \left]-\infty, -1\right] \cup \left[1, +\infty\right[$.

n) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^{(-1)^n} x^n, \forall x \in \mathbb{R}$, unde $a \in \mathbb{R}^*$;

Analog cu m).

o) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^n x^{2n}, \forall x \in \mathbb{R}$.

Seria are aceeaşi natură cu seria $\sum\limits_{\widetilde{n}=1}^{\infty} a_{\widetilde{n}} x^{\widetilde{n}}$, unde $a_{\widetilde{n}} = \begin{cases} e^n, & \text{dacă } \widetilde{n} = 2n, n \in \mathbb{N}^* \\ 0, & \text{dacă } \widetilde{n} = 2n+1, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

Etapa 1. Se determină raza de convergenţă a seriei.

Modul 1. $\widetilde{\rho} = \overline{\lim\limits_{\widetilde{n}\to\infty}} \sqrt[\widetilde{n}]{|a_{\widetilde{n}}|}$.

Deoarece $\mathbb{N}^* = \{2n; n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{2n+1; n \in \mathbb{N}\}$, se explicitează

$$v_{\widetilde{n}} = \sqrt[\widetilde{n}]{|a_{\widetilde{n}}|} = \begin{cases} \sqrt[2n]{e^n}, & \text{dacă } \widetilde{n} = 2n; n \in \mathbb{N}^* \\ \sqrt[2n+1]{0}, & \text{dacă } \widetilde{n} = 2n+1; n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Se determină

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} v_{2n} = \sqrt{e} \\ \lim\limits_{n\to\infty} v_{2n+1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathcal{L}\left((v_{\widetilde{n}})_{\widetilde{n}\in\mathbb{N}^*}\right) = \{0, \sqrt{e}\} \Rightarrow \begin{cases} \underline{\lim\limits_{\widetilde{n}\to\infty}} v_{\widetilde{n}} = 0 \\ \overline{\lim\limits_{\widetilde{n}\to\infty}} v_{\widetilde{n}} = \sqrt{e} \end{cases}$$

$\Rightarrow \widetilde{\rho} = \overline{\lim\limits_{\widetilde{n}\to\infty}} v_{\widetilde{n}} = \sqrt{e} \Rightarrow \widetilde{R} = R = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

Modul 2. Nu se poate aplica, deoarece $a_{2n+1} = 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Etapa 2. Se aplică Teorema Cauchy-Hadamard direct pentru seria iniţială.

•Seria este absolut convergentă, pentru $\forall x \in \mathbb{R}$ cu $|x| < \frac{1}{\sqrt{e}}$, adică pentru $\forall x \in \left]-\frac{1}{\sqrt{e}}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right[$.

•Seria deste divergentă, pentru $\forall x \in \mathbb{R}$ cu $|x| > \frac{1}{\sqrt{e}}$, adică pentru $\forall x \in \left]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{e}}\right[\cup \left]\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty\right[$.

•Pentru $x \in \mathbb{R}$ cu $|x| = \frac{1}{\sqrt{e}}$ nu se poate preciza natura seriei, se face studiu separat.

-pentru $x = -\frac{1}{\sqrt{e}}$ se obţine seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} e^n \left(-\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{2n} \overset{\text{are aceeaşi natură}}{\sim} \sum\limits_{n=1}^{\infty} 1$, care este divergentă din Condiţia suficientă de divergenţă, deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0$.

-pentru $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ se obţine seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} e^n \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{2n} \overset{\text{are aceeaşi natură}}{\sim} \sum\limits_{n=1}^{\infty} 1$, care este divergentă din Condiţia suficientă de divergenţă, deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0$.

Concluzie. Seria este:

absolut convergentă pentru $\forall x \in \left]-\frac{1}{\sqrt{e}}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right[$,

divergentă pentru $\forall x \in \left]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{e}}\right] \cup \left[\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty\right[$.

p) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n (x+1)^{n^2}, \forall x \in \mathbb{R}$;

Seria are aceeaşi natură cu seria $\sum\limits_{\widetilde{n}=1}^{\infty} a_{\widetilde{n}} (x+1)^{\widetilde{n}}$, unde $a_{\widetilde{n}} = \begin{cases} 2^n, & \text{dacă } \widetilde{n} = n^2, n \in \mathbb{N}^* \\ 0, & \text{dacă } \widetilde{n} \neq n^2, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

Etapa 1. Se determină raza de convergenţă a seriei.

Modul 1. $\widetilde{\rho} = \overline{\lim\limits_{\widetilde{n}\to\infty}} \sqrt[\widetilde{n}]{|a_{\widetilde{n}}|}$. Se explicitează

$$v_{\widetilde{n}} = \sqrt[\widetilde{n}]{|a_{\widetilde{n}}|} = \begin{cases} \sqrt[n^2]{2^n}, & \text{dacă } \widetilde{n} = n^2; n \in \mathbb{N}^* \\ 0, & \text{dacă } \widetilde{n} \neq n^2; n \in \mathbb{N}. \end{cases} = \begin{cases} \sqrt[n]{2}, & \text{dacă } \widetilde{n} = n^2; n \in \mathbb{N}^* \\ 0, & \text{dacă } \widetilde{n} \neq n^2; n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Se determină

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{\widetilde{n}\to\infty \\ \widetilde{n}=n^2}} v_{\widetilde{n}} = 1 \\ \lim\limits_{\substack{\widetilde{n}\to\infty \\ \widetilde{n}\neq n^2}} v_{\widetilde{n}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathcal{L}\left((v_{\widetilde{n}})_{\widetilde{n}\in\mathbb{N}^*}\right) = \{0, 1\} \Rightarrow \begin{cases} \underline{\lim\limits_{\widetilde{n}\to\infty}} v_{\widetilde{n}} = 0 \\ \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} v_{\widetilde{n}} = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow \widetilde{\rho} = \overline{\lim\limits_{\widetilde{n}\to\infty}} v_{\widetilde{n}} = 1 \Rightarrow \widetilde{R} = R = 1.$

Modul 2. Nu se poate aplica, deoarece $a_{\widetilde{n}} = 0, \forall \widetilde{n} \neq n^2, n \in \mathbb{N}$.

Etapa 2. Se aplică Teorema Cauchy-Hadamard.

•Seria este absolut convergentă, pentru $\forall x \in \mathbb{R}$ cu $|x+1| < 1$, adică pentru $\forall x \in \left]-2, 0\right[$.

•Seria deste divergentă, pentru $\forall x \in \mathbb{R}$ cu $|x+1| > 1$, adică pentru $\forall x \in \left]-\infty, -2\right[\cup \left]0 + \infty\right[$.

•Pentru $x \in \mathbb{R}$ cu $|x+1| = 1$ nu se poate preciza natura seriei, se face studiu separat.

-pentru $x = -2$ se obţine seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n (-2+1)^{n^2} \overset{\text{are aceeaşi natură}}{\sim} \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n^2} 2^n$ care este divergentă din Condiţia suficientă de divergenţă, deoarece $\nexists \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

-pentru $x = 0$ se obţine seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n (0+1)^{n^2} \overset{\text{are aceeaşi natură}}{\sim} \sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n$ care este divergentă din Condiţia suficientă de divergenţă, deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} 2^n = +\infty \neq 0$.

Concluzie. Seria este:

absolut convergentă pentru $\forall x \in \left]-2, 0\right[$,

divergentă pentru $\forall x \in \left]-\infty, -2\right] \cup \left[0, +\infty\right[$.

q) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n^2}, \forall x \in \mathbb{R}$;

Analog cu p), seria este:

absolut convergentă pentru $\forall x \in \left]-1, 1\right[$,

divergentă pentru $\forall x \in \left]-\infty, -1\right] \cup \left[1, +\infty\right[$.

r) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n} x^n$;

s) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^{n^2} x^n, a > 0$;

Indicaţie. Este o serie de puteri ale $(x-0)$ sau centrată în $a = 0$, cu

$a_n = a^{n^2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Se determină raza de convergenţă a seriei

$$\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|a^{n^2}\right|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} a^n = \begin{cases} 0, & \text{dacă } 0 < a < 1 \\ 1 & \text{dacă } a = 1 \\ +\infty & \text{dacă } a > 1. \end{cases} \Rightarrow R = \begin{cases} +\infty, & \text{dacă } 0 < a < 1 \\ 1 & \text{dacă } a = 1 \\ 0 & \text{dacă } a > 1. \end{cases}$$

Seria geometrică de puteri. $\sum\limits_{n=m}^{\infty} x^n, \forall x \in \mathbb{R}$ este

•punctual şi absolut convergentă, dacă $x \in \left]-1, 1\right[$, cu suma

$s : \left]-1, 1\right[\to \mathbb{R}, s(x) = x^m \frac{1}{1-x}$;

•divergentă, dacă $x \in \left]-\infty, -1\right] \cup \left[1, +\infty\right[$.

Pentru $m = 0$, se convine să se noteze $1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$, adică

$$\boxed{(*)\, 1 + x + x^2 + ... + x^n + ... = \frac{1}{1-x}, \forall x \in \left]-1, 1\right[\text{ sau } |x| < 1.}$$

Operaţii cu serii de puteri

Observaţia 1. În orice serie de puteri se poate face schimbare de variabilă de funcţie putere pe intervalul de convergenţă.

În $(*)$, din $x = -y \Rightarrow$

$$\boxed{(*_1)\, 1 - y + y^2 + ... + (-1)^n y^n + ... = \frac{1}{1+y}, \forall y \in \mathbb{R} \text{ cu } -y \in \left]-1,1\right[, \text{ adică } y \in \left]-1,1\right[.}$$

În $(*)$, din $x = -y^2 \Rightarrow$

$$\boxed{(*_2)\, 1 - y^2 + y^4 + ... + (-1)^n y^{2n} + ... = \frac{1}{1+y^2}, \forall y \in \mathbb{R} \text{ cu } -y^2 \in \left]-1,1\right[, \text{ adică } y \in \left]-1,1\right[.}$$

Teorema 2. A se vedea Cursul 6.
Teorema 3. A se vedea Cursul 6.

Exerciţiul 2. Să se determine intervalul de convergenţă şi suma seriei $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n, \forall x \in \mathbb{R}$.

Rezolvare. Este o serie de puteri ale $x - 0$ sau centrată în 0, cu
$a_n = n^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Etapa 1. Se determină raza de convergenţă a seriei.

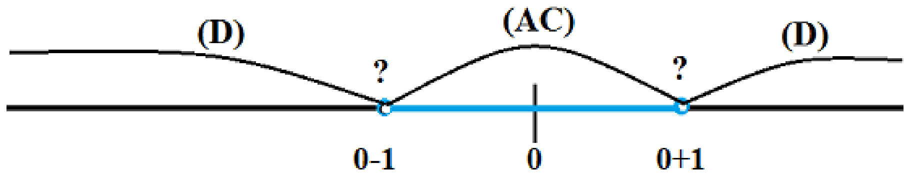
Modul 1. $\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|n^2|} = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n}\right)^2 = 1^2 = 1 \Rightarrow R = \frac{1}{1} = 1.$

Modul 2. $a_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ şi

$$\exists \rho_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|(n+1)^2\right|}{|n^2|} = 1 \Rightarrow R = 1.$$

Etapa 2. Se aplică Teorema Cauchy-Hadamard.

•Seria este absolut convergentă, pentru $\forall x \in \mathbb{R}$ cu $|x - 0| < 1$, adică pentru $\forall x \in \left]-1,1\right[$.



•Seria deste divergentă, pentru $\forall x \in \mathbb{R}$ cu $|x - 0| > 1$, adică pentru $\forall x \in \left]-\infty,-1\right[\cup \left]1,+\infty\right[$.

•Pentru $x \in \mathbb{R}$ cu $|x - 0| = 1$ nu se poate preciza natura seriei, se face studiu separat.

-pentru $x = -1$ se obţine seria $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (-1)^n$, care este divergentă sau din Condiţia suficientă de divergenţă, deoarece $\nexists \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} n^2 (-1)^n$ sau ca serie armonică generalizată alternantă cu $\alpha = -2$.

-pentru $x = 1$ se obţine seria $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$, care este divergentă sau din Condiţia suficientă de divergenţă, deoarece $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} n^2 = +\infty \neq 0$ sau ca serie armonică generalizată cu $\alpha = -2$.

Deci seria este:

absolut convergentă pentru $\forall x \in \left]-1,1\right[$,

divergentă pentru $\forall x \in \left]-\infty,-1\right] \cup \left[1,+\infty\right[$.

Intervalul de convergenţă este $\mathbb{I}_C = \left]-1,1\right[$.

Etapa 3. Se determină suma seriei.

$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = s(x), \forall x \in \mathbb{I}_C$.

$1^2 x^1 + 2^2 x^2 + 3^2 x^3 + ... + n^2 x^n + ... = ?, \forall x \in \mathbb{I}_C$.

Se observă că n poate să apară ca factor lui x^n prin operaţia de derivare.

Se ştie de la seria geometrică

$$(*)\ 1+x+x^2+...+x^n+...=\frac{1}{1-x}, \forall x\in\left]-1,1\right[\Big| \tfrac{d}{dx}$$

Se aplică Teorema 3 şi, prin derivare termen cu termen,

$$\Rightarrow 0+1+2x+3x^2+...+nx^{n-1}+...=\frac{1}{(1-x)^2}, \forall x\in\left]-1,1\right[=(-1,1) \Big| \cdot x\in\left]-1,1\right[\setminus\{0\}$$

$$\Rightarrow x+2x^2+...+nx^n+...=\frac{x}{(1-x)^2}, \forall x\in\left]-1,1\right[\setminus\{0\}.$$

Egalitatea precedentă se verifică şi pentru $x=0$

$$\Rightarrow x+2x^2+...+nx^n+...=\frac{x}{(1-x)^2}, \forall x\in\left]-1,1\right[\Big| \tfrac{d}{dx}$$

$$\Rightarrow 1+2^2x+...+n^2x^{n-1}+...=\frac{1(1-x)^2-x\cdot 2(1-x)(-1)}{(1-x)^4}, \forall x\in\left]-1,1\right[\Big| \cdot x\in\left]-1,1\right[\setminus\{0\}$$

$$\Rightarrow 1^2x^1+2^2x^2+...+n^2x^n+...=\frac{1+x}{(1-x)^3}\cdot x, \forall x\in\left]-1,1\right[\setminus\{0\}.$$

Egalitatea precedentă se verifică şi pentru $x=0$

$$\Rightarrow 1^2x^1+2^2x^2+...+n^2x^n+...=\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}, \forall x\in\left]-1,1\right[.$$

Deci suma seriei din enunţ este $s(x)=\dfrac{x(1+x)}{(1-x)^3}, \forall x\in\left]-1,1\right[$, adică

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n=\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}, \forall x\in\left]-1,1\right[,$$

sau $1^2x+2^2x^2+3^2x^3+...+n^2x^n+...=\dfrac{x(1+x)}{(1-x)^3}, \forall x\in\left]-1,1\right[.$

Comentariu. Dacă se cerea suma seriei de puteri $\sum\limits_{n=2}^{\infty} n^2x^n$, se obţinea

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^2x^n=\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}-1^2x, \forall x\in\left]-1,1\right[.$$

Exerciţiul 3. Fie **seria logaritmică** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}x^n, \forall x\in\mathbb{R}$. Să se determine mulţimea de convergenţă şi suma ei.-A se vedea Cursul 6.

Exerciţiul 4. Fie **seria exponenţială** $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}x^n, \forall x\in\mathbb{R}$. Să se determine mulţimea de convergenţă şi suma ei.-A se vedea Cursul 6.

8.3. Dezvoltarea în serie Taylor (de puteri) a unei funcţii reale cu valori reale

Definiţia 1. **a)** Fie $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ interval cu interior nevid şi $a \in \operatorname{int} \mathbb{I}$. Fie $f : \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă de orice ordin $n \in \mathbb{N}^*$ pe $\mathbb{I}, f \in \mathcal{C}^\infty (\mathbb{I}; \mathbb{R})$. Se numeşte *serie Taylor asociată funcţiei f într-o vecinătate a punctului a* seria de puteri reale

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + ..., \forall x \in \mathbb{I} \quad (1)$$

sau, restrâns, $f(a) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n, \forall x \in \mathbb{I}.$ $(1')$

Pentru $a = 0$, seria anterioară se numeşte *serie Maclaurin asociată funcţiei f*.

b) Fie $\mathbb{I}_C \subseteq \mathbb{I}$ intervalul de convergenţă a seriei de puteri (1). Funcţia f se numeşte *dezvoltabilă în serie Taylor pe* $\mathbb{I}_C$ dacă f este suma seriei de puteri (1) pe $\mathbb{I}_C$, adică

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + ..., \forall x \in \mathbb{I}_C \quad (2)$$

sau, restrâns, $f(x) = f(a) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n, \forall x \in \mathbb{I}_C.$ $(2')$

Teorema 1. Fie $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ interval cu interior nevid şi $a \in \operatorname{int} \mathbb{I}$. Fie $f : \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă de orice ordin $n \in \mathbb{N}^*$ pe $\mathbb{I}, f \in \mathcal{C}^\infty (\mathbb{I}; \mathbb{R})$. Fie $\mathbb{I}_C \subseteq \mathbb{I}$ intervalul de convergenţă a seriei de puteri (1). Funcţia f este dezvoltabilă în serie Taylor pe o vecinătate punctului a, pe $\widetilde{\mathbb{I}} \subseteq \mathbb{I}_C$, dacă şi numai dacă

$$\lim_{n\to\infty} R_{n,a}(x) = 0, \forall x \in \widetilde{\mathbb{I}},$$

unde $R_{n,a}(x)$ este un rest Taylor ataşat lui f pe o vecinătate punctului a.

Teorema 2. Fie $\mathbb{I} = (a-r, a+r) \subseteq \mathbb{R}$ un interval simetric. Fie $f \in \mathcal{C}^\infty (\mathbb{I}; \mathbb{R})$. Dacă

$$\exists M > 0 \text{ a.î. } \left| f^{(n)}(x) \right| \leq M, \forall x \in (a-r, a+r), \forall n \in \mathbb{N},$$

atunci $\lim\limits_{n\to\infty} R_{n,a}(x) = 0, \forall x \in \mathbb{I}.$

Exerciţii-A se vedea Cursul 6.