SEMINAR NR. 6, REZOLVĂRI
Analiză matematică, AIA

10. Limite de funcţii $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ în $\mathbf{a} \in A'$

Definiţia 1. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $\mathbf{a} \in A' \subseteq \left(\overline{\mathbb{R}}\right)^n$. Funcţia f are *limita* $\mathbf{l} \in \left(\overline{\mathbb{R}}\right)^p$ *în punctul* $\mathbf{a}$ şi se notează $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a},\mathbf{x}\in A} f(\mathbf{x}) = \mathbf{l}$ dacă
$[\forall V \in \mathcal{V}(\mathbf{l}), \exists U = U_V \in \mathcal{V}(\mathbf{a})$ a.î. $\forall \mathbf{x} \in A \cap U, \mathbf{x} \neq \mathbf{a} \Rightarrow f(\mathbf{x}) \in V]$.
Dacă există, $\mathbf{l} \in \left(\overline{\mathbb{R}}\right)^p$ se numeşte *limita (globală a) funcţiei f în* $\mathbf{a}$*.*
Teorema 1 (**de caracterizare a limitei**)- A se vedea Curs.
Observaţia 1. Se reformulează teorema de caracterizare pentru
A) $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = ...$ Fie $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in A', \mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$. Sunt echivalente afirmaţiile
(a) (definiţia limitei cu **vecinătăţi**) $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(a_1,a_2),(x,y)\in A} f(x,y) = l \in \mathbb{R}$
(b) (caracterizarea $\varepsilon - \delta$) $[\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ a.î. $\forall (x,y) \in A \setminus \{\mathbf{a}\}$ cu
$|x - a_1| < \delta$ şi $|y - a_2| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - l| < \varepsilon]$.
(c) (caracterizarea **cu şiruri**) (se renotează cu n indicele de şir)
$[\forall ((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}_m}$ un şir de perechi de numere reale din $A \setminus \{\mathbf{a}\}$, cu
$\lim\limits_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (a_1, a_2) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = l]$
B) $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x,y,z) = ...$ Fie $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \in A', \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$. Sunt echivalente afirmaţiile
(a) (definiţia limitei cu **vecinătăţi**) $\exists \lim\limits_{(x,y,z)\to(a_1,a_2,a_3),(x,y)\in A} f(x,y,z) = l \in \mathbb{R}$
(b) (caracterizarea $\varepsilon - \delta$) $[\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ a.î. $\forall (x,y,z) \in A \setminus \{\mathbf{a}\}$ cu
$|x - a_1| < \delta, |y - a_2| < \delta, |z - a_3| < \delta \Rightarrow |f(x,y,z) - l| < \varepsilon]$.
(c) (caracterizarea **cu şiruri**) (se renotează cu n indicele de şir)
$[\forall ((x_n, y_n, z_n))_{n\in\mathbb{N}_m}$ un şir de triplete de numere reale din $A \setminus \{\mathbf{a}\}$, cu
$\lim\limits_{n\to\infty} (x_n, y_n, z_n) = (a_1, a_2, a_3) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n, z_n) = l]$
Corolar 1. Se renotează cu n indicele de şir. Se reformulează **criteriul de inexistenţă a limitei cu şiruri** din Curs pentru
A) $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = ..., \mathbf{a} = (a_1, a_2) \in A', \mathbf{a} \in \left(\overline{\mathbb{R}}\right)^2$. Dacă
$\exists ((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}_m}$ un şir de perechi de numere reale din $A \setminus \{\mathbf{a}\}$, cu $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (a_1, a_2)$,
$\exists ((\widetilde{x}_n, \widetilde{y}_n))_{n\in\mathbb{N}_m}$ un şir de perechi de numere reale din $A \setminus \{\mathbf{a}\}$, cu $\lim\limits_{n\to\infty} (\widetilde{x}_n, \widetilde{y}_n) = (a_1, a_2)$,
a.î.•sau unul din şirurile $(f(x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}_m}, (f(\widetilde{x}_n, \widetilde{y}_n))_{n\in\mathbb{N}_m}$ nu are limită;
•sau ambele şiruri $(f(x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}_m}, (f(\widetilde{x}_n, \widetilde{y}_n))_{n\in\mathbb{N}_m}$ au limită, cu
$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = l$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(\widetilde{x}_n, \widetilde{y}_n) = \widetilde{l}$ şi $l \neq \widetilde{l}$,
atunci $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(a_1,a_2)} f(x,y)$.
B) $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x,y,z) = ..., \mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \in A', \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$. Dacă
$\exists ((x_n, y_n, z_n))_{n\in\mathbb{N}_m}$ un şir de triplete de numere reale din $A \setminus \{\mathbf{a}\}$, cu
$\lim\limits_{n\to\infty} (x_n, y_n, z_n) = (a_1, a_2, a_3)$,
$\exists ((\widetilde{x}_n, \widetilde{y}_n, \widetilde{z}_n))_{n\in\mathbb{N}_m}$ un şir de triplete de numere reale din $A \setminus \{\mathbf{a}\}$, cu
$\lim\limits_{n\to\infty} (\widetilde{x}_n, \widetilde{y}_n, \widetilde{z}_n) = (a_1, a_2, a_3)$,
a.î. •sau unul din şirurile $(f(x_n, y_n, z_n))_{n\in\mathbb{N}_m}, (f(\widetilde{x}_n, \widetilde{y}_n, \widetilde{z}_n))_{n\in\mathbb{N}_m}$ nu are limită;
•sau ambele şiruri $(f(x_n, y_n, z_n))_{n\in\mathbb{N}_m}, (f(\widetilde{x}_n, \widetilde{y}_n, \widetilde{z}_n))_{n\in\mathbb{N}_m}$ au limită, cu

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n, z_n) = l,\ \lim_{n\to\infty} f(\widetilde{x}_n, \widetilde{y}_n, \widetilde{z}_n) = \widetilde{l} \text{ şi } l \neq \widetilde{l},$$

atunci $\nexists \lim\limits_{(x,y,z)\to(a_1,a_2,a_3)} f(x,y,z)$.

Definiţia 2. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $\mathbf{a} \in A', \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Fie $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\theta_{\mathbb{R}^n}\}$ o direcţie în $\mathbb{R}^n$. Funcţia f are *limita* $\mathbf{l} \in \mathbb{R}^p$ *în punctul* $\mathbf{a}$ *după direcţia* $\mathbf{h}$ dacă

$[\exists U \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(0)$ a.î. $\forall t \in U$ cu $\mathbf{a} + t\mathbf{h} \in A \Rightarrow \lim\limits_{t\to 0, t\in U} f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) = \mathbf{l}]$.

Dacă există, $\mathbf{l} \in \mathbb{R}^p$ se numeşte *limita funcţiei* f *în* $\mathbf{a}$ *după direcţia* h.

Teorema 3. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ şi $\mathbf{a} \in A', \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Dacă $\exists \lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}, \mathbf{x}\in A} f(\mathbf{x}) = \mathbf{l} \in \mathbb{R}^p$ atunci, pentru $\forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\theta_{\mathbb{R}^n}\}$ direcţie în $\mathbb{R}^n$, $\exists \lim\limits_{t\to 0} f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) = \mathbf{l} \in \mathbb{R}^p$.

Corolar 2. (**criteriul de inexistenţă a limitei cu limita după direcţii**)

Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $\mathbf{a} \in A' \subseteq \mathbb{R}^n$. Dacă

- sau $\exists \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\theta_{\mathbb{R}^n}\}$ direcţie în $\mathbb{R}^n$ pentru care $\nexists \lim\limits_{t\to 0} f(\mathbf{a} + t\mathbf{h})$;
- sau $\forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\theta_{\mathbb{R}^n}\}$ direcţie în $\mathbb{R}^n$, $\exists \lim\limits_{t\to 0} f(\mathbf{a} + t\mathbf{h})$, dependentă de $\mathbf{h}$;

atunci $\nexists \lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}, \mathbf{x}\in A} f(\mathbf{x})$.

Definiţia 3. Definiţia limitelor iterate şi parţiale-A se vedea Curs.

Teorema 5. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ şi $\mathbf{a} \in A', \mathbf{a} \in \left(\overline{\mathbb{R}}\right)^n$. Dacă $\exists \lim\limits_{x\to\mathbf{a}, x\in A} f(x) = \mathbf{l} \in \left(\overline{\mathbb{R}}\right)^p$ şi există o limită iterată $\lim\limits_{x_j\to a_j}\left(\lim\limits_{x_i\to a_i} f(x_1, x_2, ..., x_n)\right)$ atunci există şi limita iterată $\lim\limits_{x_i\to a_i}\left(\lim\limits_{x_j\to a_j} f(x_1, x_2, ..., x_n)\right)$ şi cele două limite iterate sunt egale, şi egale cu limita $\mathbf{l}$.

Observaţia 4. Dacă limitele iterate într-un punct există şi sunt egale, nu rezultă că există limita globală a funcţiei în punctul respectiv.

Teorema 4. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p, f(x_1, ..., x_n) = (f_1(x_1, ..., x_n), ..., f_p(x_1, ..., x_n))$ şi $\mathbf{a} \in A', \mathbf{a} \in \left(\overline{\mathbb{R}}\right)^n$. Atunci $\exists \lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}, \mathbf{x}\in A} f(\mathbf{x}) = \mathbf{l} \in \left(\overline{\mathbb{R}}\right)^p, \mathbf{l} = (l_1, ..., l_p) \Leftrightarrow \exists \lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}, \mathbf{x}\in A} f_i(\mathbf{x}) = l_i \in \mathbb{R}, \forall i \in \{1, ..., p\}$.

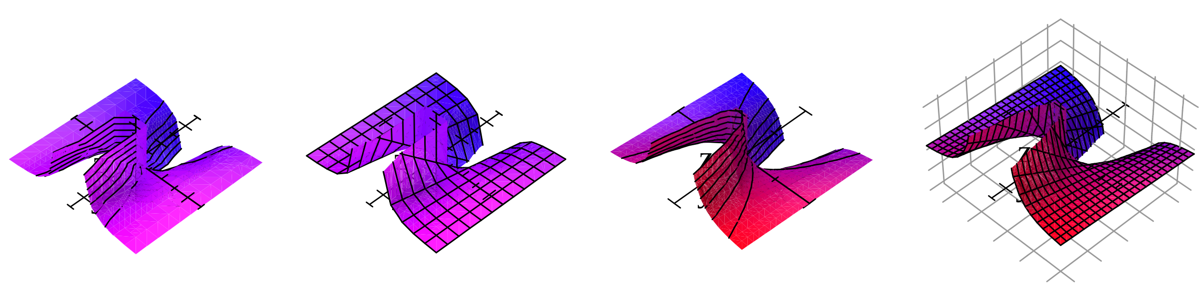
Exerciţiul 1. Folosind una din caracterizările limitei unei funcţii într-un punct, să se arate că

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,3)} (3 + 2xy) = 9$; **b)** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y + xy^2}{x^2 + y^2} = 0$; **c)** $\lim\limits_{(x,y,z)\to(1,1,1)} \dfrac{x^3 + y^3 + z^3}{x^2 + y^2 + z^2} = 1$;

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(3,2)} \dfrac{x}{y^2} = \dfrac{3}{4}$; **e)** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^2 + y^2} = 0$; **f)** $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{(x-1)y^2}{(x-1)^2 + y^2} = 0$.

Rezolvare. a), b), c) -A se vedea Curs.

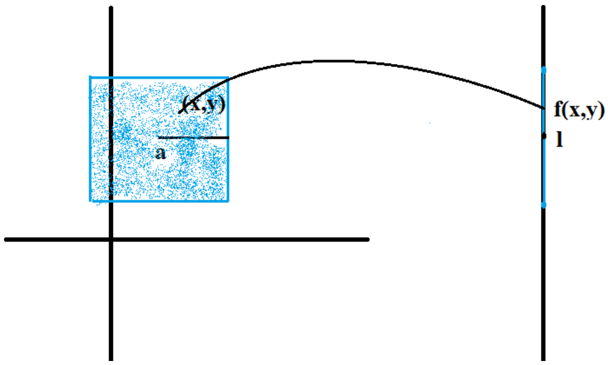
d) Fie $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \dfrac{x}{y^2}$, unde $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \neq 0\right\}$.



Se alege $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y > 1\right\} \subset D$ a.î. $\mathbf{a} = (3,2) \in A'$. Se studiază dacă

$\exists \lim\limits_{(x,y)\to(3,2),(x,y)\in A} \dfrac{x}{y^2} = \dfrac{3}{4} \Leftrightarrow [\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ a.î. $\forall (x,y) \in A \setminus \{(3,2)\}$ cu

$$\underbrace{|x-3|<\delta \text{ şi } |y-2|<\delta}_{(x,y) \text{ este în o vec. a } (3,2)} \Rightarrow \underbrace{\left|f(x,y)-\frac{3}{4}\right|<\varepsilon}_{f(x,y) \text{ este în o vec. a } \frac{3}{4}}].]$$



Fie $\forall \varepsilon>0$. Se caută $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ a.î. $\forall (x,y)\in A\setminus\{(3,2)\}$ cu
$|x-3|<\delta$ şi $0<|y-2|<\delta$ să rezulte

$$\left|f(x,y)-\frac{3}{4}\right|=\left|\frac{x}{y^2}-\frac{3}{4}\right|=\left|\frac{4x-3y^2}{4y^2}\right|=\frac{\left|4(x-3)-3(y-2)^2-12(y-2)\right|}{4|y|^2}$$

$$\underset{y>1}{\overset{(x,y)\in A}{\leq}} \frac{4|x-3|+3|y-2|^2+12|y-2|}{1} \underset{\text{rămâne } \delta}{\overset{\text{"se scapă" de } x,y}{<}} 4\delta+3\delta^2+12\delta<\varepsilon.$$

<u>modul 1.</u> Se caută $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ a.î.
$3\delta^2+16\delta-\varepsilon<0 \Leftrightarrow \delta\in\left]\frac{-8-\sqrt{64+3\varepsilon}}{3},\frac{-8+\sqrt{64+3\varepsilon}}{3}\right[$, adică a.î. $0<\delta<\frac{-8+\sqrt{64+3\varepsilon}}{3}$.

Din Teorema de densitate a $\mathbb{R}$ în $\mathbb{R}$, între numerele reale 0 şi $\frac{-8+\sqrt{64+3\varepsilon}}{3}$ există un astfel de δ. De exemplu, $\delta=\frac{1}{2}\left(\frac{-8+\sqrt{64+3\varepsilon}}{3}\right)$.

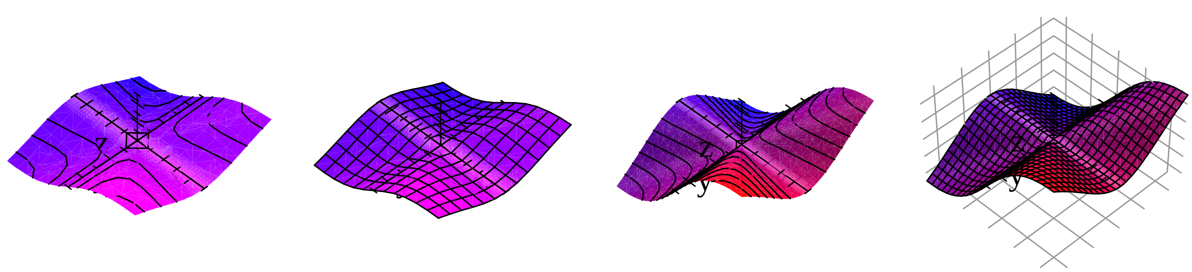
<u>modul 2.</u> De menţionat că, deoarece $\delta(\varepsilon)$ este "rază" pentru o vecinătate a punctului $(1,3)$, se poate căuta chiar şi $\delta=\delta(\varepsilon)\in\,]0,1[$ a.î.

$$4\delta+3\delta^2+12\delta \overset{\delta^2<\delta, \text{ pentru } \delta\in]0,1[}{<} 4\delta+3\delta+12\delta=19\delta<\varepsilon.$$

Din Teorema de densitate a $\mathbb{R}$ în $\mathbb{R}$, între numerele reale 0 şi $\frac{\varepsilon}{19}$ există un astfel de δ. De exemplu, $\delta=\min\left\{\frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{19},1\right\}$.

De precizat că alegerea lui $A\subset D$ în această manieră facilitează ca $\frac{1}{|y|^2}<1$.

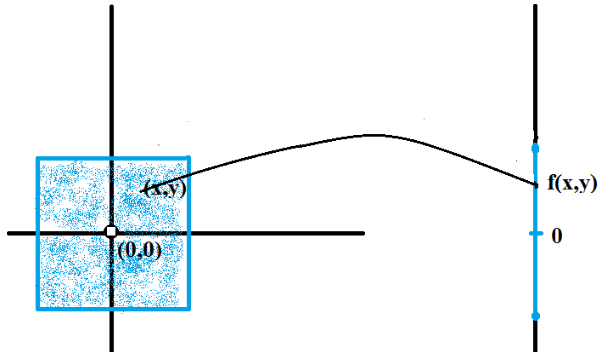
e) Fie $f: D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$, unde $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;(x,y)\neq(0,0)\right\}$.



Se alege $A=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}=D$ a.î. $\mathbf{a}=(0,0)\in A'$. Se studiază dacă

$$\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=0 \Leftrightarrow [\forall\varepsilon>0, \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0 \text{ a.î. } \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} \text{ cu}$$

$$\underbrace{|x-0|<\delta \text{ şi } |y-0|<\delta}_{(x,y) \text{ este în o vec. a } (0,0)} \Rightarrow \underbrace{|f(x,y)-0|<\varepsilon}_{f(x,y) \text{ este în o vec. a } 0}.$$



Fie $\forall \varepsilon>0$. Se caută $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ a.î. $\forall (x,y)\in A\setminus\{(0,0)\}$ cu $|x-0|<\delta$ şi $|y-0|<\delta$ să rezulte

<u>modul 1.</u>(folosind $\frac{u}{u+v}<1, \forall u>0, v>0$)

$$|f(x,y)-0|=\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}-0\right|=\frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot|y| \underset{\text{rămâne } \delta}{\overset{\text{"se scapă" de } x,y}{<}} 1\cdot\delta<\varepsilon.$$

Deci se caută $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ a.î. $0<\delta<\varepsilon$. Din Teorema de densitate a $\mathbb{R}$ în $\mathbb{R}$, între numerele reale 0 şi ε există un astfel de δ. De exemplu, $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$.

<u>modul 2.</u>(folosind $u^2+v^2\geq 2|u|\cdot|v|, \forall u,v\in\mathbb{R}$)

$$|f(x,y)-0|=\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}-0\right|=\frac{x^2|y|}{x^2+y^2}\leq\frac{x^2|y|}{2|x|\cdot|y|}=\frac{1}{2}|x| \underset{\text{rămâne } \delta}{\overset{\text{"se scapă" de } x,y}{<}} \frac{\delta}{2}<\varepsilon.$$

Deci se caută $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ a.î. $0<\frac{\delta}{2}<\varepsilon$. Din Teorema de densitate a $\mathbb{R}$ în $\mathbb{R}$, între numerele reale 0 şi ε există un astfel de δ. De exemplu, $\delta=\varepsilon$.

Exerciţiul 2. Să se arate că următoarele funcţii nu au limită în $\mathbf{a}=(0,0)$:

a) $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}, f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$;**b)** $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}, f(x,y)=\dfrac{x^4-2x^2y+y^2}{x^4+y^2}$;

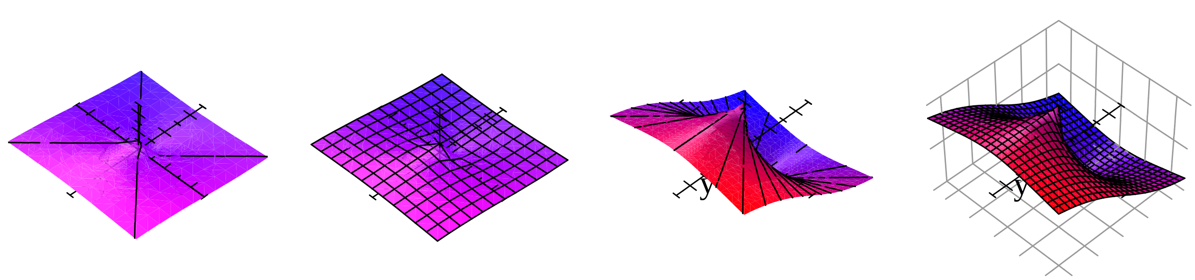
c) $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}, f(x,y)=\dfrac{x}{x^4+y^2}$;**d)** $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}, f(x,y)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

e) $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}, f(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$;**f)** $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}, f(x,y)=\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

g) $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}, f(x,y)=\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.**h)** $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}, f(x,y)=\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$;

Rezolvare. a), b), c) -A se vedea Curs.

d) $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}, f(x,y)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

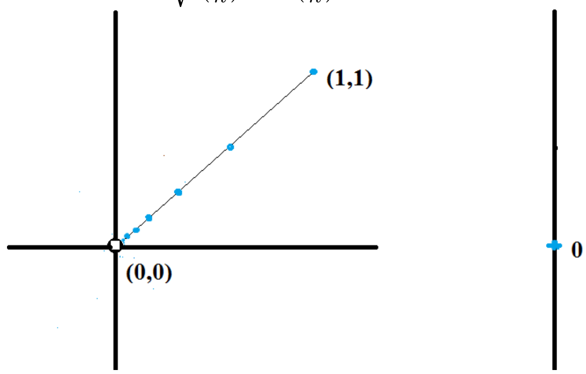


Fie $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. se observă că $\mathbf{a} = (0,0) \in A'$, deci are sens studiul limitei. Arătăm că $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

<u>Modul 1.</u>$-$cu şiruri. Se alege:

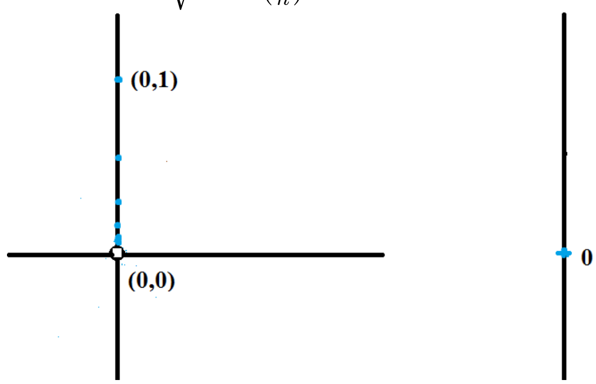
• $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), \forall n \in \mathbb{N}^*$ şir de perechi din $A \setminus \{(0,0)\}$ a.î. $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (0,0)$.

$$f(x_n, y_n) = \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$



• $(\widetilde{x}_n, \widetilde{y}_n) = \left(0, \frac{1}{n}\right), \forall n \in \mathbb{N}^*$ şir de perechi din $A \setminus \{(0,0)\}$ a.î. $\lim\limits_{n\to\infty} (\widetilde{x}_n, \widetilde{y}_n) = (0,0)$.

$$f(\widetilde{x}_n, \widetilde{y}_n) = \frac{0}{\sqrt{0^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2}} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(\widetilde{x}_n, \widetilde{y}_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$



Cum $\frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0 \Rightarrow \nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

<u>Modul 2.</u>-cu limite după direcţii, dacă este posibil.

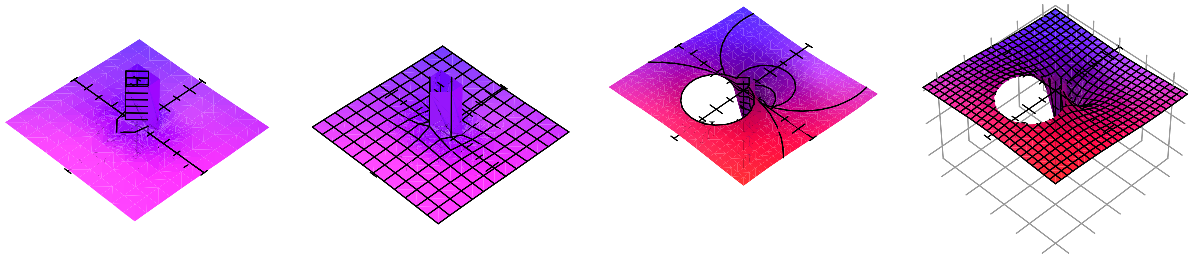
Fie $\forall \mathbf{h} = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ o direcţie în $\mathbb{R}^2$.

$$\exists ? \lim_{t\to 0, t\in U} f((0,0) + t(h_1, h_2)) \overset{\text{convenţie}}{\underset{((\cdot))=(\cdot)}{=}} \lim_{t\to 0, t\in U} f(th_1, th_2) = \lim_{t\to 0, t\in U} \frac{th_1}{\sqrt{(th_1)^2 + (th_2)^2}} =$$

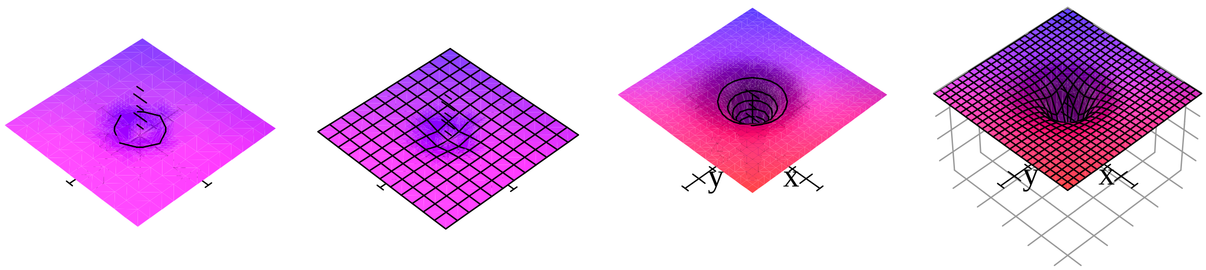
$$\lim_{t\to 0, t\in U} \frac{t}{\sqrt{t^2}} \frac{h_1}{h_1^2 + h_2^2} = \lim_{t\to 0, t\in U} \frac{t}{|t|} \frac{h_1}{h_1^2 + h_2^2} \overset{t \text{ este var. de trecere la } \lim}{=} \nexists, \forall \mathbf{h} \neq (0, h_2)$$

$\Rightarrow$există direcţii $\mathbf{h} \neq (0, h_2)$ pentru care limita funcţiei f în $(0,0)$ nu există$\Rightarrow$ nu există limita globală a funcţiei f în $(0,0)$.

e) Analog cu a), TEMĂ



f) $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R},\ f(x,y)=\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$;



Fie $A=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. se observă că $\mathbf{a}=(0,0)\in A'$, deci are sens studiul limitei.
Se arată că $\nexists\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

<u>Modul 1.</u>-cu şiruri

<u>Modul 1.1.</u> Se alege:

$(x_n,y_n)=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right),\forall n\in\mathbb{N}^*$ şir de perechi din $A\setminus\{(0,0)\}$ a.î. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n,y_n)=(0,0)$.

$$f(x_n,y_n)=\cos\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{1}{n}\right)^2}}=\cos\frac{n}{\sqrt{2}}\Rightarrow\nexists\lim_{n\to\infty}f(x_n,y_n)$$

$$\Rightarrow\nexists\lim_{(x,y)\to(0,0)}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

<u>Modul 1.2.</u> Se alege:

• $(x_n,y_n)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}\cdot 2n\pi},\frac{1}{\sqrt{2}\cdot 2n\pi}\right),\forall n\in\mathbb{N}^*$ şir din $A\setminus\{(0,0)\}$ a.î. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n,y_n)=(0,0)$.

$$f(x_n,y_n)=\cos\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{2\sqrt{2}n\pi}\right)^2+\left(\frac{1}{2\sqrt{2}n\pi}\right)^2}}=\cos 2n\pi=1\Rightarrow\lim_{n\to\infty}f(x_n,y_n)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}1=1.$$

• $(\widetilde{x}_n,\widetilde{y}_n)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)},\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)}\right),\forall n\in\mathbb{N}^*$ şir din $A\setminus\{(0,0)\}$ a.î. $\lim\limits_{n\to\infty}(\widetilde{x}_n,\widetilde{y}_n)=(0,0)$.

$$f(\widetilde{x}_n,\widetilde{y}_n)=\cos\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)}\right)^2}}=\cos\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}f(\widetilde{x}_n,\widetilde{y}_n)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}0=0.$$

Cum $1\neq 0\Rightarrow\nexists\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

<u>Modul 2.</u>-cu limite după direcţii, dacă este posibil.

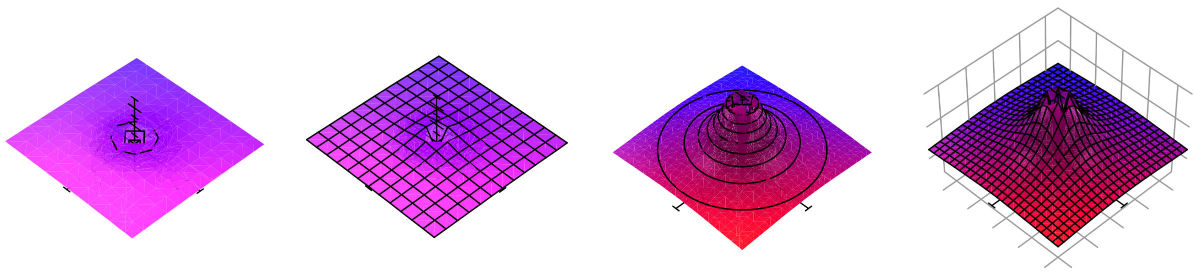
Fie $\forall\mathbf{h}=(h_1,h_2)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ o direcţie în $\mathbb{R}^2$.

$$\exists? \lim_{t\to 0, t\in U} f\left((0,0)+t\left(h_1,h_2\right)\right) \overset{\text{convenţie}}{\underset{((\cdot))=(\cdot)}{=}} \lim_{t\to 0, t\in U} f\left(th_1, th_2\right) = \lim_{t\to 0, t\in U} \cos \frac{1}{\sqrt{\left(th_1\right)^2+\left(th_2\right)^2}} =$$

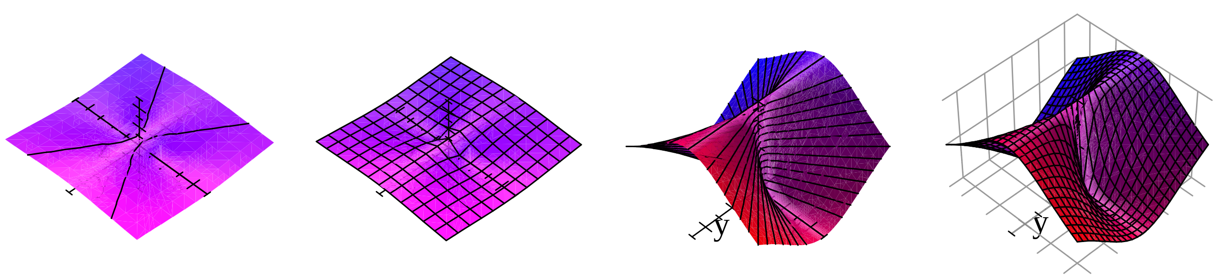
$$= \lim_{t\to 0, t\in U} \cos\left(\frac{1}{|t|}\frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\right) \overset{t \text{ este var. de}}{\underset{\text{trecere la } \lim}{=}} \nexists, \forall \mathbf{h}$$

$\Rightarrow$există direcţii $\mathbf{h}$ (chiar toate) pentru care limita funcţiei f în $(0,0)$ nu există$\Rightarrow$ nu există limita globală a funcţiei f în $(0,0)$.

g) Analog cu f), TEMĂ



h) $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}, f(x,y)=\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$;



Fie $A=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. se observă că $\mathbf{a}=(0,0)\in A'$, deci are sens studiul limitei.
Se arată că $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

<u>Modul 1.</u>-cu şiruri. Se alege:

• $(x_n,y_n)=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right), \forall n\in\mathbb{N}^*$ şir de perechi din $A\setminus\{(0,0)\}$ a.î. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n,y_n)=(0,0)$.

$$f(x_n,y_n)=\frac{\frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{1}{n}\right)^2}=\frac{n}{2}\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n,y_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}=+\infty.$$

• $(\widetilde{x}_n,\widetilde{y}_n)=\left(0,\frac{1}{n}\right), \forall n\in\mathbb{N}^*$ şir de perechi din $A\setminus\{(0,0)\}$ a.î. $\lim\limits_{n\to\infty}(\widetilde{x}_n,\widetilde{y}_n)=(0,0)$.

$$f(\widetilde{x}_n,\widetilde{y}_n)=\frac{0^2}{0^2+\left(\frac{1}{n}\right)^2}=0\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(\widetilde{x}_n,\widetilde{y}_n)=\lim_{n\to\infty}0=0.$$

Cum $+\infty\neq 0\Rightarrow \nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x}{x^2+y^2}$.

<u>Modul 2.</u>-cu limite după direcţii, dacă este posibil.
Fie $\forall\mathbf{h}=(h_1,h_2)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ o direcţie în $\mathbb{R}^2$.

$$\exists? \lim_{t\to 0, t\in U} f\left((0,0)+t\left(h_1,h_2\right)\right) \overset{\text{convenţie}}{\underset{((\cdot))=(\cdot)}{=}} \lim_{t\to 0, t\in U} f\left(th_1, th_2\right) = \lim_{t\to 0, t\in U} \frac{\left(th_1\right)^2}{\left(th_1\right)^2+\left(th_2\right)^2} =$$

$$= \lim_{t\to 0, t\in U} \frac{t^2}{t^2}\frac{h_1^2}{h_1^2+h_2^2} \overset{t \text{ este var. de trecere la } \lim}{=} \frac{h_1}{h_1^2+h_2^2}, \forall \mathbf{h}\neq(h_1,h_2)$$

$\Rightarrow$pentru $\forall \mathbf{h} \neq (h_1, h_2)$ limita funcţiei f în $(0,0)$ după direcţia $\mathbf{h}$ există, dar depinde de $\mathbf{h} \Rightarrow$ nu există limita globală a funcţiei f în $(0,0)$.

Exerciţiul 3. Să se studieze dacă următoarele funcţii au limită globală în $\mathbf{a} = (0,0)$, şi dacă da, să se determine această limită

a) $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \dfrac{x^3}{x^2+y^2}$, unde $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; (x,y) \neq (0,0)\right\}$;

b) $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \dfrac{x^2}{x-y}$, unde $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x-y \neq 0\right\}$;

c) $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \dfrac{y^2}{x+y}$, unde $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x+y \neq 0\right\}$;

d) $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \dfrac{x^2}{|x|+|y|}$, unde $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$;

e) $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{|x|+|y|}$, unde $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$;

f) $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{|x|+|y|}$, unde $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$;

g) $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \dfrac{x^4y+x^2y^4}{x^4+y^2}$, unde $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$;

h) $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \dfrac{x^4y^4}{x^4+y^4}$, unde $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$;

i) $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$, unde $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$;

j) $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$, unde $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x+y \neq 0\right\}$;

k) $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \dfrac{x-y}{|x|+|y|}$, unde $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$;

l) $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \dfrac{xy}{|x|+|y|}$, unde $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$;

m) $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \dfrac{x+y}{\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}}$, unde $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$;

n) $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = x^2+y^2$, unde $D = \mathbb{R}^2$;

o) $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \left(1+x^2|y|\right)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$, unde $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$;

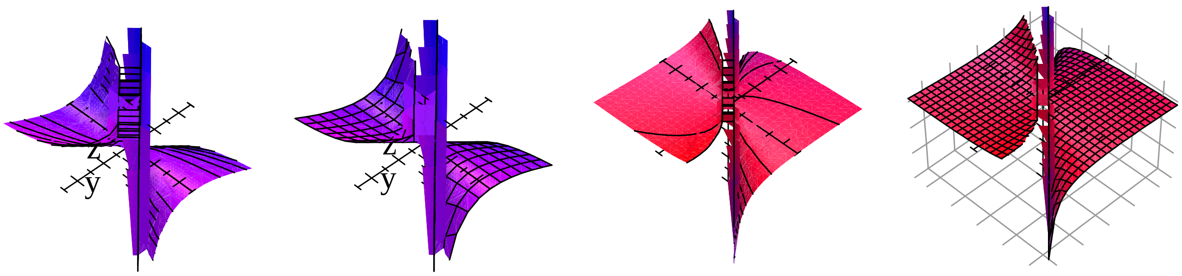
p) $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = (x+y)\sin\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{y}$, unde $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

q) $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{y}, & \text{dacă } 1 \leq x^2+y^2 \leq 2, y \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases}$,

unde $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2 \leq 2, y \neq 0\right\} \cup \{(0,0)\}$;

Rezolvare. a) -A se vedea Curs.

b) $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \dfrac{x^2}{x-y}$, unde $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x-y \neq 0\right\}$;



Fie $A = D$. se observă că $\mathbf{a} = (0,0) \in A'$. Are sens să se studieze dacă $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Etapa 1. Se intuieşte o valoare posibilă a limitei globale, dacă aceasta ar exista.

Modul 1.-cu şiruri. Se alege un şir

• $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{-1}{n}\right), \forall n \in \mathbb{N}^*$ şir de perechi din $A \setminus \{(0,0)\}$ a.î. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (0,0)$.

$$f(x_n, y_n) = \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{\frac{1}{n} - \frac{-1}{n}} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n}{2} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = \widetilde{0}.$$

$\Rightarrow$ *se poate* să existe limita globală a funcţiei f în $(0,0)$ şi ar avea valoarea $\widetilde{0}$.

modul 2. cu limite după direcţii

Fie $\forall \mathbf{h} = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ o direcţie în $\mathbb{R}^2$ cu $h_1 \neq h_2$.

$$\exists? \lim_{t\to0, t\in U} f((0,0) + t(h_1, h_2)) \underset{((\cdot))=(\cdot)}{\overset{\text{convenţie}}{=}} \lim_{t\to0, t\in U} f(th_1, th_2) = \lim_{t\to0, t\in U} \frac{(th_1)^2}{(th_1) - (th_2)} =$$

$$= \lim_{t\to0, t\in U} \frac{t^2}{t} \frac{h_1^2}{h_1 - h_2} = \widetilde{0}, \forall (h_1, h_2)$$

$\Rightarrow$există limita funcţiei f în $(0,0)$ după orice direcţie $\mathbf{h}$ şi are valoarea $\widetilde{0} \Rightarrow$ *se poate* să existe limita globală a funcţiei f în $(0,0)$ şi ar avea valoarea $\widetilde{0}$.

Etapa 2. Se studiază existenţa limitei globale a funcţiei în $(0,0)$ cu definiţia (caracterizarea $\varepsilon - \delta$).

$\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0_1,0_2)} f(x,y) = \widetilde{0} \Leftrightarrow [\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ a.î. $\forall (x,y) \in A \setminus \{(0_1, 0_2)\}$ cu

$|x - 0_1| < \delta$ şi $|y - 0_2| < \delta \Rightarrow \left| f(x,y) - \widetilde{0} \right| < \varepsilon]$.

Fie $\forall \varepsilon > 0$. Se caută $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ a.î. $\forall (x,y) \in A \setminus \{(0,0)\}$ cu

$|x - 0| < \delta$ şi $|y - 0| < \delta$ să rezulte

$$|f(x,y) - 0| = \left| \frac{x^2}{x - y} - 0 \right| = \frac{x^2}{|x - y|} \underset{\text{rămâne } \delta}{\overset{\text{"se scapă" de } x,y}{<}} ... < \varepsilon.$$

Se încearcă $|x - y| \leq |x| + |y|$ - nu foloseşte - nu se poate "scăpa" de x, y.

Se încearcă $||x| - |y|| \leq |x - y|$ - nu foloseşte - nu se poate "scăpa" de x, y.

Se intuieşte că:-sau nu se ştie o majorare, înainte de a scrie ... $< \varepsilon$.

-sau nu există limita globală $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Etapa 3. Se arată că $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ cu şiruri.

S-a ales deja un şir la etapa 1

• $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{-1}{n}\right), \forall n \in \mathbb{N}^*$ şir din $A \setminus \{(0,0)\}$ a.î. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (0,0)$.

$$f(x_n, y_n) = \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{\frac{1}{n} - \frac{-1}{n}} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n}{2} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = 0.$$

Se alege şi

• $(\widetilde{x}_n, \widetilde{y}_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right), \forall n \in \mathbb{N}^*$ şir din $A \setminus \{(0,0)\}$ a.î. $\lim\limits_{n\to\infty}(\widetilde{x}_n, \widetilde{y}_n) = (0,0)$.

$$f\left(\widetilde{x}_n, \widetilde{y}_n\right) = \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{\left(\frac{1}{n}\right) - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)} = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f\left(\widetilde{x}_n, \widetilde{y}_n\right) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

Cum $0 \neq 1 \Rightarrow \nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{x-y}$.

Comentariu •De menţionat că, în etapa 1 s-a arătat că numai pentru *un şir* $\left((x_n, y_n)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ cu limita $(0,0)$ rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(x_n, y_n\right) = 0$ şi nu pentru *toate şirurile* din A, cu limita $(0,0)$. Deci nu se poate aplica Teorema 2 $\Rightarrow$ *nu se poate afirma sigur* că $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{x-y} = 0$. La acest exerciţiu, conform etapei 3, chiar s-a arătat că $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{x-y}$.

•Etapa 1 putea fi completată cu

sau <u>modul 3.</u> Se poate studia existenţa limitei funcţiei în $(0,0)$ pe direcţii particulare, de forma $y = \lambda x, \lambda \in \mathbb{R}^*, \lambda \neq 1$ pentru ca $y \neq x$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0), y=\lambda x} \frac{x^2}{x-y} = \lim_{(x,y)\to(0,0), y=\lambda x} \frac{x\left(\lambda x\right)}{x - \lambda x} = \lim_{(x,y)\to(0,0), y=\lambda x} \frac{x^2}{x}\frac{\lambda}{1-\lambda} = 0.$$

$\Rightarrow$există limita funcţiei f în $(0,0)$ după orice direcţie particulară, şi are valoarea $\widetilde{0}$ (independentă de λ) $\Rightarrow$ *se poate* să existe limita globală a funcţiei f în $(0,0)$ şi ar avea valoarea $\widetilde{0}$.

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} \text{De precizat că pentru a studia } \lim\limits_{(x,y)\to(a_1,a_2)} f\left(x,y\right) \text{ se determină} \\ \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(a_1,a_2) \\ y-a_2=\lambda(x-a_1), \lambda\in\mathbb{R}^*}} f\left(x,y\right), \text{ adică } \lim\limits_{x\to a_1} f\left(x, a_2 + \lambda\left(x - a_1\right)\right) \end{array} \right.}$$

sau <u>modul 4.</u> Se poate studia existenţa limitei funcţiei în $(0,0)$ cu şiruri particulare, care tind la $(0,0)$ pe o dreaptă de pantă $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Se poate alege

$\left(x_n, y_n\right) = \left(\frac{1}{n}, \frac{\lambda}{n}\right), \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \lambda \neq 1$, şiruri din A a.î. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(x_n, y_n\right) = (0,0)$.

$$f\left(x_n, y_n\right) = \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{\frac{1}{n} - \frac{\lambda}{n}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f\left(x_n, y_n\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\frac{1}{1-\lambda} = \widetilde{0}.$$

$\Rightarrow$pentru fiecare şir $\left((x_n, y_n)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ astfel ales se obţine câte o valoare a limitei independentă de panta dreptei pe care şirul se deplasează spre origine, şi are valoarea $\widetilde{0} \Rightarrow$ *se poate* să existe limita globală a funcţiei f în $(0,0)$ şi ar avea valoarea $\widetilde{0}$.

sau <u>modul 5.</u> Se poate studia existenţa limitei funcţiei în $(0,0)$ cu o schimbare a variabilelor de trecere la limită, şi anume

$$\left\{ \begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{array} \right., \varphi \in [0, 2\pi[$$

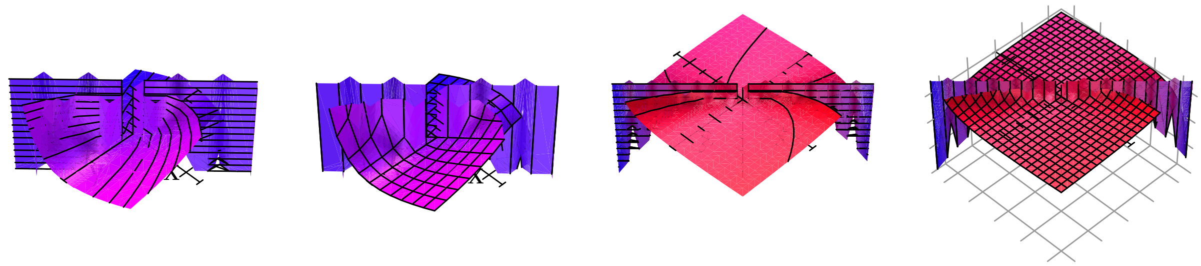
Se face ca $(x,y) \to (0,0)$ pe cercuri centrate în $(0,0)$ cu $r \to 0$. $\varphi \neq \dfrac{\pi}{4}$, pentru ca $x \neq y$. Cum

$$\lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos^2\varphi}{r\cos\varphi - r\sin\varphi} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2}{r}\frac{\cos^2\varphi}{\cos\varphi - \sin\varphi} = 0 \text{ (independent de } \varphi \in [0, 2\pi[\setminus \left\{\frac{\pi}{4}\right\})$$

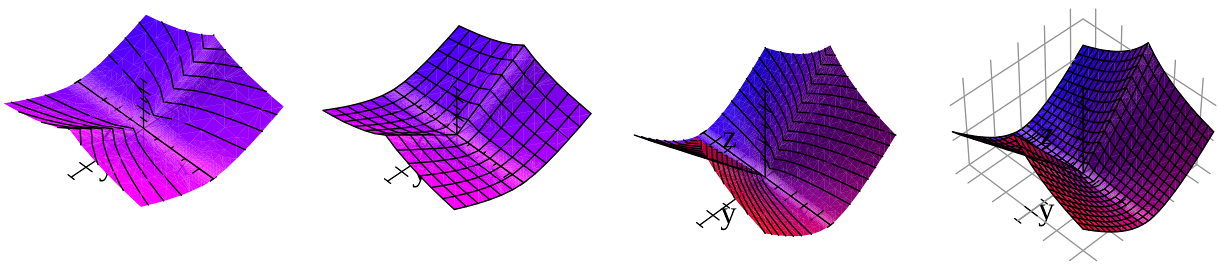
$\Rightarrow$ *se poate* să existe limita globală a funcţiei f în $(0,0)$ şi ar avea valoarea 0.

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} \text{De precizat că pentru a studia } \lim\limits_{(x,y)\to(a_1,a_2)} f\left(x,y\right) \text{ se face schimbarea} \\ \qquad \left\{ \begin{array}{l} x = a_1 + r\cos\varphi \\ y = a_2 + r\sin\varphi \end{array} \right., \varphi \in [0, 2\pi[\\ \text{şi se studiază } \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(a_1,a_2) \\ x=a_1+r\cos\varphi, y=a_2+r\sin\varphi, \varphi\in[0,2\pi[, r>0}} f\left(x,y\right), \text{ adică } \lim\limits_{r\to 0} f\left(a_1 + r\cos\varphi, a_2 + r\sin\varphi\right) \end{array} \right.}$$

c) $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^2}{x+y}$ analog.



d) $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \dfrac{x^2}{|x|+|y|}$, unde $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$;



Fie $A = D$. se observă că $\mathbf{a} = (0,0) \in A'$. Are sens să se studieze dacă $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Etapa 1. Se intuieşte o valoare posibilă a limitei globale, dacă aceasta ar exista.

Modul 1.-cu şiruri. Se alege un şir

• $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), \forall n \in \mathbb{N}^*$ şir de perechi din $A \setminus \{(0,0)\}$ a.î. $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (0,0)$. Se observă că

$$f(x_n, y_n) = \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{\frac{1}{n} + \frac{1}{n}} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n}{2} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = 0.$$

$\Rightarrow$ *se poate* să existe limita globală a funcţiei f în $(0,0)$ şi ar avea valoarea 0.

modul 2. cu limite după direcţii. Fie $\forall \mathbf{h} = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ o direcţie în $\mathbb{R}^2$.

$$\exists? \lim_{t\to0, t\in U} f((0,0) + t(h_1, h_2)) \underset{((\cdot))=(\cdot)}{\overset{\text{convenţie}}{=}} \lim_{t\to0, t\in U} f(th_1, th_2) = \lim_{t\to0, t\in U} \frac{(th_1)^2}{|th_1| + |th_2|} =$$

$$= \lim_{t\to0, t\in U} \frac{t^2}{|t|} \frac{h_1^2}{|h_1| + |h_2|} = 0, \forall (h_1, h_2)$$

$\Rightarrow$există limita funcţiei f în $(0,0)$ după orice direcţie $\mathbf{h}$, şi are valoarea 0 $\Rightarrow$ *se poate* să existe limita globală a funcţiei f în $(0,0)$ şi ar avea valoarea 0.

Etapa 2. Se studiază existenţa limitei funcţiei în $(0,0)$ cu definiţia (caracterizarea $\varepsilon - \delta$).

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 \Leftrightarrow [\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ a.î. $\forall (x,y) \in A \setminus \{(0,0)\}$ cu

$|x - 0| < \delta$ şi $|y - 0| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - 0| < \varepsilon]$.

Fie $\forall \varepsilon > 0$. Se caută $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ a.î. $\forall (x,y) \in A \setminus \{(0,0)\}$ cu

$|x - 0| < \delta$ şi $|y - 0| < \delta$ să rezulte

$$|f(x,y) - 0| = \left| \frac{x^2}{|x|+|y|} - 0 \right| = \frac{x^2}{|x|+|y|} \underset{\text{rămâne } \delta}{\overset{\text{"se scapă" de } x,y}{<}} \ldots < \varepsilon.$$

Se încearcă

$|x|+|y|>0+|y| \Rightarrow \dfrac{x^2}{|x|+|y|}<\dfrac{x^2}{|y|}<\dfrac{\delta^2}{|y|}$ - nu foloseşte - nu se poate "scăpa" de y.

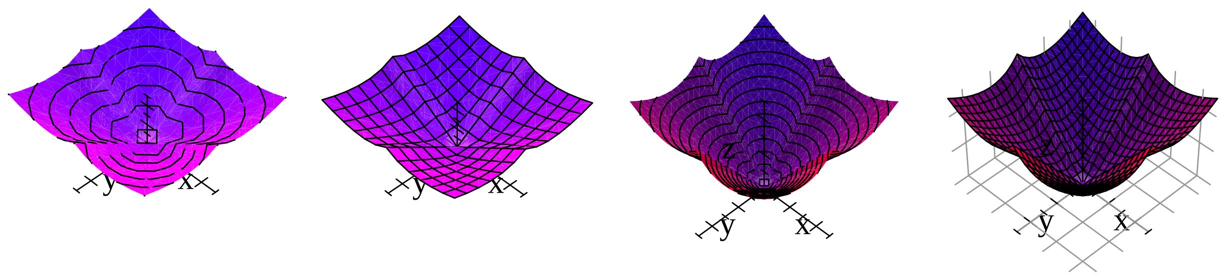
Se încearcă

$|x|+|y| \geq |x|+0 \Rightarrow \dfrac{x^2}{|x|+|y|}<\dfrac{x^2}{|x|}=|x|<\delta<\varepsilon.$

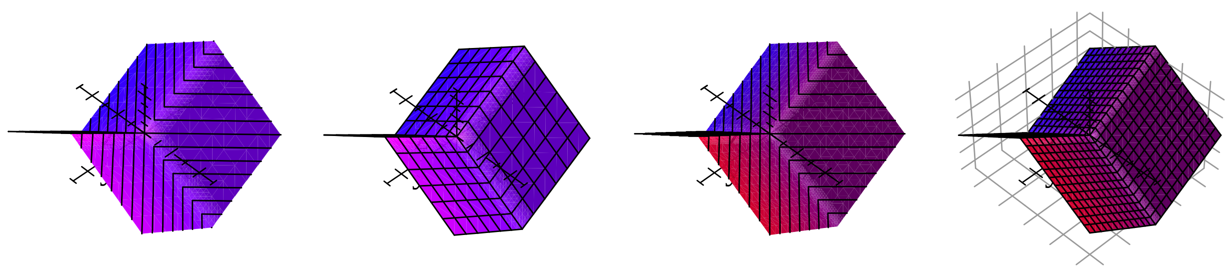
Deci se caută $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ a.î. $0<\delta<\varepsilon$. Din Teorema de densitate a $\mathbb{R}$ în $\mathbb{R}$, între numerele reale 0 şi ε există un astfel de δ. De exemplu, $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$.

Deci $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{|x|+|y|}=0.$

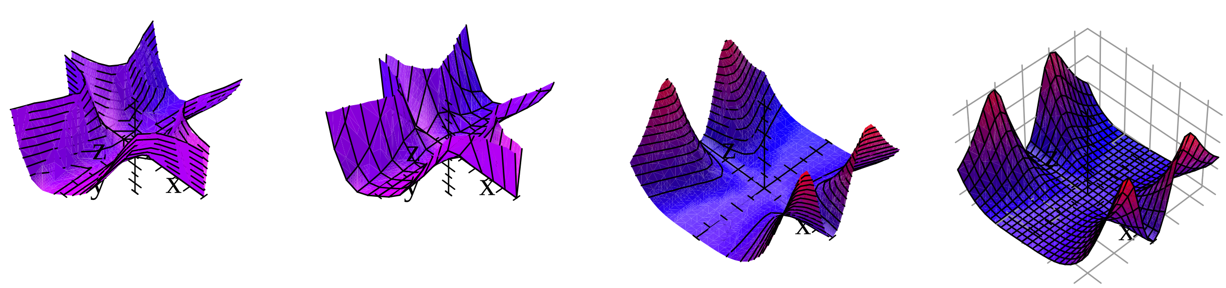
e) $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{|x|+|y|}=0.$



f) $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{|x|+|y|}=0.$



g) $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y)=\dfrac{x^4y+x^2y^4}{x^4+y^2}$, unde $D=\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$;



Fie $A=D$. se observă că $\mathbf{a}=(0,0)\in A'$. Are sens să se studieze dacă $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Etapa 1. Se intuieşte o valoare posibilă a limitei globale, dacă aceasta ar exista.

Modul 1.-cu şiruri. Se alege un şir

- $(x_n,y_n)=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right), \forall n \in \mathbb{N}^*$ şir din $A \setminus \{(0,0)\}$ a.î. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n,y_n)=(0,0)$.

$$f(x_n,y_n)=\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^4\left(\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}\right)^2\left(\frac{1}{n}\right)^4}{\left(\frac{1}{n}\right)^4+\left(\frac{1}{n}\right)^2}=\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^3+\left(\frac{1}{n}\right)^4}{\left(\frac{1}{n}\right)^2+1}=\frac{n+1}{n^4}\cdot\frac{n^2}{n^2+1}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}f(x_n,y_n)=0.$$

$\Rightarrow$ *se poate* să existe limita globală a funcţiei f în $(0,0)$ şi ar avea valoarea 0.

modul 2. cu limite după direcţii. Fie $\forall\mathbf{h}=(h_1,h_2)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ o direcţie în $\mathbb{R}^2$.

$$\exists?\lim_{t\to0,t\in U}f((0,0)+t(h_1,h_2))\overset{\text{convenţie}}{\underset{((\cdot))=(\cdot)}{=}}\lim_{t\to0,t\in U}f(th_1,th_2)=\lim_{t\to0,t\in U}\frac{(th_1)^4(th_2)+(th_1)^2(th_2)^4}{(th_1)^4+(th_2)^2}=$$

$$=\lim_{t\to0,t\in U}\frac{t^5}{t^2}\frac{h_1^4h_2+th_1^2h_2^4}{t^2h_1^4+h_2^2}=0\frac{h_1^4h_2+0\cdot h_1^2h_2^4}{0\cdot h_1^4+h_2^2}=0,\forall(h_1,h_2)$$

$\Rightarrow$există limita funcţiei f în $(0,0)$ după orice direcţie $\mathbf{h}$ şi are valoarea 0 $\Rightarrow$ *se poate* să existe limita globală a funcţiei f în $(0,0)$ şi ar avea valoarea 0.

Etapa 2. Se studiază existenţa limitei funcţiei în $(0,0)$ cu definiţia (caracterizarea $\varepsilon-\delta$).

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0\Leftrightarrow[\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$ a.î. $\forall(x,y)\in A\setminus\{(0,0)\}$ cu

$|x-0|<\delta$ şi $|y-0|<\delta\Rightarrow|f(x,y)-0|<\varepsilon]$.

Fie $\forall\varepsilon>0$. Se caută $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ a.î. $\forall(x,y)\in A\setminus\{(0,0)\}$ cu

$|x-0|<\delta$ şi $|y-0|<\delta$ să rezulte

$$|f(x,y)-0|=\left|\frac{x^4y+x^2y^4}{x^4+y^2}-0\right|\le\frac{x^4|y|+x^2y^4}{x^4+y^2}\overset{\text{"se scapă" de }x,y}{\underset{\text{rămâne }\delta}{<}}...<\varepsilon.$$

Se încearcă $x^4+y^2>x^4\Rightarrow|f(x,y)-0|<\dfrac{x^4|y|+x^2y^4}{x^4}=|y|+\dfrac{|y|^4}{|x|^2}<\delta+\dfrac{\delta^4}{|x|^2}<\varepsilon$–nu se poate "scăpa" de x.

Se încearcă $x^4+y^2>y^2\Rightarrow|f(x,y)-0|<\dfrac{x^4|y|+x^2y^4}{y^2}=\dfrac{x^4}{|y|}+x^2y^2<\dfrac{\delta^4}{|y|}+\delta^4<\varepsilon$–nu se poate "scăpa" de y.

Se încearcă $x^4+y^2>2x^2|y|\Rightarrow|f(x,y)-0|<\dfrac{x^4|y|+x^2y^4}{2x^2|y|}=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}|y|^3<\frac{1}{2}\delta^2+\frac{1}{2}\delta^3<\varepsilon$.

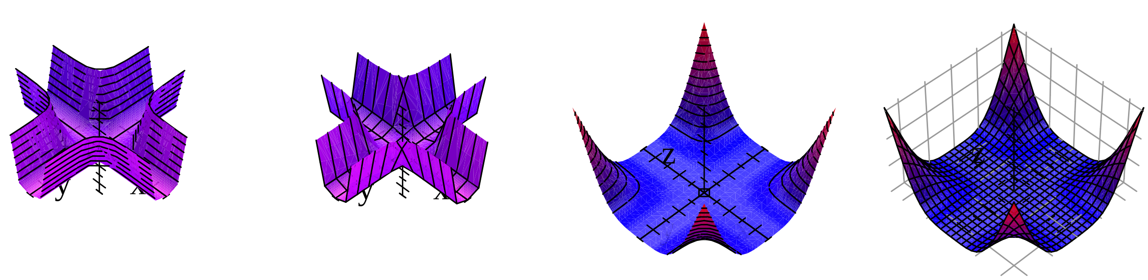
Deci se caută $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ a.î. $\frac{1}{2}\delta^2+\frac{1}{2}\delta^3<\varepsilon$. Deoarece $\delta(\varepsilon)$ este "rază" pentru o vecinătate a punctului $(0,0)$, se poate căuta chiar şi $\delta=\delta(\varepsilon)\in]0,1[$ a.î.

$$\frac{1}{2}\delta^2+\frac{1}{2}\delta^3\overset{\delta^2<\delta,\text{ pentru }\delta\in]0,1[}{<}\frac{1}{2}\delta+\frac{1}{2}\delta=\delta<\varepsilon.$$

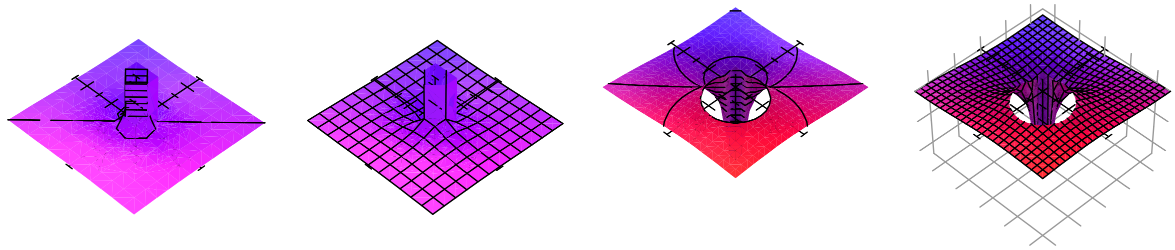
Din Teorema de densitate a $\mathbb{R}$ în $\mathbb{R}$, între numerele reale 0 şi ε există un astfel de δ. De exemplu, $\delta=\min\left\{\frac{\varepsilon}{2},1\right\}$.

Deci $\exists\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^4y+x^2y^4}{x^4+y^2}=0$.

h) $\exists\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^4y^4}{x^4+y^4}=0$.



i) $f:D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},f(x,y)=\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$, unde $D=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$;



Fie $A = D$. se observă că $\mathbf{a} = (0,0) \in A'$. Are sens să se studieze dacă $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Etapa 1. Se intuieşte o valoare posibilă a limitei globale, dacă aceasta ar exista.
modul 2. cu limite după direcţii. Se studiază existenţa limitei funcţiei în $(0,0)$ cu direcţii.
Fie $\forall \mathbf{h} = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ o direcţie în $\mathbb{R}^2$.

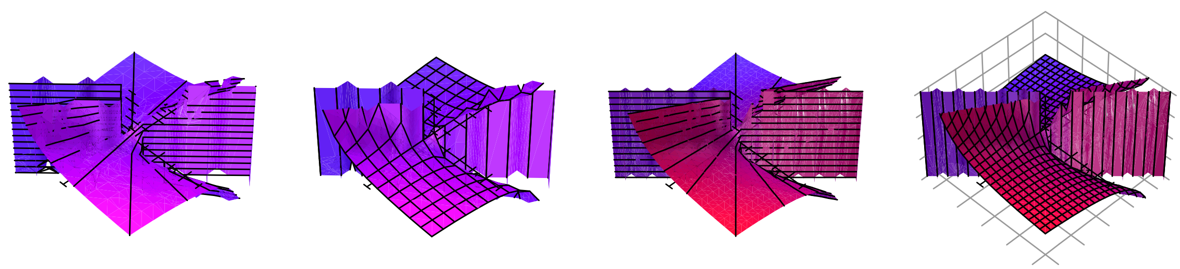
$$\exists? \lim_{t\to 0, t\in U} f((0,0) + t(h_1,h_2)) \overset{\text{convenţie}}{\underset{((\cdot))=(\cdot)}{=}} \lim_{t\to 0, t\in U} f(th_1, th_2) = \lim_{t\to 0, t\in U} \frac{(th_1)+(th_2)}{(th_1)^2+(th_2)^2} = \lim_{t\to 0, t\in U} \frac{t}{t^2}\frac{h_1+h_2}{h_1^2+h_2^2}$$

Cum $\lim\limits_{t\to 0, t<0} \frac{1}{t} = -\infty$ şi $\lim\limits_{t\to 0, t>0} \frac{1}{t} = +\infty \Rightarrow \nexists \lim\limits_{t\to 0, t\in U} \frac{1}{t}$.

Deci nu există limitei funcţiei în $(0,0)$ după nici o direcţie din $\mathbb{R}^2$, $\mathbf{h}$ cu $h_1 + h_2 \neq 0$.

$\Rightarrow$nu există limita globală a funcţiei f în $(0,0)$, adică $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x^2+y^2}$.

j) $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$, unde $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x+y \neq 0\right\}$;



Fie $A = D$. se observă că $\mathbf{a} = (0,0) \in A'$. Are sens să se studieze dacă $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Etapa 1. Se intuieşte o valoare posibilă a limitei globale, dacă aceasta ar exista.
modul 2. cu limite după direcţii. Se studiază existenţa limitei funcţiei în $(0,0)$ cu direcţii.
Fie $\forall h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ o direcţie în $\mathbb{R}^2$, cu $h_1 \neq h_2$.

$$\exists? \lim_{t\to 0, t\in U} f((0,0) + t(h_1,h_2)) \overset{\text{convenţie}}{\underset{((\cdot))=(\cdot)}{=}} \lim_{t\to 0, t\in U} f(th_1, th_2) = \lim_{t\to 0, t\in U} \frac{th_1 - th_2}{th_1 + th_2} = \lim_{t\to 0, t\in U} \frac{t}{t}\frac{h_1-h_2}{h_1+h_2} = \frac{h_1-h_2}{h_1+h_2}.$$

Pentru fiecare $h = (h_1, h_2)$ o direcţie în $\mathbb{R}^2$, obţinem câte o valoare a limitei anterioare. Conform Teoremei 4, era necesar ca limita anterioară sa aibă aceeaşi valoare pentru orice direcţie

$\Rightarrow$nu există limita globală a funcţiei f în $(0,0)$, adică $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{x+y}$.

Comentariu.•Etapa 1 putea fi completată cu
sau modul 3. Se poate studia existenţa limitei funcţiei în $(0,0)$ cu direcţii particulare, de forma $y = \lambda x, \lambda \in \mathbb{R}^*, \lambda \neq -1$ pentru ca $y \neq -x$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0), y=\lambda x} \frac{x-y}{x+y} = \lim_{(x,y)\to(0,0), y=\lambda x} \frac{x-\lambda x}{x+\lambda x} = \lim_{(x,y)\to(0,0), y=\lambda x} \frac{x}{x}\frac{1-\lambda}{1+\lambda} = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}.$$

$\Rightarrow$există limita funcţiei f în $(0,0)$ după orice direcţie particulară, dar are valoarea $\dfrac{1-\lambda}{1+\lambda}$, dependentă de λ. Deoarece limita anterioară nu este un număr independent de λ, ci pentru fiecare pantă λ a dreptei pe care (x,y) se deplasează spre $(0,0)$ obţinem câte o valoare a limitei

$\Rightarrow$nu există limita globală a funcţiei f în $(0,0)$, adică $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x-y}{x+y}$.

sau <u>modul 4.</u> Se poate studia existenţa limitei funcţiei în $(0,0)$ cu şiruri particulare, care tind la $(0,0)$ pe o dreaptă de pantă $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Se alege

$(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{\lambda}{n}\right), \forall n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda \neq -1$, şiruri de perechi din A a.î. $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (0,0)$. se observă că

$$f(x_n, y_n) = \frac{\frac{1}{n} - \frac{\lambda}{n}}{\frac{1}{n} + \frac{\lambda}{n}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\lambda}{1+\lambda} = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}.$$

Deoarece limita anterioară nu este un număr independent de λ, ci pentru fiecare şir $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ obţinem câte o valoare a limitei dependentă de panta dreptei pe care şirul se deplasează spre origine

$\Rightarrow$nu există limita globală a funcţiei f în $(0,0)$, adică $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x-y}{x+y}$.

sau <u>modul 5.</u> Se poate studia existenţa limitei funcţiei în $(0,0)$ cu o schimbare a variabileler de trecere la limită, şi anume

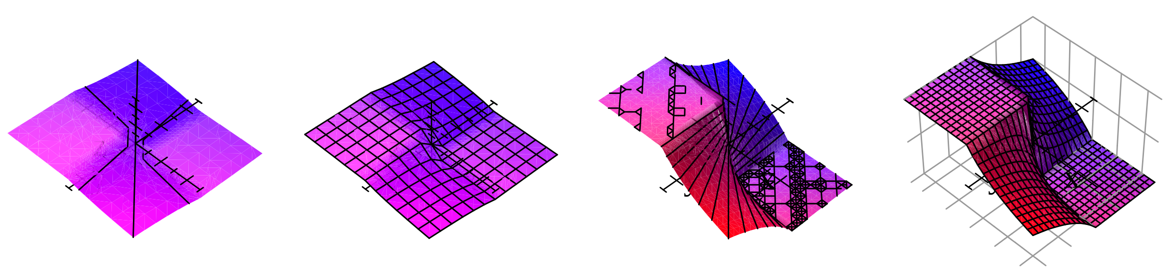
$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}, \varphi \in [0, 2\pi[$$

Se face ca $(x,y) \to (0,0)$ pe cercuri cu $r \to 0$. $\varphi \neq \dfrac{3\pi}{4}$, pentru ca $x \neq -y$. Cum

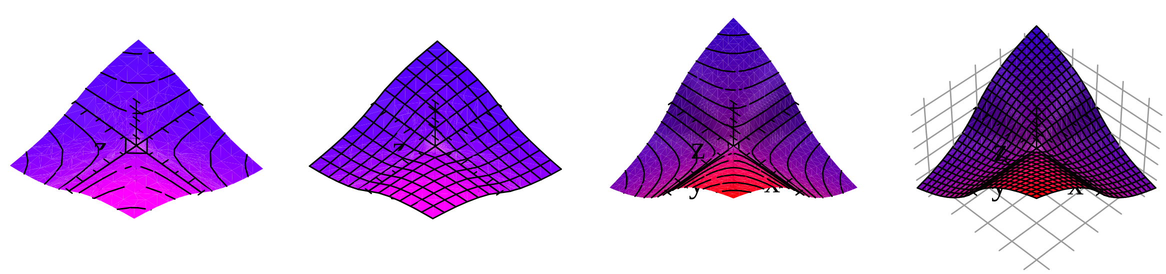
$$\lim_{r\to 0} \frac{r\cos\varphi + r\sin\varphi}{r\cos\varphi - r\sin\varphi} = \lim_{r\to 0} \frac{r}{r} \frac{\cos\varphi + \sin\varphi}{\cos\varphi - \sin\varphi} = \frac{\cos\varphi + \sin\varphi}{\cos\varphi - \sin\varphi} \text{ (depinde de } \varphi \in [0, 2\pi[\setminus \left\{\frac{3\pi}{4}\right\})$$

$\Rightarrow$nu există limita globală a funcţiei f în $(0,0)$, adică $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x-y}{x+y}$.

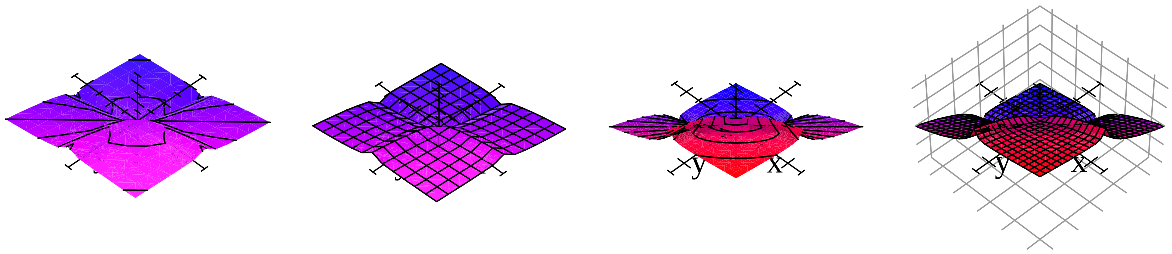
k) $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \dfrac{x-y}{|x|+|y|}$, unde $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$;



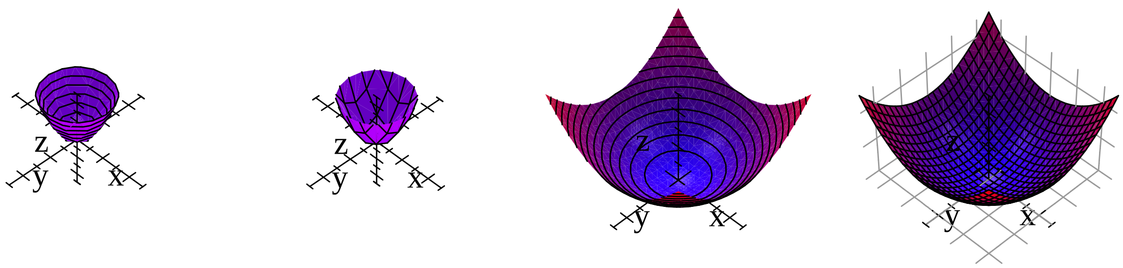
l) $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \dfrac{xy}{|x|+|y|}$, unde $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$;



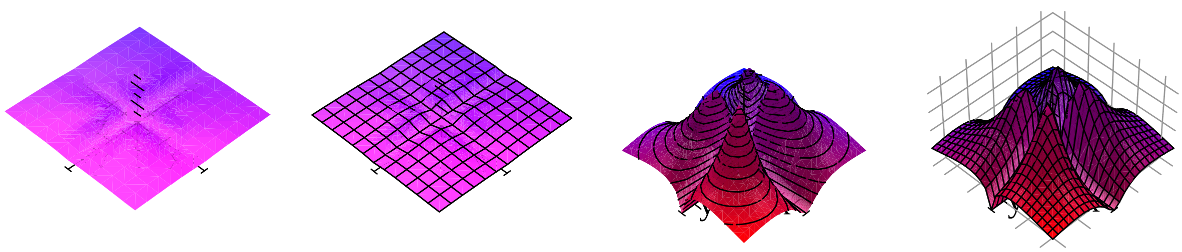
m) $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \dfrac{x+y}{\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}}$, unde $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$;



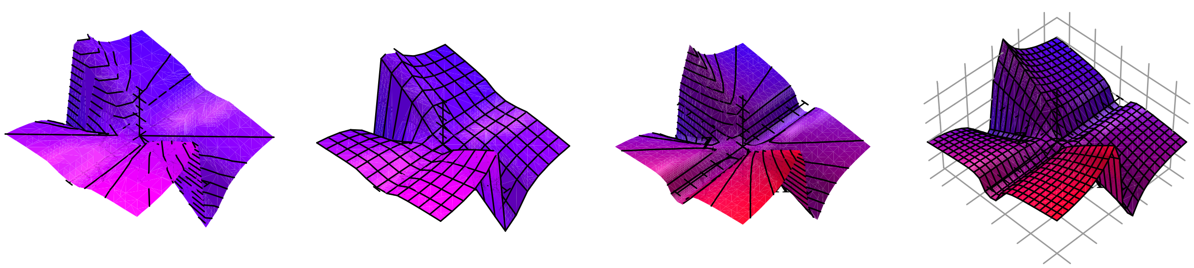
n) $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = x^2 + y^2$, unde $D = \mathbb{R}^2$;



o) $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \left(1 + x^2 |y|\right)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$, unde $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$;



p) $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = (x+y)\sin\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{y}$, unde $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.



q) $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{y}, & \text{dacă } 1 \le x^2 + y^2 \le 2, y \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases}$,
unde $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 1 \le x^2 + y^2 \le 2, y \neq 0\right\} \cup \{(0,0)\}$;
Fie $A = D$. se observă că $\mathbf{a} = (0,0) \notin A'$. Nu are sens să se studieze dacă $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Exerciţiul 4. Să se studieze dacă următoarele funcţii au limită globală în $a = (0,0,0)$, şi dacă da, să se determine această limită

a) $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \dfrac{y^2 - z^2}{x-y}$, unde $D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x - y \neq 0\right\}$.

Rezolvare. a) $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \dfrac{y^2 - z^2}{x-y}$, unde $D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x - y \neq 0\right\}$.

Fie $A = D$. se observă că $\mathbf{a} = (0,0,0) \in A'$. Are sens să se studieze dacă $\exists \lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z)$.

Etapa 1. Se intuieşte o valoare posibilă a limitei globale, dacă aceasta ar exista.

Modul 1.-cu şiruri. Se alege un şir

• $(x_n, y_n, z_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{-1}{n}, \frac{1}{n}\right), \forall n \in \mathbb{N}^*$ şir din $A \setminus \{(0,0,0)\}$ a.î. $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n, y_n, z_n) = (0,0,0)$.

$$f(x_n, y_n, z_n) = \frac{\left(\frac{-1}{n}\right)^2 - \left(\frac{1}{n}\right)^2}{\left(\frac{1}{n}\right) - \left(\frac{-1}{n}\right)} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n, z_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

$\Rightarrow$ *se poate* să existe limita globală a funcţiei f în $(0,0,0)$ şi ar avea valoarea 0.

modul 2. cu limite după direcţii.

Fie $\forall \mathbf{h} = (h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ o direcţie în $\mathbb{R}^2$ cu $h_1 \neq h_2$.

$$\exists? \lim_{t\to 0, t\in U} f((0,0,0) + t(h_1, h_2, h_3)) \underset{((\cdot))=(\cdot)}{\overset{\text{convenţie}}{=}} \lim_{t\to 0, t\in U} f(th_1, th_2, th_3) = \lim_{t\to 0, t\in U} \frac{(th_2)^2 - (th_3)^2}{(th_1) - (th_2)} =$$

$$= \lim_{t\to 0, t\in U} \frac{t^2}{t} \frac{h_2^2 - h_3^2}{h_1 - h_2} = 0, \forall (h_1, h_2, h_3)$$

$\Rightarrow$există limita funcţiei f în $(0,0,0)$ după orice direcţie $\mathbf{h}$ şi are valoarea 0

$\Rightarrow$ *se poate* să existe limita globală a funcţiei f în $(0,0,0)$ şi ar avea valoarea 0.

Etapa 2. Se studiază existenţa limitei funcţiei în $\mathbf{a} = (0,0,0)$ cu definiţia (caracterizarea $\varepsilon - \delta$).

$\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow [\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ a.î. $\forall (x,y,z) \in A \setminus \{\mathbf{a}\}$

cu $|x - 0| < \delta$, $|y - 0| < \delta$ şi $|z - 0| < \delta$ să rezulte $|f(x,y,z) - 0| < \varepsilon]$.

Fie $\forall \varepsilon > 0$. Se caută $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ a.î. $\forall (x,y,z) \in A \setminus \{\mathbf{a}\}$ cu $|x - 0| < \delta$, $|y - 0| < \delta$ şi $|z - 0| < \delta$ să rezulte

$$|f(x,y,z) - 0| = \left|\frac{y^2 - z^2}{x-y} - 0\right| = \frac{\left|y^2 - z^2\right|}{|x-y|} = \frac{|y-z|\,|y+z|}{|x-y|}$$

$$\leq \frac{(|y| + |z|)(|y| + |z|)}{|x-y|} \underset{\text{rămâne } \delta}{\overset{\text{"se scapă" de } x,y}{<}} \frac{2\delta \cdot 2\delta}{|x-y|} < ... < \varepsilon.$$

Se încearcă $|x - y| \leq |x| + |y|$ - nu foloseşte - nu se poate "scăpa" de x, y.

Se încearcă $||x| - |y|| \leq |x - y|$ - nu foloseşte - nu se poate "scăpa" de x, y.

Se intuieşte că: -sau nu se ştie o majorare, înainte de a scrie ... $< \varepsilon$.

-sau nu există limita globală $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z)$.

Etapa 3. Se arată că $\nexists \lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z)$ cu şiruri.

S-a ales deja

• $(x_n, y_n, z_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{-1}{n}, \frac{1}{n}\right), \forall n \in \mathbb{N}^*$ şir din $A \setminus \{(0,0,0)\}$ a.î. $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n, y_n, z_n) = (0,0,0)$.

$$f(x_n, y_n, z_n) = \frac{\left(\frac{-1}{n}\right)^2 - \left(\frac{1}{n}\right)^2}{\left(\frac{1}{n}\right) - \left(\frac{-1}{n}\right)} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n, z_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

Se mai alege

• $(\widetilde{x}_n, \widetilde{y}_n, \widetilde{z}_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}, \frac{1}{\sqrt{n}}, 0\right), \forall n \in \mathbb{N}^*$ şir din $A \setminus \{(0,0,0)\}$ a.î. $\lim\limits_{n\to\infty} (\widetilde{x}_n, \widetilde{y}_n, \widetilde{z}_n) = (0,0,0)$.

$$f(\widetilde{x}_n, \widetilde{y}_n, \widetilde{z}_n) = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 - 0^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(\widetilde{x}_n, \widetilde{y}_n, \widetilde{z}_n) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

Cum $0 \neq 1 \Rightarrow \nexists \lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{y^2 - z^2}{x - y}$.

Exercişiul 5. Să se stabilească dacă există limitele iterate şi limita globală în origine pentru următoarele funcţii:

a) $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}, f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$;

b) $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}, f(x,y) = x \sin \dfrac{1}{y} + y \sin \dfrac{1}{x}$;

c) $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2}$, unde $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3xy^2}{2x^2+9y^4}, & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

e) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x^3}{x^2+y^2}, & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

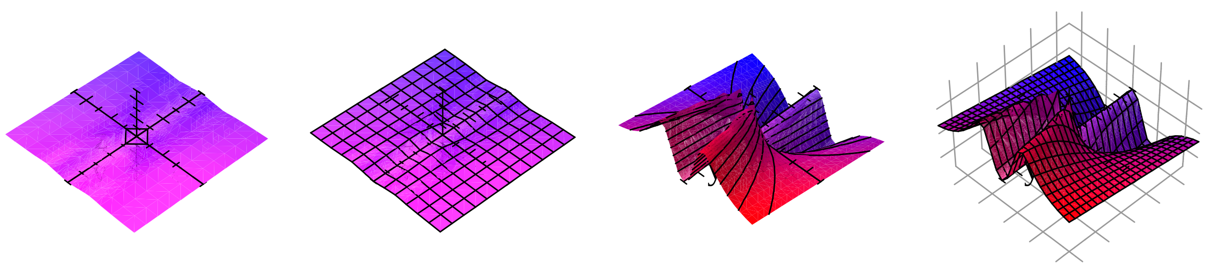
f) $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}, f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2 + x^2 - y^2}$;

g) $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}, f(x,y) = (x+y) \cos \dfrac{1}{y} \cos \dfrac{1}{x}$;

h) $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}, f(x,y) = \dfrac{x^3y^2 \sin y + x^2y^3 \sin x}{x^4+y^4}$.

Rezolvare. a), b), c) -A se vedea Curs.

d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3xy^2}{2x^2+9y^4}, & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases}$



Limitele iterate în $(0,0)$.

$$\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{3xy^2}{2x^2+9y^4} = 0 \Rightarrow \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{y\to 0} 0 = 0.$$

$$\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0} \frac{3xy^2}{2x^2+9y^4} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{x\to 0} 0 = 0.$$

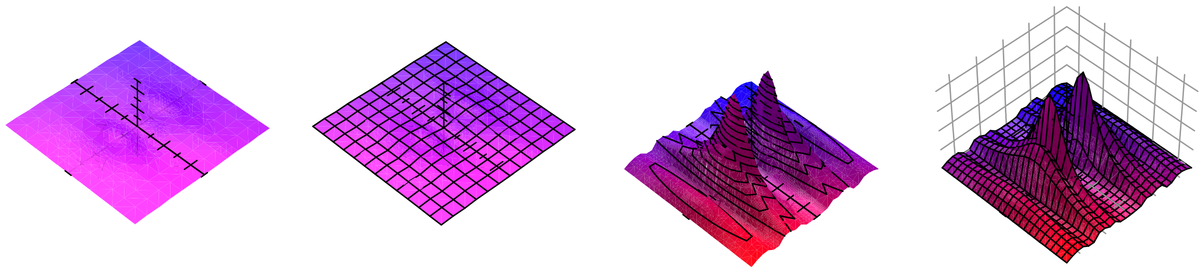
Limita globală în $(0,0)$.

Dacă se trece la limită spre $(0,0)$ pe parabole de parametru $p, y^2 = 2px \Rightarrow$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y^2=2px}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{6px^2}{2x^2 + 9\cdot 2p^2x^2} = \frac{6p}{2+18p^2}$$

deci limita este diferită pe parabole diferite$\Rightarrow$limita globală nu există.

e) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x^3}{x^2+y^2}, & \text{dacă } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{dacă } (x,y)=(0,0)\end{cases};$



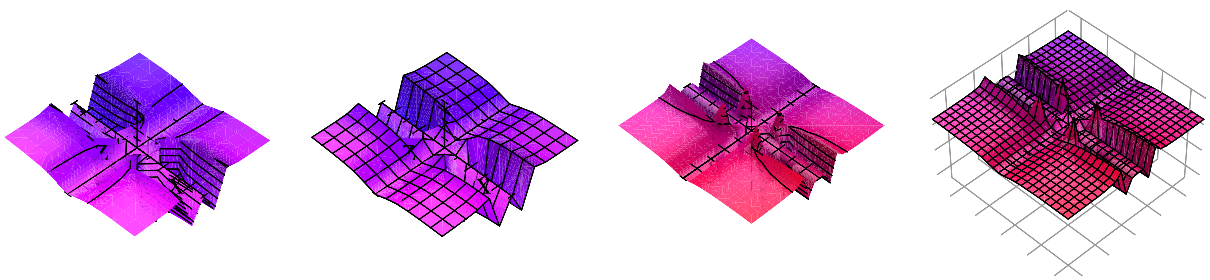
Limitele iterate în $(0,0)$.

$$\lim_{x\to 0} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x^3}{x^2+y^2}=0\Rightarrow \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right)=\lim_{y\to 0}0=0.$$

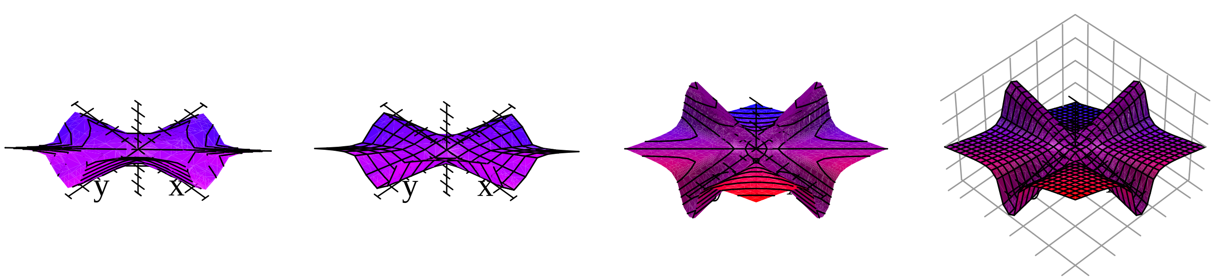
$$\lim_{y\to 0} f(x,y)=\lim_{y\to 0}\frac{1-\cos x^3}{x^2+y^2}=\frac{1-\cos x^3}{x^2}\Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x^3}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(\sin\frac{x^3}{2}\right)^2}{x^2\left(\frac{x^3}{2}\right)^2}\left(\frac{x^3}{2}\right)^2=0.$$

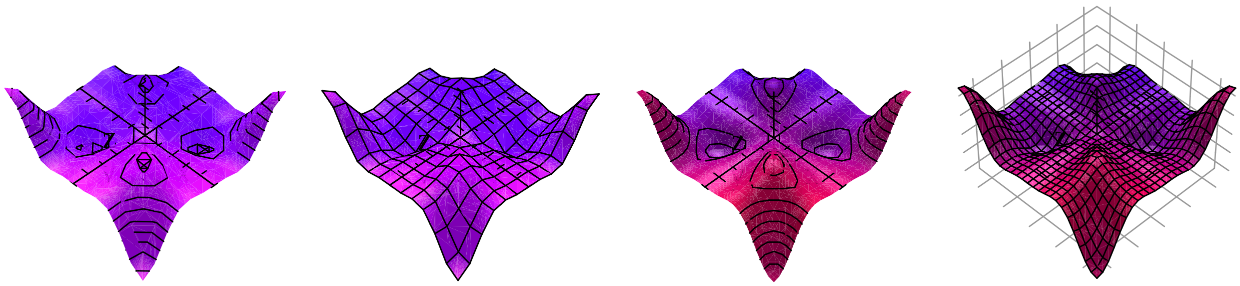
f) $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}, f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+x^2-y^2}$; Temă.



g) $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}, f(x,y)=(x+y)\cos\dfrac{1}{y}\cos\dfrac{1}{x}$; Temă.



h) $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}, f(x,y)=\dfrac{x^3y^2\sin y+x^2y^3\sin x}{x^4+y^4}$; Temă.



Exerciţiul 6. Să se studieze dacă următoarele funcţii au limită globală în $\mathbf{a} = (0,0)$, şi dacă da, să se determine această limită

a) $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2, f(x,y) = \left(\dfrac{x^4y + x^2y^4}{x^4+y^2}, \dfrac{x^4y^4}{x^4+y^4}\right)$;

b) $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2, f(x,y) = \left(\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, \dfrac{x+y}{x^2+y^2}\right)$;

c) $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2, f(x,y) = \left(\dfrac{x-y}{|x|+|y|}, \dfrac{x^2+y^2}{x^2+|y|}\right)$;

Rezolvare. Conform Teoremei 4,

$$\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} (f_1(x,y), f_2(x,y)) \Leftrightarrow \exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f_1(x,y) \text{ şi } \exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f_2(x,y).$$

În caz de existenţă,

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(0,0)} (f_1(x,y), f_2(x,y)) = \left(\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_1(x,y), \lim_{(x,y)\to(0,0)} f_2(x,y)\right)}.$$

a) $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2, f(x,y) = \left(\underbrace{\dfrac{x^4y + x^2y^4}{x^4+y^2}}_{f_1(x,y)}, \underbrace{\dfrac{x^4y^4}{x^4+y^4}}_{f_2(x,y)}\right)$;Fie

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}, f_1(x,y) = \frac{x^4y + x^2y^4}{x^4+y^2} \text{ şi } f_2 : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}, f_2(x,y) = \frac{x^4y^4}{x^4+y^4}.$$

Conform Exerciţiului 3, $g), h)$,

$$\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f_1(x,y) = 0, \exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f_2(x,y) = 0 \Rightarrow \exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = (0,0).$$

b) $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2, f(x,y) = \left(\underbrace{\dfrac{x-y}{|x|+|y|}}_{f_1(x,y)}, \underbrace{\dfrac{x+y}{x^2+y^2}}_{f_2(x,y)}\right)$;Fie

$$f_1 : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f_1(x,y) = \frac{x-y}{|x|+|y|} \text{ şi } f_2 : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f_2(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}.$$

Se poate arăta că $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_1(x,y) = 0$.

Conform exerciţiului 3, $i)$, $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_2(x,y) \Rightarrow \nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

c) $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2, f(x,y) = \left(\underbrace{\dfrac{x-y}{|x|+|y|}}_{f_1(x,y)}, \underbrace{\dfrac{x^2+y^2}{x^2+|y|}}_{f_2(x,y)}\right)$;Fie

$f_1 : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}, f_1(x,y) = \dfrac{x-y}{|x|+|y|}$ şi $f_2 : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}, f_2(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x^2+|y|}$.

$\exists? \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_1(x,y)$.

Fie $A = D$. se observă că $\mathbf{a} = (0,0) \in A'$. Are sens să se studieze dacă $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_1(x,y)$.

Etapa 1. Se studiază existenţa limitei funcţiei în $(0,0)$ cu direcţii.

Fie $\forall \mathbf{h} = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ o direcţie în $\mathbb{R}^2$.

$$\exists? \lim_{t\to0, t\in U} f((0,0) + t(h_1,h_2)) \underset{((\cdot))=(\cdot)}{\overset{\text{convenţie}}{=}} \lim_{t\to0,t\in U} f(th_1, th_2)$$

$$= \lim_{t\to0,t\in U} \frac{(th_1)-(th_1)}{|th_1|+|th_2|} = \lim_{t\to0,t\in U} \frac{t}{|t|}\frac{h_1-h_2}{|h_1|+|h_2|}, \forall (h_1,h_2)$$

Cum $\lim\limits_{t\to0,t<0} \dfrac{t}{|t|} = -1$ şi $\lim\limits_{t\to0,t>0} \dfrac{t}{|t|} = 1 \Rightarrow \nexists \lim\limits_{t\to0,t\in U} \dfrac{t}{|t|}$.

Deci nu există limitei funcţiei în $(0,0)$ după nici o direcţie din $\mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$nu există limita globală a funcţiei f_1 în $(0,0)$, adică $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_1(x,y)$.

Atunci $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

○**Exerciţiul 7**. Să se studieze dacă următoarele limite există, şi dacă da, să se determine valoarea lor

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(3,+\infty)} \dfrac{xy-1}{y+1}$;**b)** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,+\infty)} \dfrac{x}{y}$;**c)** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,-\infty)} \dfrac{x^2}{y}$;**d)** $\lim\limits_{(x,y)\to(-\infty,+\infty)} \dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$;

e) $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} \dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$;**f)** $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$.

Rezolvare. La acest exerciţiu, deoarece $\mathbf{a} \in (\overline{\mathbb{R}})^n$, nu se poate aplica, în etapa 1, studiul existenţei limitei pe baza limitei după o direcţie. La acest exerciţiu, se va intui valoarea posibilă a limitei cu şiruri. În plus, graficul funcţiei "în jurul" originii, trasat în ferestrele din dreapta, nu oferă informaţii despre limite cu (x,y) "spre componente infinite".

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(3,+\infty)} \dfrac{xy-1}{y+1}$;

Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \dfrac{xy-1}{y+1}$, unde $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y+1 \neq 0\right\}$;

Se alege $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\right\}$ a.î. $\mathbf{a} = (3,+\infty) \in A'$. Alegerea s-a făcut a.î. nu numai $y > -1$, ci chiar $y > 0$, ca să se poată majora în etapa 2, $\left|\dfrac{y}{y+1}\right| = \dfrac{y}{y+1} < 1$. Are sens să se studieze dacă $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(3,+\infty)} f(x,y)$.

Etapa 1. Se intuieşte valoarea limitei funcţiei în $(3,+\infty)$ cu şiruri. Fie

• $(x_n, y_n) = (3, n), \forall n \in \mathbb{N}^*$ şir din A a.î. $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n,y_n) = (3,+\infty)$.

$$f(x_n,y_n) = \frac{3n-1}{n+1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n,y_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{3n-1}{n+1} = 3.$$

$\Rightarrow$ *se poate* să existe limita funcţiei f în $(3,+\infty)$ şi ar avea valoarea 3.

În etapa 1 s-a arătat că numai pentru *un şir* $((x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ cu limita $(3,+\infty)$ rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n,y_n) = 3$, şi nu pentru *toate şirurile* din A, cu limita $(3,+\infty)$. Deci nu se poate aplica Teorema 2 $\Rightarrow$ *nu se poate afirma sigur* că $\lim\limits_{(x,y)\to(3,+\infty)} \dfrac{xy-1}{y+1} = 3$.

Etapa 2. Se studiază existenţa limitei funcţiei în $(3,+\infty)$ cu definiţia (caracterizarea $\varepsilon - \delta$).

$\lim\limits_{(x,y)\to(3,+\infty)} f(x,y) = 3 \Leftrightarrow [\forall\varepsilon > 0, \exists\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0,\ \exists\beta_2 = \beta_2(\varepsilon) > 0$,a.î. $\forall (x,y) \in A$

cu $0 < |x-3| < \delta_1$ şi $y > \beta_2$ să rezulte $|f(x,y) - 3| < \varepsilon]$.

Fie $\forall\varepsilon > 0$. Se caută $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$ (mic spre 0, ca şi rază a unei vecinătăţi "punctate" pentru 3), Se caută $\beta_2 = \beta_2(\varepsilon) > 0$ (mare spre $+\infty$, ca şi "rază" a unei vecinătăţi "punctate" pentru $+\infty$), a.î. $\forall(x,y) \in A$ cu $0 < |x-3| < \delta_1$ şi $y > \beta_2$ să rezulte

$$|f(x,y) - 3| = \left|\frac{xy-1}{y+1} - 3\right| = \frac{|xy - 3y - 4|}{|y+1|} \leq \frac{|y|\,|x-3| + |-4|}{|y+1|} \underset{\text{rămâne } \delta_1,\beta_2}{\overset{\text{"se scapă" de } x,y}{<}} ... < \varepsilon.$$

Cum $(x,y) \in A \Rightarrow |y+1| = y+1 > \beta_2 + 1$. Atunci

$$\frac{|y|\,|x-3| + |-4|}{|y+1|} = \frac{y}{y+1}|x-3| + \frac{4}{y+1} < 1\cdot\delta_1 + \frac{4}{\beta_2+1} < \delta_1 + \frac{4}{\beta_2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Deci se caută $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$ (mic spre 0, ca şi rază a unei vecinătăţi "punctate" pentru 3) a.î. $0 < \delta_1 < \frac{\varepsilon}{2}$. Din Teorema de densitate a $\mathbb{R}$ în $\mathbb{R}$, între numerele reale 0 şi $\frac{\varepsilon}{2}$ există un astfel de δ_1. De exemplu, $\delta_1 = \frac{\varepsilon}{4}$.

De asemenea, se caută $\beta_2 = \beta_2(\varepsilon) > 0$ (mare spre $+\infty$, ca şi "rază" a unei vecinătăţi "punctate" pentru $+\infty$) a.î.

$$\frac{4}{\beta_2} < \frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow \beta_2 > \frac{8}{\varepsilon}.$$

Din Teorema "mulţimea $\mathbb{R}$ este nemajorată", dat numărul real $\frac{8}{\varepsilon} > 0$ există un astfel de β_2 care să fie mai mare decât el. De exemplu, $\beta_2 = \frac{8}{\varepsilon} + 1$.

Deci $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(3,+\infty)} \frac{xy-1}{y+1} = 3$.

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,+\infty)} \frac{x}{y}$;

Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \frac{x}{y}$, unde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \neq 0\}$;

Se alege $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\}$ a.î. $\mathbf{a} = (0,+\infty) \in A'$. Are sens să se studieze dacă $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(3,+\infty)} f(x,y)$.

Etapa 1. Se intuieşte valoarea limitei funcţiei în $(0,+\infty)$ cu şiruri. Fie

- $(x_n, y_n) = (0, n), \forall n \in \mathbb{N}^*$ şir din A a.î. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (0,+\infty)$.

$f(x_n, y_n) = \frac{0}{n} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$.

$\Rightarrow$ *se poate* să existe limita funcţiei f în $(0,+\infty)$ şi ar avea valoarea 0.

Menţionăm că, în etapa $1'$ am arătat că numai pentru *un şir* $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ cu limita $(0,+\infty)$ avem că $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = 0$, şi nu pentru *toate şirurile* din A, cu limita $(0,+\infty)$. Deci nu putem aplica Teorema 2 $\Rightarrow$ *nu putem afirma sigur* că $\lim\limits_{(x,y)\to(0,+\infty)} \frac{x}{y} = 0$.

Etapa 2. Se studiază existenţa limitei funcţiei în $(0,+\infty)$ cu definiţia (caracterizarea $\varepsilon - \delta$).

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,+\infty)} f(x,y) = 0 \Leftrightarrow [\forall\varepsilon > 0, \exists\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0, \exists\beta_2 = \beta_2(\varepsilon) > 0$,a.î. $\forall(x,y) \in A$ cu $0 < |x-0| < \delta_1$ şi $y > \beta_2$ să rezulte $|f(x,y) - 0| < \varepsilon]$.

Fie $\forall\varepsilon > 0$. Se caută $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$ (mic spre 0, ca şi rază a unei vecinătăţi "punctate" pentru 0), Se caută $\beta_2 = \beta_2(\varepsilon) > 0$ (mare spre $+\infty$, ca şi "rază" a unei vecinătăţi "punctate" pentru $+\infty$), a.î. $\forall(x,y) \in A$ cu $0 < |x-0| < \delta_1$ şi $y > \beta_2$ să rezulte

$$|f(x,y) - 0| = \left|\frac{x}{y} - 0\right| = |x|\cdot\frac{1}{|y|} \underset{\text{rămâne } \delta_1,\beta_2}{\overset{\text{"se scapă" de } x,y}{<}} \delta_1 \cdot \frac{1}{\beta_2} < \sqrt{\varepsilon}\cdot\sqrt{\varepsilon}.$$

Deci se caută $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$ (mic spre 0, ca şi rază a unei vecinătăţi "punctate" pentru 3) a.î. $0 < \delta_1 < \sqrt{\varepsilon}$. Din Teorema de densitate a $\mathbb{R}$ în $\mathbb{R}$, între numerele reale 0 şi $\sqrt{\varepsilon}$ există un astfel de

δ_1. De exemplu, $\delta_1 = \dfrac{\sqrt{\varepsilon}}{2}$.

De asemenea, se caută $\beta_2 = \beta_2(\varepsilon) > 0$ (mare spre $+\infty$, ca şi "rază" a unei vecinătăţi "punctate" pentru $+\infty$) a.î.

$\dfrac{1}{\beta_2} < \sqrt{\varepsilon} \Leftrightarrow \beta_2 > \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$.

Din Teorema "mulţimea $\mathbb{R}$ este nemajorată", dat numărul real $\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}} > 0$ există un astfel de β_2 care să fie mai mare decât el. De exemplu, $\beta_2 = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}} + 1$.

Deci $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,+\infty)} \dfrac{x}{y} = 0$.

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,-\infty)} \dfrac{x^2}{y}$;

Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \dfrac{x^2}{y}$, unde $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \neq 0\right\}$;

Se alege $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y < 0\right\}$ a.î. $\mathbf{a} = (0,-\infty) \in A'$. Are sens să se studieze dacă $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(3,+\infty)} f(x,y)$.

Etapa 1. Se intuieşte valoarea limitei funcţiei în $(0,-\infty)$ cu şiruri. Fie

• $(x_n, y_n) = (0,-n), \forall n \in \mathbb{N}^*$ şir din A a.î. $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (0,-\infty)$.

$f(x_n, y_n) = \dfrac{0^2}{-n} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$.

$\Rightarrow$ *se poate* să existe limita funcţiei f în $(0,-\infty)$ şi ar avea valoarea 0.

În etapa $1'$ am arătat că numai pentru *un şir* $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ cu limita $(0,-\infty)$ rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = 0$, şi nu pentru *toate şirurile* din A, cu limita $(0,-\infty)$. Deci nu se poate aplica Teorema 2 $\Rightarrow$ *nu se poate afirma sigur* că $\lim\limits_{(x,y)\to(0,-\infty)} \dfrac{x^2}{y} = 0$.

Etapa 2. Se studiază existenţa limitei funcţiei în $(0,+\infty)$ cu definiţia (caracterizarea $\varepsilon - \delta$).

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,-\infty)} f(x,y) = 0 \Leftrightarrow [\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0, \exists \beta_2 = \beta_2(\varepsilon) < 0$,a.î. $\forall (x,y) \in A$ cu $0 < |x-0| < \delta_1$ şi $y < \beta_2$ să rezulte $|f(x,y) - 0| < \varepsilon]$.

Fie $\forall \varepsilon > 0$. Se caută $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$ (mic spre 0, ca şi rază a unei vecinătăţi "punctate" pentru 0), se caută $\beta_2 = \beta_2(\varepsilon) < 0$ (mic spre $-\infty$, ca şi "rază" a unei vecinătăţi "punctate" pentru $-\infty$), a.î. $\forall (x,y) \in A$ cu $0 < |x-0| < \delta_1$ şi $y < \beta_2$ să rezulte

$$|f(x,y) - 0| = \left|\frac{x^2}{y} - 0\right| = \left|x^2\right| \cdot \frac{1}{|y|} = x^2 \cdot \frac{1}{-y} \underset{\text{rămâne } \delta_1,\beta_2}{\overset{\text{"se scapă" de } x,y}{<}} \delta_1^2 \cdot \frac{1}{-\beta_2} < \sqrt{\varepsilon} \cdot \sqrt{\varepsilon}.$$

Deci se caută $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$ (mic spre 0, ca şi rază a unei vecinătăţi "punctate" pentru 3) a.î. $0 < \delta_1^2 < \sqrt{\varepsilon}$. Din Teorema de densitate a $\mathbb{R}$ în $\mathbb{R}$, între numerele reale 0 şi $\sqrt[4]{\varepsilon}$ există un astfel de δ_1. De exemplu, $\delta_1 = \dfrac{\sqrt[4]{\varepsilon}}{2}$.

De asemenea, se caută $\beta_2 = \beta_2(\varepsilon) < 0$ (mic spre $-\infty$, ca şi "rază" a unei vecinătăţi "punctate" pentru $-\infty$) a.î.

$\dfrac{1}{-\beta_2} < \sqrt{\varepsilon} \Leftrightarrow -\beta_2 > \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \Leftrightarrow \beta_2 < -\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$.

Din Teorema "mulţimea $\mathbb{R}$ este neminorată", dat numărul real $-\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}} < 0$ există un astfel de β_2 care să fie mai mic decât el. De exemplu, $\beta_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}} - 1$.

Deci $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,-\infty)} \dfrac{x^2}{y} = 0.$

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(-\infty,+\infty)} \dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4};$

Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$, unde $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; (x,y) \neq (0,0)\right\};$

Se alege $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x < 0, y > 0\right\}$ a.î. $\mathbf{a} = (-\infty,+\infty) \in A'$. Are sens să se studieze dacă $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(-\infty,+\infty)} f(x,y)$.

Etapa 1. Se intuieşte valoarea limitei funcţiei în $(-\infty,+\infty)$ cu şiruri. Fie

• $(x_n,y_n) = (-n,n), \forall n \in \mathbb{N}^*$ şir din A a.î. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n,y_n) = (-\infty,+\infty)$.

$f(x_n,y_n) = \dfrac{(-n)^2+n^2}{(-n)^4+n^4} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n,y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2}{2n^4} = 0.$

$\Rightarrow$ *se poate* să existe limita funcţiei f în $(-\infty,+\infty)$ şi ar avea valoarea 0.

Menţionăm că, în etapa $1'$ am arătat că numai pentru *un şir* $((x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ cu limita $(-\infty,+\infty)$ rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n,y_n) = 0$, şi nu pentru *toate şirurile* din A, cu limita $(-\infty,+\infty)$. Deci nu se poate aplica Teorema 2 $\Rightarrow$ *nu se poate afirma sigur* că $\lim\limits_{(x,y)\to(-\infty,+\infty)} \dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4} = 0$.

Etapa 2. Se studiază existenţa limitei funcţiei în $(-\infty,+\infty)$ cu definiţia (caracterizarea $\varepsilon - \delta$).

$\lim\limits_{(x,y)\to(-\infty,+\infty)} f(x,y) = 0 \Leftrightarrow [\forall\varepsilon > 0, \exists\beta_1 = \beta_1(\varepsilon) < 0, \exists\beta_2 = \beta_2(\varepsilon) > 0$,a.î. $\forall (x,y) \in A$ cu $x < \beta_1$ şi $y > \beta_2$ să rezulte $|f(x,y) - 0| < \varepsilon]$.

Fie $\forall\varepsilon > 0$. Se caută $\beta_1 = \beta_1(\varepsilon) < 0$ (mic spre $-\infty$, ca şi "rază" a unei vecinătăţi "punctate" pentru $-\infty$), se caută $\beta_2 = \beta_2(\varepsilon) > 0$ (mare spre $+\infty$, ca şi "rază" a unei vecinătăţi "punctate" pentru $+\infty$), a.î. $\forall (x,y) \in A$ cu $x < \beta_1$ şi $y > \beta_2$ să rezulte

$|f(x,y) - 0| = \left|\dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4} - 0\right| = \dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4} \underset{\text{rămâne } \delta_1,\beta_2}{\overset{\text{"se scapă" de } x,y}{<}} ... < \varepsilon.$

Se încearcă $x^4 + y^4 > x^4 \Rightarrow |f(x,y) - 0| < \dfrac{x^2+y^2}{x^4} = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{y^2}{x^4} < \varepsilon$–nu se poate "scăpa" de x,y.

Se încearcă $x^4 + y^4 > y^4 \Rightarrow |f(x,y) - 0| < \dfrac{x^2+y^2}{y^4} = \dfrac{x^2}{y^4} + \dfrac{1}{y^2} < \dfrac{x^2}{\beta_2^4} + \dfrac{1}{\beta_2^2} < \varepsilon$–nu se poate "scăpa" de x. De menţionat că $x < \beta_1 < 0 \nRightarrow x^2 < \beta_1^2$.

Se încearcă $x^4 + y^4 > 2x^2y^2 \Rightarrow |f(x,y) - 0| < \dfrac{x^2+y^2}{2x^2y^2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{y^2} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x^2} < \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\beta_2^2} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\beta_1^2} < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2}$. De menţionat că $x < \beta_1 < 0 \Rightarrow x^2 > \beta_1^2$.

Deci se caută $\beta_1 = \beta_1(\varepsilon) < 0$ (mic spre $-\infty$, ca şi "rază" a unei vecinătăţi "punctate" pentru $-\infty$) a.î.

$\dfrac{1}{\beta_1^2} < \varepsilon \Leftrightarrow \beta_1^2 > \dfrac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \beta_1 \in \left]-\infty, -\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right[\cup \left]\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}, +\infty\right[$

adică $\beta_1 < -\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. Din Teorema "mulţimea $\mathbb{R}$ este neminorată", dat numărul real $-\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}} < 0$, există un astfel de β_1 care să fie mai mic decât el.. De exemplu, $\beta_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}} - 1$.

De asemenea, se caută $\beta_2 = \beta_2(\varepsilon) > 0$ (mare spre $+\infty$, ca şi "rază" a unei vecinătăţi "punctate" pentru $+\infty$) a.î.

$$\frac{1}{\beta_2^2} < \varepsilon \Leftrightarrow \beta_2^2 > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \beta_2 \in \left]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right[\cup \left]\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}, +\infty\right[$$

adică $\beta_2 > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. Din Teorema "mulţimea $\mathbb{R}$ este nemajorată", dat numărul real $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} > 0$ există un astfel de β_2 care să fie mai mare decât el. De exemplu, $\beta_2 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} + 1$.

Deci $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(-\infty,+\infty)} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4} = 0$.

e) $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2}$;

Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \frac{x+y}{x^2-xy+y^2}$, unde $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; (x,y) \neq (0,0)\right\}$;

Se alege $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x > 0, y > 0\right\}$ a.î. $\mathbf{a} = (+\infty,+\infty) \in A'$. Are sens să se studieze dacă $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} f(x,y)$.

Etapa 1. Se intuieşte valoarea limitei funcţiei în $(+\infty,+\infty)$ cu şiruri. Fie

• $(x_n, y_n) = (n,n), \forall n \in \mathbb{N}^*$ şir din A a.î. $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (+\infty,+\infty)$.

$f(x_n,y_n) = \frac{n+n}{n^2 - n\cdot n + n^2} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n,y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n}{n^2} = 0$.

$\Rightarrow$ *se poate* să existe limita funcţiei f în $(+\infty,+\infty)$ şi ar avea valoarea 0.

În etapa $1'$ s-a arătat că numai pentru *un şir* $((x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ cu limita $(+\infty,+\infty)$ rezultat că $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n,y_n) = 0$, şi nu pentru *toate şirurile* din A, cu limita $(+\infty,+\infty)$. Deci nu se poate aplica Teorema 2 $\Rightarrow$ *nu se poate afirma sigur* că $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2} = 0$.

Etapa 2. Se studiază existenţa limitei funcţiei în $(-\infty,+\infty)$ cu definiţia (caracterizarea $\varepsilon - \delta$).

$\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} f(x,y) = 0 \Leftrightarrow [\forall\varepsilon > 0, \exists\beta_1 = \beta_1(\varepsilon) > 0, \exists\beta_2 = \beta_2(\varepsilon) > 0$,a.î. $\forall (x,y) \in A$ cu $x > \beta_1$ şi $y > \beta_2$ să rezulte $|f(x,y) - 0| < \varepsilon]$.

Fie $\forall\varepsilon > 0$. Se caută $\beta_1 = \beta_1(\varepsilon) > 0$ (mare spre $+\infty$, ca şi "rază" a unei vecinătăţi "punctate" pentru $+\infty$), se caută $\beta_2 = \beta_2(\varepsilon) > 0$ (mare spre $+\infty$, ca şi "rază" a unei vecinătăţi "punctate" pentru $+\infty$), a.î. $\forall (x,y) \in A$ cu $x > \beta_1$ şi $y > \beta_2$ să rezulte

$$|f(x,y) - 0| = \left|\frac{x+y}{x^2-xy+y^2} - 0\right| \overset{(x,y)\in A}{=} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2} \underset{\text{rămâne } \delta_1,\beta_2}{\overset{\text{"se scapă" de } x,y}{<}} ... < \varepsilon.$$

Se încearcă $x^2 - xy + y^2 > xy \Rightarrow |f(x,y) - 0| < \frac{x+y}{xy} = \frac{1}{y} + \frac{1}{x} < \frac{1}{\beta_2} + \frac{1}{\beta_1} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$.

Deci se caută $\beta_1 = \beta_1(\varepsilon) > 0$ (mare spre $+\infty$, ca şi "rază" a unei vecinătăţi "punctate" pentru $+\infty$) a.î. $\frac{1}{\beta_1} < \frac{\varepsilon}{2}$, adică $\beta_1 > \frac{2}{\varepsilon}$. Din Teorema "mulţimea $\mathbb{R}$ este nemajorată", dat numărul real $\frac{2}{\varepsilon} > 0$ există un astfel de β_1 care să fie mai mare decât el. De exemplu, $\beta_1 = \frac{2}{\varepsilon} + 1$.

De asemenea, se caută $\beta_2 = \beta_2(\varepsilon) > 0$ (mare spre $+\infty$, ca şi "rază" a unei vecinătăţi "punctate" pentru $+\infty$) a.î. $\frac{1}{\beta_2} < \frac{\varepsilon}{2}$, adică $\beta_2 > \frac{2}{\varepsilon}$. Din Teorema "mulţimea $\mathbb{R}$ este nemajorată", dat numărul real $\frac{2}{\varepsilon} > 0$ există un astfel de β_2 care să fie mai mare decât el. De exemplu, $\beta_2 = \frac{2}{\varepsilon} + 1$.

$\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2} = 0$.

○**Exerciţiul 8**. Fie

Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$, unde $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; (x,y) \neq (0,0)\right\}$.
Să se studieze dacă următoarele limite există, şi dacă da, să se determine valoarea lor
a) $\lim\limits_{(x,y)\to(-\infty,0)} f(x,y)$; **b)** $\lim\limits_{(x,y)\to(-\infty,+\infty)} f(x,y)$; **c)** $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} f(x,y)$.

Rezolvare. a) $\lim\limits_{(x,y)\to(-\infty,0)} \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$;

Se alege $A_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x < 0\right\}$ a.î. $\mathbf{a} = (-\infty, 0) \in A'$. Are sens să se studieze dacă $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(-\infty,0)} f(x,y)$.

Etapa 1. Se intuieşte valoarea limitei funcţiei în $(-\infty,0)$ cu şiruri. Fie

$\bullet\, (x_n, y_n) = (-n, 0), \forall n \in \mathbb{N}^*$ şir din A a.î. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n,y_n) = (-\infty,0)$.

$f(x_n,y_n) = \dfrac{-n+0}{(-n)^2+0} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n,y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-n}{n^2} = 0.$

$\Rightarrow$ *se poate* să existe limita funcţiei f în $(-\infty,0)$ şi ar avea valoarea 0.

În etapa $1'$ s-a arătat că numai pentru *un şir* $((x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ cu limita $(-\infty,0)$ rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n,y_n) = 0$, şi nu pentru *toate şirurile* din A_1, cu limita $(-\infty,0)$. Deci nu se poate aplica Teorema 2 $\Rightarrow$ *nu se poate afirma sigur* că $\lim\limits_{(x,y)\to(-\infty,0)} \dfrac{x+y}{x^2+y^2} = 0$.

Etapa 2. Se studiază existenţa limitei funcţiei în $(-\infty,0)$ cu definiţia (caracterizarea $\varepsilon - \delta$).

$\lim\limits_{(x,y)\to(-\infty,0)} f(x,y) = 0 \Leftrightarrow [\forall\varepsilon > 0, \exists\beta_1 = \beta_1(\varepsilon) < 0, \exists\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$,a.î. $\forall (x,y) \in A_1$

cu $x < \beta_1$ şi $0 < |y - 0| < \delta_2$ să rezulte $|f(x,y) - 0| < \varepsilon]$.

Fie $\forall\varepsilon > 0$. Se caută $\beta_1 = \beta_1(\varepsilon) < 0$ (mic spre $-\infty$, ca şi "rază" a unei vecinătăţi "punctate" pentru $-\infty$), se caută $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$ (mic spre 0, ca şi rază a unei vecinătăţi "punctate" pentru 0), a.î. $\forall (x,y) \in A_2$ cu $x < \beta_1$ şi $0 < |y-0| < \delta_2$ să rezulte

$|f(x,y) - 0| = \left|\dfrac{x+y}{x^2+y^2} - 0\right| \leq \dfrac{|x|+|y|}{x^2+y^2} \underset{\text{rămâne } \delta_1,\beta_2}{\overset{\text{"se scapă" de } x,y}{<}} ... < \varepsilon.$

Se încearcă $x^2+y^2 > 2|x||y| \Rightarrow |f(x,y)-0| < \dfrac{|x|+|y|}{2|x||y|} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{|y|} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{|x|} < \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{|y|} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{-\beta_1} < \varepsilon$.
$-$nu se poate "scăpa" de y.

Se încearcă $x^2+y^2 > y^2 \Rightarrow |f(x,y)-0| < \dfrac{|x|+|y|}{y^2} = \dfrac{|x|}{y^2} + \dfrac{1}{|y|} < \varepsilon -$nu se poate "scăpa" de x, y.

Se încearcă $x^2+y^2 > x^2 \Rightarrow |f(x,y)-0| < \dfrac{|x|+|y|}{x^2} = \dfrac{1}{|x|} + \dfrac{|y|}{x^2} < \dfrac{1}{-\beta_1} + \dfrac{\delta_2}{\beta_1^2} = \dfrac{1}{-\beta_1} + \dfrac{1}{-\beta_1}\dfrac{1}{-\beta_1}\delta_2 < \dfrac{\varepsilon}{2} + \left(\sqrt[3]{\dfrac{\varepsilon}{2}}\right)^3$.Menţionăm că $x < \beta_1 < 0 \Rightarrow x^2 > \beta_1^2$ şi $x < \beta_1 < 0 \Rightarrow |x| > |\beta_1| = -\beta_1$.

Deci se caută $\beta_1 = \beta_1(\varepsilon) < 0$ (mic spre $-\infty$, ca şi "rază" a unei vecinătăţi "punctate" pentru $-\infty$) a.î.

$\dfrac{1}{-\beta_1} < \dfrac{\varepsilon}{2}$ şi $\dfrac{1}{-\beta_1} < \sqrt[3]{\dfrac{\varepsilon}{2}}$,

adică $\beta_1 < -\dfrac{2}{\varepsilon}$ şi $\beta_1 < -\sqrt[3]{\dfrac{2}{\varepsilon}}$. Din Teorema "mulţimea $\mathbb{R}$ este neminorată", De exemplu, $\beta_1 = \min\left\{-\dfrac{2}{\varepsilon}, -\sqrt[3]{\dfrac{2}{\varepsilon}}\right\} - 1$.

De asemenea, se caută $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$ (mic spre 0, ca şi rază a unei vecinătăţi "punctate" pentru 0) a.î. $0 < \delta_2 < \sqrt[3]{\dfrac{\varepsilon}{2}}$. Din Teorema de densitate a $\mathbb{R}$ în $\mathbb{R}$, între numerele reale 0 şi $\sqrt[3]{\dfrac{\varepsilon}{2}}$

există un astfel de δ_2. De exemplu, $\delta_1 = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{\varepsilon}{2}}$.

Deci $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(-\infty,0)} \frac{x+y}{x^2+y^2} = 0$.

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(-\infty,+\infty)} \frac{x+y}{x^2+y^2}$;

Se alege $A_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x<0, y>0\right\}$ a.î. $\mathbf{a} = (-\infty,+\infty) \in A'$. A se vedea reprezentarea grafică a A şi $\mathbf{a}$. Are sens să se studieze dacă $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(-\infty,+\infty)} f(x,y)$.

Etapa 1. Se intuieşte valoarea limitei funcţiei în $(-\infty,+\infty)$ cu şiruri. Fie

• $(x_n,y_n) = (-n,n), \forall n \in \mathbb{N}^*$ şir din A a.î. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n,y_n) = (-\infty,+\infty)$.

$f(x_n,y_n) = \frac{-n+n}{(-n)^2+n^2} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n,y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$.

$\Rightarrow$ *se poate* să existe limita funcţiei f în $(-\infty,+\infty)$ şi ar avea valoarea 0.

În etapa $1'$ s-a arătat că numai pentru *un şir* $((x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ cu limita $(-\infty,+\infty)$ rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n,y_n) = 0$, şi nu pentru *toate şirurile* din A_2, cu limita $(-\infty,+\infty)$. Deci nu se poate aplica Teorema 2 $\Rightarrow$ *nu se poate afirma sigur* că $\lim\limits_{(x,y)\to(-\infty,+\infty)} \frac{x+y}{x^2+y^2} = 0$.

Etapa 2. Se studiază existenţa limitei funcţiei în $(-\infty,+\infty)$ cu definiţia (caracterizarea $\varepsilon-\delta$).

$\lim\limits_{(x,y)\to(-\infty,+\infty)} f(x,y) = 0 \Leftrightarrow [\forall\varepsilon>0, \exists\beta_1 = \beta_1(\varepsilon)<0, \exists\beta_2 = \beta_2(\varepsilon)>0$,a.î. $\forall(x,y)\in A_2$ cu $x<\beta_1$ şi $y>\beta_2$ să rezulte $|f(x,y)-0|<\varepsilon]$.

Fie $\forall\varepsilon>0$. Se caută $\beta_1 = \beta_1(\varepsilon)<0$ (mic spre $-\infty$, ca şi "rază" a unei vecinătăţi "punctate" pentru $-\infty$), se caută $\beta_2 = \beta_2(\varepsilon)>0$ (mare spre $+\infty$, ca şi "rază" a unei vecinătăţi "punctate" pentru $+\infty$), a.î. $\forall(x,y)\in A_2$ cu $x<\beta_1$ şi $y>\beta_2$ să rezulte

$$|f(x,y)-0| = \left|\frac{x+y}{x^2+y^2}-0\right| \le \frac{|x|+|y|}{x^2+y^2} \underset{\text{rămâne } \delta_1,\beta_2}{\overset{\text{"se scapă" de } x,y}{<}} \ldots < \varepsilon.$$

Se încearcă $x^2+y^2>y^2 \Rightarrow |f(x,y)-0| < \frac{|x|+|y|}{y^2} = \frac{|x|}{\beta_2^2}+\frac{1}{\beta_2} < \varepsilon -$nu se poate "scăpa" de x.

Menţionăm că $x<\beta_1<0 \Rightarrow x^2>\beta_1^2$ şi $x<\beta_1<0 \Rightarrow |x|>|\beta_1| = -\beta_1$.

Se încearcă $x^2+y^2>x^2 \Rightarrow |f(x,y)-0| < \frac{|x|+|y|}{x^2} = \frac{1}{|x|}+\frac{|y|}{x^2} < \frac{1}{-\beta_1}+\frac{|y|}{\beta_1^2} < \varepsilon -$nu se poate "scăpa" de y.

Se încearcă $x^2+y^2>2|x||y| \Rightarrow |f(x,y)-0| < \frac{|x|+|y|}{2|x||y|} = \frac{1}{2}\frac{1}{|y|}+\frac{1}{2}\frac{1}{|x|} < \frac{1}{2}\frac{1}{\beta_2}+\frac{1}{2}\frac{1}{-\beta_1} < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}$.

Deci se caută $\beta_1 = \beta_1(\varepsilon)<0$ (mic spre $-\infty$, ca şi "rază" a unei vecinătăţi "punctate" pentru $-\infty$) a.î. $\frac{1}{-\beta_1}<\varepsilon$, adică $\beta_1 < -\frac{1}{\varepsilon}$. Din Teorema "mulţimea $\mathbb{R}$ este neminorată", De exemplu, $\beta_1 = -\frac{1}{\varepsilon}-1$.

De asemenea, se caută $\beta_2 = \beta_2(\varepsilon)>0$ (mare spre $+\infty$, ca şi "rază" a unei vecinătăţi "punctate" pentru $+\infty$) a.î. $\frac{1}{\beta_2}<\varepsilon$, adică $\beta_2>\frac{1}{\varepsilon}$. Din Teorema "mulţimea $\mathbb{R}$ este nemajorată". De exemplu, $\beta_2 = \frac{1}{\varepsilon}+1$.

Deci $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(-\infty,+\infty)} \frac{x+y}{x^2+y^2} = 0$.

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} \frac{x+y}{x^2+y^2}$;

Se alege $A_3 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x > 0, y > 0\right\}$ a.î. $\mathbf{a} = (+\infty, +\infty) \in A'$. A se vedea reprezentarea grafică a A şi $\mathbf{a}$. Are sens să se studieze dacă $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} f(x,y)$.

Etapa 1. Se intuieşte valoarea limitei funcţiei în $(+\infty,+\infty)$ cu şiruri. Fie

$\bullet\ (x_n, y_n) = (n, n), \forall n \in \mathbb{N}^*$ şir din A a.î. $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (+\infty, +\infty)$.

$f(x_n, y_n) = \dfrac{n+n}{n^2+n^2} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n}{2n^2} = 0.$

$\Rightarrow$ *se poate* să existe limita funcţiei f în $(+\infty,+\infty)$ şi ar avea valoarea 0.

În etapa $1'$ am arătat că numai pentru *un şir* $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ cu limita $(+\infty,+\infty)$ rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = 0$, şi nu pentru *toate şirurile* din A_3, cu limita $(+\infty,+\infty)$. Deci nu se poate aplica Teorema 2 $\Rightarrow$ *nu se poate afirma sigur* că $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} \dfrac{x+y}{x^2+y^2} = 0$.

Etapa 2. Se studiază existenţa limitei funcţiei în $(+\infty,+\infty)$ cu definiţia (caracterizarea $\varepsilon - \delta$).

$\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} f(x,y) = 0 \Leftrightarrow [\forall \varepsilon > 0, \exists \beta_1 = \beta_1(\varepsilon) > 0, \exists \beta_2 = \beta_2(\varepsilon) > 0$,a.î. $\forall (x,y) \in A_1$ cu $x > \beta_1$ şi $y > \beta_2$ să rezulte $|f(x,y) - 0| < \varepsilon]$.

Fie $\forall \varepsilon > 0$. Se caută $\beta_1 = \beta_1(\varepsilon) > 0$ (mare spre $+\infty$, ca şi "rază" a unei vecinătăţi "punctate" pentru $+\infty$), se caută $\beta_2 = \beta_2(\varepsilon) > 0$ (mare spre $+\infty$, ca şi "rază" a unei vecinătăţi "punctate" pentru $+\infty$), a.î. $\forall (x,y) \in A$ cu $x > \beta_1$ şi $y > \beta_2$ să rezulte

$$|f(x,y) - 0| = \left|\frac{x+y}{x^2+y^2} - 0\right| \le \frac{|x|+|y|}{x^2+y^2} \underset{\text{rămâne } \delta_1, \beta_2}{\overset{\text{"se scapă" de } x,y}{<}} \ldots < \varepsilon.$$

Se încearcă $x^2 + y^2 > y^2 \Rightarrow |f(x,y) - 0| < \dfrac{|x|+|y|}{y^2} = \dfrac{|x|}{\beta_2^2} + \dfrac{1}{\beta_2} < \varepsilon -$nu se poate "scăpa" de x.

Se încearcă $x^2 + y^2 > x^2 \Rightarrow |f(x,y) - 0| < \dfrac{|x|+|y|}{x^2} = \dfrac{1}{|x|} + \dfrac{|y|}{x^2} < \dfrac{1}{\beta_1} + \dfrac{|y|}{\beta_1^2} < \varepsilon -$nu se poate "scăpa" de y.

Se încearcă $x^2+y^2 > 2|x||y| \Rightarrow |f(x,y) - 0| < \dfrac{|x|+|y|}{2|x||y|} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{|y|} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{|x|} < \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\beta_2} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\beta_1} < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Deci se caută $\beta_1 = \beta_1(\varepsilon) > 0$ (mare spre $+\infty$, ca şi "rază" a unei vecinătăţi "punctate" pentru $+\infty$) a.î. $\dfrac{1}{\beta_1} < \varepsilon$, adică $\beta_1 > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Din Teorema "mulţimea $\mathbb{R}$ este nemajorată", De exemplu, $\beta_1 = \dfrac{1}{\varepsilon} + 1$.

De asemenea, Se caută $\beta_2 = \beta_2(\varepsilon) > 0$ (mare spre $+\infty$, ca şi "rază" a unei vecinătăţi "punctate" pentru $+\infty$) a.î. $\dfrac{1}{\beta_2} < \varepsilon$, adică $\beta_2 > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Din Teorema "mulţimea $\mathbb{R}$ este nemajorată", De exemplu, $\beta_2 = \dfrac{1}{\varepsilon} + 1$.

Deci $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} \dfrac{x+y}{x^2+y^2} = 0$.

○**Exerciţiul 9**. Să se studieze dacă următoarele limite există, şi dacă da, să se determine valoarea lor

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} \dfrac{x^2}{x+y}$; **b)** $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,-\infty)} \dfrac{y^2}{x^2+y^2}$.

Rezolvare. A se vedea Curs.

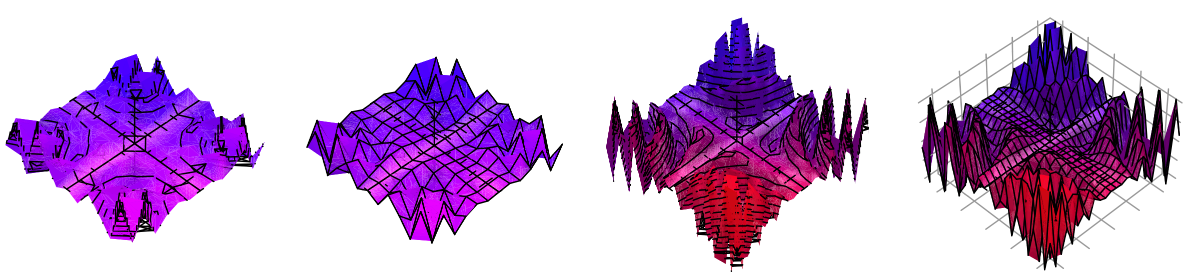
○10.1. Limită uniformă-nu

11. Funcţii $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ continue în $a \in A$

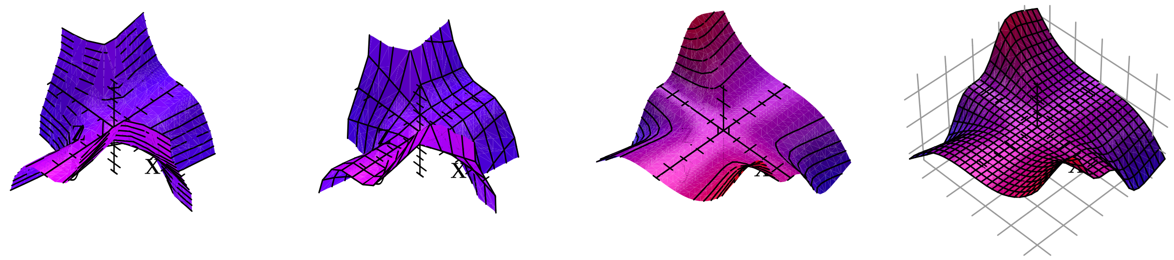
Definiţia 1. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $\mathbf{a} \in A$.
a) Funcţia f *este continuă în punctul* $\mathbf{a}$ dacă
$[\forall V \in \mathcal{V}(f(\mathbf{a})), \exists W = W_V \in \mathcal{V}(\mathbf{a})$ a.î. $\forall \mathbf{x} \in A \cap W \Rightarrow f(\mathbf{x}) \in V]$.
b) Funcţia f *este continuă pe mulţimea* A dacă este continuă în fiecare $\mathbf{a} \in A$ în sensul menţionat anterior.
Teorema 1 (**de caracterizare a continuităţii**)- A se vedea Curs.
Observaţia 1. Se reformulează teorema de caracterizare pentru
A) $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = ...$ Fie $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in A', \mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$. Sunt echivalente afirmaţiile
(a) (**definiţia continuităţii cu vecinătăţi**)
-dacă $\mathbf{a} \in A \cap A', \exists \lim\limits_{(x,y)\to(a_1,a_2),(x,y)\in A} f(x,y) = f(a_1,a_2)$
-dacă $\mathbf{a} \in A \setminus A'$, adică este punct izolat, f este continuă (deoarece se verifică Definiţia 1)
(b) (caracterizarea $\varepsilon - \delta$) $[\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ a.î. $\forall (x,y) \in A$ cu
$|x - a_1| < \delta$ şi $|y - a_2| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - f(a_1,a_2)| < \varepsilon]$.
(c) (caracterizarea **cu şiruri**) (se renotează cu n indicele de şir)
$[\forall ((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}_m}$ un şir de perechi de numere reale din A, cu
$\lim\limits_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (a_1, a_2) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = f(a_1, a_2)]$
B) $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x,y,z) = ...$ Fie $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \in A', \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$. Sunt echivalente afirmaţiile
(a) (**definiţia continuităţii cu vecinătăţi**)
-dacă $\mathbf{a} \in A \cap A', \exists \lim\limits_{(x,y,z)\to(a_1,a_2,a_3),(x,y)\in A} f(x,y,z) = f(a_1,a_2,a_3)$
-dacă $\mathbf{a} \in A \setminus A'$, adică este punct izolat, f este continuă (deoarece se verifică Definiţia 1)
(b) (caracterizarea $\varepsilon - \delta$) $[\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ a.î. $\forall (x,y,z) \in A$ cu
$|x - a_1| < \delta, |y - a_2| < \delta, |z - a_3| < \delta \Rightarrow |f(x,y,z) - f(a_1,a_2,a_3)| < \varepsilon]$.
(c) (caracterizarea **cu şiruri**) (se renotează cu n indicele de şir)
$[\forall ((x_n, y_n, z_n))_{n\in\mathbb{N}_m}$ un şir de triplete de numere reale din A, cu
$\lim\limits_{n\to\infty} (x_n, y_n, z_n) = (a_1, a_2, a_3) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n, z_n) = f(a_1, a_2, a_3)]$
Teorema 2. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p, f(x_1,...,x_n) = (f_1(x_1,...,x_n), ..., f_p(x_1,...,x_n))$ şi $\mathbf{a} \in A$. Atunci
f este continuă în $\mathbf{a} \Leftrightarrow [f_i$ este continuă în $\mathbf{a}, \forall i \in \{1,...,p\}]$.

Exerciţiul 1. Să se studieze dacă următoarele funcţii sunt continue pe $\mathbb{R}^2$

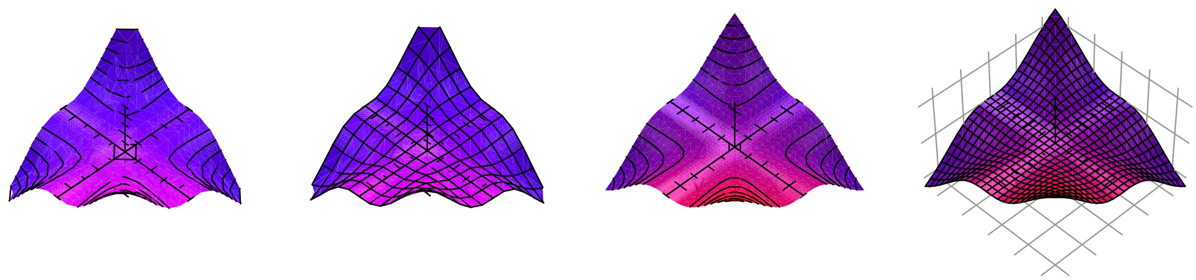
a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y \sin(xy)}{x^2+y^2}, & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases};$



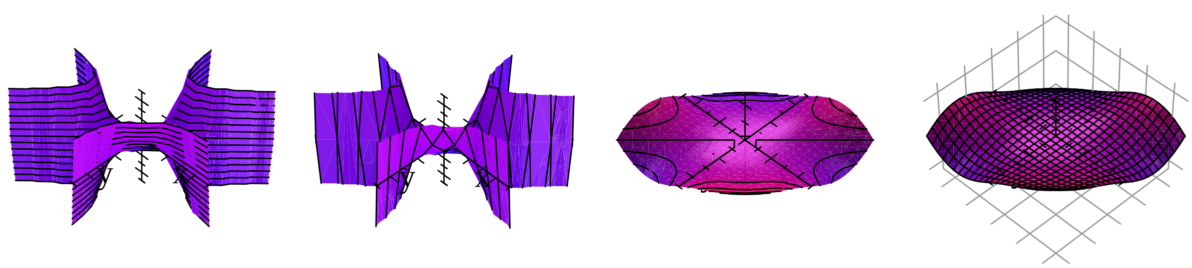
b) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y^3}{x^4+y^2}, & \text{dacă } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{dacă } (x,y)=(0,0)\end{cases};$



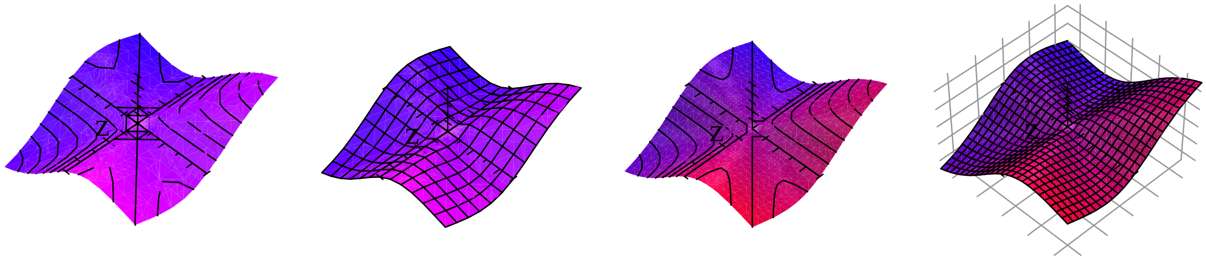
c) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y^3}{\left(x^2+y^2\right)^2}, & \text{dacă } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{dacă } (x,y)=(0,0)\end{cases};$



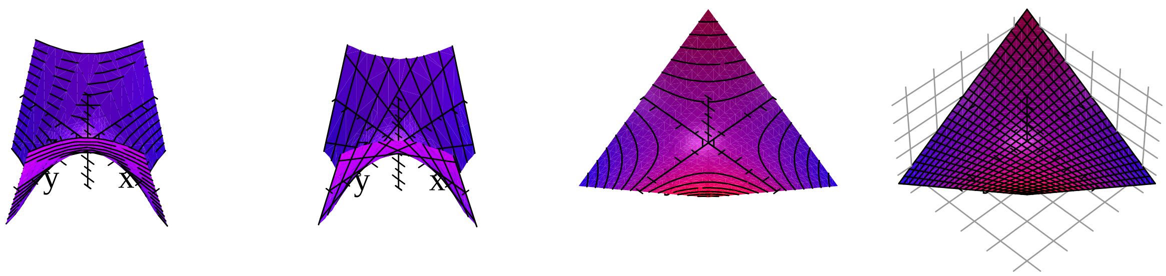
d) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4y+xy^4}{x^2+y^2}, & \text{dacă } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{dacă } (x,y)=(0,0)\end{cases};$



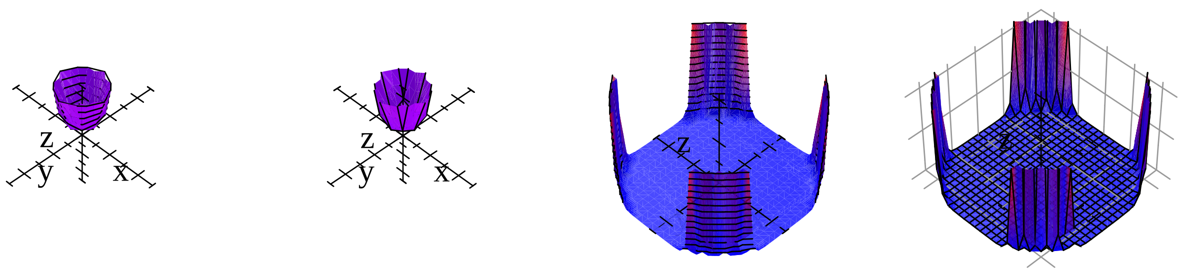
e) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y-xy^2}{x^2+y^2}, & \text{dacă } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{dacă } (x,y)=(0,0)\end{cases};$



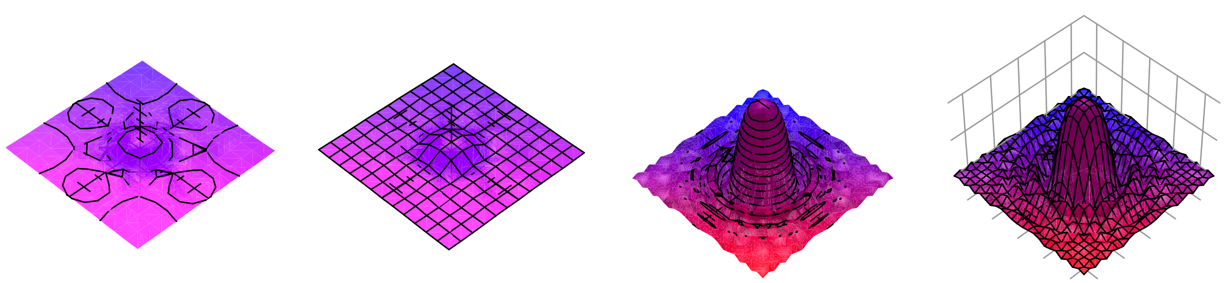
f) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y+xy^3}{x^2+y^2}, & \text{dacă } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{dacă } (x,y)=(0,0)\end{cases}$;



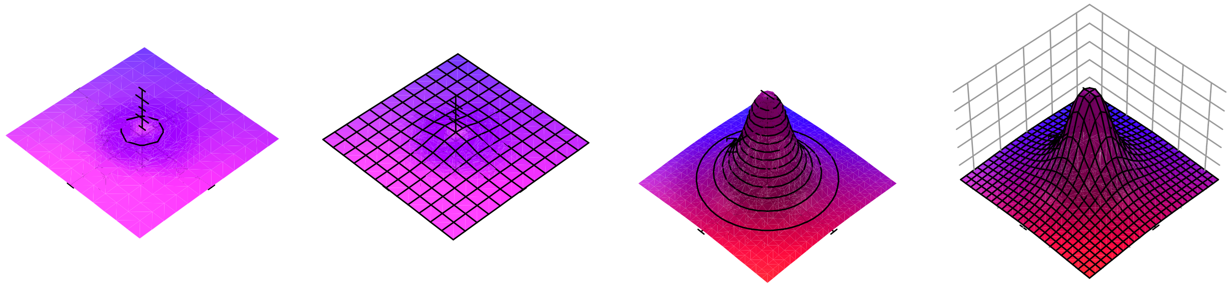
g) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}, & \text{dacă } (x,y)\neq(0,0)\\ 1, & \text{dacă } (x,y)=(0,0)\end{cases}$;



h) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}, & \text{dacă } (x,y)\neq(0,0)\\ 1, & \text{dacă } (x,y)=(0,0)\end{cases}$;



i) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{arctg}\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}, & \text{dacă } (x,y)\neq(0,0)\\ 1, & \text{dacă } (x,y)=(0,0)\end{cases}$;



Rezolvare. a) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y\sin(xy)}{x^2+y^2}, & \text{dacă } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{dacă } (x,y)=(0,0)\end{cases}$;

Se studiază dacă f este continuă pe $A=\mathbb{R}^2=\left(\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\right)\cup\{(0,0)\}$.

•Pe $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, care este mulţime deschisă, f este continuă ca fiind obţinută prin operaţii algebrice cu funcţii continue.

•În $a=(0,0)\in A\cap A'$, f este continuă $\overset{\text{Teorema 1}}{\Leftrightarrow}\exists\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\underbrace{f(0,0)}_{0}$.

Etapa 2. Se studiază existenţa limitei funcţiei în $(0,0)$ cu definiţia (caracterizarea $\varepsilon-\delta$).

$\exists\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0\Leftrightarrow[\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$ a.î. $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ cu

$\underbrace{|x-0|<\delta \text{ şi } |y-0|<\delta}_{\text{vec. a }(0,0)}\Rightarrow\underbrace{|f(x,y)-0|<\varepsilon}_{\text{vec. a }0}]$.

Fie $\forall\varepsilon>0$. Se caută $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ a.î. $\forall(x,y)\in A\setminus\{(0,0)\}$ cu

$|x-0|<\delta$ şi $|y-0|<\delta$ să rezulte

$|f(x,y)-0|=\left|\dfrac{x^2y\sin(xy)}{x^2+y^2}-0\right|=\dfrac{x^2|y||\sin(xy)|}{x^2+y^2}\leq\dfrac{x^2}{x^2+y^2}|y|\underset{\text{rămâne }\delta}{\overset{\text{"se scapă" de }x,y}{<}}1\cdot\delta<\varepsilon.$

Din Teorema de densitate a $\mathbb{R}$ în $\mathbb{R}$, între numerele reale 0 şi ε există un astfel de δ. De exemplu, $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$.

Deci $\exists\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y\sin(xy)}{x^2+y^2}=0=f(0,0)$

$\Rightarrow f$ este continuă în $a=(0,0)$.

b), c), d), e), f)-sunt funcţii continue pe $\mathbb{R}^2$; A se vedea Cursul pentru b).

g) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}, & \text{dacă } (x,y)\neq(0,0)\\ 1, & \text{dacă } (x,y)=(0,0)\end{cases}$;

Se studiază dacă f este continuă pe $A=\mathbb{R}^2=\left(\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\right)\cup\{(0,0)\}$.

•Pe $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, care este mulţime deschisă, f este continuă ca fiind obţinută prin operaţii algebrice cu funcţii continue.

•În $a=(0,0)\in A\cap A'$, f este continuă $\overset{\text{Teorema 1}}{\Leftrightarrow}\exists\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=f(0,0)$.

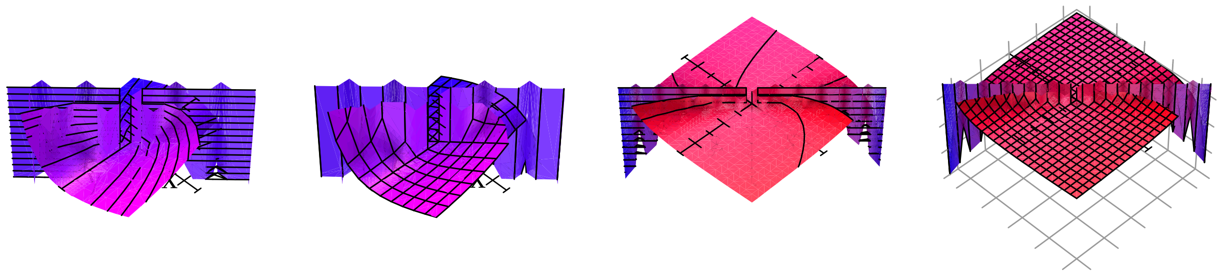
$\exists?\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}=\lim\limits_{u\to0}\dfrac{e^u-1}{u}=\ln e=1.$

S-a utilizat faptul că variabilele de trecere la limită sunt legate prin $u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, u(x,y)=x^2+y^2$ continuă şi că $[(x,y)\to(0,0)\Rightarrow u\to0]$.

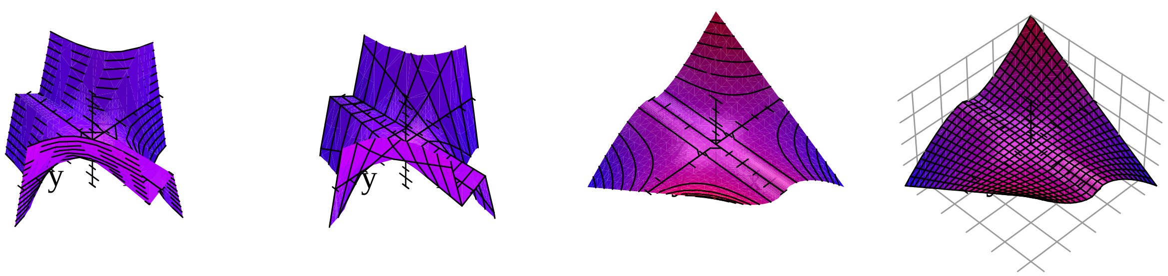
Deci f este continuă în $(0,0)$.
h), **i)**-sunt funcţii continue pe $\mathbb{R}^2$.

Exerciţiul 2. Să se studieze dacă următoarele funcţii sunt continue în $(0,0)$

a) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^2}{x+y}, & \text{dacă } x+y\neq 0\\ 0, & \text{dacă } x+y=0\end{cases}$;



b) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, f(x,y)=\begin{cases} xy\ln|x|, & \text{dacă } x\neq 0\\ 0, & \text{dacă } x=0\end{cases}$;



Rezolvare. a) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^2}{x+y}, & \text{dacă } x+y\neq 0\\ 0, & \text{dacă } x+y=0\end{cases}$;

În $a=(0,0)\in(\mathbb{R}^2)\cap(\mathbb{R}^2)'$, f este continuă $\overset{\text{Teorema 1}}{\Leftrightarrow}\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\underbrace{f(0,0)}_{0}$.

Etapa 2. Se studiază existenţa limitei funcţiei în $(0,0)$ cu definiţia (caracterizarea $\varepsilon-\delta$).

Considerăm $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; x+y\neq 0\}$.

$\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0\Leftrightarrow [\forall\varepsilon>0, \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$ a.î. $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ cu

$\underbrace{|x-0|<\delta \text{ şi } |y-0|<\delta}_{\text{vec. a }(0,0)}\Rightarrow\underbrace{|f(x,y)-0|<\varepsilon}_{\text{vec. a }0}]$.

Fie $\forall\varepsilon>0$. Se caută $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ a.î. $\forall(x,y)\in A\setminus\{(0,0)\}$ cu

$|x-0|<\delta$ şi $|y-0|<\delta$ să rezulte

$|f(x,y)-0|=\left|\dfrac{y^2}{x+y}-0\right|=\dfrac{y^2}{|x+y|}\underset{\text{rămâne }\delta}{\overset{\text{"se scapă" de } x,y}{<}}\ldots<\varepsilon.$

Se încearcă $|x+y|\leq|x|+|y|$ - nu foloseşte - nu se poate "scăpa" de x,y.

Se intuieşte că

-sau nu se ştie o majorare, înainte de a scrie ... $<\varepsilon$.

-sau nu există limita globală $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Etapa 3. Se arată că $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ cu şiruri. Se alege

• $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), \forall n \in \mathbb{N}^*$ şir de perechi din $A \setminus \{(0,0)\}$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (0,0)$. Se observă că

$$f(x_n, y_n) = \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{2n} = 0.$$

• $(\widetilde{x}_n, \widetilde{y}_n) = \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), \forall n \in \mathbb{N}^*$ şir de perechi din $A\setminus\{(0,0)\}$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty}(\widetilde{x}_n, \widetilde{y}_n) = (0,0)$. Se observă că

$$f(\widetilde{x}_n, \widetilde{y}_n) = \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}} = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(\widetilde{x}_n, \widetilde{y}_n) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

Cum $0 \neq 1 \Rightarrow \nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^2}{x+y}$.

$\Rightarrow f$ nu este continuă în $a = (0,0)$.

b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} xy\ln|x|, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$;

În $a = (0,0) \in \left(\mathbb{R}^2\right) \cap \left(\mathbb{R}^2\right)'$, f este continuă $\overset{\text{Teorema 1}}{\Leftrightarrow} \exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$.

$\exists? \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} xy\ln|x|$

Deoarece $f(x,y) = g_1(x)\cdot g_2(y), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, se poate studia separat

$\exists? \lim\limits_{x\to 0} x\ln|x| = 0$, deoarece $\lim\limits_{x\to 0, x<0} x\ln(-x) = 0$ şi $\lim\limits_{x\to 0, x>0} x\ln x = 0$;

$\exists? \lim\limits_{y\to 0} y = 0$.

Deci $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} xy\ln|x| = \left(\lim\limits_{x\to 0} x\ln|x|\right)\cdot\left(\lim\limits_{y\to 0} y\right) = 0\cdot 0 = 0 = f(0,0)$.

Deci f este continuă în $(0,0)$.

Exerciţiul 3. Să se studieze dacă următoarea funcţie este continuă pe $D \subset \mathbb{R}^2$

$$f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2-4}, & \text{dacă } x^2+y^2 > 4 \\ \pi, & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

unde $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2 > 4\right\} \cup \{(0,0)\}$.-A se vedea Curs.

○11.3. Funcţii care au proprietatea lui Darboux...

○11.4. Funcţii uniform continue pe A. Funcţii Lipschitz pe A. Contracţii pe A...