CURS NR. 1
Matematici Speciale, AIA

ELEMENTE DE TEORIA CÂMPURILOR

1. Câmp scalar: suprafeţe de nivel, derivată după direcţie, gradient

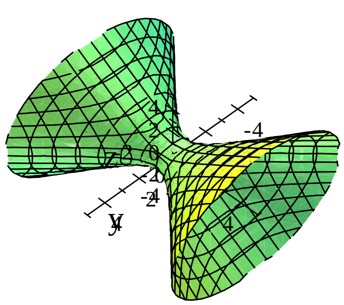
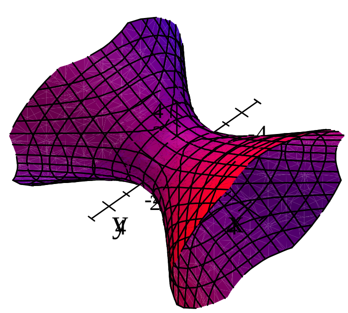
Definiţia 1.1. Se numeşte *câmp scalar* o funcţie $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, unde D este un domeniu din $\mathbb{R}^3$.
a) Se numeşte *mulţime de nivel / suprafaţă de nivel / suprafaţă echipotenţială* a câmpului scalar φ locul geometric al punctelor $(x, y, z) \in D$ care prin φ sunt duse într-o valoare constantă $c_0 \in \mathbb{R}$.
b) *Ecuaţia suprafeţei de nivel* este
$\varphi(x, y, z) = c_0, (x, y, z) \in D.$
c) *Ecuaţia suprafeţei de nivel care trece prin punctul* (x_0, y_0, z_0) este
$\varphi(x, y, z) = \varphi(x_0, y_0, z_0), (x, y, z) \in D.$
Comentariul 1.1. Condiţia ca D să fie domeniu (mulţime deschisă şi conexă) se impune pentru definirea riguroasă a unor condiţii de regularitate asupra câmpului (de continuitate, de clasă $\mathcal{C}^1$).

Se notează cu P punctul din $D \subseteq \mathbb{R}^3$ de coordonate (x, y, z) şi se scrie $\varphi(P)$ în loc de $\varphi(x, y, z)$, mai ales la punerea în evidenţă a unor interpretări fizice, în care dependenţa este legată de punct şi mai puţin de coordonatele sale. Ecuaţia suprafeţei de nivel devine
$\varphi(P) = c_0, P \in D$ sau, dacă suprafaţa trece prin $P_0, \varphi(P) = \varphi(P_0), P \in D.$
Observaţia 1.1. Din Definiţia 1.1 se poate deduce:
a) Printr-un punct P din D trece o singură suprafaţă de nivel (un c).
b) Două suprafeţe de nivel fie coincid (acelaşi c), fie nu se intersectează ($c_1 \neq c_2$).

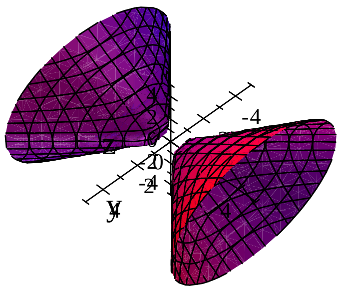
Exemplul 1.1. **a)** Fie $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\varphi(P) = \varphi(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2$ un câmp scalar.

Suprafeţele de nivel sunt de ecuaţie $x^2 - y^2 + z^2 = c, c \in \mathbb{R}$.

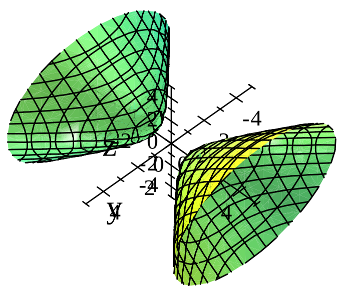
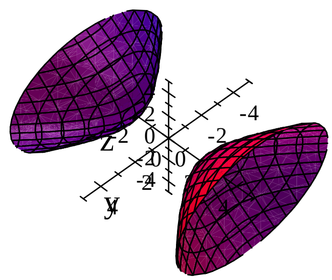
Pentru $c = 1$ şi $c = 4$, suprafeţele $x^2 - y^2 + z^2 = 1$ şi $x^2 - y^2 + z^2 = 4$ sunt hiperboloizii cu o pânză:

Pentru $c = 0$, suprafaţa $x^2 - y^2 + z^2 = 0$ este conul pătratic:



Pentru $c = -1$ şi $c = -4$, suprafeţele $x^2 - y^2 + z^2 = -1$ şi $x^2 - y^2 + z^2 = -4$ sunt hiperboloizii cu două pânze:

Se observă că au loc afirmaţiile din Observaţia 1.1.

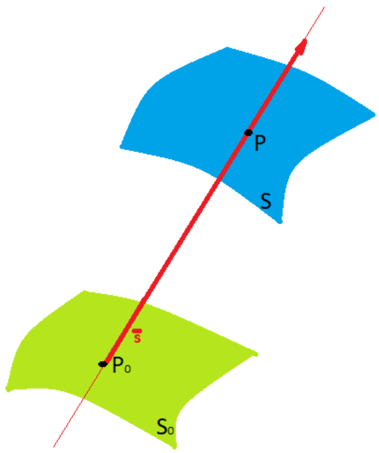
b) Fie P un punct dintr-un domeniu D din spaţiu. Se poate defini $\varphi(P)$ drept *temperatura* nevariind în timp (sau *presiunea*, sau *umiditatea*) măsurată în acel punct, într-un sistem de unităţi covenabil ales. În cazul în care câmpul scalar este al temperaturilor, suprafeţele de nivel se numesc *izoterme*; în cazul în care este al presiunilor, se numesc *izobare*.

Se va studia viteza de variaţie a unui câmp scalar φ după o direcţie dată, în vecinătatea unui punct dat, prin similitudine cu viteza de variaţie a unei funcţii $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a cărei monotonie se studia pe baza derivatei.

Definiţia 1.2. Fie S_0 o suprafaţă de nivel a câmpului scalar φ care trece prin punctul P_0 şi fie un versor liber $\overrightarrow{\mathbf{s}}$, reprezentat cu originea în P_0.

Fie S o suprafaţă de nivel a câmpului scalar φ, vecină cu S_0. Fie P punctul în care versorul $\overrightarrow{\mathbf{s}}$ (direcţia versorului) intersectează suprafaţa de nivel S.

Dacă Δ_s este variaţia lungimii (mărimea deplasării) pe direcţia lui $\overrightarrow{\mathbf{s}}$, considerată cu $+$ în sensul lui $\overrightarrow{\mathbf{s}}$ şi cu $-$ în sensul opus lui $\overrightarrow{\mathbf{s}}$, atunci $\overrightarrow{P_0P} = \Delta_s \overrightarrow{\mathbf{s}}$.



Se numeşte *derivata câmpului scalar* φ *după direcţia versorului* $\overrightarrow{\mathbf{s}}$ *în punctul* P_0, numărul

$$\lim_{\Delta_s \to 0} \frac{\varphi(P) - \varphi(P_0)}{\Delta_s} \overset{\text{not.}}{=} \frac{d\varphi}{d\overrightarrow{\mathbf{s}}}(P_0), \tag{1}$$

ori de câte ori această limită există şi este finită.

Observaţia 1.2.

a) Dacă $\dfrac{d\varphi}{d\overrightarrow{\mathbf{s}}}(P_0) > 0$, atunci câmpul scalar φ <u>creşte</u> într-o vecinătate a lui P_0 după direcţia şi sensul lui $\overrightarrow{\mathbf{s}}$.

b) Dacă $\dfrac{d\varphi}{d\overrightarrow{\mathbf{s}}}(P_0) < 0$, atunci câmpul scalar φ <u>descreşte</u> într-o vecinătate a lui P_0 după direcţia şi sensul lui $\overrightarrow{\mathbf{s}}$.

Observaţia 1.3. Conform cursului de Analiză Matematică,

-dacă $\overrightarrow{\mathbf{s}} = \overrightarrow{\mathbf{i}}$, atunci $\dfrac{d\varphi}{d\overrightarrow{\mathbf{i}}}(P_0) = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(P_0)$;

-dacă $\overrightarrow{\mathbf{s}} = \overrightarrow{\mathbf{j}}$, atunci $\dfrac{d\varphi}{d\overrightarrow{\mathbf{j}}}(P_0) = \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(P_0)$;

-dacă $\overrightarrow{\mathbf{s}} = \overrightarrow{\mathbf{k}}$, atunci $\dfrac{d\varphi}{d\overrightarrow{\mathbf{k}}}(P_0) = \dfrac{\partial\varphi}{\partial z}(P_0)$.

Teorema 1.1. (expresia derivatei după o direcţie în coordonate carteziene).

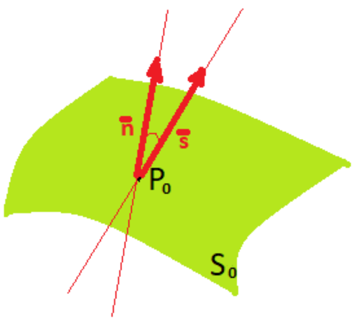
Fie $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{C}^1(D)$. Atunci φ admite derivate după orice direcţie $\overrightarrow{\mathbf{s}}$ în orice $P_0 \in D$. În plus, dacă $\overrightarrow{\mathbf{s}} = \alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \beta\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + \gamma\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ este versor, atunci

$$\boxed{\frac{d\varphi}{d\overrightarrow{\mathbf{s}}}(P_0) = \alpha\frac{\partial\varphi}{\partial x}(P_0) + \beta\frac{\partial\varphi}{\partial y}(P_0) + \gamma\frac{\partial\varphi}{\partial z}(P_0).} \tag{2}$$

Teorema 1.2. (expresie a derivatei după o direcţie).

Fie $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{C}^1(D)$ şi $P_0 \in D$. Fie $\overrightarrow{\mathbf{n}}$ versorul normalei la suprafaţa de nivel S_0 în punctul P_0. Atunci, pentru orice $\overrightarrow{\mathbf{s}}$-un alt versor cu originea în P_0, cu $\theta = \left(\widehat{\overrightarrow{\mathbf{n}}, \overrightarrow{\mathbf{s}}}\right)$,

$$\boxed{\frac{d\varphi}{d\overrightarrow{\mathbf{s}}}(P_0) = \frac{d\varphi}{d\overrightarrow{\mathbf{n}}}(P_0)\cos\theta} \tag{3}$$



Observaţia 1.4. **a)** Din Teorema 1.1, expresia derivatei lui φ după direcţia lui $\overrightarrow{\mathbf{s}}$ reprezintă produsul scalar între vectorul

$$\overrightarrow{\mathbf{n}} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(P_0)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(P_0)\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}(P_0)\,\overrightarrow{\mathbf{k}},$$

normal la suprafaţa de nivel a câmpului φ prin punctul P_0 şi versorul $\overrightarrow{\mathbf{s}}$, adică

$$\boxed{\frac{d\varphi}{d\overrightarrow{\mathbf{s}}}(P_0) = \overrightarrow{\mathbf{n}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{s}}.}$$

b) Dacă $\overrightarrow{\mathbf{l}} = \alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \beta\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + \gamma\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ nu este versor, atunci, în ipotezele Teoremei 1.1, derivata după direcţia versorului lui $\overrightarrow{\mathbf{l}}$, $\overrightarrow{\mathbf{s}} = \frac{1}{\left\|\overrightarrow{\mathbf{l}}\right\|}\overrightarrow{\mathbf{l}}$, este:

$$\frac{d\varphi}{d\overrightarrow{\mathbf{s}}}(P_0) = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}\frac{\partial \varphi}{\partial x}(P_0) + \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}\frac{\partial \varphi}{\partial y}(P_0) + \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}\frac{\partial \varphi}{\partial z}(P_0).$$

c) Dintre toate direcţiile cu originea în P_0, **direcţia în raport cu care derivata lui φ este maximă este direcţia normalei.**

Într-adevăr, $\left\|\frac{d\varphi}{d\overrightarrow{\mathbf{s}}}(P_0)\right\| = \max \Leftrightarrow |\cos\theta| = \max = 1$

Pentru că $\overrightarrow{\mathbf{n}}$ este fixat$\Rightarrow \cos\theta = \pm 1 \Leftrightarrow [\theta = 0 \text{ sau } \theta = \pi] \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathbf{n}}$ şi $\overrightarrow{\mathbf{s}}$ au aceeaşi direcţie.

Exemplul 1.2. Fie

câmpul scalar $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\varphi(P) = 2x^2 - 4xyz + e^z$,

punctul $P_0(1, 0, -2)$,

vectorul $\overrightarrow{\mathbf{l}} = \overrightarrow{\mathbf{i}} - 2\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + 3\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$.

Să se determine derivata câmpului scalar φ în P_0 după direcţia vectorului versor al lui $\overrightarrow{\mathbf{l}}$, $\frac{d\varphi}{d\overrightarrow{\mathbf{s}}}(P_0)$.

Să se studieze dacă într-o vecinătate a punctului P_0, câmpul scalar φ creşte sau descreşte după direcţia lui $\overrightarrow{\mathbf{s}}$.

Să se scrie ecuaţia suprafeţei de nivel pe care se află P_0.

Rezolvare. $\left\|\overrightarrow{\mathbf{l}}\right\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14} \Rightarrow \overrightarrow{\mathbf{s}} = \frac{1}{\sqrt{14}}\overrightarrow{\mathbf{i}} - \frac{2}{\sqrt{14}}\overrightarrow{\mathbf{j}} + \frac{3}{\sqrt{14}}\overrightarrow{\mathbf{k}}$.

$\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$, cu $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(P) = 4x - 4yz$; $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(P) = -4xz$; $\frac{\partial \varphi}{\partial z}(P) = -4xy + e^z$;

Conform (2) $\Rightarrow$

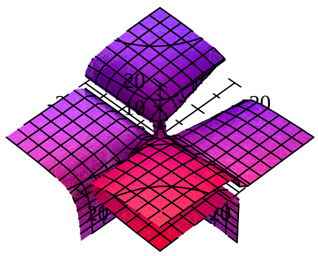
$$\frac{d\varphi}{d\overrightarrow{\mathbf{s}}}(P_0) = \frac{1}{\sqrt{14}}\frac{\partial \varphi}{\partial x}(1,0,-2) - \frac{2}{\sqrt{14}}\frac{\partial \varphi}{\partial y}(1,0,-2) + \frac{3}{\sqrt{14}}\frac{\partial \varphi}{\partial z}(1,0,-2) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{14}}(4\cdot 1 - 4\cdot 0\cdot(-2)) - \frac{2}{\sqrt{14}}((-4)\cdot 1\cdot(-2)) + \frac{3}{\sqrt{14}}\left((-4)\cdot 1\cdot 0 + e^{-2}\right) =$$

$$= \frac{-12}{\sqrt{14}} + \frac{3e^{-2}}{\sqrt{14}}.$$

Deoarece $\dfrac{d\varphi}{d\overrightarrow{\mathbf{s}}}(P_0) = \dfrac{-12+3e^{-2}}{\sqrt{14}} < 0 \Rightarrow$ câmpul scalar descreşte într-o vecinătate a P_0 după direcţia şi sensul lui $\overrightarrow{\mathbf{s}}$.

Ecuaţia suprafeţei de nivel pe care se află P_0 este
$2x^2 - 4xyz + e^z = 2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0 \cdot (-2) + e^{-2}$.



Definiţia 1.3. Fie $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{C}^1(D)$. Se numeşte *gradientul câmpului scalar* φ *în* $P_0 \in D$ vectorul din $\mathbb{V}_3$:

$$\boxed{\operatorname{grad}\varphi(P_0) = \frac{d\varphi}{d\overrightarrow{\mathbf{n}}}(P_0)\,\overrightarrow{\mathbf{n}},} \tag{4}$$

unde $\overrightarrow{\mathbf{n}}$ este versorul normalei la suprafaţa de nivel S_0 în punctul P_0.

Observaţia 1.5. a) (gradientul ca vector normal) Gradientul lui φ într-un punct **este ortogonal pe suprafaţa de nivel a lui φ în acel punct**, putând fi folosit la a construi un vector normal la o suprafaţă. În ipoteza că $\operatorname{grad}\varphi(P_0) \neq 0$, un versor normal la suprafaţa de nivel în P_0 este

$$\boxed{\overrightarrow{\mathbf{n}} = \frac{1}{\|\operatorname{grad}\varphi(P_0)\|}\operatorname{grad}\varphi(P_0).}$$

b) (gradientul proiectat pe un versor) Deoarece

$$\frac{d\varphi}{d\overrightarrow{\mathbf{s}}}(P_0) = \operatorname{grad}\varphi(P_0) \cdot \overrightarrow{\mathbf{s}} = \operatorname{pr}_{\overrightarrow{\mathbf{s}}}\operatorname{grad}\varphi(P_0),$$

rezultă că **derivata după direcţia unui versor într-un punct este proiecţia scalară a gradientului pe acel versor**.

c) (gradientul şi direcţia celei mai rapide variaţii) Deoarece

$$\boxed{\frac{d\varphi}{d\overrightarrow{\mathbf{s}}}(P_0) = \operatorname{grad}\varphi(P_0) \cdot \overrightarrow{\mathbf{s}},}$$

calculând derivata după direcţia versorului gradientului, $\overrightarrow{\mathbf{n}} = \dfrac{1}{\|\operatorname{grad}\varphi(P_0)\|}\operatorname{grad}\varphi(P_0)$, se obţine

$$\frac{d\varphi}{d\overrightarrow{\mathbf{n}}}(P_0) = \operatorname{grad}\varphi(P_0) \cdot \left(\frac{1}{\|\operatorname{grad}\varphi(P_0)\|}\operatorname{grad}\varphi(P_0)\right) = \frac{\|\operatorname{grad}\varphi(P_0)\|^2}{\|\operatorname{grad}\varphi(P_0)\|} = \|\operatorname{grad}\varphi(P_0)\| > 0,$$

adică

$$\boxed{\frac{d\varphi}{d\overrightarrow{\mathbf{n}}}(P_0) = \|\operatorname{grad}\varphi(P_0)\| > 0.}$$

Se deduce că **direcţia gradient este o direcţie de creştere a câmpului scalar φ**, iar direcţia opusă este una de descreştere. Mai mult este **direcţia celei mai rapide creşteri/ descreşteri**, conform Teoremei 1.2 şi a Observaţiei 1.4.*c*).

Fie o sală de curs în care *temperatura* este dată de un câmp scalar $\varphi(P)$, presupunând că temperatura nu variază în timp. Atunci, în fiecare punct din amfiteatru, gradientul va arăta direcţia în care temperatura creşte cel mai repede. Magnitudinea gradientului va determina cât de

repede creşte temperatura în acea direcţie.
d) Deşi gradientul poate fi dat în termeni de coordonate (vezi Teorema 1.3), el este **invariant în raport cu transformările ortogonale**.
Teorema 1.3. (expresia gradientului unui câmp scalar în coordonate carteziene).
Fie $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \varphi \in \mathcal{C}^1(D)$. Atunci φ admite gradient în orice punct $P_0 \in D$ şi

$$\boxed{\operatorname{grad}\varphi(P_0) = \nabla\varphi(P_0) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(P_0)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}(P_0)\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}(P_0)\,\overrightarrow{\mathbf{k}}} \tag{5}$$

Notând cu ∇ *operatorul Hamilton de derivare parţială*

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y}\overrightarrow{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z}\overrightarrow{\mathbf{k}},$$

se poate scrie formal

$$\boxed{\operatorname{grad}\varphi(P) = \nabla\varphi(P), \forall P \in D.}$$

Exemplul 1.3. Să se determine gradientul câmpului scalar

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ \varphi(P) = e^{2x-3y+z^2}\cdot(x-y),$$

în punctul arbitrar $P(x,y,z)$ şi în $P_0(0,2,3)$. Să se scrie ecuaţia suprafeţei de nivel prin P_0.
Rezolvare. $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$, cu

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(P) = e^{2x-3y+z^2}\cdot 2(x-y) + e^{2x-3y+z^2};$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}(P) = e^{2x-3y+z^2}\cdot(-3)(x-y) + e^{2x-3y+z^2}(-1);$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}(P) = e^{2x-3y+z^2}\cdot 2z(x-y);$$

Conform (5) $\Rightarrow$

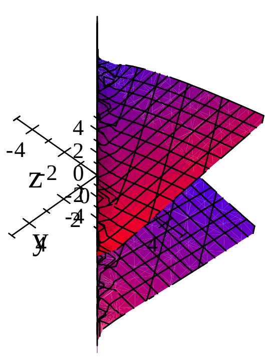
$$\operatorname{grad}\varphi(P) = \nabla\varphi(P) = e^{2x-3y+z^2}\left((2x-2y+1)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + (-3x+3y-1)\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + 2z(x-y)\,\overrightarrow{\mathbf{k}}\right).$$

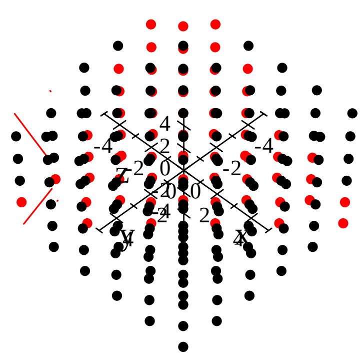
$$\operatorname{grad}\varphi(P_0) = \nabla\varphi(0,2,3) = e^3\left(-3\overrightarrow{\mathbf{i}} + 5\overrightarrow{\mathbf{j}} - 12\overrightarrow{\mathbf{k}}\right).$$

Suprafaţa de nivel ce trece prin $P_0(0,2,3)$, determinată de acest câmp are ecuaţia:

$$\varphi(P) = \varphi(P_0) \Leftrightarrow e^{2x-3y+z^2}\cdot(x-y) = -e^3.$$

Suprafaţa de nivel (în P_0) şi câmpul de gradienţi (în general) au reprezentarea:

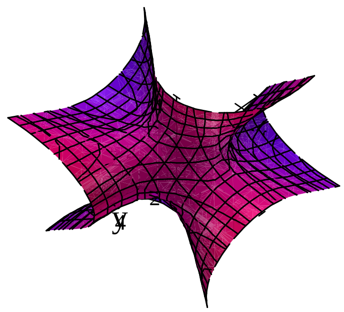
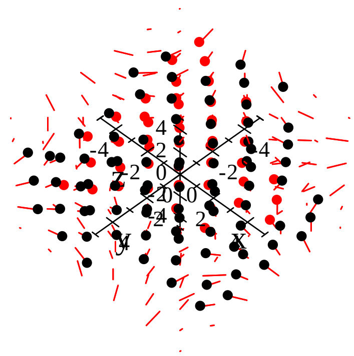




Exemplul 1.4. Se dă câmpul scalar $\varphi(P) = x^2y + y^2z + z^2x$.
a) Să se determine suprafaţa de nivel ce trece prin $P_0(2,1,-1)$, determinată de acest câmp.
b) Să se determine un versor director al normalei în punctul P_0 la suprafaţa de nivel găsită. Să se precizeze dacă φ creşte sau scade după direcţia acestui versor.
Rezolvare. **a)** Suprafaţa de nivel ce trece prin $P_0(2,1,-1)$, determinată de acest câmp are ecuaţia:

$\varphi(P) = \varphi(P_0) \Leftrightarrow x^2y + y^2z + z^2x = 2^2 \cdot 1 + 1^2 \cdot (-1) + (-1)^2 \cdot 2 \Leftrightarrow x^2y + y^2z + z^2x = 5.$

Suprafaţa de nivel (în P_0) şi câmpul de gradienţi (în general) au reprezentarea:

b) Un versor normal la suprafaţa de nivel în P_0 este versorul vectorului $\operatorname{grad}\varphi(P_0)$,
$\overrightarrow{\mathbf{n}}(P_0) = \dfrac{1}{\|\operatorname{grad}\varphi(P_0)\|}\operatorname{grad}\varphi(P_0)$.

$\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$, cu $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(P) = 2xy + z^2$; $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(P) = x^2 + 2yz$; $\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}(P) = y^2 + 2xz$;

Conform (5) $\Rightarrow \operatorname{grad}\varphi(P) = \nabla\varphi(P) = (2xy + z^2)\overrightarrow{\mathbf{i}} + (x^2 + 2yz)\overrightarrow{\mathbf{j}} + (y^2 + 2xz)\overrightarrow{\mathbf{k}} \Rightarrow$
$\operatorname{grad}\varphi(P_0) = \nabla\varphi(2,1,-1) = 5\overrightarrow{\mathbf{i}} + 2\overrightarrow{\mathbf{j}} - 3\overrightarrow{\mathbf{k}}$;
$\|\operatorname{grad}\varphi(P_0)\| = \sqrt{5^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{38}.$
$\overrightarrow{\mathbf{n}}(P_0) = \dfrac{5}{\sqrt{38}}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \dfrac{2}{\sqrt{38}}\overrightarrow{\mathbf{j}} - \dfrac{3}{\sqrt{38}}\overrightarrow{\mathbf{k}}.$

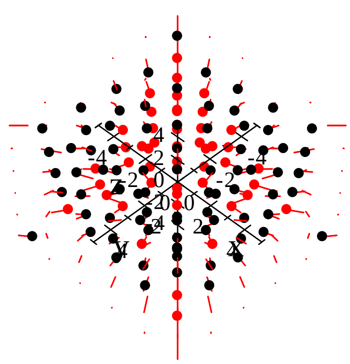
Este versor normal la suprafaţa de nivel în P_0. Direcţia lui (aceeaşi cu a gradientului) este una după care câmpul scalar creşte într-o vecinătate a lui P_0, chiar este direcţia celei mai rapide creşteri.

Exemplul 1.5. Se dă câmpul scalar $\varphi(P) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$. În ce puncte ale spaţiului direcţia vectorului $\operatorname{grad}\varphi$ este paralelă cu axa Oz?

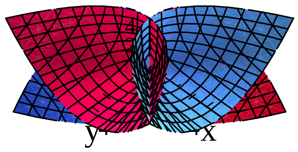
Rezolvare. $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$, cu $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(P) = 3x^2 - 3yz$; $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(P) = 3y^2 - 3xz$; $\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}(P) = 3z^2 - 3xy$;

Conform (5) $\Rightarrow \operatorname{grad}\varphi(P) = \nabla\varphi(P) = (3x^2 - 3yz)\overrightarrow{\mathbf{i}} + (3y^2 - 3xz)\overrightarrow{\mathbf{j}} + (3z^2 - 3xy)\overrightarrow{\mathbf{k}}.$

Câmpul de gradienţi are reprezentarea:



Direcţia vectorului $\operatorname{grad}\varphi$ este paralelă cu axa $Oz \Leftrightarrow$
$\begin{cases} 3x^2 - 3yz = 0 \\ 3y^2 - 3xz = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - yz = 0 \\ y^2 - xz = 0 \end{cases}$ —o curbă în spaţiu, obţinută ca intersecţia a două suprafeţe (cea albastră şi cea roşie).



Teorema 1.4. (reguli de calcul cu operatorul gradient).

Fie $\varphi_1, \varphi_2 : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}^1(D)$ şi fie $\alpha \in \mathbb{R}$. Atunci $\varphi_1 + \varphi_2, \alpha\varphi_1, \varphi_1\varphi_2$ admit gradient în orice punct $P \in D$ şi

$\operatorname{grad}(\varphi_1 + \varphi_2)(P) = \operatorname{grad}\varphi_1(P) + \operatorname{grad}\varphi_2(P)$

$\operatorname{grad}(\alpha\varphi_1)(P) = \alpha \operatorname{grad}\varphi_1(P)$

$\operatorname{grad}(\varphi_1\varphi_2)(P) = \varphi_2(P)(\operatorname{grad}\varphi_1(P)) + \varphi_1(P)(\operatorname{grad}\varphi_2(P))$.

Dacă $\varphi_2 \neq 0$ pe D, atunci $\dfrac{\varphi_1}{\varphi_2}$ admite gradient şi

$$\operatorname{grad}\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)(P) = \frac{1}{\varphi_2^2(P)}\left(\varphi_2(P)(\operatorname{grad}\varphi_1(P)) - \varphi_1(P)(\operatorname{grad}\varphi_2(P))\right)$$

Dacă $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f \in \mathcal{C}^1(A)$ atunci $\varphi_1 \circ f$ admite gradient şi

$\operatorname{grad}(f(\varphi_1))(P) = f'(\varphi_1(P)) \operatorname{grad}\varphi_1(P)$.

Definiţia 1.4. **a)** Notând cu Δ *operatorul Laplace de derivare parţială*

$$\boxed{\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},}$$

se numeşte *laplaceanul câmpului scalar* $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{C}^2(D)$ *în* $P_0 \in D$ numărul:

$$\boxed{\Delta\varphi(P_0) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(P_0) + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}(P_0) + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}(P_0).}$$

b) Un câmp scalar $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ se numeşte *funcţie armonică pe* D dacă $\Delta\varphi(P) = 0, \forall P \in D$.

Observaţia 1.6. Definiţiile şi teoremele se pot rescrie şi pentru câmpuri scalare plane

$\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, unde D este un domeniu din $\mathbb{R}^2$,

cu menţiunea că în loc de suprafeţe de nivel apar curbe de nivel, gradientul are direcţia normalei, ş.a.m.d.

A se vedea profesor Eugene Khutoryansky: "Gradients and Partial Derivatives"

https://www.youtube.com/watch?v=GkB4vW16QHI

a) Fie câmpul scalar $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \varphi(P) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2}$.

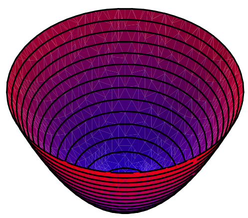
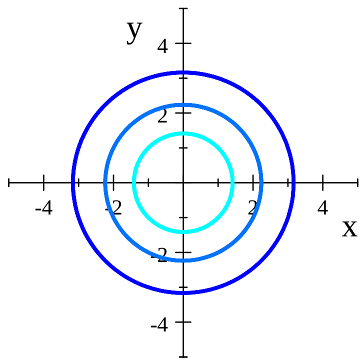
Curbele de nivel ce trec prin $P_1(1,1)$ şi $P_4(-1,1)$, $P_2(1,2)$ şi $P_5(-1,2)$, $P_3(1,3)$ şi $P_6(-1,3)$ sunt cercuri de ecuaţii:

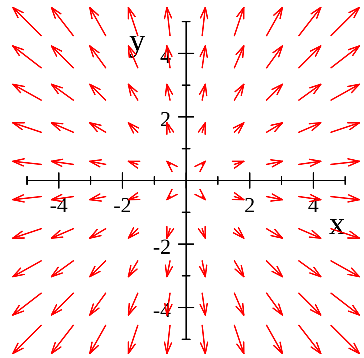
$\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2} = 1$ (bleu), $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2} = \frac{5}{2}$ (albastru deschis), $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2} = 5$ (albastru închis).

$\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$, cu $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y) = x$; $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y) = y$.

Conform (5) $\Rightarrow \operatorname{grad}\varphi(P) = \nabla\varphi(P) = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \overrightarrow{\mathbf{r}}(P)$.

Graficul, curbele de nivel şi câmpul de gradienţi (în general) au reprezentarea:



Curbele de nivel ale câmpului scalar sunt în nuanţe de albastru, de la deschis la închis reprezentând valori ale câmpului de la mic la mare, iar gradientul corespunzător este reprezentat de săgeţi roşii, care au orientarea spre creşterea câmpului.

b) Fie câmpul scalar $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \varphi(P) = -\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{y^2}{2}$.

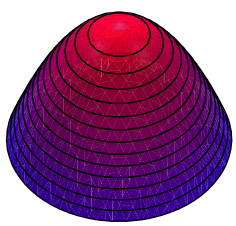
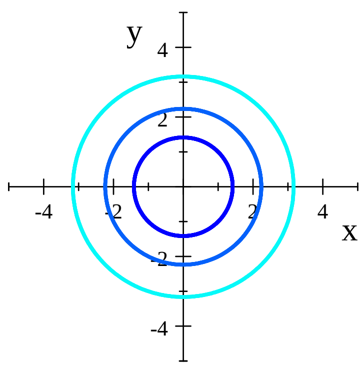
Liniile de nivel ce trec prin $P_1(1,1)$ şi $P_4(-1,1)$, $P_2(1,2)$ şi $P_5(-1,2)$, $P_3(1,3)$ şi $P_6(-1,3)$ sunt cercuri de ecuaţii:

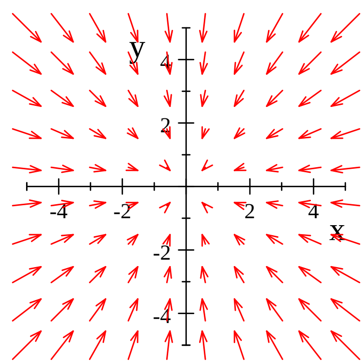
$-\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{y^2}{2} = -1$ (albastru închis), $-\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{y^2}{2} = -\frac{5}{2}$ (albastru deschis), $-\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{y^2}{2} = -5$ (bleu),

$\varphi \in \mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^2\right)$, cu $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y) = -x$; $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y) = -y$.

Conform (5) $\Rightarrow \operatorname{grad}\varphi(P) = \nabla\varphi(P) = -x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = -\overrightarrow{\mathbf{r}}(P)$.

Graficul, curbele de nivel şi câmpul de gradienţi (în general) au reprezentarea:



Curbele de nivel ale câmpului scalar (înălţimea dealului) sunt în nuanţe de albastru, de la deschis la închis reprezentând valori ale câmpului de la mic la mare, iar gradientul corespunzător este reprezentat de săgeţi roşii, care au orientarea spre creşterea câmpului.

c) Fie câmpul scalar $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \varphi(P) = xy$.

Curbele de nivel ce trec prin $P_1(1,1)$, $P_2(1,2)$, $P_3(1,3)$, $P_4(-1,1)$, $P_5(-1,2)$, $P_6(-1,3)$ sunt hiperbole echilatere de ecuaţii:

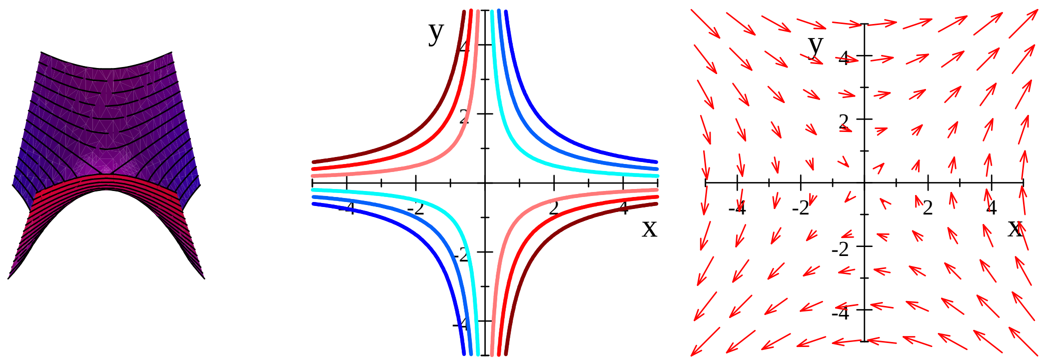
$xy = 1$ (bleu), $xy = 2$ (albastru deschis), $xy = 3$ (albastru închis),

$xy = -1$ (roşu închis), $xy = -2$ (roşu), $xy = -3$ (roz)

$\varphi \in \mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^2\right)$, cu $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y) = y$; $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y) = x$.

Conform (5) $\Rightarrow \operatorname{grad}\varphi(P) = \nabla\varphi(P) = y\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + x\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$.

Graficul, curbele de nivel şi câmpul de gradienţi (în general) au reprezentarea:



Curbele de nivel ale câmpului scalar sunt în nuanţe de albastru, de la deschis la închis reprezentând valori ale câmpului de la mic la mare şi în nuanţe de roşu, de la deschis la închis reprezentând valori de la mic la mare, iar gradientul corespunzător este reprezentat de săgeţi roşii, care au orientarea spre creşterea câmpului.

d) Fie un deal a cărui înălţime deasupra nivelului mării într-un punct $P(x, y)$ este $\varphi(P)$. De exemplu, $\varphi(P) = -\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{y^2}{2}$ de la b), cu graficul, curbele de nivel şi câmpul de gradienţi reprezentat anterior.

Gradientul lui φ într-un punct P_0 este un vector care arată direcţia în care panta este cea mai abruptă în acel punct. Cât de abruptă este panta în punctul respectiv este dat de norma vectorului gradient.

Gradientul poate fi folosit şi pentru a măsura cât se modifică un câmp scalar în alte direcţii, şi nu doar direcţia în care se schimbă cel mai mult, efectuând un produs scalar. Conform Observaţiei $5, c)$ şi Teoremei 2 $\Rightarrow$

$\dfrac{d\varphi}{d\overrightarrow{\mathbf{s}}}(P_0) = \operatorname{grad}\varphi(P_0) \cdot \overrightarrow{\mathbf{s}}$ şi $\dfrac{d\varphi}{d\overrightarrow{\mathbf{s}}}(P_0) = \dfrac{d\varphi}{d\overrightarrow{\mathbf{n}}}(P_0)\cos\theta$

Se presupune că cea mai abruptă pantă de pe dealul ales este 44%. Dacă un drum merge direct în sus pe acel deal, atunci cea mai abruptă pantă a drumului va fi chiar 44%, făcându-l greu de utilizat. Dacă drumul ocoleşte dealul în unghi cu direcţia vectorului gradient, atunci panta va fi mai mică. De exemplu, dacă unghiul dintre drum şi direcţia de pantă maximă, proiectată pe planul orizontal, este $60°$, atunci cea mai abruptă pantă pe drum va fi de $22\% = 44\% \cos 60°$. Asta deoarece gradientul funcţiei înălţime a dealului înmulţită scalar cu un vector unitate dă panta dealului în direcţia vectorului, adică derivata după direcţia lui $\overrightarrow{\mathbf{s}}$.