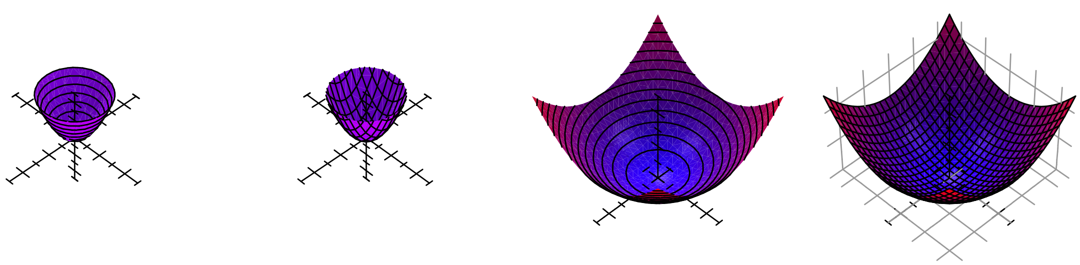
SEMINAR NR. 9, REZOLVĂRI
Analiză matematică, AIA

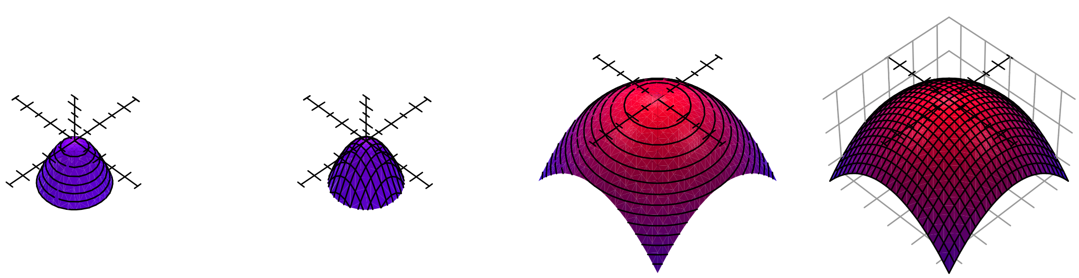
12.5. Puncte de extrem libere pentru $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Definiţia 1. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ şi $\mathbf{a} \in A$.
a) $\mathbf{a} \in A$ se numeşte *punct de minim local* (*liber*) pentru f dacă
$\exists V \in \mathcal{V}(\mathbf{a})$ a.î. $f(\mathbf{a}) \leq f(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in V \cap A$;
$f(\mathbf{a})$ se numeşte *valoare minimă locală.*
b) $\mathbf{a} \in A$ se numeşte *punct de maxim local* (*liber*) pentru f dacă
$\exists V \in \mathcal{V}(\mathbf{a})$ a.î. $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a}), \forall \mathbf{x} \in V \cap A$.
$f(\mathbf{a})$ se numeşte *valoare maximă locală.*
c) $\mathbf{a} \in A$ se numeşte *punct de extrem local* (*liber*) pentru f dacă $\mathbf{a}$ este punct de minim local sau maxim local pentru f.
Definiţia 2. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ şi $\mathbf{a} \in A$.
a) $\mathbf{a} \in A$ se numeşte *punct de minim global* (*liber*) pentru f dacă $f(\mathbf{a}) \leq f(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in A$;
$f(\mathbf{a})$ se numeşte *valoare minimă globală.*
b) $\mathbf{a} \in A$ se numeşte *punct de maxim global* (*liber*) pentru f dacă $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a}), \forall \mathbf{x} \in A$.
$f(\mathbf{a})$ se numeşte *valoare maximă globală.*
c) $\mathbf{a} \in A$ se numeşte *punct de extrem global* (*liber*) pentru f dacă $\mathbf{a}$ este punct de minim global sau maxim global pentru f.
Observaţia 1. Fie $n = 2$. Graficul unei funcţii $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = z$ este o mulţime $G_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; (x,y) \in A, z = f(x,y)\}$, care se poate reprezenta în $\mathbb{R}^3$.

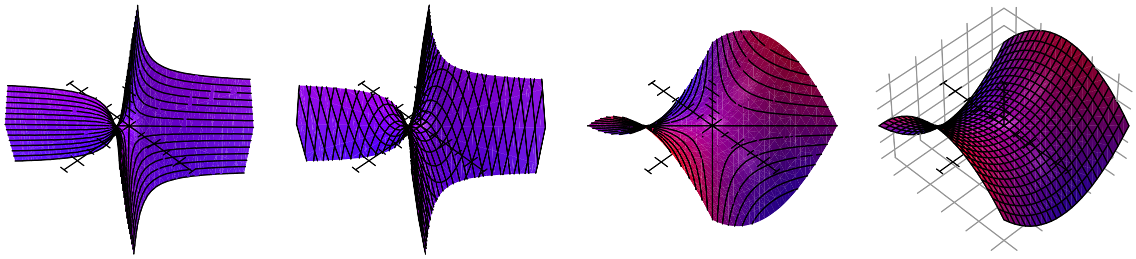
a) Pentru funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + y^2$, (al cărei grafic este un paraboloid eliptic), din grafic se observă că punctul $\mathbf{a} = (0,0)$ este punct de minim global. Şi cu definiţia se observă că
$f(x,y) = x^2 + y^2 \geq 0 = f(0,0), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

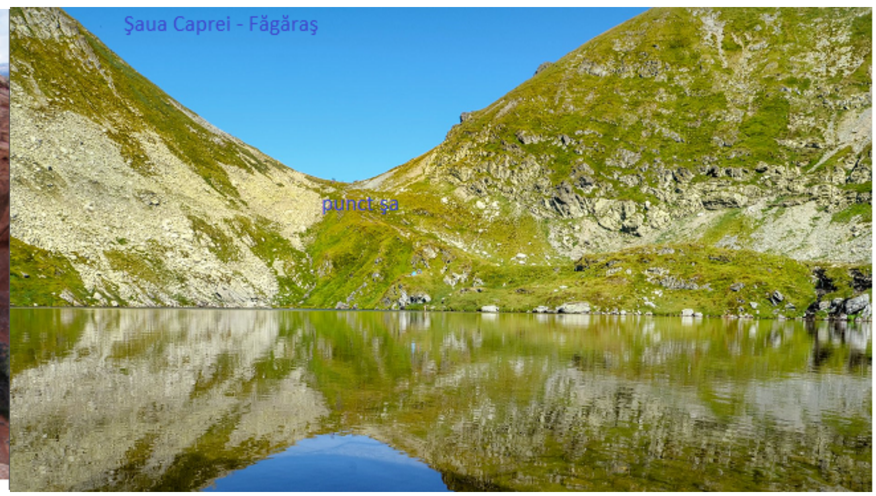


b) Pentru funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = -x^2 - y^2$, (al cărei grafic este un paraboloid eliptic), din grafic se observă că punctul $\mathbf{a} = (0,0)$ este punct de maxim global. Şi cu definiţia se observă că
$f(x,y) = -x^2 - y^2 \leq 0 = f(0,0), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.



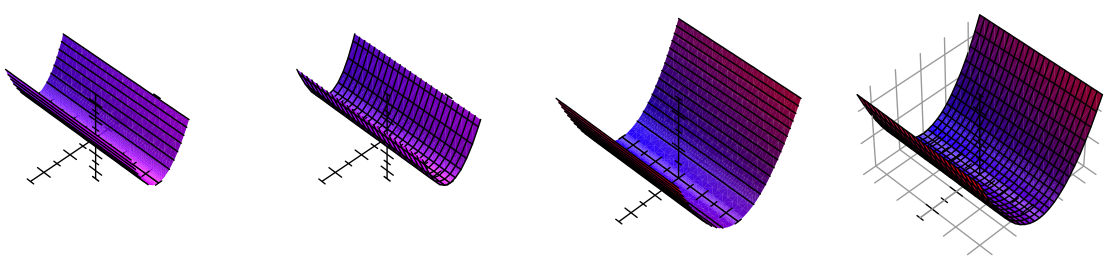
c) Pentru funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 - y^2$,
(al cărei grafic este un paraboloid hiperbolic), din grafic se observă că punctul $\mathbf{a} = (0, 0)$ este punct şa, nu este punct de extrem. Şi cu definiţia se observă că
$f(x, y) = x^2 - y^2 ? 0 = f(0, 0), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$,
adică în orice vecinătate a $(0, 0)$, $f(x, y) - f(0, 0)$ ia şi semnul $+$, şi semnul $-$.





Mai mult, se observă că, în originea $(0, 0)$, paraboloidul hiperbolic are planul tangent orizontal $z = 0$. Se observă că $(0, 0)$ este punct de minim local de-a lungul axei Oy, respectiv de maxim local de-a lungul axei Ox. În fotografie, se observă un punct şa. În direcţia în care urcă alpinistul, puctul şa este cel mai de jos punct, în timp ce pe direcţia perpendiculară este cel mai de sus punct.

d) Pentru funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2$, (al cărei grafic este un cilindru parabolic), din grafic se observă că punctul $\mathbf{a} = (0, 0)$ este punct de minim local; toate punctele de pe axa Oy sunt puncte de minim local, chiar global (funcţia are o infinitate de puncte de minim local, chiar global).



Definiţia 3. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ şi $\mathbf{a} \in \operatorname{int} A$, A-mulţime deschisă cu interior nevid. Punctul $\mathbf{a} \in \operatorname{int} A$ se numeşte *punct staţionar* pentru f dacă f este derivabilă parţial în $\mathbf{a}$ în raport cu toate variabilele şi

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}) = 0 \\ ... \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) = 0. \end{cases}}$$

Propoziţia 1. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenţiabilă în $\mathbf{a} \in \operatorname{int} A$. Punctul $\mathbf{a}$ este punct staţionar pentru f dacă şi numai dacă

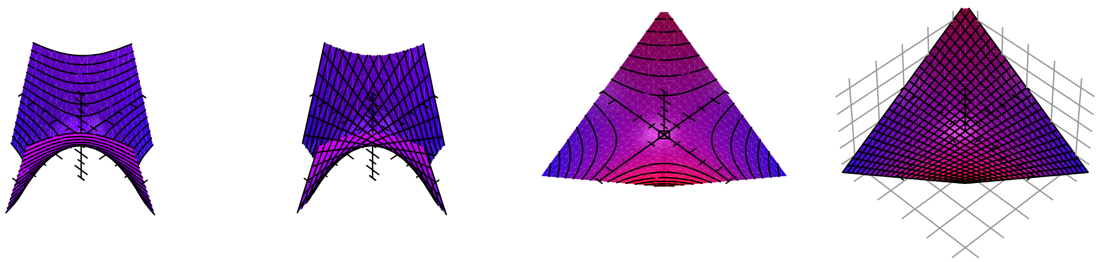
$\boxed{(df)(\mathbf{a}) = 0}$ (aplicaţia liniară nulă).

Teorema 1 (**Fermat**). Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ şi $\mathbf{a} \in \operatorname{int} A$, A-mulţime deschisă cu interior nevid. Dacă $\mathbf{a}$ este punct de extrem local pentru f şi dacă f este derivabilă parţial în $\mathbf{a}$ în raport cu toate variabilele, atunci $\mathbf{a}$ este punct staţionar pentru f.

Observaţia 2. Există funcţii f pentru care $\mathbf{a}$ este punct staţionar dar nu este punct de extrem local. De exemplu, fie

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = xy.$

Se observă ca $(0, 0)$ este punct staţionar, dar nu este de extrem local.



Teorema 2. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ şi $\mathbf{a} \in \operatorname{int} A$, A-mulţime deschisă cu interior nevid. Se presupune că $f \in C^2(A; \mathbb{R})$ (are derivate parţiale de ordinul 1 şi 2 definite pe A, continue pe A) şi că $\mathbf{a}$ este punct staţionar pentru f. Fie forma pătratică

$q_{\mathbf{a}}(\mathbf{h}) = \left(\left(d^2 f\right)(\mathbf{a})\right)(\mathbf{h})$

ce are drept matrice asociată în baza canonică $H_f(\mathbf{a})$ (hessiana funcţiei calculată în $\mathbf{a}$).

a) Dacă $q_{\mathbf{a}}(\mathbf{h})$ este formă pătratică pozitiv definită, atunci $\mathbf{a}$ este punct de minim local pentru f.

b) Dacă $q_{\mathbf{a}}(\mathbf{h})$ este formă pătratică negativ definită, atunci $\mathbf{a}$ este punct de maxim local pentru f.

c) Dacă $q_{\mathbf{a}}(\mathbf{h})$ este formă pătratică nedefinită, atunci $\mathbf{a}$ nu este punct de extrem local pentru f (este punct parabolic, punct şa).

d) Dacă $q_{\mathbf{a}}(\mathbf{h})$ este formă pătratică semidefinită, atunci nu se poate afirma dacă $\mathbf{a}$ este sau nu este punct de extrem local pentru f pe baza teoremei.

Observaţia 3. În ipotezele Teoremei 2,

a) forma pătratică $q_{\mathbf{a}}(\mathbf{h})$ este pozitiv definită $\Leftrightarrow \Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, ..., \Delta_n > 0$;

b) forma pătratică $q_{\mathbf{a}}(\mathbf{h})$ este negativ definită $\Leftrightarrow \Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, ..., (-1)^n \Delta_n > 0$;

Exerciţiul 1. Pentru $n = 2$, graficul unei funcţii $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = z$ este o mulţime $G_f = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x, y) \in A, z = f(x, y)\right\}$, care se poate reprezenta în $\mathbb{R}^3$. În punctele staţionare, planul tangent la reprezentarea graficului este paralel cu planul xOy, iar punctele de extrem local sunt cele care, într-o vecinătate, au cota z cea mai mare/ mică în comparaţie cu cele ale punctelor din vecinătate.

Să se determine punctele staţionare, apoi punctele de extrem local şi natura lor pentru următoarele câmpuri scalare:

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y.$

Rezolvare. Etapa 0. Se observă că $f \in C^2\left(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}\right)$ (are derivate parţiale de ordinul unu şi doi definite pe $\mathbb{R}^2$, continue pe $\mathbb{R}^2$).

$\exists \dfrac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + 3y^2 - 15$.

$\exists \dfrac{\partial f}{\partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 6xy - 12$.

$\exists \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(3x^2 + 3y^2 - 15\right) = 6x$.

$\exists \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}(6xy - 12) = 6x$.

$\exists \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x}(6xy - 12) = 6y$.

$\exists \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(3x^2 + 3y^2 - 15\right) = 6y$.

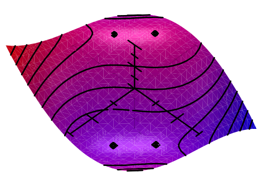
Sunt funcţii continue.

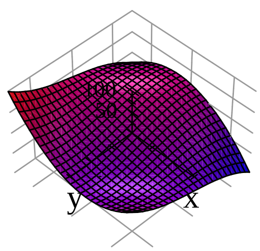
Etapa 1. Se determină punctele staţionare (critice) pentru f, adică soluţiile sistemului

$$(df)(x,y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \\ 6xy - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - 2xy - 5 = 0 \\ xy = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 = 9 \\ xy = 2 \end{cases} \Rightarrow \bullet \begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases} \Rightarrow (x,y) = (1,2) \text{ sau } (x,y) = (2,1)$$

$$\bullet \begin{cases} x + y = -3 \\ xy = 2 \end{cases} \Rightarrow (x,y) = (-1,-2) \text{ sau } (x,y) = (-2,-1).$$





Deci punctele staţionare ale f sunt

$\mathbf{a} = (1,2)$; $\mathbf{b} = (2,1)$; $\mathbf{c} = (-1,-2)$; $\mathbf{d} = (-2,-1)$.

Etapa 2. Se determină care dintre punctele staţionare găsite sunt puncte de extrem local.

$$\boxed{\begin{aligned}\left(d^2 f\right)(x,y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\cdot(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\cdot(dx)(dy) \\ &+ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)\cdot(dy)(dx) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\cdot(dy)^2, \forall (x,y) \in A\end{aligned}}$$

$$\overset{f \in C^2\left(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}\right)}{\Longrightarrow}$$

$$\boxed{\left(d^2 f\right)(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\cdot(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\cdot(dx)(dy) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\cdot(dy)^2, \forall (x,y) \in A}$$

$\left(d^2 f\right)(x,y) = 6x \cdot (dx)^2 + 2 \cdot 6y \cdot (dx)(dy) + 6x \cdot (dy)^2, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\boxed{H_f(x,y)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\end{pmatrix}}=\begin{pmatrix}6x & 6y\\ 6y & 6x\end{pmatrix}$$

Algoritmul din Teorema 2 se aplică pentru fiecare punct staţionar în parte.

$\boxed{\mathbf{a}=(1,2)}\Rightarrow \left(d^2f\right)(1,2)=6\,(dx)^2+24\,(dx)\,(dy)+6\,(dy)^2$

$q_{\mathbf{a}}(\mathbf{h})=\left(\left(d^2f\right)(\mathbf{a})\right)(\mathbf{h})=\left(d^2f\right)(1,2)\,(h_1,h_2)=6h_1^2+24h_1h_2+6h_2^2.$

$H_f(1,2)=\begin{pmatrix}6 & 12\\ 12 & 6\end{pmatrix}.$

Se studiază natura formei pătratice $q_{\mathbf{a}}(\mathbf{h})$.

<u>Metoda Jacobi</u>, aplicabilă pentru acea formă pătratică având $\Delta_1\neq 0,\Delta_2\neq 0$.

$\Delta_0=1$ mereu.

$\Delta_1=6\neq 0$

$\Delta_2=\begin{vmatrix}6 & 12\\ 12 & 6\end{vmatrix}=36-144=-108\neq 0$

O formă canonică pentru forma pătratică este

$\boxed{q_{\mathbf{a}}(\mathbf{h})=\dfrac{\Delta_0}{\Delta_1}u_1^2+\dfrac{\Delta_1}{\Delta_2}u_2^2}$, unde u_1,u_2 sunt coordonatele lui $\mathbf{h}=(h_1,h_2)$ într-o altă bază decât cea canonică, ce se poate determina$\Rightarrow$

$q_{\mathbf{a}}(\mathbf{h})=\underbrace{\dfrac{1}{6}}_{+}u_1^2+\underbrace{\dfrac{6}{-108}}_{-}u_2^2$, unde u_1,u_2 sunt coordonatele lui $\mathbf{h}$ într-o altă bază.

<u>Metoda Gauss,</u> aplicabilă pentru orice formă pătratică, în una din cele două variante.

Deoarece $\exists a_{11}=6\neq 0\Rightarrow$varianta 1.

$$q_{\mathbf{a}}(\mathbf{h})=\underline{6h_1^2+24h_1h_2+}\\ +6h_2^2.$$

<u>pasul 1.</u> Se grupează termenii din expresia lui $q_{\mathbf{a}}(\mathbf{h})$ care conţin h_1 (prima linie din expresia formei $q_{\mathbf{a}}(\mathbf{h})$) şi se completează la un pătrat perfect, folosind

$\underline{a^2+2ab}+b^2=(a+b)^2.$

$q_{\mathbf{a}}(\mathbf{h})=\underline{6\left(1\cdot h_1^2+4h_1h_2\right)}+6h_2^2=\underline{6\left(1\cdot h_1^2+2h_1\cdot 2h_2\right.}+\left.(2h_2)^2\right)-6\cdot(2h_2)^2+6h_2^2=$
$=6\,(h_1+2h_2)^2-18h_2^2.$

<u>pasul 1'.</u> Se face schimbarea de coordonate

$$\begin{cases}u_1=h_1+2h_2\\ u_2=h_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}h_1=u_1-2u_2\\ h_2=u_2\end{cases}$$

În baza $S_1=(\mathbf{e}_1',\mathbf{e}_2')$, dată de matricea de trecere $\mathbf{G}_1={}_C\,\mathbf{A}_{S_1}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, forma pătratică are forma canonică:

$q_{\mathbf{a}}(\mathbf{h})=\underbrace{6}_{+}u_1^2+\underbrace{(-18)}_{-}u_2^2$, unde u_1,u_2 sunt coordonatele lui $\mathbf{h}$ într-o altă bază S_1.

<u>Metoda valorilor şi vectorilor proprii</u> (**<u>a transformărilor ortogonale</u>**), <u>aplicabilă pentru orice formă pătratică</u>, deoarece $A=H_f(\mathbf{a})$ este simetrică, deci este ortogonal asemenea cu o matrice diagonală.

•Se determină polinomul caracteristic al matricei $A=H_f(1,2)=\begin{pmatrix}6 & 12\\ 12 & 6\end{pmatrix}$, $P_{\mathbf{A}}(\lambda)$.

<u>modul 1.</u> $P_{\mathbf{A}}(\lambda)=\begin{vmatrix}6-\lambda & 12\\ 12 & 6-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-12\lambda-108=(\lambda-18)(\lambda+6)$.

<u>modul 2.</u> $P_{\mathbf{A}}(\lambda) = (-1)^2 \left[\lambda^2 - \delta_1\lambda + \delta_2\right]$, unde δ_i este suma minorilor principali de ordin i ai matricei $\mathbf{A}$, adică

$\delta_1 = \operatorname{Tr}\mathbf{A} = 6 + 6 = 12;$

$$\delta_2 = \det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 6 \end{vmatrix} = -108.$$

$P_{\mathbf{A}}(\lambda) = \lambda^2 - 12\lambda - 108 = (\lambda - 18)(\lambda + 6)\,.$

•Se rezolvă ecuaţia caracteristică a matricei $\mathbf{A}$,

$$P_{\mathbf{A}}(\lambda) = 0 \Leftrightarrow -(\lambda - 18)(\lambda + 6) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 18 \in \mathbb{R} \text{ cu } m(\lambda_1) = 1; \\ \lambda_2 = -6 \in \mathbb{R} \text{ cu } m(\lambda_2) = 1. \end{cases}$$

•O formă canonică a formei pătratice este

$q_{\mathbf{a}}(\mathbf{h}) = \underbrace{18}_{+} u_1^2 + \underbrace{(-6)}_{-} u_2^2$, unde u_1, u_2 sunt coordonatele lui $\mathbf{h}$ într-o altă bază S_o, chiar ortonormată (cu vectori proprii ai A) ce se poate determina.

Indiferent de metodă, se observă că $q_{\mathbf{a}}(\mathbf{h})$ este formă pătratică nedefinită$\Rightarrow$

$\Rightarrow \mathbf{a} = (1, 2)$ nu este punct de extrem local pentru f (este punct parabolic, punct şa).

$\boxed{\mathbf{b} = (2, 1)} \Rightarrow \left(d^2 f\right)(2, 1) = 12\,(dx)^2 + 12\,(dx)(dy) + 12\,(dy)^2$

$q_{\mathbf{b}}(\mathbf{h}) = \left(\left(d^2 f\right)(\mathbf{b})\right)(\mathbf{h}) = \left(d^2 f\right)(2, 1)(h_1, h_2) = 12h_1^2 + 12h_1h_2 + 12h_2^2$

$$H_f(2, 1) = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$$

Se studiază natura formei pătratice $q_{\mathbf{b}}(\mathbf{h})\,.$

<u>**Metoda Jacobi**</u>, aplicabilă pentru acea formă pătratică având $\Delta_1 \neq 0, \Delta_2 \neq 0$.

$\Delta_0 = 1$ mereu.

$\Delta_1 = 12 \neq 0$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{vmatrix} = 108 \neq 0$$

O formă canonică pentru forma pătratică este $q_{\mathbf{b}}(\mathbf{h}) = \dfrac{\Delta_0}{\Delta_1} u_1^2 + \dfrac{\Delta_1}{\Delta_2} u_2^2 \Rightarrow$

$q_{\mathbf{b}}(\mathbf{h}) = \underbrace{\dfrac{1}{12}}_{+} u_1^2 + \underbrace{\dfrac{12}{108}}_{+} u_2^2$, unde u_1, u_2 sunt coordonatele lui $\mathbf{h}$ într-o altă bază.

Se observă că $q_{\mathbf{b}}(\mathbf{h})$ este formă pătratică pozitiv definită$\Rightarrow$

$\Rightarrow \mathbf{b} = (2, 1)$ este punct de minim local pentru f.

$\boxed{\mathbf{c} = (-1, -2)} \Rightarrow \left(d^2 f\right)(-1, -2) = -6\,(dx)^2 - 24\,(dx)(dy) - 6\,(dy)^2$

$q_{\mathbf{c}}(\mathbf{h}) = \left(\left(d^2 f\right)(\mathbf{c})\right)(\mathbf{h}) = \left(d^2 f\right)(-1, -2)(h_1, h_2) = -6h_1^2 - 24h_1h_2 - 6h_2^2$

$$H_f(1, 2) = \begin{pmatrix} -6 & -12 \\ -12 & -6 \end{pmatrix}$$

Se studiază natura formei pătratice $q_{\mathbf{c}}(\mathbf{h})\,.$

<u>**Metoda Jacobi**</u>, aplicabilă pentru acea formă pătratică având $\Delta_1 \neq 0, \Delta_2 \neq 0$.

$\Delta_0 = 1$ mereu

$\Delta_1 = -6 \neq 0$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -6 & -12 \\ -12 & -6 \end{vmatrix} = 36 - 144 = -108 \neq 0$$

O formă canonică pentru forma pătratică este $q_{\mathbf{c}}(\mathbf{h}) = \dfrac{\Delta_0}{\Delta_1} u_1^2 + \dfrac{\Delta_1}{\Delta_2} u_2^2 \Rightarrow$

$q_{\mathbf{c}}(\mathbf{h}) = \underbrace{\dfrac{1}{-6}}_{-} u_1^2 + \underbrace{\dfrac{-6}{-108}}_{+} u_2^2$, unde u_1, u_2 sunt coordonatele lui $\mathbf{h}$ într-o altă bază.

Se observă că $q_{\mathbf{c}}(\mathbf{h})$ este formă pătratică nedefinită$\Rightarrow$

$\Rightarrow \mathbf{c}=(-1,-2)$ nu este punct de extrem local pentru f (este punct parabolic, punct şa)

$\boxed{\mathbf{d}=(-2,-1)} \Rightarrow \left(d^2 f\right)(-2,-1)=-12\,(dx)^2-12\,(dx)\,(dy)-12\,(dy)^2$

$q_{\mathbf{d}}(\mathbf{h})=\left(\left(d^2 f\right)(\mathbf{d})\right)(\mathbf{h})=\left(d^2 f\right)(-2,-1)\,(h_1,h_2)=-12h_1^2-12h_1h_2-12h_2^2$

$H_f(1,2)=\begin{pmatrix} -12 & -6 \\ -6 & -12 \end{pmatrix}$

Se studiază natura formei pătratice $q_{\mathbf{d}}(\mathbf{h})$.

Metoda Jacobi, aplicabilă pentru acea formă pătratică având $\Delta_1\neq 0, \Delta_2\neq 0$.

$\Delta_0=1$ mereu

$\Delta_1=-12\neq 0$

$\Delta_2=\begin{vmatrix} -12 & -6 \\ -6 & -12 \end{vmatrix}=144-36=108\neq 0$

O formă canonică pentru forma pătratică este $q_{\mathbf{d}}(\mathbf{h})=\dfrac{\Delta_0}{\Delta_1}u_1^2+\dfrac{\Delta_1}{\Delta_2}u_2^2\Rightarrow$

$q_{\mathbf{d}}(\mathbf{h})=\underbrace{\dfrac{1}{-12}}_{-}u_1^2+\underbrace{\dfrac{-12}{108}}_{-}u_2^2$, unde u_1,u_2 sunt coordonatele lui $\mathbf{h}$ într-o altă bază.

Se observă că $q_{\mathbf{d}}(\mathbf{h})$ este formă pătratică negativ definită$\Rightarrow$

$\Rightarrow \mathbf{d}=(-2,-1)$ este punct de maxim local pentru f.

Concluzii.

•$\mathbf{b}=(2,1)$ este punct de minim local pentru f.

$f(\mathbf{b})=f(2,1)=2^3+3\cdot 2\cdot 1^2-15\cdot 2-12\cdot 1=-28$ este valoarea minimă local.

Din grafic se observă că nu este cea mai mică valoare global$\Rightarrow \mathbf{b}=(2,1)$ nu este punct de minim global pentru f. Pentru ca $\mathbf{b}=(2,1)$ să fie punct de minim global, ar fi trebuit ca

$f(x,y)-f(2,1)\geq 0, \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,$

ceea ce nu este adevărat.

•$\mathbf{d}=(-2,-1)$ este punct de maxim local pentru f.

$f(\mathbf{d})=f(-2,-1)=(-2)^3+3\cdot(-2)\cdot(-1)^2-15\cdot(-2)-12\cdot(-1)=28$ este valoarea maximă local.;

Din grafic se observă că nu este cea mai mare valoare global$\Rightarrow \mathbf{d}=(-2,-1)$ nu este punct de maxim global pentru f. Pentru ca $\mathbf{d}=(-2,-1)$ să fie punct de maxim global, ar fi trebuit ca

$f(x,y)-f(-2,-1)\leq 0, \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,$

ceea ce nu este adevărat.

•Pentru studiul valorilor extreme globale, se studiază comportamentul valorilor funcţiei la frontiera domeniului de definiţie, adică la "frontiera" lui $\mathbb{R}^2$, adică

$\lim\limits_{(x,y)\to(-\infty,-\infty)} f(x,y)=?;\ \lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} f(x,y)=?$ ş.a.m.d,

dar nu face obiectul acestui seminar.

b) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, f(x,y)=x^4+y^4-4xy+1;$

Rezolvare. Etapa 0. Se observă că $f\in C^2\left(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}\right)$ (are derivate parţiale de ordinul unu şi doi definite pe $\mathbb{R}^2$, continue pe $\mathbb{R}^2$).

$\exists\dfrac{\partial f}{\partial x}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=4x^3-4y.$

$\exists\dfrac{\partial f}{\partial y}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=4y^3-4x.$

$\exists\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(4x^3-4y\right)=12x^2.$

$\exists \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(4y^3 - 4x\right) = 12y^2.$

$\exists \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(4y^3 - 4x\right) = -4.$

$\exists \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(4x^3 - 4y\right) = -4.$

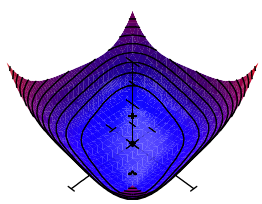
Sunt funcţii continue.

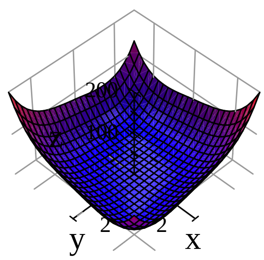
Etapa 1. Se determină punctele staţionare (critice) pentru f, adică soluţiile sistemului

$$(df)(x,y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 - 4y = 0 \\ 4y^3 - 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = y, y^3 = x \\ x^9 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = y, y^3 = x \\ x(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)\left(x^4+1\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow (x,y) = (0,0)$ sau $(x,y) = (1,1)$ sau $(x,y) = (-1,-1)$.





Deci punctele staţionare ale f sunt $\mathbf{a} = (0,0)$; $\mathbf{b} = (1,1)$; $\mathbf{c} = (-1,-1)$.

Etapa 2. Se determină care dintre punctele staţionare găsite sunt puncte de extrem local.

$\left(d^2 f\right)(x,y) = 12x^2 \cdot (dx)^2 + 2 \cdot (-4) \cdot (dx)(dy) + 12y^2 \cdot (dy)^2, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$

$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix}$

Algoritmul din Teorema 2 se aplică pentru fiecare punct staţionar în parte.

$\boxed{\mathbf{a} = (0,0)} \Rightarrow \left(d^2 f\right)(0,0) = 0\,(dx)^2 - 8\,(dx)(dy) + 0\,(dy)^2$

$q_{\mathbf{a}}(\mathbf{h}) = \left(\left(d^2 f\right)(\mathbf{a})\right)(\mathbf{h}) = \left(d^2 f\right)(0,0)(h_1, h_2) = 0h_1^2 - 8h_1h_2 + 0h_2^2$

$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$

Se studiază natura formei pătratice $q_{\mathbf{a}}(\mathbf{h})$.

Metoda Jacobi, aplicabilă pentru acea formă pătratică având $\Delta_1 \neq 0, \Delta_2 \neq 0$.

$\Delta_0 = 1$ mereu.

$\Delta_1 = 0 - NU$

Metoda Gauss, aplicabilă pentru orice formă pătratică, în una din cele două variante.

Deoarece $a_{11} = a_{22} = 0 \Rightarrow$varianta 2.

pasul 0. Se face schimbarea de coordonate

$$\begin{cases} h_1 = u_1 + u_2 \\ h_2 = u_1 - u_2 \end{cases}.$$

În baza $S_0 = \left(\widetilde{\mathbf{e}}_1, \widetilde{\mathbf{e}}_2\right)$, dată de matricea de trecere $\mathbf{G}_0 = {}_C\mathbf{A}_{S_0} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, forma pătratică are forma canonică:

$q_{\mathbf{a}}(\mathbf{h}) = \underbrace{(-8)}_{-}u_1^2 + \underbrace{(+8)}_{+}u_2^2$, unde u_1, u_2 sunt coordonatele lui $\mathbf{h}$ într-o altă bază S_0.

<u>**Metoda valorilor şi vectorilor proprii** (**a transformărilor ortogonale**)</u>, aplicabilă pentru orice formă pătratică, deoarece $A = H_f(\mathbf{a})$ este simetrică, deci este ortogonal asemenea cu o matrice diagonală.

•Se determină polinomul caracteristic al matricei $A = H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$, $P_{\mathbf{A}}(\lambda)$.

<u>modul 1.</u> $P_{\mathbf{A}}(\lambda) = \begin{vmatrix} 0-\lambda & -4 \\ -4 & 0-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 16 = (\lambda-4)(\lambda+4)$.

<u>modul 2.</u> $P_{\mathbf{A}}(\lambda) = (-1)^2\left[\lambda^2 - \delta_1\lambda + \delta_2\right]$, unde δ_i este suma minorilor principali de ordin i ai matricei $\mathbf{A}$, adică

$\delta_1 = \operatorname{Tr}\mathbf{A} = 0 + 0 = 0$;

$\delta_2 = \det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = -16.$

$P_{\mathbf{A}}(\lambda) = \lambda^2 - 0\lambda - 16 = (\lambda-4)(\lambda+4)$.

•Se rezolvă ecuaţia caracteristică a matricei $\mathbf{A}$,

$$P_{\mathbf{A}}(\lambda) = 0 \Leftrightarrow -(\lambda-4)(\lambda+4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 4 \in \mathbb{R} \text{ cu } m(\lambda_1) = 1; \\ \lambda_2 = -4 \in \mathbb{R} \text{ cu } m(\lambda_2) = 1. \end{cases}$$

•O formă canonică a formei pătratice este

$q_{\mathbf{a}}(\mathbf{h}) = \underbrace{18}_{+}u_1^2 + \underbrace{(-6)}_{-}u_2^2$, unde u_1, u_2 sunt coordonatele lui $\mathbf{h}$ într-o altă bază S_o, chiar ortonormată (cu vectori proprii ai A) ce se poate determina.

$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 0-\lambda & -4 \\ -4 & 0-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 16$;

$$P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -4, m(\lambda_1) = 1 \\ \lambda_2 = 4, m(\lambda_2) = 1 \end{cases}$$

•O formă canonică a formei pătratice este

$q_{\mathbf{a}}(\mathbf{h}) = \underbrace{4}_{+}u_1^2 + \underbrace{(-4)}_{-}u_2^2$, unde u_1, u_2 sunt coordonatele lui $\mathbf{h}$ într-o altă bază S_o, chiar ortonormată (cu vectori proprii ai A) ce se poate determina.

Indiferent de metodă, se observă că $q_{\mathbf{a}}(\mathbf{h})$ este formă pătratică nedefinită$\Rightarrow$

$\Rightarrow \mathbf{a} = (1,2)$ nu este punct de extrem local pentru f (este punct parabolic, punct şa).

$\boxed{\mathbf{b} = (1,1)} \Rightarrow \left(d^2 f\right)(1,1) = 12(dx)^2 - 8(dx)(dy) + 12(dy)^2$

$q_{\mathbf{b}}(\mathbf{h}) = \left(\left(d^2 f\right)(\mathbf{b})\right)(\mathbf{h}) = \left(d^2 f\right)(1,1)(h_1, h_2) = 12h_1^2 - 8h_1h_2 + 12h_2^2$

$H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}$

Se studiază natura formei pătratice $q_{\mathbf{b}}(\mathbf{h})$.

<u>**Metoda Jacobi**</u>, aplicabilă pentru acea formă pătratică având $\Delta_1 \neq 0, \Delta_2 \neq 0$.

$\Delta_0 = 1$ mereu.Se aplică metoda Jacobi, dacă este posibil

$\Delta_1 = 12 \neq 0$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{vmatrix} = 128 \neq 0$

O formă canonică pentru forma pătratică este

$\boxed{q_{\mathbf{b}}(\mathbf{h}) = \dfrac{\Delta_0}{\Delta_1}u_1^2 + \dfrac{\Delta_1}{\Delta_2}u_2^2}$, unde u_1, u_2 sunt coordonatele lui $\mathbf{h} = (h_1, h_2)$ într-o altă bază decât cea canonică, ce se poate determina$\Rightarrow$

$q_{\mathbf{b}}(\mathbf{h}) = \underbrace{\frac{1}{12}}_{+} u_1^2 + \underbrace{\frac{12}{128}}_{+} u_2^2$, unde u_1, u_2 sunt coordonatele lui $\mathbf{h}$ într-o altă bază.

Se observă că $q_{\mathbf{b}}(\mathbf{h})$ este formă pătratică pozitiv definită$\Rightarrow$

$\Rightarrow \mathbf{b} = (1,1)$ este punct de minim local pentru f.

$\boxed{\mathbf{c} = (-1,-1)} \Rightarrow \left(d^2 f\right)(-1,-1) = 12\,(dx)^2 - 8\,(dx)\,(dy) + 12\,(dy)^2$

$q_{\mathbf{c}}(\mathbf{h}) = \left(\left(d^2 f\right)(\mathbf{c})\right)(\mathbf{h}) = \left(d^2 f\right)(-1,-1)(h_1,h_2) = 12h_1^2 - 8h_1h_2 + 12h_2^2$

$H_f(1,2) = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}$

Se studiază natura formei pătratice $q_{\mathbf{c}}(\mathbf{h})$.

<u>**Metoda Jacobi**</u>, aplicabilă pentru acea formă pătratică având $\Delta_1 \neq 0, \Delta_2 \neq 0$.

$\Delta_0 = 1$ mereu

$\Delta_1 = 12 \neq 0$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{vmatrix} = 128 \neq 0$

O formă canonică pentru forma pătratică este

$\boxed{q_{\mathbf{c}}(\mathbf{h}) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1} u_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} u_2^2}$, unde u_1, u_2 sunt coordonatele lui $\mathbf{h} = (h_1, h_2)$ într-o altă bază decât cea canonică, ce se poate determina$\Rightarrow$

$q_{\mathbf{c}}(\mathbf{h}) = \underbrace{\frac{1}{12}}_{+} u_1^2 + \underbrace{\frac{12}{128}}_{+} u_2^2$, unde u_1, u_2 sunt coordonatele lui $\mathbf{h}$ într-o altă bază.

Se observă că $q_{\mathbf{c}}(\mathbf{h})$ este formă pătratică pozitiv definită$\Rightarrow$

$\Rightarrow \mathbf{c} = (-1,-1)$ este punct de minim local pentru f.

<u>Concluzii.</u>$\bullet\mathbf{b} = (1,1)$ este punct de minim local pentru f.

$f(\mathbf{b}) = f(1,1) = 1^4 + 1^4 - 4 + 1 = -1$ este valoarea minimă local.

$\bullet\mathbf{c} = (-1,-1)$ este punct de minim local pentru f.

$f(\mathbf{c}) = f(-1,-1) = 1^4 + 1^4 - 4 + 1 = -1$ este valoarea minimă local.

$\circ$**c)** $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = x^2 + y^3 + 2x$.

Rezolvare. <u>Etapa 0.</u> Se observă că $f \in C^2\left(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}\right)$ (are derivate parţiale de ordinul unu şi doi definite pe $\mathbb{R}^2$, continue pe $\mathbb{R}^2$).

$\exists \frac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + 0 + 2.$

$\exists \frac{\partial f}{\partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 + 3y^2 + 0.$

$\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(2x+2) = 2.$

$\exists \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(3y^2\right) = 6y.$

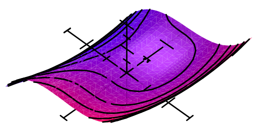
$\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(3y^2\right) = 0.$

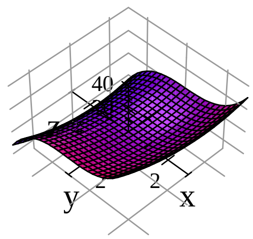
$\exists \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(2x+2) = 0.$

Sunt funcţii continue.

<u>Etapa 1.</u> Se determină punctele staţionare (critice) pentru f, adică soluţiile sistemului

$$(df)(x,y)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2=0 \\ 3y^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y)=(-1,0).$$





Deci unicul punct staţionar al f este $\mathbf{a}=(-1,0)$;

Etapa 2. Se determină care dintre punctele staţionare găsite sunt puncte de extrem local.

$\left(d^2 f\right)(x,y)=2\cdot(dx)^2+2\cdot 0\cdot(dx)(dy)+6y\cdot(dy)^2, \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2.$

$H_f(x,y)=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}$

$\boxed{\mathbf{a}=(-1,0)} \Rightarrow \left(d^2 f\right)(-1,0)=2(dx)^2+0(dx)(dy)+0(dy)^2$

$q_{\mathbf{a}}(\mathbf{h})=\left(\left(d^2 f\right)(\mathbf{a})\right)(\mathbf{h})=\left(d^2 f\right)(-1,0)(h_1,h_2)=2h_1^2+0h_2^2$

$H_f(-1,0)=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}$

Se studiază natura formei pătratice $q_{\mathbf{a}}(\mathbf{h})$. Se observă că este deja sub forma canonică$\Rightarrow q_{\mathbf{a}}(\mathbf{h})$ este formă pătratică pozitiv semidefinită$\Rightarrow$ nu se poate studia cu Teorema 2 dacă $\mathbf{a}=(-1,0)$ este punct de extrem local pentru f.

Concluzii. Se încearcă să se studieze cu definiţia dacă $(-1,0)$ este punct de extrem.

$f(x,y)=x^2+y^3+2x, \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$

$f(-1,0)=(-1)^2+0^3+2\cdot(-1)=-1$

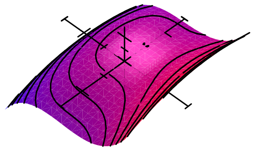
$f(x,y)-f(-1,0)=x^2+y^3+2x+1=(x+1)^2+y^3?0, \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,$

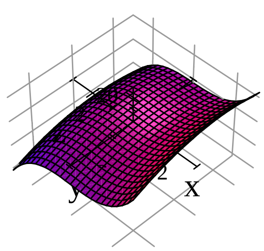
În nicio vecinătate a punctului $(-1,0)$ expresia

$f(x,y)-f(-1,0)$

nu păstrează semn constant, deci $(-1,0)$ nu este punct de extrem.

○**d)** $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, f(x,y)=-x^2+y^3-2x$





Analog cu c), se găseşte că $(-1,0)$ nu este punct de extrem.

○**e)** $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, f(x,y)=x^2+y^4+2x$

Etapa 0. Se observă că $f\in C^2\left(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}\right)$ (are derivate parţiale de ordinul unu şi doi definite pe $\mathbb{R}^2$, continue pe $\mathbb{R}^2$).

$\exists \frac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x+2;$

$\exists \frac{\partial f}{\partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3;$

$\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2;$

$\exists \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 12y^2.$

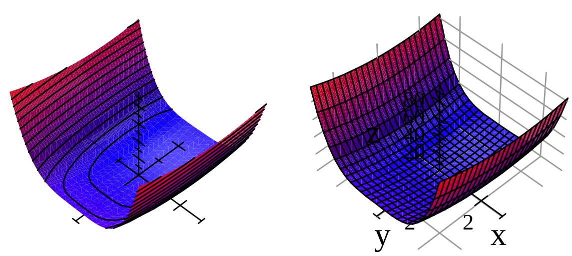
$\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(4y^3\right) = 0$

$\exists \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}(2x+2) = 0$

Sunt funcţii continue.

Etapa 1. Se determină punctele staţionare (critice) pentru f, adică soluţiile sistemului

$$(df)(x,y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2=0 \\ 4y^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow (x,y) = (-1,0)$$



Deci unicul punct staţionar al f este $\mathbf{a} = (-1,0)$;

Etapa 2. Se determină care dintre punctele staţionare găsite sunt puncte de extrem local.

$\left(d^2 f\right)(x,y) = 2 \cdot (dx)^2 + 2 \cdot 0 \cdot (dx)(dy) + 12y^2 \cdot (dy)^2, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$

$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix}$

$\boxed{\mathbf{a} = (-1,0)} \Rightarrow \left(d^2 f\right)(-1,0) = 2(dx)^2 + 0(dx)(dy) + 0(dy)^2$

$q_{\mathbf{a}}(\mathbf{h}) = \left(\left(d^2 f\right)(\mathbf{a})\right)(\mathbf{h}) = \left(d^2 f\right)(-1,0)(h_1,h_2) = 2h_1^2 + 0h_2^2$

$H_f(-1,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Se studiază natura formei pătratice $q_{\mathbf{a}}(\mathbf{h})$. Se observă că este deja sub forma canonică$\Rightarrow q_{\mathbf{a}}(\mathbf{h})$ este formă pătratică pozitiv semidefinită$\Rightarrow$ nu se poate studia cu Teorema 2 dacă $\mathbf{a} = (-1,0)$ este punct de extrem local pentru f.

Concluzii. Se încearcă să se studieze cu definiţia dacă $(-1,0)$ este punct de extrem.

$f(x,y) = x^2 + y^4 + 2x, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

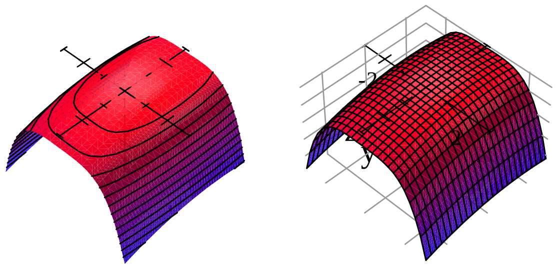
$f(-1,0) = (-1)^2 + 0^4 + 2 \cdot (-1) = -1$

$f(x,y) - f(-1,0) = x^2 + y^4 + 2x + 1 = (x+1)^2 + y^4 \geq 0, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,$

Deci $(-1,0)$ este punct de minim local şi chiar global pentru f iar $f(-1,0) = -1$ este valoarea minimă globală, adică

$\exists \min\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = -1.$

○**f)** $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, f(x,y)=-x^2-y^4-2x$



Analog cu e), se găseşte că $(-1,0)$ este punct de maxim local şi chiar global pentru f iar $f(-1,0)=1$ este valoarea maximă globală, adică

$\exists \max\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y)=1.$

g) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, f(x,y)=xy(x+y+1)=x^2y+xy^2+xy$

Rezolvare. Etapa 0. Se observă că $f\in C^2\left(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}\right)$ (are derivate parţiale de ordinul unu şi doi definite pe $\mathbb{R}^2$, continue pe $\mathbb{R}^2$).

$\exists\dfrac{\partial f}{\partial x}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2xy+y^2+y.$

$\exists\dfrac{\partial f}{\partial y}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x^2+2xy+x.$

$\exists\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(2xy+y^2+y\right)=2y.$

$\exists\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(x^2+2xy+x\right)=2x.$

$\exists\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^2+2xy+x\right)=2x+2y+1.$

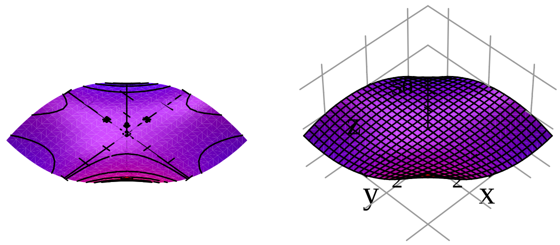
$\exists\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(2xy+y^2+y\right)=2x+2y+1.$

Sunt funcţii continue.

Etapa 1. Se determină punctele staţionare (critice) pentru f, adică soluţiile sistemului

$$(df)(x,y)=0\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2xy+y^2+y=0\\ x^2+2xy+x=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y(2x+y+1)=0\\ x(x+2y+1)=0\end{cases}\Rightarrow$$

- $\begin{cases}y=0\\ x=0\end{cases}\Rightarrow(x,y)=(0,0);$
- $\begin{cases}y=0\\ x+2y+1=0\end{cases}\Rightarrow(x,y)=(-1,0);$
- $\begin{cases}x=0\\ 2x+y+1=0\end{cases}\Rightarrow(x,y)=(0,-1);$
- $\begin{cases}2x+y+1=0\\ x+2y+1=0\end{cases}\Rightarrow(x,y)=\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right);$



Deci punctele staţionare ale f sunt
$\mathbf{a}=(0,0)\,;\mathbf{b}=(-1,0)\,;\mathbf{c}=(0,-1)\,;\mathbf{d}=\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right).$

Etapa 2. Se determină care dintre punctele staţionare găsite sunt puncte de extrem local.

$\left(d^2 f\right)(x,y)=2y\cdot(dx)^2+2\cdot(2x+2y+1)\cdot(dx)(dy)+2x\cdot(dy)^2\,,\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2.$

$H_f\,(x,y)=\begin{pmatrix} 2y & 2x+2y+1 \\ 2x+2y+1 & 2x \end{pmatrix}$

Algoritmul din Teorema 2 se aplică pentru fiecare punct staţionar în parte.

$\boxed{\mathbf{a}=(0,0)}\Rightarrow\left(d^2 f\right)(0,0)=0\,(dx)^2+2\,(dx)\,(dy)+0\,(dy)^2$

$q_{\mathbf{a}}(\mathbf{h})=\left(\left(d^2 f\right)(\mathbf{a})\right)(\mathbf{h})=\left(d^2 f\right)(0,0)\,(h_1,h_2)=2h_1h_2$

$H_f\,(0,0)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Se studiază natura formei pătratice $q_{\mathbf{a}}(\mathbf{h})$.

Metoda Jacobi, aplicabilă pentru acea formă pătratică având $\Delta_1\neq 0,\Delta_2\neq 0$.

$\Delta_0=1$ mereu.

$\Delta_1=0-NU$

Metoda Gauss, aplicabilă pentru orice formă pătratică, în una din cele două variante.

Deoarece $a_{11}=a_{22}=0\Rightarrow$varianta 2.

pasul 0. Se face schimbarea de coordonate

$\begin{cases} h_1=u_1+u_2 \\ h_2=u_1-u_2 \end{cases}.$

În baza $S_0=\left(\widetilde{\mathbf{e}}_1,\widetilde{\mathbf{e}}_2\right)$, dată de matricea de trecere $\mathbf{G}_0={}_C\,\mathbf{A}_{S_0}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, forma pătratică are forma canonică:

$q_{\mathbf{a}}(\mathbf{h})=\underbrace{(+2)}_{+}u_1^2+\underbrace{(-2)}_{-}u_2^2$, unde u_1,u_2 sunt coordonatele lui $\mathbf{h}$ într-o altă bază S_0.

Metoda valorilor şi vectorilor proprii (**a transformărilor ortogonale**), aplicabilă pentru orice formă pătratică, deoarece $A=H_f\,(\mathbf{a})$ este simetrică, deci este ortogonal asemenea cu o matrice diagonală.

•Se determină polinomul caracteristic al matricei $A=H_f\,(0,0)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, P_{\mathbf{A}}(\lambda)$.

modul 1. $P_{\mathbf{A}}(\lambda)=\begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ 1 & 0-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-1=(\lambda-1)(\lambda+1)$.

modul 2. $P_{\mathbf{A}}(\lambda)=(-1)^2\left[\lambda^2-\delta_1\lambda+\delta_2\right]$, unde δ_i este suma minorilor principali de ordin i ai matricei $\mathbf{A}$, adică

$\delta_1=\operatorname{Tr}\mathbf{A}=0+0=0;$

$\delta_2=\det\mathbf{A}=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-1.$

$P_{\mathbf{A}}(\lambda) = \lambda^2 - 0\lambda - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$.

•Se rezolvă ecuaţia caracteristică a matricei $\mathbf{A}$,

$P_{\mathbf{A}}(\lambda) = 0 \Leftrightarrow -(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \in \mathbb{R} \text{ cu } m(\lambda_1) = 1; \\ \lambda_2 = -1 \in \mathbb{R} \text{ cu } m(\lambda_2) = 1. \end{cases}$

•O formă canonică a formei pătratice este

$q_{\mathbf{a}}(\mathbf{h}) = \underbrace{1}_{+} u_1^2 + \underbrace{(-1)}_{-} u_2^2$, unde u_1, u_2 sunt coordonatele lui $\mathbf{h}$ într-o altă bază S_o, chiar ortonormată (cu vectori proprii ai A) ce se poate determina.

Indiferent de metodă, se observă că $q_{\mathbf{a}}(\mathbf{h})$ este formă pătratică nedefinită$\Rightarrow$

$\Rightarrow \mathbf{a} = (0, 0)$ nu este punct de extrem local pentru f (este punct parabolic, punct şa).

$\boxed{\mathbf{b} = (-1, 0)} \Rightarrow (d^2 f)(2, 1) = 12(dx)^2 + 12(dx)(dy) + 12(dy)^2$

$q_{\mathbf{b}}(\mathbf{h}) = ((d^2 f)(\mathbf{b}))(\mathbf{h}) = (d^2 f)(-1, 0)(h_1, h_2) = 0h_1^2 - 2h_1 h_2 - 2h_2^2$

$H_f(-1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

Se studiază natura formei pătratice $q_{\mathbf{b}}(\mathbf{h})$.

Metoda Jacobi, aplicabilă pentru acea formă pătratică având $\Delta_1 \neq 0, \Delta_2 \neq 0$.

$\Delta_0 = 1$ mereu.

$\Delta_1 = 0 - NU$

Metoda Gauss, aplicabilă pentru orice formă pătratică, în una din cele două variante.

Deoarece $a_{22} = -2 \Rightarrow$varianta 1 cu h_2 în loc de h_1.

$q_{\mathbf{b}}(\mathbf{h}) = -2\left(\underline{1 \cdot h_2^2 + 2h_2 \frac{h_1}{2}} + \left(\frac{h_1}{2}\right)^2\right) + 2\left(\frac{h_1}{2}\right)^2 = -2\left(h_2 + \frac{h_1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{h_1}{2}\right)^2.$

Se face schimbarea de coordonate

$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2}h_1 + h_2 \\ u_2 = \frac{1}{2}h_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h_1 = \quad 2u_2 \\ h_2 = u_1 - u_2 \end{cases}$

În baza $S_1 = (\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2')$, dată de matricea de trecere $\mathbf{G}_1 =_C \mathbf{A}_{S_1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, forma pătratică are forma canonică:

$q_{\mathbf{b}}(\mathbf{h}) = \underbrace{(-2)}_{-} u_1^2 + \underbrace{2}_{+} u_2^2$, unde u_1, u_2 sunt coordonatele lui $\mathbf{h}$ într-o altă bază S_1.

Metoda valorilor şi vectorilor proprii (a transformărilor ortogonale), aplicabilă pentru orice formă pătratică, deoarece $A = H_f(\mathbf{b})$ este simetrică, deci este ortogonal asemenea cu o matrice diagonală.

•Se determină polinomul caracteristic al matricei $A = H_f(-1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $P_{\mathbf{A}}(\lambda)$.

modul 1. $P_{\mathbf{A}}(\lambda) = \begin{vmatrix} 0 - \lambda & -1 \\ -1 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda - 1.$

modul 2. $P_{\mathbf{A}}(\lambda) = (-1)^2 \left[\lambda^2 - \delta_1 \lambda + \delta_2\right]$, unde δ_i este suma minorilor principali de ordin i ai matricei $\mathbf{A}$, adică

$\delta_1 = \operatorname{Tr} \mathbf{A} = 0 - 2 = -2;$

$\delta_2 = \det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}. = -1.$

$P_{\mathbf{A}}(\lambda) = \lambda^2 - (-2)\lambda - 1 = \lambda^2 + 2\lambda - 1.$

•Se rezolvă ecuaţia caracteristică a matricei $\mathbf{A}$,

$P_{\mathbf{A}}(\lambda) = 0 \Leftrightarrow -\lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 - \sqrt{2} \in \mathbb{R} \text{ cu } m(\lambda_1) = 1; \\ \lambda_2 = -1 + \sqrt{2} \in \mathbb{R} \text{ cu } m(\lambda_2) = 1. \end{cases}$

•O formă canonică a formei pătratice este

$q_{\mathbf{b}}(\mathbf{h}) = \underbrace{\left(-1-\sqrt{2}\right)}_{-} u_1^2 + \underbrace{\left(-1+\sqrt{2}\right)}_{+} u_2^2$, unde u_1, u_2 sunt coordonatele lui $\mathbf{h}$ într-o altă bază S_o, chiar ortonormată (cu vectori proprii ai A) ce se poate determina.

Indiferent de metodă, se observă că $q_{\mathbf{b}}(\mathbf{h})$ este formă pătratică pozitiv nedefinită$\Rightarrow$

$\Rightarrow \mathbf{b} = (-1, 0)$ nu este punct de extrem local pentru f (este punct parabolic, punct şa)

$\boxed{\mathbf{c} = (0, -1)} \Rightarrow \left(d^2 f\right)(0, -1) = -2\,(dx)^2 - 2\,(dx)\,(dy) - 0\,(dy)^2$

$q_{\mathbf{c}}(\mathbf{h}) = \left(\left(d^2 f\right)(\mathbf{c})\right)(\mathbf{h}) = \left(d^2 f\right)(0, -1)\,(h_1, h_2) = -2h_1^2 - 2h_1h_2 - 0h_2^2$

$H_f(0, -1) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Se studiază natura formei pătratice $q_{\mathbf{c}}(\mathbf{h})$.

<u>Metoda Jacobi</u>, aplicabilă pentru acea formă pătratică având $\Delta_1 \neq 0, \Delta_2 \neq 0$.

$\Delta_0 = 1$ mereu.

$\Delta_1 = -2 \neq 0$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

O formă canonică pentru forma pătratică este

$\boxed{q_{\mathbf{c}}(\mathbf{h}) = \dfrac{\Delta_0}{\Delta_1} u_1^2 + \dfrac{\Delta_1}{\Delta_2} u_2^2}$, unde u_1, u_2 sunt coordonatele lui $\mathbf{h} = (h_1, h_2)$ într-o altă bază decât cea canonică, ce se poate determina$\Rightarrow$

$q_{\mathbf{c}}(\mathbf{h}) = \underbrace{\dfrac{1}{-2}}_{-} u_1^2 + \underbrace{\dfrac{-2}{-1}}_{+} u_2^2$, unde u_1, u_2 sunt coordonatele lui $\mathbf{h}$ într-o altă bază.

Se observă că $q_{\mathbf{c}}(\mathbf{h})$ este formă pătratică nedefinită$\Rightarrow$

$\Rightarrow \mathbf{c} = (0, -1)$ nu este punct de extrem local pentru f (este punct parabolic, punct şa)

$\boxed{\mathbf{d} = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)} \Rightarrow \left(d^2 f\right)\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3}\,(dx)^2 - \frac{2}{3}\,(dx)\,(dy) - \frac{2}{3}\,(dy)^2$

$q_{\mathbf{d}}(\mathbf{h}) = \left(\left(d^2 f\right)(\mathbf{d})\right)(\mathbf{h}) = \left(d^2 f\right)\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)(h_1, h_2) = -\frac{2}{3}h_1^2 - \frac{2}{3}h_1h_2 - \frac{2}{3}h_2^2$

$H_f(1, 2) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$

Se studiază natura formei pătratice $q_{\mathbf{d}}(\mathbf{h})$.

<u>Metoda Jacobi</u>, aplicabilă pentru acea formă pătratică având $\Delta_1 \neq 0, \Delta_2 \neq 0$.

$\Delta_0 = 1$ mereu.

$\Delta_1 = -\frac{2}{3} \neq 0$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \neq 0$

O formă canonică pentru forma pătratică este

$\boxed{q_{\mathbf{d}}(\mathbf{h}) = \dfrac{\Delta_0}{\Delta_1} u_1^2 + \dfrac{\Delta_1}{\Delta_2} u_2^2}$, unde u_1, u_2 sunt coordonatele lui $\mathbf{h} = (h_1, h_2)$ într-o altă bază decât cea canonică, ce se poate determina$\Rightarrow$

$q_{\mathbf{d}}(\mathbf{h}) = \underbrace{\dfrac{1}{-\frac{2}{3}}}_{-} u_1^2 + \underbrace{\dfrac{-\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}}}_{-} u_2^2$, unde u_1, u_2 sunt coordonatele lui $\mathbf{h}$ într-o altă bază.

Se observă că $q_{\mathbf{d}}(\mathbf{h})$ este formă pătratică negativ definită$\Rightarrow$

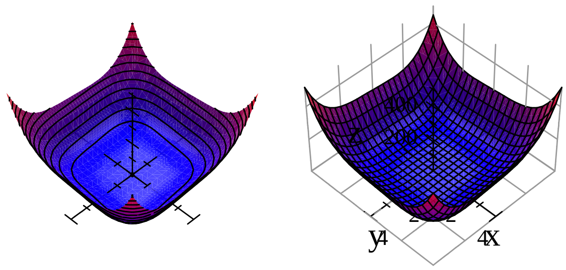
$\Rightarrow \mathbf{d} = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ este punct de maxim local pentru f.

<u>Concluzii.</u>

$\bullet\,\mathbf{d} = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ este punct de maxim local pentru f.

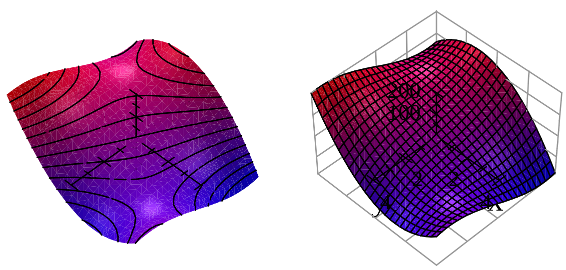
$f(\mathbf{d}) = f\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 1\right) = -\frac{1}{27}$ este valoarea maximă local.

h) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$



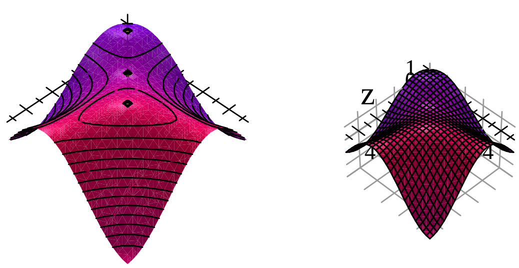
R: $\mathbf{a} = (0, 0)$, $\mathbf{b} = (1, 1)$ şi $\mathbf{c} = (-1, -1)$ sunt puncte staţionare.

i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = 3xy^2 - x^3 - 15x - 30y + 9$



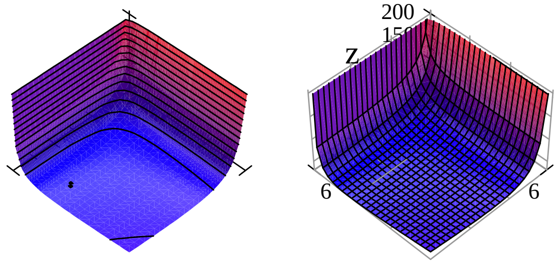
R: $\mathbf{a} = (2, 3)$ şi $\mathbf{b} = (-2, -3)$ sunt puncte staţionare, dar nu sunt puncte de extrem.

j) $f : \left[0, \frac{3\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{3\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}, f(x, y) = \sin x + \sin y + \cos(x + y)$



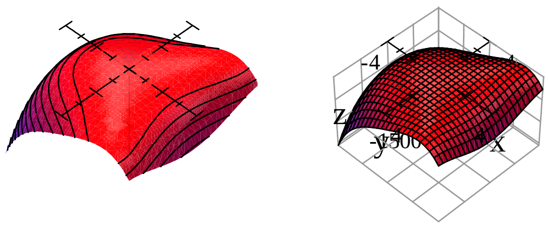
R: $\mathbf{a} = \left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $\mathbf{b} = \left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{6}\right)$, $\mathbf{c} = \left(\dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right)$ sunt puncte staţionare, $\mathbf{b}$ şi $\mathbf{c}$ sunt puncte de maxim local, iar $\mathbf{a}$ nu este punct de extrem.

k) $f :]0, +\infty[\times]0, +\infty[\to \mathbb{R}, f(x, y) = xy + \dfrac{50}{x} + \dfrac{20}{y}$;

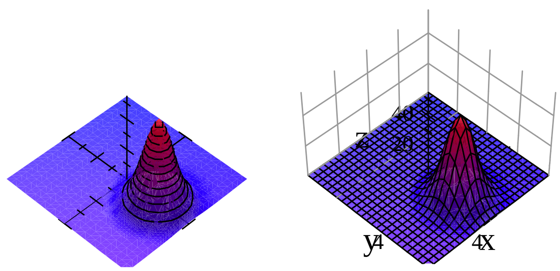


R: $\mathbf{a} = (5, 2)$ este punct staţionar şi punct de minim local.

l) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x, y) = 10x^2y - 5x^2 - 4y^2 - x^4 - 2y^4$;



m) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x, y) = e^{4y - x^2 - y^2}$;



Exerciţiul 2. Pentru $n = 3$, graficul unei funcţii $f : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x, y, z) = t$ este o mulţime $G_f = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; (x, y, z) \in A, t = f(x, y, z)\right\}$, care nu se poate reprezenta în $3D$. Să se determine punctele staţionare, apoi punctele de extrem local şi natura lor pentru următoarele câmpuri scalare:

a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - x + 4z$.

Rezolvare. Etapa 0. Se observă că $f \in C^2\left(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}\right)$ (are derivate parţiale de ordinul unu şi doi definite pe $\mathbb{R}^3$, continue pe $\mathbb{R}^3$).

$\exists \dfrac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 4x - 2y - 1.$

$\exists \dfrac{\partial f}{\partial y} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 2y - 2x.$

$\exists \dfrac{\partial f}{\partial z} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \dfrac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 2z + 4.$

$\exists \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) = \dfrac{\partial}{\partial x}(4x - 2y - 1) = 4.$

$\exists \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) = \dfrac{\partial}{\partial y}(2y-2x) = 2.$

$\exists \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) = \dfrac{\partial}{\partial z}(2z+4) = 2.$

$\exists \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}(2y-2x) = -2.$

$\exists \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\right) = \dfrac{\partial}{\partial y}(4x-2y-1) = -2.$

$\exists \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\right) = \dfrac{\partial}{\partial y}(2z+4) = 0.$

$\exists \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x,y,z) = \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\right) = \dfrac{\partial}{\partial z}(2y-2x) = 0.$

$\exists \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y,z) = \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\right) = \dfrac{\partial}{\partial z}(4x-2y-1) = 0.$

$\exists \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}(2z+4) = 0.$

Se putea preciza, conform Criteriului Schwarz, că derivatele parţiale mixte sunt egale şi se putea calcula doar câte una din pereche.

Sunt funcţii continue.

Etapa 1. Se determină punctele staţionare (critice) pentru f, adică soluţiile sistemului

$$(df)(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-2y-1=0 \\ 2y-2x=0 \\ 2z+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y,z) = \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -2\right).$$

Deci unicul punct staţionar al f este $\mathbf{a} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -2\right)$.

Etapa 2. Se determină care dintre punctele staţionare găsite sunt puncte de extrem local.

$$\boxed{\begin{aligned}\left(d^2 f\right)(x,y,z) = {} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z)\cdot(dx)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z)(dx)(dy) + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z)\cdot(dx)(dz) + \\ & + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z)\cdot(dy)(dz) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z)\cdot(dy)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z)\cdot(dy)(dz) + \\ & + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y,z)\cdot(dz)(dx) + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x,y,z)\cdot(dz)(dy) + \frac{\partial^2 f}{\partial z}(x,y,z)\cdot(dz)^2, \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\end{aligned}}$$

$$\overset{f \in C^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{R})}{\Longrightarrow}$$

$$\begin{aligned}\left(d^2 f\right)(x,y,z) = {} & 4\cdot(dx)^2 + 2\cdot(dy)^2 + 2\cdot(dz)^2 + 2\cdot(-2)\cdot(dx)(dy) + \\ & +2\cdot 0\cdot(dy)(dz) + 2\cdot 0\cdot(dz)(dx), \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\end{aligned}$$

$$\boxed{H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y,z) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x,y,z) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Algoritmul din Teorema 2 se aplică pentru fiecare punct staţionar în parte.

$\boxed{\mathbf{a} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -2\right)} \Rightarrow \left(d^2 f\right)\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -2\right) = 4(dx)^2 + 2(dy)^2 + 2(dz)^2 - 4(dx)(dy)$

$q_{\mathbf{a}}(\mathbf{h}) = \left(\left(d^2 f\right)(\mathbf{a})\right)(\mathbf{h}) = \left(d^2 f\right)\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -2\right)(h_1, h_2, h_3) = 4h_1^2 + 2h_2^2 + 2h_3^2 - 4h_1 h_2$

$H_f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-2\right)=\begin{pmatrix}4 & -2 & 0\\ -2 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$

Se studiază natura formei pătratice $q_{\mathbf{a}}(\mathbf{h})$.

Metoda Jacobi, aplicabilă pentru acea formă pătratică având $\Delta_1\neq 0,\Delta_2\neq 0,\Delta_3\neq 0$.

$\Delta_0=1$ mereu.

$\Delta_1=4\neq 0$

$\Delta_2=\begin{vmatrix}4 & -2\\ -2 & 2\end{vmatrix}=4\neq 0$

$\Delta_3=\begin{vmatrix}4 & -2 & 0\\ -2 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix}=8\neq 0$

O formă canonică pentru forma pătratică este

$\boxed{q_{\mathbf{a}}(\mathbf{h})=\frac{\Delta_0}{\Delta_1}u_1^2+\frac{\Delta_1}{\Delta_2}u_2^2+\frac{\Delta_2}{\Delta_3}u_3^2}$, unde u_1,u_2,u_3 sunt coordonatele lui $\mathbf{h}=(h_1,h_2,h_3)$ într-o altă bază decât cea canonică, ce se poate determina$\Rightarrow$

$q_{\mathbf{a}}(\mathbf{h})=\underbrace{\frac{1}{4}}_{+}u_1^2+\underbrace{\frac{4}{4}}_{+}u_2^2+\underbrace{\frac{4}{8}}_{+}u_3^2$, unde u_1,u_2,u_3 sunt coordonatele lui $\mathbf{h}$ într-o altă bază.

Metoda Gauss, aplicabilă pentru orice formă pătratică, în una din cele două variante.

Deoarece $\exists a_{11}=4\neq 0\Rightarrow$varianta 1.

$$\begin{aligned}q_{\mathbf{a}}(\mathbf{h})=\ &\underline{4h_1^2-4h_1h_2+0h_1h_3+}\\ &\qquad\quad +2h_2^2+0h_2h_3\ .\\ &\qquad\qquad\quad +2h_2^2.\end{aligned}$$

pasul 1. Se grupează termenii din expresia lui $q_{\mathbf{a}}(\mathbf{h})$ care conţin h_1 (prima linie din expresia formei $q_{\mathbf{a}}(\mathbf{h})$) şi se completează la un pătrat perfect, folosind

$\underline{a^2+2ab}+b^2=(a+b)^2$.

$q_{\mathbf{a}}(\mathbf{h})=\underline{4\left(1\cdot h_1^2-h_1h_2\right)}++2h_2^2+2h_3^2=4\left(\underline{1\cdot h_1^2+2h_1\frac{-h_2}{2}}+\left(\frac{-h_2}{2}\right)^2\right)-4\left(\frac{-h_2}{2}\right)^2+2h_2^2+2h_3^2=$

$=4\left(h_1-\frac{1}{2}h_2\right)^2+h_2^2+2h_3^2.$

pasul 1'. Se face schimbarea de coordonate

$$\begin{cases}u_1=h_1-\frac{1}{2}h_2\\ u_2=\qquad h_2\\ u_3=\qquad\qquad h_3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}h_1=u_1+\frac{1}{2}u_2\\ h_2=\qquad u_2\\ h_3=\qquad\qquad u_3\end{cases}$$

În baza $S_1=(\mathbf{e}_1',\mathbf{e}_2',\mathbf{e}_3')$, dată de matricea de trecere $\mathbf{G}_1={}_C\mathbf{A}_{S_1}=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, forma pătratică are forma canonică:

$q_{\mathbf{a}}(\mathbf{h})=\underbrace{4}_{+}u_1^2+\underbrace{1}_{+}u_2^2+\underbrace{2}_{+}u_3^2$, unde u_1,u_2,u_3 sunt coordonatele lui $\mathbf{h}$ într-o altă bază S_1.

Metoda valorilor şi vectorilor proprii (a transformărilor ortogonale), aplicabilă pentru orice formă pătratică, deoarece $A=H_f(\mathbf{a})$ este simetrică, deci este ortogonal asemenea cu o matrice diagonală.

•Se determină polinomul caracteristic al matricei $A=H_f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-2\right)=\begin{pmatrix}4 & -2 & 0\\ -2 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$, $P_{\mathbf{A}}(\lambda)$.

modul 1. $P_{\mathbf{A}}(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 16\lambda + 8 = -(\lambda-2)\left(\lambda^2 - 6\lambda + 4\right) =$
$= -(\lambda-2)\left(\lambda - \left(3+\sqrt{5}\right)\right)\left(\lambda - \left(3-\sqrt{5}\right)\right).$
modul 2. $P_{\mathbf{A}}(\lambda) = (-1)^3\left[\lambda^3 - \delta_1\lambda^2 + \delta_2\lambda - \delta_3\right]$, unde δ_i este suma minorilor principali de ordin i ai matricei $\mathbf{A}$, adică
$\delta_1 = \operatorname{Tr}\mathbf{A} = 4+2+2 = 8;$
$\delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}_{1,2} + \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}_{1,3} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}_{2,3} = 16$
$\delta_3 = \det\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8$
$P_{\mathbf{A}}(\lambda) = (-1)^3\left[\lambda^3 - 8\lambda^2 + 16\lambda - 8\right] = -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 16\lambda + 8 = -(\lambda-2)\left(\lambda^2 - 6\lambda + 4\right) =$
$= -(\lambda-2)\left(\lambda - \left(3+\sqrt{5}\right)\right)\left(\lambda - \left(3-\sqrt{5}\right)\right).$
•Se rezolvă ecuaţia caracteristică a matricei $\mathbf{A}$,
$P_{\mathbf{A}}(\lambda) = 0 \Leftrightarrow -(\lambda-2)\left(\lambda - \left(3+\sqrt{5}\right)\right)\left(\lambda - \left(3-\sqrt{5}\right)\right) \Leftrightarrow$
$\begin{cases} \lambda_1 = 2 \in \mathbb{R} \text{ cu } m(\lambda_1) = 1; \\ \lambda_2 = 3+\sqrt{5} \in \mathbb{R} \text{ cu } m(\lambda_2) = 1. \\ \lambda_3 = 3-\sqrt{5} \in \mathbb{R} \text{ cu } m(\lambda_3) = 1. \end{cases}$
•O formă canonică a formei pătratice este
$q_{\mathbf{a}}(\mathbf{h}) = \underbrace{2}_{+} u_1^2 + \underbrace{\left(3+\sqrt{5}\right)}_{+} u_2^2 + \underbrace{\left(3-\sqrt{5}\right)}_{+} u_3^2$, unde u_1, u_2, u_3 sunt coordonatele lui $\mathbf{h}$ într-o altă bază S_o, chiar ortonormată (cu vectori proprii ai A) ce se poate determina.

Indiferent de metodă, se observă că $q_{\mathbf{a}}(\mathbf{h})$ este formă pătratică pozitiv definită$\Rightarrow$
$\Rightarrow \mathbf{a} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -2\right)$ este punct de minim local pentru f.
Concluzii. •$\mathbf{a} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -2\right)$ este punct de minim local pentru f.
$f(\mathbf{a}) = f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -2\right) = 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (-2)^2 - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 4\cdot(-2) = -\frac{17}{4}$ este valoarea minimă local.

Pentru ca $\mathbf{a} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -2\right)$ să fie punct de minim global, ar trebui ca
$f(x,y,z) - f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -2\right) = 2x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - x + 4z + \frac{17}{4} \geq 0, \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$
ceea ce este greu de studiat, nu face obiectul acestui seminar.
•Pentru studiul valorilor extreme globale, se studiază comportamentul valorilor funcţiei la frontiera domeniului de definiţie, adică la "frontiera" lui $\mathbb{R}^3$, adică
$\lim_{(x,y,z)\to(-\infty,-\infty,-\infty)} f(x,y,z) = ?$ ş.a.m.d,
dar nu face obiectul acestui seminar.

b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4x - 6z;$ −temă

c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x,y,z) = 2x^2 - xy + 2xz - y + y^3 + z^2;$
Rezolvare. Etapa 0. Se observă că $f \in C^2\left(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}\right)$ (are derivate parţiale de ordinul unu şi doi definite pe $\mathbb{R}^3$, continue pe $\mathbb{R}^3$).
$\exists \frac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 4x - y + 2z;$
$\exists \frac{\partial f}{\partial y} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = -x - 1 + 3y^2;$

$\exists \dfrac{\partial f}{\partial z}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 2x + 2z;$
$\exists \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = \dfrac{\partial}{\partial x}(4x - y + 2z) = 4;$
$\exists \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(x - 1 + 3y^2\right) = 6y;$
$\exists \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) = \dfrac{\partial}{\partial z}(2x + 2z) = 2;$
$\exists \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(-x - 1 + 3y^2\right) = -1;$
$\exists \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z) = \dfrac{\partial}{\partial y}(4x - y + 2z) = -1;$
$\exists \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) = \dfrac{\partial}{\partial y}(2x + 2z) = 0;$
$\exists \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x,y,z) = \dfrac{\partial}{\partial z}\left(-x - 1 + 3y^2\right) = 0;$
$\exists \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y,z) = \dfrac{\partial}{\partial z}(4x - y + 2z) = 2;$
$\exists \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) = \dfrac{\partial}{\partial x}(2x + 2z) = 2.$

Se putea preciza, conform Criteriului Schwarz, că derivatele parţiale mixte sunt egale şi se putea calcula doar câte una din pereche.
Sunt funcţii continue.
Etapa 1. Se determină punctele staţionare (critice) pentru f, adică soluţiile sistemului

$$(df)(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - y + 2z = 0 \\ -x - 1 + 3y^2 = 0 \\ 2x + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$(x,y,z) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3}\right)$ sau. $(x,y,z) = \left(\frac{-1}{4}, \frac{-2}{4}, \frac{1}{4}\right)$
Deci punctele staţionare ale f sunt $\mathbf{a} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3}\right)$ şi $\mathbf{b} = \left(\frac{-1}{4}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{4}\right)$.
Etapa 2. Se determină care dintre punctele staţionare găsite sunt puncte de extrem local.

$$\left(d^2 f\right)(x,y,z) = 4 \cdot (dx)^2 + 6y \cdot (dy)^2 + 2 \cdot (dz)^2 + 2 \cdot (-1) \cdot (dx)(dy) + \\ +2 \cdot 0 \cdot (dy)(dz) + 2 \cdot 2 \cdot (dz)(dx), \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

$$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 6y & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Algoritmul din Teorema 2 se aplică pentru fiecare punct staţionar în parte.

$\boxed{\mathbf{a} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3}\right)} \Rightarrow \left(d^2 f\right)\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3}\right) = 4(dx)^2 + 6 \cdot \frac{2}{3}(dy)^2 + 2(dz)^2 - 2(dx)(dy) + 4(dz)(dx)$

$$q_{\mathbf{a}}(\mathbf{h}) = \left(\left(d^2 f\right)(\mathbf{a})\right)(\mathbf{h}) = \left(d^2 f\right)\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3}\right)(h_1, h_2, h_3) = 4h_1^2 + 4h_2^2 + 2h_3^2 - 2h_1 h_2 + 4h_1 h_3$$

$$H_f\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3}\right) = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Se studiază natura formei pătratice $q_{\mathbf{a}}(\mathbf{h})$.
Metoda Jacobi, aplicabilă pentru acea formă pătratică având $\Delta_1 \neq 0, \Delta_2 \neq 0, \Delta_3 \neq 0$.
$\Delta_0 = 1$ mereu.
$\Delta_1 = 4 \neq 0$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 15 \neq 0$

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 14 \neq 0.$

O formă canonică pentru forma pătratică este

$\boxed{q_{\mathbf{a}}(\mathbf{h}) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1} u_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} u_2^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_3} u_3^2}$, unde u_1, u_2, u_3 sunt coordonatele lui $\mathbf{h} = (h_1, h_2, h_3)$ într-o altă bază decât cea canonică, ce se poate determina$\Rightarrow$

$q_{\mathbf{a}}(\mathbf{h}) = \underbrace{\frac{1}{4}}_{+} u_1^2 + \underbrace{\frac{4}{15}}_{+} u_2^2 + \underbrace{\frac{15}{14}}_{+} u_3^2$, unde u_1, u_2, u_3 sunt coordonatele lui $\mathbf{h}$ într-o altă bază.

Metoda Gauss, aplicabilă pentru orice formă pătratică, în una din cele două variante.

Deoarece $\exists a_{11} = 4 \neq 0 \Rightarrow$varianta 1.

$q_{\mathbf{a}}(\mathbf{h}) = \left(\left(d^2 f\right)(\mathbf{a})\right)(\mathbf{h}) = \left(d^2 f\right)\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3}\right)(h_1, h_2, h_3) = 4h_1^2 + 4h_2^2 + 2h_3^2 - 2h_1 h_2 + 4h_1 h_3$

$H_f\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3}\right) = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} q_{\mathbf{a}}(\mathbf{h}) = \underline{4h_1^2 - 2h_1h_2 + 4h_1h_3 +} & \\ +4h_2^2 + 0h_2h_3 + & \\ +2h_3^2. & \end{aligned}$$

<u>pasul $1-2$</u>. Se grupează termenii din expresia lui $q_{\mathbf{a}}(\mathbf{h})$ care conţin h_1 (prima linie din expresia formei $q_{\mathbf{a}}(\mathbf{h})$) şi se completează la un pătrat perfect, folosind

$\underline{a^2 + 2ab + 2ac} + b^2 + c^2 + 2bc = (a + b + c)^2$.

$$\begin{aligned} q_{\mathbf{a}}(\mathbf{h}) &= 4\left(1 \cdot h_1^2 - \tfrac{1}{2}h_1h_2 + h_1h_3\right) + 4h_2^2 + 2h_3^2 = \\ &= 4\left(\underline{1 \cdot h_1^2 + 2h_1 \cdot \tfrac{-1}{4}h_2 + 2h_1 \cdot \tfrac{1}{2}h_3} + \left(\tfrac{-1}{4}h_2\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}h_3\right)^2 + 2\tfrac{-1}{4}h_2\tfrac{1}{2}h_3\right) - \\ &\quad -4\left(\left(\tfrac{-1}{4}h_2\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}h_3\right)^2 + 2\tfrac{-1}{4}h_2\tfrac{1}{2}h_3\right) + 4h_2^2 + 2h_3^2 = \\ &= 4\left(h_1 + \tfrac{-1}{4}h_2 + \tfrac{1}{2}h_3\right)^2 + \tfrac{15}{4}h_2^2 + h_2h_3 + h_3^2 = \\ &= 4\left(h_1 + \tfrac{-1}{4}h_2 + \tfrac{1}{2}h_3\right)^2 + \\ &\qquad + \underline{\underline{\tfrac{15}{4}h_2^2 + h_2h_3}} + \\ &\qquad\qquad + h_3^2. \end{aligned}$$

Se grupează termenii din expresia lui $q_{\mathbf{a}}(\mathbf{h})$ care conţin h_2 (a doua linie din expresia formei $q_{\mathbf{a}}(\mathbf{h})$) şi se completează la un pătrat perfect, folosind

$\underline{a^2 + 2ab} + b^2 = (a + b)^2$.

$$\begin{aligned} q_{\mathbf{a}}(\mathbf{h}) &= 4\left(h_1 + \tfrac{-1}{4}h_2 + \tfrac{1}{2}h_3\right)^2 + \tfrac{15}{4}\left(\underline{\underline{h_2^2 + 2h_2\tfrac{2h_3}{15}}} + \left(\tfrac{2h_3}{15}\right)^2\right) - \tfrac{15}{4}\left(\tfrac{2h_3}{15}\right)^2 + h_3^2 = \\ &= 4\left(h_1 + \tfrac{-1}{4}h_2 + \tfrac{1}{2}h_3\right)^2 + \\ &\qquad + \tfrac{15}{4}\left(h_2 + \tfrac{2}{15}h_3\right)^2 + \\ &\qquad\qquad + \tfrac{14}{15}h_3^2. \end{aligned}$$

<u>pasul $1'-2'$</u>. Se face schimbarea de coordonate

$$\begin{cases} u_1 = h_1 + \frac{-1}{4}h_2 + \frac{1}{2}h_3 \\ u_2 = h_2 + \frac{2}{15}h_3 \\ u_3 = h_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h_1 = u_1 + \frac{1}{4}u_2 + \frac{-8}{15}u_3 \\ h_2 = u_2 + \frac{-2}{15}u_3 \\ h_3 = u_3 \end{cases}$$

În baza $S_{12} = (\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3')$, dată de matricea de trecere $\mathbf{G}_1 =_C \mathbf{A}_{S_{12}} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{-8}{15} \\ 0 & 1 & \frac{-2}{15} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, forma pătratică are forma canonică:

$q_{\mathbf{a}}(\mathbf{h}) = \underbrace{4}_{+} u_1^2 + \underbrace{\frac{15}{4}}_{+} u_2^2 + \underbrace{\frac{14}{15}}_{+} u_3^2$, unde u_1, u_2, u_3 sunt coordonatele lui $\mathbf{h}$ într-o altă bază S_1.

<u>**Metoda valorilor şi vectorilor proprii (a transformărilor ortogonale)**</u>, aplicabilă pentru orice formă pătratică, deoarece $A = H_f(\mathbf{a})$ este simetrică, deci este ortogonal asemenea cu o matrice diagonală.

•Se determină polinomul caracteristic al matricei $A = H_f\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3}\right) = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $P_{\mathbf{A}}(\lambda)$.

<u>modul 1.</u> $P_{\mathbf{A}}(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & 2 \\ -1 & 4-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 10\lambda^2 - 27\lambda + 14$

Nu are rădăcini reale deductibile elementar- Stop metodă.

Indiferent de metodă, se observă că $q_{\mathbf{a}}(\mathbf{h})$ este formă pătratică pozitiv definită$\Rightarrow$

$\Rightarrow \mathbf{a} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3}\right)$ este punct de minim local pentru f.

$\boxed{\mathbf{b} = \left(\frac{-1}{4}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{4}\right)} \Rightarrow \left(d^2 f\right)\left(\frac{-1}{4}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{4}\right) = 4(dx)^2 + 6 \cdot \frac{-1}{2}(dy)^2 + 2(dz)^2 - 2(dx)(dy) + 4(dz)(dx)$

$q_{\mathbf{b}}(\mathbf{h}) = \left(\left(d^2 f\right)(\mathbf{b})\right)(\mathbf{h}) = \left(d^2 f\right)\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3}\right)(h_1, h_2, h_3) = 4h_1^2 - 3h_2^2 + 2h_3^2 - 2h_1h_2 + 4h_1h_3$

$H_f\left(\frac{-1}{4}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{4}\right) = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Se studiază natura formei pătratice $q_{\mathbf{b}}(\mathbf{h})$.

<u>**Metoda Jacobi**</u>, aplicabilă pentru acea formă pătratică având $\Delta_1 \neq 0, \Delta_2 \neq 0, \Delta_3 \neq 0$.

$\Delta_0 = 1$ mereu.

$\Delta_1 = 4 \neq 0$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -13 \neq 0$

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -14 \neq 0.$

O formă canonică pentru forma pătratică este

$\boxed{q_{\mathbf{a}}(\mathbf{h}) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1} u_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} u_2^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_3} u_3^2}$, unde u_1, u_2, u_3 sunt coordonatele lui $\mathbf{h} = (h_1, h_2, h_3)$ într-o altă bază decât cea canonică, ce se poate determina$\Rightarrow$

$q_{\mathbf{a}}(\mathbf{h}) = \underbrace{\frac{1}{4}}_{+} u_1^2 + \underbrace{\frac{4}{-13}}_{-} u_2^2 + \underbrace{\frac{-13}{-14}}_{+} u_3^2$, unde u_1, u_2, u_3 sunt coordonatele lui $\mathbf{h}$ într-o altă bază.

Se observă că $q_{\mathbf{b}}(\mathbf{h})$ este formă pătratică nedefinită$\Rightarrow$

$\Rightarrow \mathbf{b} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3}\right)$ nu este punct de extrem local pentru f.

<u>Concluzii.</u>

•$\mathbf{a} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3}\right)$ este punct de minim local pentru f.

$f(\mathbf{a}) = f\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3}\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{-1}{3} - \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{-1}{3}\right)^2 = -\frac{13}{27}$ este valoarea minimă local.

Pentru ca $\mathbf{a} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3}\right)$ să fie punct de minim global, ar trebui ca
$f(x,y,z) - f\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3}\right) = 2x^2 - xy + 2xz - y + y^3 + z^2 + \frac{13}{27} \geq 0, \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,
ceea ce este greu de studiat, nu face obiectul acestui seminar.
•$\mathbf{b} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3}\right)$ este punct staţionar pentru f, dar nu este punct de extrem local pentru f.
•Pentru studiul valorilor extreme globale, se studiază comportamentul valorilor funcţiei la frontiera domeniului de definiţie, adică la "frontiera" lui $\mathbb{R}^3$, adică
$\lim\limits_{(x,y,z)\to(-\infty,-\infty,-\infty)} f(x,y,z) =?$ ş.a.m.d,
dar nu face obiectul acestui seminar.

d) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$;
Rezolvare. Etapa 0. Se observă că $f \in C^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})$ (are derivate parţiale de ordinul unu şi doi definite pe $\mathbb{R}^3$, continue pe $\mathbb{R}^3$).

$\exists \frac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 3x^2 + 12y;$
$\exists \frac{\partial f}{\partial y} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 2y + 12x;$
$\exists \frac{\partial f}{\partial z} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 2z + 2;$
$\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2 + 12y\right) = 6x;$
$\exists \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y}(2y + 12x) = 2;$
$\exists \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial z}(2z + 2) = 2;$
$\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}(2y + 12x) = 12;$
$\exists \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2 + 12y\right) = 12;$
$\exists \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y}(2z + 2) = 0;$
$\exists \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial z}(2y + 12x) = 0;$
$\exists \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial z}\left(3x^2 + 12y\right) = 0;$
$\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}(2x + 2z) = 0;$

Se putea preciza, conform Criteriului Schwarz, că derivatele parţiale mixte sunt egale şi se putea calcula doar câte una din pereche.
Sunt funcţii continue.
Etapa 1. Se determină punctele staţionare (critice) pentru f, adică soluţiile sistemului

$$(df)(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 12y = 0 \\ 2y + 12x = 0 \\ 2z + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$(x,y,z) = (0,0,-1)$ sau. $(x,y,z) = (24,-144,-1)$
Deci punctele staţionare ale f sunt $\mathbf{a} = (0,0,-1)$ şi $\mathbf{b} = (24,-144,-1)$.

Etapa 2. Se determină care dintre punctele staţionare găsite sunt puncte de extrem local.

$\left(d^2 f\right)(x,y,z) = 6x \cdot (dx)^2 + 2 \cdot (dy)^2 + 2 \cdot (dz)^2 + 2 \cdot 12 \cdot (dx)(dy) +$
$+2 \cdot 0 \cdot (dy)(dz) + 2 \cdot 0 \cdot (dz)(dx), \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 6x & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Algoritmul din Teorema 2 se aplică pentru fiecare punct staţionar în parte.

$\boxed{\mathbf{a} = (0,0,-1)} \Rightarrow \left(d^2 f\right)(0,0,-1) = 0 \cdot (dx)^2 + 2 \cdot (dy)^2 + 2 \cdot (dz)^2 + 2 \cdot 12 \cdot (dx)(dy).$

$q_{\mathbf{a}}(\mathbf{h}) = \left(\left(d^2 f\right)(\mathbf{a})\right)(\mathbf{h}) = \left(d^2 f\right)(0,0,-1)(h_1,h_2,h_3) = 2h_2^2 + 2h_3^2 + 24h_1h_2.$

$$H_f(0,0,-1) = \begin{pmatrix} 0 & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Se studiază natura formei pătratice $q_{\mathbf{a}}(\mathbf{h})$.

Metoda Jacobi, aplicabilă pentru acea formă pătratică având $\Delta_1 \neq 0, \Delta_2 \neq 0, \Delta_3 \neq 0$.

$\Delta_0 = 1$ mereu.

$\Delta_1 = 0 \Rightarrow$nu se poate apleca metoda.

Metoda Gauss, aplicabilă pentru orice formă pătratică, în una din cele două variante.

Deoarece $\exists a_{22} = 2 \neq 0 \Rightarrow$varianta 1 dar cu h_2 drept h_1 sau varianta 2 cu pasul 0.$-$Nu aici.

Metoda valorilor şi vectorilor proprii (**a transformărilor ortogonale**), aplicabilă pentru orice formă pătratică, deoarece $A = H_f(\mathbf{a})$ este simetrică, deci este ortogonal asemenea cu o matrice diagonală.

•Se determină polinomul caracteristic al matricei $A = H_f(0,0,-1) = \begin{pmatrix} 0 & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, P_{\mathbf{A}}(\lambda).$

modul 1. $P_{\mathbf{A}}(\lambda) = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 12 & 0 \\ 12 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 4\lambda^2 + 140\lambda - 288 =$

$= -(\lambda - 2)\left(\lambda^2 - 2\lambda - 144\right) =$

$= -(\lambda - 2)\left(\lambda - \left(1 + \sqrt{145}\right)\right)\left(\lambda - \left(1 - \sqrt{145}\right)\right).$

modul 2. $P_{\mathbf{A}}(\lambda) = (-1)^3\left[\lambda^3 - \delta_1\lambda^2 + \delta_2\lambda - \delta_3\right]$, unde δ_i este suma minorilor principali de ordin i ai matricei $\mathbf{A}$, adică

$\delta_1 = \operatorname{Tr}\mathbf{A} = 0 + 2 + 2 = 4;$

$\delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 12 \\ 12 & 2 \end{vmatrix}_{1,2} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}_{1,3} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}_{2,3} = -140$

$\delta_3 = \det\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 0 & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -288$

$P_{\mathbf{A}}(\lambda) = (-1)^3\left[\lambda^3 - 4\lambda^2 - 140\lambda + 288\right] =$

$= -(\lambda - 2)\left(\lambda^2 - 2\lambda - 144\right) =$

$= -(\lambda - 2)\left(\lambda - \left(1 + \sqrt{145}\right)\right)\left(\lambda - \left(1 - \sqrt{145}\right)\right).$

•Se rezolvă ecuaţia caracteristică a matricei $\mathbf{A}$,

$P_{\mathbf{A}}(\lambda) = 0 \Leftrightarrow -(\lambda - 2)\left(\lambda - \left(1 + \sqrt{145}\right)\right)\left(\lambda - \left(1 - \sqrt{145}\right)\right) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 2 \in \mathbb{R} \text{ cu } m(\lambda_1) = 1; \\ \lambda_2 = 1 + \sqrt{145} \in \mathbb{R} \text{ cu } m(\lambda_2) = 1. \\ \lambda_3 = 1 - \sqrt{145} \in \mathbb{R} \text{ cu } m(\lambda_3) = 1. \end{cases}$$

•O formă canonică a formei pătratice este

$q_{\mathbf{a}}(\mathbf{h}) = \underbrace{2}_{+} u_1^2 + \underbrace{\left(1+\sqrt{145}\right)}_{+} u_2^2 + \underbrace{\left(1-\sqrt{145}\right)}_{+} u_3^2$, unde u_1, u_2, u_3 sunt coordonatele lui $\mathbf{h}$ într-o altă bază S_o, chiar ortonormată (cu vectori proprii ai A) ce se poate determina.

Indiferent de metodă, se observă că $q_{\mathbf{a}}(\mathbf{h})$ este formă pătratică nedefinită$\Rightarrow$

$\Rightarrow \mathbf{a} = (0,0,-1)$ nu este punct de extrem pentru f.

$\boxed{\mathbf{b} = (24,-144,-1)} \Rightarrow \left(d^2 f\right)(24,-144,-1) = 6\cdot 24\cdot (dx)^2 + 2\cdot (dy)^2 + 2\cdot (dz)^2 + 2\cdot 12\cdot (dx)(dy)$.

$q_{\mathbf{b}}(\mathbf{h}) = \left(\left(d^2 f\right)(\mathbf{b})\right)(\mathbf{h}) = \left(d^2 f\right)(24,-144,-1)(h_1,h_2,h_3) = 144h_1^2 + 2h_2^2 + 2h_3^2 + 24h_1h_2$.

$$H_f(24,-144,-1) = \begin{pmatrix} 144 & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Se studiază natura formei pătratice $q_{\mathbf{b}}(\mathbf{h})$.

<u>**Metoda Jacobi**</u>, aplicabilă pentru acea formă pătratică având $\Delta_1 \neq 0, \Delta_2 \neq 0, \Delta_3 \neq 0$.

$\Delta_0 = 1$ mereu.

$\Delta_1 = 144 \neq 0$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 144 & 12 \\ 12 & 2 \end{vmatrix} = 144 \neq 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 144 & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 288 \neq 0.$$

O formă canonică pentru forma pătratică este

$\boxed{q_{\mathbf{b}}(\mathbf{h}) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1}u_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}u_2^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_3}u_3^2}$, unde u_1, u_2, u_3 sunt coordonatele lui $\mathbf{h} = (h_1,h_2,h_3)$ într-o altă bază decât cea canonică, ce se poate determina$\Rightarrow$

$q_{\mathbf{b}}(\mathbf{h}) = \underbrace{\frac{1}{144}}_{+}u_1^2 + \underbrace{\frac{144}{144}}_{+}u_2^2 + \underbrace{\frac{144}{288}}_{+}u_3^2$, unde u_1, u_2, u_3 sunt coordonatele lui $\mathbf{h}$ într-o altă bază.

Se observă că $q_{\mathbf{b}}(\mathbf{h})$ este formă pătratică pozitiv definită$\Rightarrow$

$\Rightarrow \mathbf{b} = (24,-144,-1)$ este punct de minim local pentru f.

<u>Concluzii.</u>

•$\mathbf{a} = (0,0,-1)$ este punct staţionar pentru f, dar nu este punct de extrem local pentru f.

•$\mathbf{b} = (24,-144,-1)$ este punct de minim local pentru f.

$f(\mathbf{b}) = f(24,-144,-1) = (24)^3 + (-144)^2 + (-1)^2 + 12\cdot 24\cdot(-144) + 2\cdot(-1) = -6913$ este valoarea minimă local.

Pentru ca $\mathbf{b} = (24,-144,-1)$ să fie punct de minim global, ar trebui ca

$f(x,y,z) - f(24,-144,-1) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z + 6913 \geq 0, \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

ceea ce este greu de studiat, nu face obiectul acestui seminar.

•Pentru studiul valorilor extreme globale, se studiază comportamentul valorilor funcţiei la frontiera domeniului de definiţie, adică la "frontiera" lui $\mathbb{R}^3$, adică

$\lim\limits_{(x,y,z)\to(-\infty,-\infty,-\infty)} f(x,y,z) =?$ ş.a.m.d,

dar nu face obiectul acestui seminar.

e) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x,y,z) = x^2 + 3y^2 + 2z^2 - 2xy + 2xz$;

R: $\mathbf{a} = (0,0,0)$ este punct staţionar, şi punct de minim local pentru f; iar valoarea minimă locală este

$f(0,0,0) = 0.$

f) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x,y,z) = x^2y + yz + 32x - z^2;$
R: $\mathbf{a} = (2,-8,-4)$ este punct staţionar, dar nu este punct de extrem.

g) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + z^3 - 2x - 2y - 3z + 2xy + 3;$
R: $\mathbf{a} = (0,1,1)$, $\mathbf{b} = (0,1,-1)$ sunt puncte staţionare, $\mathbf{a}$ este punct de minim local, iar $\mathbf{b}$ nu este punct de extrem.

h) $f :]0,+\infty[\times]0,+\infty[\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}, f(x,y,z) = x + \dfrac{y^2}{4x} + \dfrac{z^2}{y} + \dfrac{2}{z}.$
R: $\mathbf{a} = \left(\frac{1}{2},1,1\right)$ este punct staţionar, şi este şi punct de minim local.

Exerciţiul 3. Să se determine punctele staţionare, apoi punctele de extrem local din $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2 < 4\right\}$ şi natura lor pentru câmpul scalar :
$f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = x + y + \ln\left(4 - x^2 - y^2\right)$

Rezolvare.

Etapa 0. Se observă că $f \in C^2(D;\mathbb{R})$ (are derivate parţiale de ordinul unu şi doi definite pe D, continue pe D).

$$\exists \frac{\partial f}{\partial x} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1 + \frac{-2x}{4-x^2-y^2}$$
$$\exists \frac{\partial f}{\partial y} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 1 + \frac{-2y}{4-x^2-y^2};$$
$$\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{(-2)\left(4-x^2-y^2\right) - (-2x)(-2x)}{\left(4-x^2-y^2\right)^2} = \frac{-2x^2+2y^2-8}{\left(4-x^2-y^2\right)^2};$$
$$\exists \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{(-2)\left(4-x^2-y^2\right) - (-2y)(-2y)}{\left(4-x^2-y^2\right)^2} = \frac{2x^2-2y^2-8}{\left(4-x^2-y^2\right)^2};$$
$$\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(1 + \frac{-2y}{4-x^2-y^2}\right) = \frac{-(-2y)(-2x)}{\left(4-x^2-y^2\right)^2} = \frac{-4xy}{\left(4-x^2-y^2\right)^2};$$
$$\exists \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)$$
$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(1 + \frac{-2x}{4-x^2-y^2}\right) = \frac{-(-2x)(-2y)}{\left(4-x^2-y^2\right)^2} = \frac{-4xy}{\left(4-x^2-y^2\right)^2};$$

Sunt funcţii continue.

Etapa 1. Se determină punctele staţionare (critice) pentru f, adică soluţiile sistemului

$$(df)(x,y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \dfrac{-2x}{4-x^2-y^2} = 0 \\ 1 + \dfrac{-2y}{4-x^2-y^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4-x^2-y^2 = 2x \\ 4-x^2-y^2 = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2+x-2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x,y) = (1,1) \in D \text{ sau } (x,y) = (-2,-2) \notin D$$

Deci f are un singur punct staţionar în D, $\mathbf{a} = (1,1)$

Etapa 2. Se determină care dintre punctele staţionare găsite sunt puncte de extrem local.

$$\left(d^2 f\right)(x,y) = \frac{-2x^2+2y^2-8}{\left(4-x^2-y^2\right)^2}\cdot(dx)^2 + 2\cdot\frac{-4xy}{\left(4-x^2-y^2\right)^2}\cdot(dx)(dy) + \frac{2x^2-2y^2-8}{\left(4-x^2-y^2\right)^2}\cdot(dy)^2,$$
$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$.

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{-2x^2+2y^2-8}{\left(4-x^2-y^2\right)^2} & \dfrac{-4xy}{\left(4-x^2-y^2\right)^2} \\ \dfrac{-4xy}{\left(4-x^2-y^2\right)^2} & \dfrac{2x^2-2y^2-8}{\left(4-x^2-y^2\right)^2} \end{pmatrix}$$

$\boxed{\mathbf{a}=(1,1)} \Rightarrow \left(d^2 f\right)(1,1) = -2(dx)^2 - 2(dx)(dy) - 2(dy)^2$

$q_{\mathbf{a}}(\mathbf{h}) = \left(\left(d^2 f\right)(\mathbf{a})\right)(\mathbf{h}) = \left(d^2 f\right)(1,1)(h_1,h_2) = -2h_1^2 - 2h_1h_2 - 2h_2^2$

$H_f(1,1) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

Se studiază natura formei pătratice $q_{\mathbf{a}}(\mathbf{h})$.

<u>**Metoda Jacobi**</u>, aplicabilă pentru acea formă pătratică având $\Delta_1 \neq 0, \Delta_2 \neq 0$.

$\Delta_0 = 1$ mereu.Se aplică metoda Jacobi, dacă este posibil

$\Delta_1 = -2 \neq 0$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$

O formă canonică pentru forma pătratică este

$\boxed{q_{\mathbf{b}}(\mathbf{h}) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1}u_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}u_2^2}$, unde u_1, u_2 sunt coordonatele lui $\mathbf{h} = (h_1, h_2)$ într-o altă bază decât cea canonică, ce se poate determina$\Rightarrow$

$q_{\mathbf{b}}(\mathbf{h}) = \underbrace{\frac{1}{-2}}_{-}u_1^2 + \underbrace{\frac{-2}{3}}_{-}u_2^2$, unde u_1, u_2 sunt coordonatele lui $\mathbf{h}$ într-o altă bază.

Se observă că $q_{\mathbf{a}}(\mathbf{h})$ este formă pătratică negativ definită$\Rightarrow$

$\Rightarrow \mathbf{a} = (1,1)$ este punct de maxim local pentru f.

<u>Concluzii.</u> $\bullet\mathbf{a} = (1,1)$ este punct de minim local pentru f.

$f(\mathbf{a}) = f(1,1) = 1 + 1 + \ln\left(4 - 1^2 - 1^2\right) = 2 + \ln 2$ este valoarea maximă local.

Pentru ca $\mathbf{a} = (1,1)$ să fie punct de minim global, ar trebui ca

$f(x,y) - f(1,1) = x + y + \ln\left(4 - x^2 - y^2\right) - 2 - \ln 2 \leq 0, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,$
ceea ce e greu de studiat.