SEMINAR NR. 8, REZOLVĂRI
Analiză matematică, AIA

12.2. Derivata de ordin 2 şi mai mare decât 2 după direcţii; derivatele parţiale de ordin 2 şi mai mare decât 2 în raport cu variabilele funcţiei; diferenţiala de ordin 2 şi mai mare decât 2

Definiţia 3. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ deschisă, $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \mathbf{a} \in A$. Fie $j \in \{1, ..., n\}$. Se presupune că f este derivabilă parţial de ordinul 1 pe o vecinătate a punctului $\mathbf{a}$, $A_j \subseteq A$, în raport cu variabila x_j, adică $\exists \dfrac{\partial f}{\partial x_j} : A_j \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

a) Fie $i \in \{1, ..., n\}$. Funcţia f *are derivată parţială de ordinul* 2 *în punctul* $\mathbf{a}$ *în raport cu perechea ordonată de variabile* (x_j, x_i) dacă $\exists \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\right)(\mathbf{a}) \in \overline{\mathbb{R}}$.

b) Fie $i \in \{1, ..., n\}$. Funcţia f *este derivabilă parţial de ordinul* 2 *în* $\mathbf{a}$ *în raport cu perechea ordonată de variabile* (x_j, x_i), dacă $\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\right)(\mathbf{a}) \in \mathbb{R}$. Dacă există, numărul $\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\right)(\mathbf{a}) \in \mathbb{R}$ se numeşte *derivata parţială a funcţiei* f *de ordinul* 2 *în* $\mathbf{a}$ *în raport cu perechea ordonată de variabile* (x_j, x_i).

Pentru $i \neq j$,

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(\mathbf{a}) \underset{\text{pentru } i\neq j}{\overset{\text{se not.}}{=}} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}) \underset{\text{pentru } i\neq j}{\overset{\text{sau se not.}}{=}} f''_{x_j x_i}(\mathbf{a})} \tag{2}$$

iar dacă există, se numeşte *derivata parţială mixtă a funcţiei* f *de ordinul* 2 *în* $\mathbf{a}$*, în raport cu variabilele* (x_j, x_i).

Pentru $i = j$,

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(\mathbf{a}) \underset{\text{pentru } i=j}{\overset{\text{se not.}}{=}} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(\mathbf{a}) \underset{\text{pentru } i=j}{\overset{\text{sau se not.}}{=}} f''_{x_j^2}(\mathbf{a})} \tag{3}$$

iar dacă există, se numeşte *derivata parţială simplă a funcţiei* f *de ordinul* 2 *în* $\mathbf{a}$*, în raport cu variabila* x_j.

c) Fie $i \in \{1, ..., n\}$. Funcţia f este *derivabilă parţial de ordinul* 2 *pe mulţimea deschisă* A *în raport cu variabilele* (x_j, x_i), dacă este derivabilă parţial de ordinul 2 în $\forall \mathbf{a} \in A$ în raport cu perechea ordonată de variabile (x_j, x_i).

d) Funcţia f este *de clasă* $\mathcal{C}^2$ *pe mulţimea deschisă* A şi se notează $f \in \mathcal{C}^2(A; \mathbb{R})$ dacă este derivabilă parţial de ordinul 2 pe A în raport cu toate perechile de variabilele (x_j, x_i), $j \in \{1, ..., n\}$, $i \in \{1, ..., n\}$ şi funcţiile derivate parţiale de ordinul 2 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ şi $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sunt continue pe A, $\forall j \in \{1, ..., n\}, \forall i \in \{1, ..., n\}$.

Există n^2 derivate parţiale de ordin 2.

Definiţia 4. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ deschisă, $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathbf{a} \in A$. Se presupune că f este derivabilă parţial de ordinul $k-1$ pe o vecinătate a punctului $\mathbf{a}$, $V \subseteq A$, în raport cu toate variabilele $x_j, j \in \{1, ..., n\}$.

a) Se numesc *derivate parţiale de ordinul* k *ale* f *în punctul* $\mathbf{a}$, derivatele parţiale de ordin 1 ale derivatelor parţiale de ordin $k-1$ ale f în punctul $\mathbf{a}$, dacă acestea există.

b) Funcţia f este *de clasă* $\mathcal{C}^k$ *pe mulţimea deschisă* A (şi se not. $f \in \mathcal{C}^k(A; \mathbb{R})$) dacă este derivabilă parţial de ordinul k pe A în raport cu toate k-uplele de variabile, şi funcţiile derivate parţiale de ordinul k sunt continue pe A.

b) Funcţia f este *de clasă* $\mathcal{C}^{\infty}$ *pe mulţimea deschisă* A (şi se not. $f \in \mathcal{C}^{\infty}(A;\mathbb{R})$) dacă este derivabilă parţial de ordinul k pe A în raport cu toate k-uplele de variabile, $\forall k \in \mathbb{N}^*$.

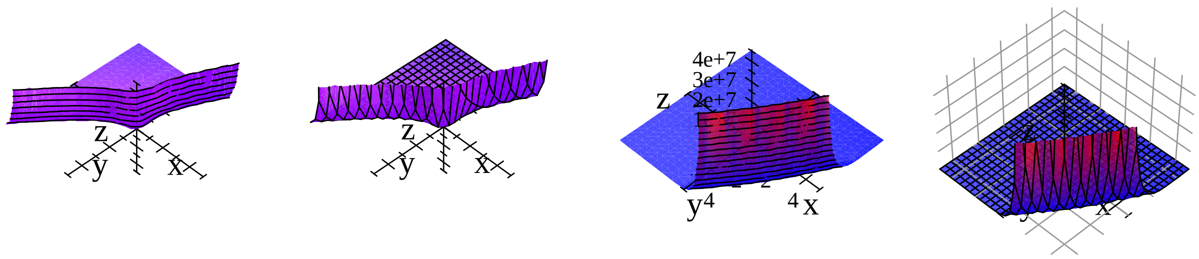
Observaţia 1. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ mulţime nevidă şi deschisă. Atunci

$$... \subset \mathcal{C}^{k}(A;\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^{k-1}(A;\mathbb{R}) \subset ... \subset \mathcal{C}^{2}(A;\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^{1}(A;\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^{0}(A;\mathbb{R}); \mathcal{C}^{\infty}(A;\mathbb{R}) = \bigcap_{\widetilde{k}=0}^{\infty} \mathcal{C}^{\widetilde{k}}(A;\mathbb{R}).$$

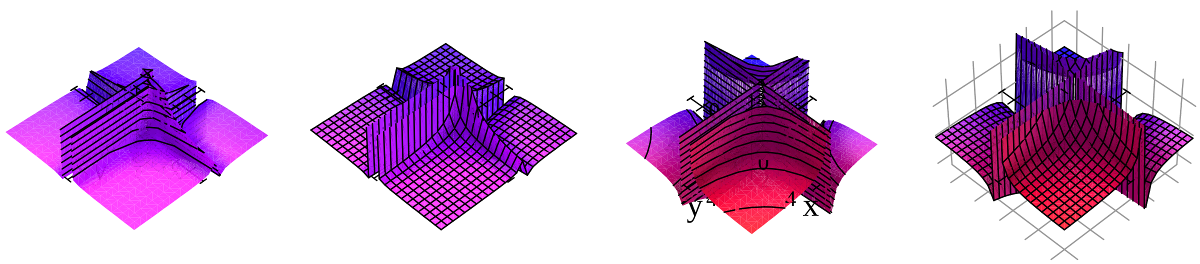
Exerciţiul 1. Să se determine funcţiile derivate parţiale de ordinul $n \in \mathbb{N}^*$ simple pentru pentru

a) $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x,y,z) = e^{2x+3y+5z}$;

b) $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \left(x^2+y^2\right)e^{2x+3y}$;



c) $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \dfrac{1}{y(1+x)}$;



d) $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x,y) = \ln(7x+11y)$.

Rezolvare. a) $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x,y,z) = e^{2x+3y+5z}$;

Se alege $A = D = \mathbb{R}^3$- deschisă.

$$\exists \frac{\partial f}{\partial x} : A_1 \subseteq A = \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{2x+3y+5z}\right) \underset{\text{de derivare}}{\overset{x \text{ este variabilă}}{=}} 2e^{2x+3y+5z}.$$

Se observă că $A_1 = A = \mathbb{R}^3$. Deci $\exists \dfrac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2e^{2x+3y+5z}$.

$$\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\right)} = \frac{\partial}{\partial x}\left(2e^{2x+3y+5z}\right) \underset{\text{de derivare}}{\overset{x \text{ este variabilă}}{=}} 2^2 e^{2x+3y+5z}.$$

$$\exists \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \boxed{\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,y,z) \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z)\right)} = \frac{\partial}{\partial x}\left(2^2 e^{2x+3y+5z}\right) \underset{\text{de derivare}}{\overset{x \text{ este variabilă}}{=}} 2^3 e^{2x+3y+5z}.$$

....

$$\exists \frac{\partial^n f}{\partial x^n} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \boxed{\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,y,z) \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-1}}(x,y,z)\right)} = \frac{\partial}{\partial x}\left(2^{n-1} e^{2x+3y+5z}\right) \underset{\text{de derivare}}{\overset{x \text{ este variabilă}}{=}} 2^n e^{2x+3y+5z}.$$

Se demonstrează prin inducţie matematică.

$$\exists \frac{\partial f}{\partial y} : A_2 \subseteq A = \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{2x+3y+5z}\right) \underset{\text{de derivare}}{\overset{y \text{ este variabilă}}{=}} 3e^{2x+3y+5z}.$$

Se observă că $A_2 = A = \mathbb{R}^3$. Deci $\exists \frac{\partial f}{\partial y} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 3e^{2x+3y+5z}$.

$\exists \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\right)} = \frac{\partial}{\partial y}\left(3e^{2x+3y+5z}\right) \underset{\text{de derivare}}{\overset{y \text{ este variabilă}}{=}} 3^2 e^{2x+3y+5z}$.

$\exists \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \boxed{\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x,y,z) \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z)\right)} = \frac{\partial}{\partial y}\left(3^2 e^{2x+3y+5z}\right) \underset{\text{de derivare}}{\overset{y \text{ este variabilă}}{=}} 3^3 e^{2x+3y+5z}$.

....

$\exists \frac{\partial^n f}{\partial y^n} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \boxed{\frac{\partial^n f}{\partial y^n}(x,y,z) \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-1}}(x,y,z)\right)} = \frac{\partial}{\partial y}\left(3^{n-1} e^{2x+3y+5z}\right) \underset{\text{de derivare}}{\overset{y \text{ este variabilă}}{=}} 3^n e^{2x+3y+5z}$.

Se demonstrează prin inducţie matematică.

$\exists \frac{\partial f}{\partial z} : A_3 \subseteq A = \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial z}\left(e^{2x+3y+5z}\right) \underset{\text{de derivare}}{\overset{z \text{ este variabilă}}{=}} 5e^{2x+3y+5z}$.

Se observă că $A_3 = A = \mathbb{R}^3$. Deci $\exists \frac{\partial f}{\partial z} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 5e^{2x+3y+5z}$.

$\exists \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\right)} = \frac{\partial}{\partial z}\left(5e^{2x+3y+5z}\right) \underset{\text{de derivare}}{\overset{z \text{ este variabilă}}{=}} 5^2 e^{2x+3y+5z}$.

$\exists \frac{\partial^3 f}{\partial z^3} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \boxed{\frac{\partial^3 f}{\partial z^3}(x,y,z) \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z)\right)} = \frac{\partial}{\partial z}\left(5^2 e^{2x+3y+5z}\right) \underset{\text{de derivare}}{\overset{z \text{ este variabilă}}{=}} 5^3 e^{2x+3y+5z}$.

....

$\exists \frac{\partial^n f}{\partial z^n} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \boxed{\frac{\partial^n f}{\partial z^n}(x,y,z) \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial z^{n-1}}(x,y,z)\right)} = \frac{\partial}{\partial z}\left(5^{n-1} e^{2x+3y+5z}\right) \underset{\text{de derivare}}{\overset{z \text{ este variabilă}}{=}} 5^n e^{2x+3y+5z}$.

Se demonstrează prin inducţie matematică.

○**b)** $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \left(x^2 + y^2\right) e^{2x+3y}$;

Indicaţie: Se foloseşte regula lui Leibniz

$$\boxed{\frac{\partial^n}{\partial x^n}(u(x,y) \cdot v(x,y)) = C_n^0 \frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x,y) \cdot v(x,y) + C_n^1 \frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-1}}(x,y) \cdot \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) + ... + C_n^n u(x,y) \cdot \frac{\partial^n v}{\partial x^n}(x,y)}$$

sau inducţia matematică.

d) $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \ln(7x + 11y)$;

Se alege $A = D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 2x + 3y > 0\right\}$- mulţime deschisă.

$\exists \frac{\partial f}{\partial x} : A_1 \subseteq A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(\ln(7x + 11y)) \underset{\text{de derivare}}{\overset{x \text{ este variabilă}}{=}} \frac{7}{7x + 11y} = 7(7x + 11y)^{-1}$.

Se observă că $A_1 = A$. Deci $\exists \frac{\partial f}{\partial x} : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 7(7x + 11y)^{-1}$.

$\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(7(7x + 11y)^{-1}\right)$

$\underset{\text{de derivare}}{\overset{x \text{ este variabilă}}{=}} 7^2(-1)(7x + 11y)^{-2}$.

$\exists \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,y) \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(7^2(-1)(7x + 11y)^{-2}\right)$

$\underset{\text{de derivare}}{\overset{x \text{ este variabilă}}{=}} 7^3(-1)(-2)(7x + 11y)^{-3}$.

....

$\exists \frac{\partial^n f}{\partial x^n} : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,y) \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-1}}(x,y)\right) = ...$

$\underset{\text{de derivare}}{\overset{x \text{ este variabilă}}{=}} 7^n(-1)^{n-1}(n-1)!(7x + 11y)^{-n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Se demonstrează prin inducţie matematică.

$\exists \dfrac{\partial f}{\partial y} : A_2 \subseteq A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}(\ln(7x+11y)) \underset{\text{de derivare}}{\overset{y \text{ este variabilă}}{=}} \dfrac{11}{7x+11y} = 11(7x+11y)^{-1}.$

Se observă că $A_2 = A \subset \mathbb{R}^2$. Deci $\exists \dfrac{\partial f}{\partial y} : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 11(7x+11y)^{-1}.$

$\exists \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \overset{\text{def}}{=} \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(11(7x+11y)^{-1}\right)$

$\underset{\text{de derivare}}{\overset{y \text{ este variabilă}}{=}} 11^2(-1)(7x+11y)^{-2}.$

$\exists \dfrac{\partial^3 f}{\partial y^3} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \dfrac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x,y) \overset{\text{def}}{=} \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\right) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(11^2(-1)(7x+11y)^{-2}\right)$

$\underset{\text{de derivare}}{\overset{y \text{ este variabilă}}{=}} 11^3(-1)(-2)(7x+11y)^{-3}.$

....

$\exists \dfrac{\partial^n f}{\partial y^n} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \dfrac{\partial^n f}{\partial y^n}(x,y) \overset{\text{def}}{=} \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-1}}(x,y)\right) = ...$

$\underset{\text{de derivare}}{\overset{y \text{ este variabilă}}{=}} 11^n(-1)^{n-1}(n-1)!\,(7x+11y)^{-n}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$

Se demonstrează prin inducţie matematică.

Definiţia 5. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ deschisă, $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

a) Fie $\mathbf{a} \in A$. Se presupune că f este derivabilă parţial de ordinul 2 în $\mathbf{a}$, simplu în raport cu variabilele $x_j, \forall j \in \{1,...,n\}$, adică $\exists \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(\mathbf{a}) \in \mathbb{R}, \forall j \in \{1,...,n\}$. Se numeşte *laplaceanul funcţiei f în punctul* $\mathbf{a}$ numărul real

$$\boxed{(\Delta f)(\mathbf{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{a}) + ... + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\mathbf{a}).}$$

b) Se presupune că f este derivabilă parţial de ordinul 2 pe $A_{jj} \subseteq A$, simplu în raport cu variabilele $x_j, \forall j \in \{1,...,n\}$, adică $\exists \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} : A_{jj} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Se numeşte *laplaceanul funcţiei f pe* $A_{11} \cap ... \cap A_{nn}$ funcţia

$$\Delta f : A_{11} \cap ... \cap A_{nn} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \Delta f(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{x}) + ... + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\mathbf{x}).$$

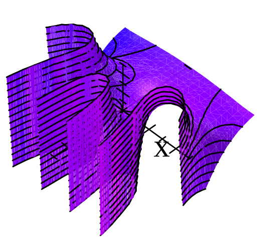
c) Funcţia f este *armonică* pe mulţimea deschisă A dacă $\exists \Delta f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ şi

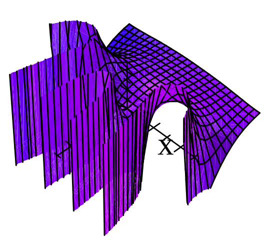
$$\Delta f(\mathbf{x}) = 0, \forall \mathbf{x} \in A, \text{ adică } \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{x}) + ... + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\mathbf{x}) = 0, \forall \mathbf{x} \in A.$$

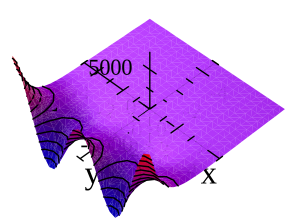
Exerciţiul 2. Să se determine laplaceanul următoarelor funcţii

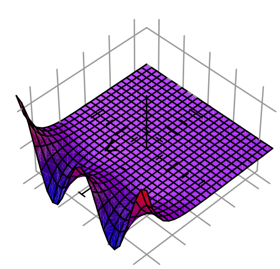
a) $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$; **b)** $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$;

c) $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = e^x\left((x^2-y^2)\cos y - 2xy\sin y\right)$;

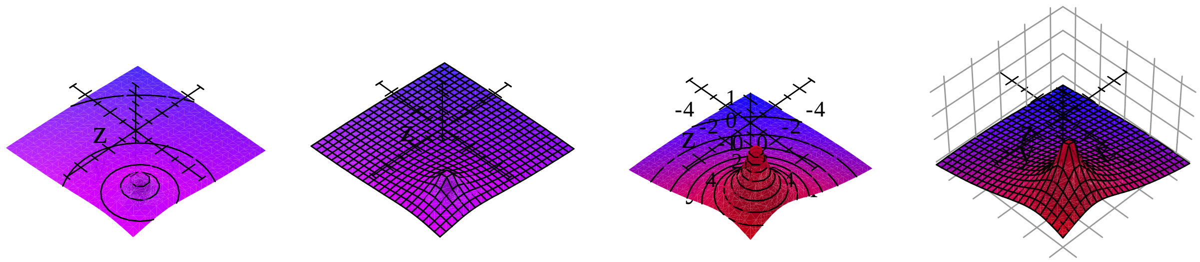








d) $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \ln \dfrac{1}{\sqrt{(x-e)^2 + (y-\pi)^2}}$;



Rezolvare. a), b) -A se vedea Curs.
c) $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = e^x \left(\left(x^2 - y^2\right) \cos y - 2xy \sin y \right);$
Se alege $A = D = \mathbb{R}^2$-este mulţime deschisă.

$$\exists \frac{\partial f}{\partial x} : A_1 \subseteq A = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^x \left(\left(x^2 - y^2\right)\cos y - 2xy \sin y\right)\right) =$$
$$\underset{\text{de derivare}}{\overset{x \text{ este variabilă}}{=}} e^x \left(\left(x^2 - y^2\right)\cos y - 2xy \sin y\right) + e^x (2x \cos y - 2y \sin y) =$$
$$= e^x \left(\left(x^2 + 2x - y^2\right)\cos y - 2(x+1) y \sin y\right); A_1 = A = \mathbb{R}^2.$$
$$\exists \frac{\partial f}{\partial y} : A_2 \subseteq A = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^x \left(\left(x^2 - y^2\right)\cos y - 2xy \sin y\right)\right) =$$
$$\underset{\text{de derivare}}{\overset{y \text{ este variabilă}}{=}} e^x \left[(-2y)\cos y + \left(x^2 - y^2\right)(-\sin y) - 2x \sin y - 2xy \cos y\right] =$$
$$= e^x \left(-2(x+1) y \cos y - \left(x^2 - y^2 + 2x\right)\sin y\right); A_2 = A = \mathbb{R}^2.$$
$$\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) =$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(e^x \left(\left(x^2 + 2x - y^2\right)\cos y - 2(x+1) y \sin y\right)\right) =$$
$$\underset{\text{de derivare}}{\overset{x \text{ este variabilă}}{=}} e^x \left(\left(x^2 + 2x - y^2\right)\cos y - 2(x+1) y \sin y\right) + e^x ((2x+2)\cos y - 2y \sin y) =$$
$$= e^x \left(\left(x^2 + 4x - y^2 + 2\right)\cos y - 2(x+2) y \sin y\right).$$
$$\exists \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) =$$
$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(e^x \left(-2(x+1) y \cos y - \left(x^2 - y^2 + 2x\right)\sin y\right)\right) =$$
$$\underset{\text{de derivare}}{\overset{x \text{ este variabilă}}{=}} e^x \left(-2(x+1)(\cos y - y \sin y) - (-2y)\sin y - \left(x^2 - y^2 + 2x\right)\cos y\right) =$$
$$= e^x \left(\left(-2x - 2 - x^2 + y^2 - 2x\right)\cos y + (2x + 2 + 2) y \sin y\right).$$

Se observă că:

$$\Delta f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$\Rightarrow f$ este funcţie armonică pe $\mathbb{R}^2$.

Teorema 3. (**Criteriul Schwarz-Clairaut de egalitate a derivatelor parţiale mixte de ordin 2**). Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ deschisă, $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ şi $\mathbf{a} \in A$. Fie $i \in \{1, ..., n\}$ şi $j \in \{1, ..., n\}$. Dacă există şi sunt finite derivatele parţiale de ordinul 2 mixte $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ şi $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ pe o vecinătate $V \subset A$ a punctului $\mathbf{a}$ şi dacă funcţiile derivate parţiale

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} : V \subset A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ şi } \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} : V \subset A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

sunt continue în $\mathbf{a}$, atunci

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a}). \tag{3}$$

Teorema 4 (**Criteriul Young de egalitate a derivatelor parţiale mixte de ordin 2**). Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ deschisă, $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ şi $a \in A$. Dacă f este funcţie derivabilă parţial de ordinul 1 pe o vecinătate $V \subset A$ a punctului a şi funcţiile derivate parţiale de ordinul 1, $\frac{\partial f}{\partial x_j}$, sunt diferenţiabile în $a, \forall j \in \{1, ..., n\}$, atunci există toate derivatele parţiale de ordinul 2 în a şi derivatele parţiale mixte sunt egale două câte două, adică

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a), \forall i \in \{1, ..., n\}, \forall j \in \{1, ..., n\}.$$

Definiţia 6. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ deschisă, $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

a) Fie $\mathbf{a} \in A$. Se presupune că f este derivabilă parţial de ordinul 2 în $\mathbf{a}$, în raport cu toate perechile de variabile $(x_j, x_i), \forall i \in \{1, ..., n\}, \forall j \in \{1, ..., n\}$. Se numeşte *hessiana funcţiei f în punctul* $\mathbf{a}$ matricea

$$\boxed{\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{a}) & ... & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\mathbf{a}) \\ ... & ... & ... \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\mathbf{a}) & ... & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\mathbf{a}) \end{pmatrix} \overset{\text{se not.}}{=} H_f(\mathbf{a})} \tag{5}$$

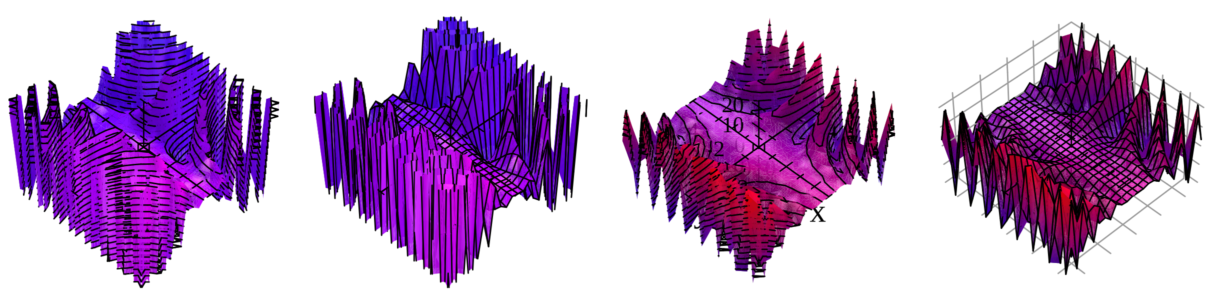
b) Se presupune că f este derivabilă parţial de ordinul 2 pe mulţimea deschisă A, în raport cu toate perechile de variabile $(x_j, x_i), \forall i \in \{1, ..., n\}, \forall j \in \{1, ..., n\}$. Se numeşte *hessiana funcţiei f pe A* funcţia

$$H_f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), H_f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{x}) & ... & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\mathbf{x}) \\ ... & ... & ... \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\mathbf{x}) & ... & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

Exerciţiul 3. a) Să se compare derivatele parţiale mixte de ordinul 2, prin calcul direct, cât şi utilizând Criteriul Schwarz pentru

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = x^2 \sin(xy).$$

Pentru funcţia anterioară, să se determine hessiana.



Rezolvare. $A = \mathbb{R}^2$- mulţime deschisă.

$\bullet \exists \frac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 \sin(xy)\right) = 2x \sin(xy) + x^2 y \cos(xy).$

$\exists \frac{\partial f}{\partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 \sin(xy)\right) = x^3 \cos(xy).$

$\exists \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^3 \cos(xy)\right) = 3x^2 \cos(xy) - x^3 y \sin(xy)$.

$\exists \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(2x \sin(xy) + x^2 y \cos(xy)\right)$

$= 2x^2 \cos(xy) + x^2 \cos(xy) - x^3 y \sin(xy)$.

•Prin calcul direct se observă că $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

•Pe de altă parte, $\exists \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ şi $\exists \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ şi aceste funcţii sunt continue în $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Atunci, şi conform Criteriului Schwarz,

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

•Se determină derivatele parţiale de ordinul 2 simple şi hessiana:

$\exists \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(2x \sin(xy) + x^2 y \cos(xy)\right)$

$= 2\sin(xy) + 2xy\cos(xy) + 2xy\cos(xy) - x^2 y^2 \sin(xy)$.

$\exists \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(x^3 \cos(xy)\right) = -x^4 \sin(xy)$.

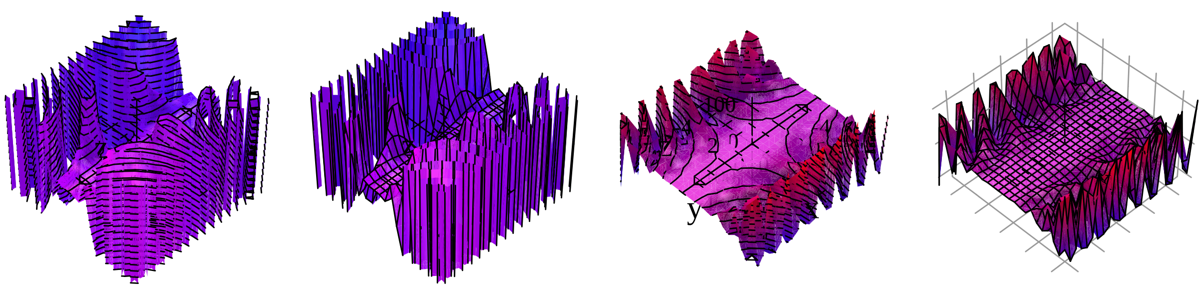
$\exists H_f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \boxed{H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}} =$

$= \begin{pmatrix} 4xy\cos(xy) + \left(2 - x^2y^2\right)\sin(xy) & 3x^2\cos(xy) - x^3 y \sin(xy) \\ 3x^2 \cos(xy) - x^3 y \sin(xy) & -x^4 \sin(xy) \end{pmatrix}$

b) Să se compare derivatele parţiale mixte de ordinul 2, prin calcul direct, cât şi utilizând Criteriul Schwarz pentru

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = y^3 \cos(xy)$.

Pentru funcţia anterioară, să se determine hessiana.



Rezolvare. $A = \mathbb{R}^2$- mulţime deschisă.

•$\exists \dfrac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(y^3 \cos(xy)\right) = 0 \cdot \cos(xy) - y^3 \cdot y \sin(xy)$.

$\exists \dfrac{\partial f}{\partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(y^3 \cos(xy)\right) = 3y^2 \cos(xy) - y^3 x \sin(xy)$.

$\exists \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(3y^2 \cos(xy) - y^3 x \sin(xy)\right) =$

$= -3y^2 \cdot y \sin(xy) - y^3 \left(\sin(xy) + xy\cos(xy)\right)$

$\exists \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(-y^4 \sin(xy)\right) =$

$= -4y^3 \sin(xy) - y^4 \cdot x \cos(xy)$.

•Prin calcul direct se observă că $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

•Pe de altă parte, $\exists \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ şi $\exists \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ şi aceste funcţii sunt continue în $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Atunci, şi conform Criteriului Schwarz,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

•Se determină derivatele parţiale de ordinul 2 simple şi hessiana

$$\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-y^4 \sin(xy)\right) = -y^4 \cdot y \cos(xy).$$

$$\exists \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(3y^2 \cos(xy) - y^3 x \sin(xy)\right)$$

$$= 6y \cos(xy) - 3y^2 x \sin(xy) - 3y^2 x \sin(xy) - y^3 x \cdot x \cos(xy).$$

$$\exists H_f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \boxed{H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}} =$$

$$= \begin{pmatrix} -y^5 \cos(xy) & -4y^3 \sin(xy) - y^4 x \cos(xy) \\ -4y^3 \sin(xy) - y^4 x \cos(xy) & \left(6y - x^2 y^3\right) \cos(xy) + \left(-6y^2 x\right) \sin(xy) \end{pmatrix}$$

Exerciţiul 4. Să se compare derivatele parţiale mixte de ordinul 2, prin calcul direct, pentru

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} \left(x^2 + y^2\right) \ln\left(x^2 + y^2\right), & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Se poate utiliza Criteriul Schwarz?

Pentru funcţia anterioară, să se determine hessiana.

Rezolvare.a) $\mathbb{R}^2 = \left(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\right) \cup \{(0,0)\}$.

Continuitatea pe $\mathbb{R}^2$ *nu este condiţie necesară pentru existenţa derivatelor parţiale.*

Etapa 1. Se studiază dacă f este derivabilă parţial de ordinul 1 pe $\mathbb{R}^2$, în raport cu x, respectiv y.

Din Seminarul anterior⇒

$$\exists \frac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 2x \ln\left(x^2 + y^2\right) + 2x, & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

$$\exists \frac{\partial f}{\partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} 2y \ln\left(x^2 + y^2\right) + 2y, & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Etapa 2. Se studiază dacă f este derivabilă parţial de ordinul 2 pe $\mathbb{R}^2$, mixt în raport cu x, y.

••pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, care este mulţime deschisă, se vor deriva parţial $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ folosind regulile de derivare parţială.

••în $a = (0,0) \in \left(\mathbb{R}^2\right) \cap \left(\mathbb{R}^2\right)'$ se va folosi definiţia derivatei parţiale în raport cu x, respectiv cu y a funcţiilor $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$.

$$\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2y \ln\left(x^2 + y^2\right) + 2y\right) =$$

$$= 2y \frac{2x}{x^2 + y^2} + 0, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \overset{\text{modul 1}}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}}_{f_2}\right)(0,0) = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial x}(0,0) = \frac{d\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{d\mathbf{e}_1}(0,0) =$$

$$= \lim_{t\to 0, t\in V} \frac{1}{t}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(t,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) = \lim_{t\to 0, t\in V} \frac{1}{t}\left(2\cdot 0 \cdot \ln\left(t^2+0^2\right) + 2\cdot 0 - 0\right) =$$

$$= \lim_{t\to 0, t\in V} 0 = 0 \Rightarrow \exists \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0.$$

$$\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \overset{\text{modul 2}}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}}_{f_2}\right)(0,0) = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x-0} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\cdot 0\cdot \ln\left(x^2+0^2\right) + 2\cdot 0 - 0}{x-0} = 0.$$

Deci $\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{4xy}{x^2+y^2}, & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$

$$\exists \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(2x\ln\left(x^2+y^2\right) + 2x\right) =$$

$$= 2x\frac{2y}{x^2+y^2} + 0, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \overset{\text{modul 1}}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}}_{f_1}\right)(0,0) = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial y}(0,0) == \frac{d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{d\mathbf{e}_2}(0,0) =$$

$$= \lim_{t\to 0, t\in V} \frac{1}{t}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,t) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right) = \lim_{t\to 0, t\in V} \frac{1}{t}\left(2\cdot 0 \cdot \ln\left(0^2+t^2\right) + 2\cdot 0 - 0\right) =$$

$$= \lim_{t\to 0, t\in V} 0 = 0 \Rightarrow \exists \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 0.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \overset{\text{modul 2}}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}}_{f_1}\right)(0,0) = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y-0} =$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{2\cdot 0\cdot \ln\left(0^2+y^2\right) + 2\cdot 0 - 0}{y-0} = 0.$$

Deci $\exists \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{4xy}{x^2+y^2}, & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$

•Prin calcul direct se observă că $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$

•Se încearcă să se aplice Criteriul Schwarz.

Se observă că $\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ şi $\exists \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

••Aceste funcţii sunt continue în $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Atunci, conform Criteriului Schwarz, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$

••Se studiază dacă funcţiile anterioare sunt continue în $a = (0,0)$. Se notează

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4xy}{x^2+y^2}, & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

În $\mathbf{a} = (0,0) \in (\mathbb{R}^2) \cap (\mathbb{R}^2)'$, g este continuă$\Leftrightarrow \exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = g(0,0)$.

Se studiază existenţa limitei funcţiei în $(0,0)$ cu direcţii. Fie $\forall \mathbf{h} = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ o direcţie în $\mathbb{R}^2$.

$$\exists \lim_{t\to 0, t\in U} f((0,0) + t(h_1,h_2)) \underset{((\cdot))=(\cdot)}{\overset{\text{convenţie}}{=}} \lim_{t\to 0, t\in U} f(th_1, th_2) = \lim_{t\to 0, t\in U} \frac{4(th_1)(th_2)}{(th_1)^2 + (th_2)^2} =$$

$$= \lim_{t\to 0, t\in U} \frac{t^2}{t^2} \frac{4h_1h_2}{h_1^2 + h_2^2} = \frac{4h_1h_2}{h_1^2+h_2^2}.$$

Pentru fiecare $\mathbf{h} = (h_1, h_2)$ o direcţie în $\mathbb{R}^2$, se obţine câte o valoare a limitei anterioare. Era necesar ca limita anterioară sa aibă aceeaşi valoare pentru orice direcţie

$\Rightarrow$nu există limita globală a funcţiei g în $(0,0) \Rightarrow g$ nu este continuă în $(0,0)$.

<u>Comentariu.</u> Nuse poate aplica Criteriul Schwarz în $(0,0)$. Din acest exerciţiu se observă că *acest Criteriu este o condiţie suficientă de egalitate a derivatelor parţiale mixte de ordinul* 2, *nu şi necesară.* Funcţiile $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ şi $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nu sunt continue în $(0,0)$ şi totuşi, prin calcul direct

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0).$$

•Se determină derivatele parţiale de ordinul 2 simple

$$\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2x \ln\left(x^2+y^2\right) + 2x\right)$$

$$= 2\ln\left(x^2+y^2\right) + 2x\frac{2x}{x^2+y^2} + 2, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) \overset{\text{modul 1}}{=} \frac{\partial}{\partial x}\Bigg(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}}_{f_1}\Bigg)(0,0) = \frac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial x}(0,0) = \frac{d\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)}{d\mathbf{e}_1}(0,0) =$$

$$= \lim_{t\to 0, t\in V} \frac{1}{t}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(t,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right) = \lim_{t\to 0, t\in V} \frac{1}{t}\left(2\cdot t\cdot \ln\left(t^2+0^2\right) + 2\cdot t - 0\right) =$$

$$= \lim_{t\to 0, t\in V}\left(2\ln\left(t^2\right) + 2\right) = -\infty \Rightarrow \exists \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = -\infty \notin \mathbb{R}.$$

$$\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) \overset{\text{modul 2}}{=} \frac{\partial}{\partial x}\Bigg(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}}_{f_1}\Bigg)(0,0) = \frac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,0) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{x-0} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x\ln\left(x^2+0^2\right) + 2\cdot 0 - 0}{x-0} = \lim_{x\to 0}\left(2\ln\left(x^2\right) + 2\right) = -\infty \Rightarrow \exists \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = -\infty \notin \mathbb{R}.$$

Deci $\exists \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2\ln\left(x^2+y^2\right) + \dfrac{4x^2}{x^2+y^2} + 2.$

$$\exists \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(2y\ln\left(x^2+y^2\right) + 2y\right) =$$

$$= 2\ln\left(x^2+y^2\right) + 2y\frac{2y}{x^2+y^2} + 2, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) \overset{\text{modul 1}}{=} \frac{\partial}{\partial y}\Bigg(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}}_{f_2}\Bigg)(0,0) = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial y}(0,0) = \frac{d\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{d\mathbf{e}_2}(0,0) =$$

$$= \lim_{t\to 0, t\in V} \frac{1}{t}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(0,t) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) = \lim_{t\to 0, t\in V} \frac{1}{t}\left(2\cdot t\cdot \ln\left(0^2+t^2\right) + 2\cdot t - 0\right) =$$

$$= \lim_{t\to 0, t\in V}\left(2\ln\left(t^2\right)+2\right) = -\infty \Rightarrow \nexists \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = -\infty \notin \mathbb{R}.$$

$$\nexists \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) \overset{\text{modul 2}}{=} \frac{\partial}{\partial y}\Bigg(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}}_{f_2}\Bigg)(0,0) = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{y-0} =$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{2y\ln\left(0^2+y^2\right)+2\cdot 0-0}{y-0} = \lim_{y\to 0}\left(2\ln\left(y^2\right)+2\right) = -\infty \Rightarrow \nexists\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = -\infty\notin\mathbb{R}.$$

Deci $\exists \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2\ln\left(x^2+y^2\right) + \frac{4y^2}{x^2+y^2} + 2.$

Deci $\exists H_f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $H_f(x,y) =$

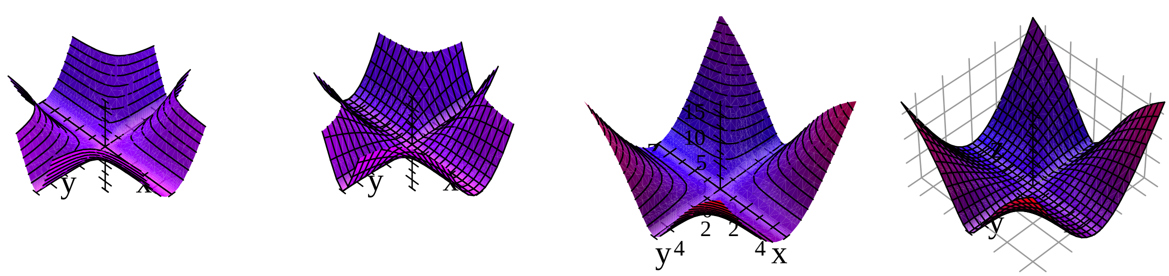
$$= \begin{pmatrix} 2\ln\left(x^2+y^2\right) + \frac{4x^2}{x^2+y^2} + 2 & \frac{4xy}{x^2+y^2} \\ \frac{4xy}{x^2+y^2} & 2\ln\left(x^2+y^2\right) + \frac{4y^2}{x^2+y^2} + 2 \end{pmatrix}.$$

Exerciţiul 5. Să se compare derivatele parţiale mixte de ordinul 2 pe $\mathbb{R}^2$, dacă există, pentru

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2}, & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases}$;

b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3}{x^2+y^2}, & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

○**c)** $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} y^2\ln\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right), & \text{dacă } y \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } y = 0 \end{cases}$.



Rezolvare. a) A se vedea Curs. Acest exemplu arată că derivatele parţiale mixte nu sunt, în general, egale.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1 \neq -1 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0).$$

b) A se vedea Curs. Acest exemplu ne arată că derivatele parţiale mixte nu sunt, în general, egale, una din ele existând, cealaltă nu.

$\nexists \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 0$.

○**c)** $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} y^2 \ln\left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right), & \text{dacă } y \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } y = 0 \end{cases}$.

Se notează $F = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y = 0\right\}$-mulţime închisă. $\mathbb{R}^2 = \left(\mathbb{R}^2 \setminus F\right) \cup F$.

Continuitatea pe $\mathbb{R}^2$ *nu este condiţie necesară pentru existenţa derivatelor parţiale.*

Etapa 1. Se studiază dacă f este derivabilă parţial de ordinul 1 pe $\mathbb{R}^2$, în raport cu x, respectiv y.

●●pe $\mathbb{R}^2 \setminus F = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \neq 0\right\}$, care este mulţime deschisă, se va deriva parţial f folosind regulile de derivare parţială.

●●în $\mathbf{a} = (a_1, 0) \in F, (a_1, 0) \in \left(\mathbb{R}^2\right) \cap \left(\mathbb{R}^2\right)'$ (unde $a_1 \in \mathbb{R}$) se va folosi definiţia derivatei parţiale în raport cu x, respectiv cu y.

$\exists \frac{\partial f}{\partial x} : A_1 \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(y^2 \ln\left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right)\right) = y^2 \cdot \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{2x}{y^2}$,

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus F$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a_1, 0) = \frac{df}{d\mathbf{e}_1}(a_1, 0) = \lim_{t \to 0, t \in V} \frac{1}{t}\left(f(a_1 + t, 0) - f(a_1, 0)\right) = \lim_{t \to 0, t \in V} \frac{1}{t}(0 - 0) =$$
$$= \lim_{t \to 0, t \in V} 0 = 0 \Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, 0) = 0, \forall a_1 \in \mathbb{R}.$$

Deci $A_1 = \mathbb{R}^2$ şi

$$\exists \frac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy^2}{x^2 + y^2}, & \text{dacă } y \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } y = 0. \end{cases}.$$

$$\exists \frac{\partial f}{\partial y} : A_2 \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(y^2 \ln\left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right)\right) =$$
$$= 2y \ln\left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right) + y^2 \cdot \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{-2x^2}{y^3}, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus F.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a_1, 0) = \frac{df}{d\mathbf{e}_2}(a_1, 0) = \lim_{t \to 0, t \in V} \frac{1}{t}\left(f(a_1, t) - f(a_1, 0)\right) =$$
$$= \lim_{t \to 0, t \in V} \frac{1}{t}\left(t^2 \ln\left(1 + \frac{a_1^2}{t^2}\right) - 0\right) = \lim_{t \to 0, t \in V} t \ln\left(1 + \frac{a_1^2}{t^2}\right).$$

Pentru $a_1 = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t \to 0, t \in V} t \ln\left(1 + \frac{0}{t^2}\right) = \lim_{t \to 0, t \in V} 0 = 0.$

Pentru $a_1 \in \mathbb{R}^* \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, 0) = \lim_{t \to 0, t \in V} t \ln\left(1 + \frac{a_1^2}{t^2}\right) = 0.$

Deci $A_2 = \mathbb{R}^2$ şi

$$\exists \frac{\partial f}{\partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} 2y \ln\left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right) - \frac{2x^2 y}{x^2 + y^2}, & \text{dacă } y \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } y = 0. \end{cases}.$$

Etapa 2. Se studiază dacă f este derivabilă parţial de ordinul 2 pe $\mathbb{R}^2$, mixt în raport cu x, y.

●●pe $\mathbb{R}^2 \setminus F$, care este mulţime deschisă, se vor deriva parţial $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ folosind regulile de derivare parţială.

●●în $\mathbf{a} = (a_1, 0) \in F, (a_1, 0) \in \left(\mathbb{R}^2\right) \cap \left(\mathbb{R}^2\right)'$ (unde $a_1 \in \mathbb{R}$) se va folosi definiţia derivatei parţiale în raport cu x, respectiv cu y a funcţiilor $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$.

$$\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2y \ln\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right) - \frac{2x^2 y}{x^2+y^2}\right) =$$

$$= 2y \cdot \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{2x}{y^2} - \frac{4xy\left(x^2+y^2\right) - 2x^2 y \cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus F.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a_1,0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}}_{f_2}\right)(a_1,0) = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial x}(a_1,0) = \frac{d\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{d\mathbf{e}_1}(a_1,0) =$$

$$= \lim_{t\to 0, t\in V} \frac{1}{t}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(a_1+t,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(a_1,0)\right) = \lim_{t\to 0, t\in V} \frac{1}{t}(0-0) =$$

$$= \lim_{t\to 0, t\in V} 0 = 0 \Rightarrow \exists \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a_1,0) = 0, \forall a_1 \in \mathbb{R}.$$

Deci $\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4x^3 y}{\left(x^2+y^2\right)^2}, & \text{dacă } y \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } y = 0. \end{cases}$.

$$\exists \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2xy^2}{x^2+y^2}\right) =$$

$$= \frac{4xy\left(x^2+y^2\right) - 2xy^2 \cdot 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus F.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a_1,0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}}_{f_1}\right)(a_1,0) = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial y}(a_1,0) = \frac{d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{d\mathbf{e}_2}(a_1,0) =$$

$$= \lim_{t\to 0, t\in V} \frac{1}{t}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a_1,t) - \frac{\partial f}{\partial x}(a_1,0)\right) = \lim_{t\to 0, t\in V} \frac{1}{t}\left(\frac{2a_1 t^2}{a_1^2+t^2} - 0\right).$$

Pentru $a_1 = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0, t\in V} \frac{1}{t}(0-0) = \lim_{t\to 0, t\in V} 0 = 0.$

Pentru $a_1 \in \mathbb{R}^* \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(a_1,0) = \lim_{t\to 0, t\in V} \frac{2a_1 t}{a_1^2+t^2} = 0.$

Deci $\exists \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4x^3 y}{\left(x^2+y^2\right)^2}, & \text{dacă } y \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } y = 0. \end{cases}$.

•Prin calcul direct se observă că
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus F$ şi $\underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a_1,0)}_{=0} = \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a_1,0)}_{=0}, \forall (x,y) = (a_1,0) \in F$

•Ca la Exerciţiul 4, se încearcă să se aplice Criteriul Schwarz.

Se observă că $\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ şi $\exists \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

••Aceste funcţii sunt continue în $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus F$. Atunci, conform Criteriului Schwarz,
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus F.$

••Se studiază dacă funcţiile anterioare sunt continue în $\mathbf{a} = (a_1,0) \in F$. Se notează

$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4x^3 y}{\left(x^2+y^2\right)^2}, & \text{dacă } y \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } y = 0. \end{cases}$.

În $\mathbf{a} = (a_1, 0) \in (\mathbb{R}^2) \cap (\mathbb{R}^2)'$, g este continuă$\Leftrightarrow \exists \lim\limits_{(x,y)\to(a_1,0)} g(x,y) = g(a_1, 0)$.

Se studiază existenţa limitei funcţiei în $(a_1, 0)$ cu direcţii. Fie $\forall \mathbf{h} = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ o direcţie în $\mathbb{R}^2$.

Pentru $a_1 = 0 \Rightarrow \exists \lim\limits_{t\to 0, t\in U} f((0,0) + t(h_1, h_2)) \overset{\text{convenţie}}{\underset{((\cdot))=(\cdot)}{=}} \lim\limits_{t\to 0, t\in U} f(th_1, th_2) =$

$$= \lim_{t\to 0, t\in U} \frac{4(th_1)^3(th_2)}{\left((th_1)^2 + (th_2)^2\right)^2} = \lim_{t\to 0, t\in U} \frac{t^4}{t^4}\frac{4h_1^3h_2}{\left(h_1^2 + h_2^2\right)^2}.$$

Pentru fiecare $\mathbf{h} = (h_1, h_2)$ o direcţie în $\mathbb{R}^2$, obţinem câte o valoare a limitei anterioare. Era necesar ca limita anterioară sa aibă aceeaşi valoare pentru orice direcţie

$\Rightarrow$nu există limita globală a funcţiei g în $(0,0) \Rightarrow g$ nu este continuă în $(0,0)$.

Pentru $a_1 \in \mathbb{R}^* \Rightarrow \exists \lim\limits_{t\to 0, t\in U} f((a_1, 0) + t(h_1, h_2)) \overset{\text{convenţie}}{\underset{((\cdot))=(\cdot)}{=}} \lim\limits_{t\to 0, t\in U} f(a_1 + th_1, th_2)$

$$= \lim_{t\to 0, t\in U} \frac{4(a_1 + th_1)^3(th_2)}{\left((a_1 + th_1)^2 + (th_2)^2\right)^2} = 0, \forall (h_1, h_2)$$

$\Rightarrow$*se poate* să existe limita globală a funcţiei g în $(a_1, 0)$, şiar avea valoarea 0.

Se studiază existenţa limitei funcţiei g în $(a_1, 0)$ cu definiţia (caracterizarea $\varepsilon - \delta$).

$\lim\limits_{(x,y)\to(a_1,0)} g(x,y) = 0 \Leftrightarrow [\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(a_1, 0)\}$
cu $0 < |x - a_1| < \delta$ şi $0 < |y - 0| < \delta$ să rezulte $|g(x,y) - 0| < \varepsilon]$.

Fie $\forall \varepsilon > 0$. Se caută $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(a_1, 0)\}$
cu $0 < |x - a_1| < \delta$ şi $0 < |y - 0| < \delta$ să rezulte $|g(x,y) - 0| \overset{\text{"scăpăm" de } x,y}{\underset{\text{rămâne } \delta}{<}} ... < \varepsilon$.

Cum $0 < |y - 0| < \delta \Rightarrow y \neq 0$, atunci

$$|g(x,y) - 0| = \left|\frac{4x^3y}{(x^2 + y^2)^2} - 0\right| = 4\frac{x^2}{(x^2 + y^2)^2}|x||y| < 4 \cdot 1 \cdot \delta \cdot \delta < \varepsilon.$$

Deci se caută $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât $4\delta^2 < \varepsilon$. Deoarece $\delta(\varepsilon)$ este "rază" pentru o vecinătate a punctului $(a_1, 0)$, se poate căuta chiar şi $\delta = \delta(\varepsilon) \in]0, 1[$ astfel încât

$4\delta^2 \overset{\delta^2 < \delta, \text{ pentru } \delta \in]0,1[}{<} 4\delta < \varepsilon$.

Din Teorema de densitate a $\mathbb{R}$ în $\mathbb{R}$, între numerele reale 0 şi $\frac{\varepsilon}{4}$ există un astfel de δ. Se poate alege, de exemplu, $\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{8}, 1\right\}$.

Deci $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(a_1,0)} \dfrac{4x^3y}{(x^2 + y^2)^2} = 0$.

• • •Conform Criteriului Schwarz,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y), \forall (x,y) \in F \setminus \{(0,0)\}.$$

• • •Nu se poate aplica Criteriul Schwarz în $(0,0)$. Din acest exerciţiu se observă că *acest Criteriu este o condiţie suficientă de egalitate a derivatelor parţiale mixte de ordinul 2, nu şi necesară.* Funcţiile $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ şi $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nu sunt continue în $(0,0)$ şi totuşi, prin calcul direct

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0).$$

Definiţia 7. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ deschisă, $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathbf{a} \in A$.

a) Funcţia f se numeşte *de k ori diferenţiabilă în* $\mathbf{a}$ dacă este de $k-1$ ori derivabilă parţial

într-o vecinătate V a punctului $\mathbf{a}$ şi toate funcţiile derivate parţiale de ordin $k-1$ ale lui f sunt diferenţiabile în $\mathbf{a}$.
b) Funcţia f se numeşte *de k ori diferenţiabilă pe mulţimea* A dacă este de k ori diferenţiabilă în $\forall \mathbf{a} \in A$.
Propoziţia 1. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ deschisă, $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathbf{a} \in A$. Dacă f are derivate parţiale de ordin k şi acestea sunt continue în $\mathbf{a}$, atunci f este diferenţiabilă de ordin k în $\mathbf{a}$.
Observaţia 6. **a)** Dacă $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ este diferenţiabilă pe mulţimea deschisă A, atunci

$$\boxed{(df)(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \cdot dy, \forall (x,y) \in A} \tag{9}$$

Dacă $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ este diferenţiabilă de ordin 2 pe mulţimea deschisă A, atunci

$$\boxed{\begin{aligned} \left(d^2 f\right)(x,y) = {} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) \cdot (dx)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \cdot (dx)(dy) \\ & + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \cdot (dy)(dx) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \cdot (dy)^2, \forall (x,y) \in A \end{aligned}} \tag{10}$$

sau $$\boxed{\left(d^2 f\right)(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) \cdot (dx)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \cdot (dx)(dy) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \cdot (dy)^2, \forall (x,y) \in A}$$
$(10')$

Dacă $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ este diferenţiabilă de ordin 3 pe mulţimea deschisă A, atunci

$$\boxed{\begin{aligned} \left(d^3 f\right)(x,y) = {} & \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,y) \cdot (dx)^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x,y) \cdot (dx)^2 (dy) + \\ & + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x,y) \cdot (dx)(dy)^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x,y) \cdot (dy)^3, \forall (x,y) \in A \end{aligned}} \tag{11}$$

b) Dacă $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ este diferenţiabilă pe mulţimea deschisă A, atunci

$$\boxed{(df)(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) \cdot dy + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) \cdot dz, \forall (x,y,z) \in A} \tag{12}$$

Dacă $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ este diferenţiabilă de ordin 2 pe mulţimea deschisă A, atunci

$$\boxed{\begin{aligned} \left(d^2 f\right)(x,y,z) = {} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) \cdot (dx)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) \cdot (dx)(dy) + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) \cdot (dx)(dz) + \\ & + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z) \cdot (dy)(dx) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) \cdot (dy)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) \cdot (dy)(dz) + \\ & + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y,z) \cdot (dz)(dx) + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x,y,z) \cdot (dz)(dy) + \frac{\partial^2 f}{\partial z}(x,y,z) \cdot (dz)^2, \forall (x,y,z) \in A \end{aligned}} \tag{13}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \left(d^2 f\right)(x,y,z) = {} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) \cdot (dx)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) \cdot (dy)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z}(x,y,z) \cdot (dz)^2 + \\ & + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) \cdot (dx)(dy) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) \cdot (dy)(dz) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y,z) \cdot (dz)(dx), \\ & \forall (x,y,z) \in A \end{aligned}} \tag{13'}$$

Exerciţiul 6. Să se determine derivatele parţiale de ordinul 1, diferenţiala de ordinul 1, derivatele parţiale simple şi mixte de ordinul 2, diferenţiala de ordinul 2, hessiana pantru

$$f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + x^2 - y^2.$$

Pentru funcţia anterioară, să se compare derivatele parţiale mixte de ordinul 2, prin calcul direct, cât şi utilizând Criteriul Schwarz. Să se determine laplaceanul şi să se decidă dacă f este armonică pe D.

Rezolvare. A se vedea Curs.

Exerciţiul 7. Să se determine derivatele parţiale de ordinul 1, diferenţiala de ordinul 1, derivatele parţiale simple şi mixte de ordinul 2, diferenţiala de ordinul 2, hessiana pantru

$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}, f(x,y,z)=\sin(2x-y+8z)+3xy^2+z.$

Pentru funcţia anterioară, să se compare derivatele parţiale mixte de ordinul 2, prin calcul direct, cât şi utilizând Criteriul Schwarz. Să se determine laplaceanul şi să se decidă dacă f este armonică pe D.

Rezolvare. A se vedea Curs.

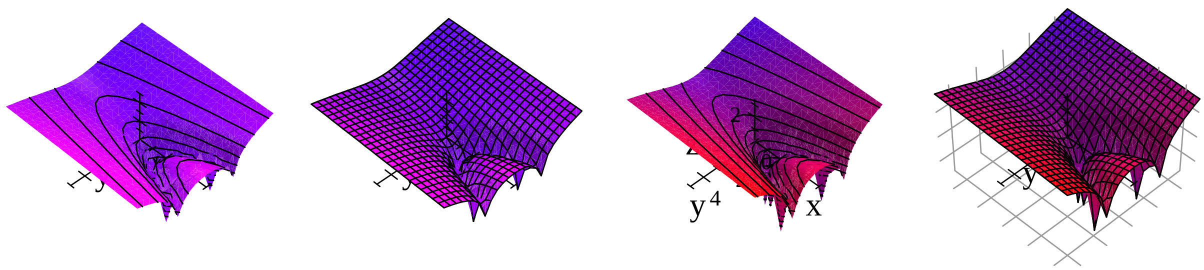
Exerciţiul 8. Să se determine o mulţime deschisă $D\subset\mathbb{R}^2$ pe care este definită funcţia

$f:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, f(x,y)=\ln\left(1+x^2-y\right)$

şi, dacă $f\in\mathcal{C}^2(D;\mathbb{R})$, să se determine expresiile diferenţialelor de ordin 1 şi 2 pentru f,

$(df)(x,y)$ şi $\left(d^2f\right)(x,y), \forall(x,y)\in D.$

Pentru funcţia anterioară, să se determine hessiana.



Rezolvare. Fie $A=D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; 1+x^2-y>0\right\}$,care este mulţime deschisă.

•Se determină funcţiile derivate parţiale de ordinul 1.

$\exists\frac{\partial f}{\partial x}:A_1\subseteq A\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\ln\left(1+x^2-y\right)\right)\underset{\text{de derivare}}{\overset{x\text{ este variabilă}}{=}}\frac{2x}{1+x^2-y}; A_1\subseteq A.$

$\exists\frac{\partial f}{\partial y}:A_2\subseteq A\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\ln\left(1+x^2-y\right)\right)\underset{\text{de derivare}}{\overset{y\text{ este variabilă}}{=}}\frac{-1}{1+x^2-y}; A_2\subseteq A.$

Ele sunt funcţii continue pe D, deci $f\in\mathcal{C}^1(D;\mathbb{R})$. Conform Propoziţiei 11, deoarece f are derivate parţiale de ordin 1 şi acestea sunt continue pe D, atunci f este diferenţiabilă de ordin 1 în $\forall(x,y)\in A_1\cap A_2$ şi

$(df)(x,y)=\frac{2x}{1+x^2-y}\cdot dx+\frac{-1}{1+x^2-y}\cdot dy, \forall(x,y)\in A_1\cap A_2=A.$

•Se determină funcţiile derivate parţiale de ordinul 2 mixte.

$\exists\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}:A_{21}\subseteq A_2\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-1}{1+x^2-y}\right)=$

$=\frac{2x}{\left(1+x^2-y\right)^2}; A_{21}=A_2;$

$\exists\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}:A_{12}\subseteq A_1\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2x}{1+x^2-y}\right)=$

$=\frac{-2x\cdot(-1)}{\left(1+x^2-y\right)^2}; A_{12}=A_1.$

••Prin calcul direct se observă că $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y), \forall(x,y)\in A.$

••Pe de altă parte, $\exists \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ şi $\exists \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ şi aceste funcţii sunt continue în $\forall (x, y) \in A$. Atunci, şi conform Criteriului Schwarz,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y), \forall (x, y) \in A.$$

•Se determină derivatele parţiale de ordinul 2 simple

$$\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} : A_{11} \subseteq A_1 \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2x}{1 + x^2 - y}\right) =$$

$$\underset{\text{de derivare}}{\overset{x \text{ este variabilă}}{=}} \frac{2\left(1 + x^2 - y\right) - 2x\left(0 + 2x - 0\right)}{\left(1 + x^2 - y\right)^2} = \frac{2\left(1 - x^2 - y\right)}{\left(1 + x^2 - y\right)^2}; A_{11} = A_1.$$

$$\exists \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} : A_{22} \subseteq A_2 \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-1}{1 + x^2 - y}\right) =$$

$$\underset{\text{de derivare}}{\overset{y \text{ este variabilă}}{=}} \frac{-1}{\left(1 + x^2 - y\right)^2}; A_{22} = A_2.$$

Ele sunt funcţii continue pe A, deci $f \in \mathcal{C}^2(A; \mathbb{R})$. Conform Propoziţiei 1, deoarece f are derivate parţiale de ordin 2 şi acestea sunt continue pe A, atunci f este diferenţiabilă de ordin 2 în $\forall (x, y) \in A$ şi

$$\left(d^2 f\right)(x, y) = \frac{2\left(1 - x^2 - y\right)}{\left(1 + x^2 - y\right)^2} \cdot (dx)^2 + 2\frac{2x}{\left(1 + x^2 - y\right)^2} \cdot (dx)(dy) + \frac{-1}{\left(1 + x^2 - y\right)^2} \cdot (dy)^2, \forall (x, y) \in A.$$

Mai mult

$$\exists H_f : D \to \mathbb{R}, \boxed{H_f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \frac{2\left(1 - x^2 - y\right)}{\left(1 + x^2 - y\right)^2} & \frac{2x}{\left(1 + x^2 - y\right)^2} \\ \frac{2x}{\left(1 + x^2 - y\right)^2} & \frac{-1}{\left(1 + x^2 - y\right)^2} \end{pmatrix}.$$

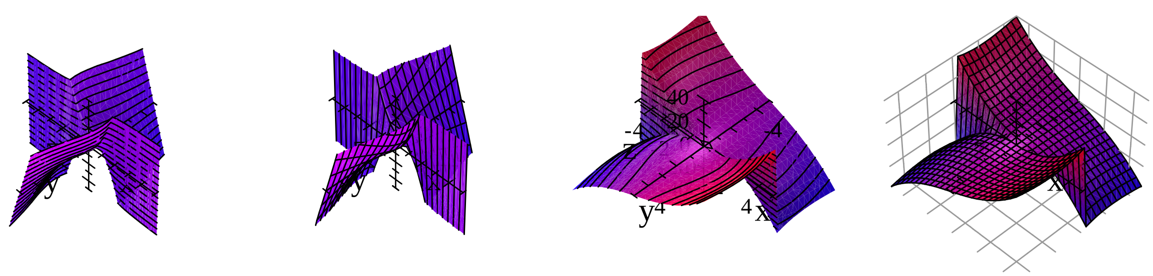
Dacă se gândeşte diferenţiala de ordinul 2 în (x, y) fixat ca şi formă pătratică, atunci matricea asociată acestei forme pătratice este chiar hessiana funcţiei f în (x, y).

Exerciţiul 12. Să se arate că funcţia

$$z : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, z(x, y) = \left(x^2 + y^2\right) \operatorname{arctg} \frac{y}{x},$$

unde $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \neq 0\right\}$, verifică ecuaţia diferenţială cu derivate parţiale de ordinul al doilea:

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x, y) + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x, y) + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x, y) = 2z(x, y), \forall (x, y) \in D.$$



Rezolvare.

•Se observă că funcţia z este derivabilă parţial de ordinul 1 pe D în raport cu x, respectiv y, adică

$$\exists \frac{\partial z}{\partial x} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\left(x^2 + y^2\right) \operatorname{arctg} \frac{y}{x}\right) =$$

$$\underset{\text{de derivare}}{\overset{x \text{ este variabilă}}{=}} (2x+0)\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \left(x^2+y^2\right)\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{-y}{x^2}\right) = 2x\operatorname{arctg}\frac{y}{x} - y.$$

$$\exists \frac{\partial z}{\partial y} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\left(x^2+y^2\right)\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right) =$$

$$\underset{\text{de derivare}}{\overset{y \text{ este variabilă}}{=}} (0+2y)\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \left(x^2+y^2\right)\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{1}{x}\right) = 2y\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + x.$$

•Se observă că funcţia f este derivabilă parţial de ordinul 2 pe D în raport cu x, respectiv cu y, adică

$$\exists \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,y) \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2x\operatorname{arctg}\frac{y}{x} - y\right) =$$

$$\underset{\text{de derivare}}{\overset{x \text{ este variabilă}}{=}} 2\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + 2x\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{-y}{x^2}\right) + 0 = 2\operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \frac{2xy}{x^2+y^2}.$$

$$\exists \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x,y) \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(2y\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + x\right) =$$

$$\underset{\text{de derivare}}{\overset{y \text{ este variabilă}}{=}} 2\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + 2y\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{1}{x}\right) + 0 = 2\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \frac{2xy}{x^2+y^2}.$$

$$\exists \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2y\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + x\right) =$$

$$= 2y\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{-y}{x^2}\right) + 1 = \frac{-2y^2}{x^2+y^2} + 1 = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$$

$$\exists \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(2x\operatorname{arctg}\frac{y}{x} - y\right)$$

$$= 2x\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{1}{x}\right) - 1 = \frac{2x^2}{x^2+y^2} - 1 = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$$

•Se verifică ecuaţia diferenţială:

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,y) + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x,y) + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x,y) =$$

$$= x^2\left(2\operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \frac{2xy}{x^2+y^2}\right) + 2xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + y^2\left(2\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \frac{2xy}{x^2+y^2}\right) = 2z(x,y), \forall (x,y) \in D.$$

Exerciţiul 13. Să se arate că funcţia

$$f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \ln\left(e^x + e^y\right),$$

unde $D = \mathbb{R}^2$, verifică ecuaţia diferenţială cu derivate parţiale de ordinul al doilea:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\right) \cdot \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\right)^2 = 0, \forall (x,y) \in D.$$

Rezolvare. A se vedea Curs.