CURS NR. 10
Matematici Speciale, AIA

9.1. TRANSFORMATA FOURIER

În Teoria Semnalelor, transformata Fourier se utilizează pentru a modela ca reprezentare spectrală semnale aperiodice, iar seriile Fourier pentru cele periodice. A se vedea *Fourier Transform, Fourier Series and frequency spectrum*, de profesor Eugene Khutoryansky:

https://www.youtube.com/watch?v=r18Gi8lSkfM.

Separat se studiază cazul semnalelor digitale. În toate aceste situaţii se poate realiza şi operaţia inversă, de sinteză Fourier, adică de reconstrucţie a semnalului în timp din cunoaşterea componentelor lui spectrale. Dacă spectrul unui semnal periodic este discret, cu linii spectrale la frecvenţe $k\omega_0$ date de teoria seriilor Fourier, în schimb spectrul unui semnal nu neapărat periodic este continuu.

Ideea lui Fourier de a descompune unele entităţi din natură ca sumă / suprapunere de entităţi mai simple a condus ca, în matematică, unele ecuaţii diferenţiale ce le modelează să fie transformate în ecuaţii mai simple. S-a reuşit măsurarea lungimii de undă a luminii absorbite în diverse medii şi, cu ajutorul tehnologiilor informatice, s-a realizat compresia semnalelor şi imaginilor prin reducerea lor la şiruri de numere; acestea fiind regăsite în transmisiile fără fir, în studiul vibraţiilor, în muzica electronică etc. Transformata unui semnal nu este un alt semnal, ci o altă reprezentare, aptă de alte interpretări, fără pierdere de informaţie.

Definiţia 9.1.1. a) O funcţie $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (sau $g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$) se numeşte *funcţie absolut integrabilă pe* $\mathbb{R}$ sau *funcţie din* $L^1(\mathbb{R})$ dacă

$\exists \int_{\mathbb{R}} |g(t)|\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|\,dt < +\infty.$

b) O funcţie $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (sau $g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$) se numeşte *funcţie local integrabilă pe* $\mathbb{R}$ sau *funcţie din* $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ dacă este integrabilă pe orice interval compact din $\mathbb{R}$.

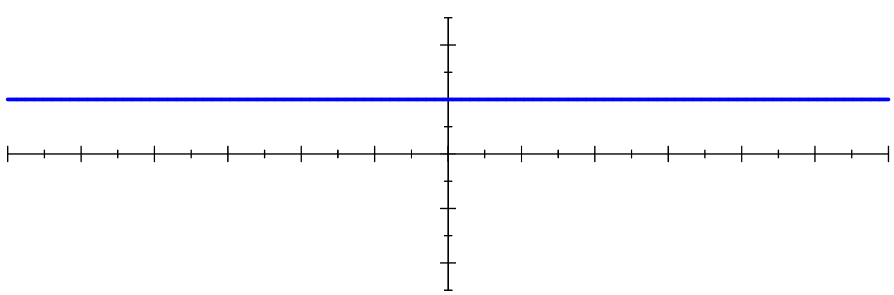
c) O funcţie $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (sau $g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$) se numeşte *funcţie integrabilă pe* $\mathbb{R}$ dacă

$\exists \int_{\mathbb{R}} g(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,dt$ finit în $\mathbb{R}$ (sau $\mathbb{C}$).

Observaţia 9.1.1. a) Dacă f este absolut integrabilă pe $\mathbb{R}$, atunci f este şi local integrabilă pe $\mathbb{R}$. Într-adevăr, dacă $g\in L^1(\mathbb{R})$ atunci, $\forall\,[a,b]$ interval mărginit din $\mathbb{R}$,

$\left|\int_a^b g(t)\,dt\right| \le \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|\,dt < +\infty.$

Reciproca nu este adevărată, există funcţii local integrabile pe $\mathbb{R}$ care nu sunt absolut integrabile pe $\mathbb{R}$. De exemplu, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(t)=23$ este din $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, dar nu este din $L^1(\mathbb{R})$.



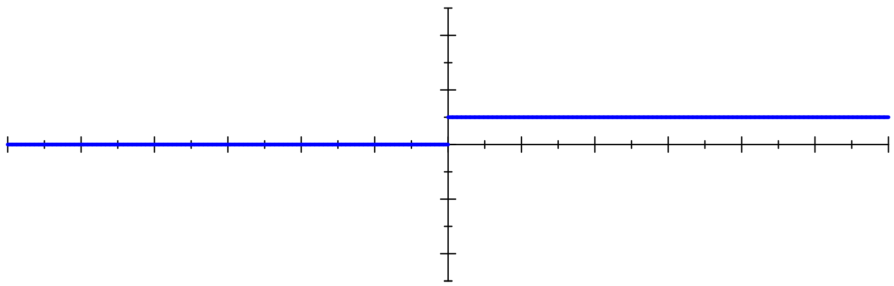
Se observă că f ia valori pozitive şi că, pe orice interval compact, există arie de subgrafic; dar pe $\mathbb{R}$, aria benzii orizontale situate sub grafic şi deasupra axei Ot este infinită.

b) Dacă f este absolut integrabilă pe $\mathbb{R}$, atunci f este şi integrabilă pe $\mathbb{R}$.

Reciproca nu este adevărată, există funcţii integrabile pe $\mathbb{R}$ care nu sunt absolut integrabile pe $\mathbb{R}$. De exemplu, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(t)=\dfrac{\sin t}{t}\cdot\eta(t)$, unde funcţia

$\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (sau $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$), $\eta(t) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } t < 0 \\ 1, & \text{dacă } t \geq 0. \end{cases}$

este f*uncţia treapta unitate* (*funcţia Heaviside*). În alte materiale pot apărea notaţii diverse, precum $H(t)$, $u(t)$, $\theta(t) -$ a se vedea https://mathworld.wolfram.com/HeavisideStepFunction.html sau Mary Attenborough, *Mathematics For Electrical Engineering And Computing.*

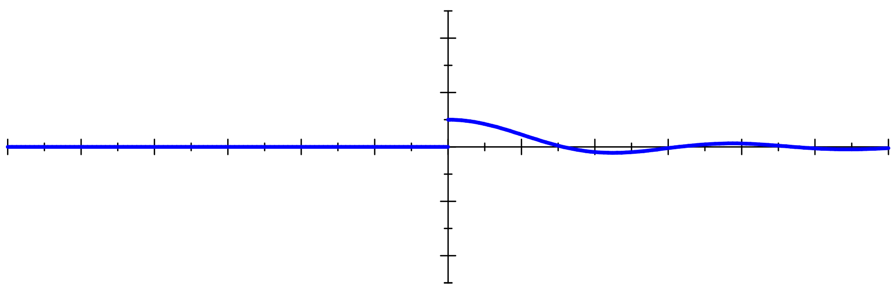


$\eta \in \mathcal{O}$ este funcţie original, cu abscisa de convergenţă $\sigma_\eta = 0$.

•g este integrabilă pe $\mathbb{R}$. Într–adevăr, s-a arătat la EDCO că

$\mathcal{L}\left\{\frac{\sin t}{t} \cdot \eta(t)\right\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} s \Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-0t} \frac{\sin t}{t} dt = F(0) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \exists \int_{\mathbb{R}} g(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, dt = \frac{\pi}{2} < +\infty.$



Se observă că pe $\mathbb{R}$, suma ariilor regiunilor situate sub grafic (cu $+$ unde graficul este deasupra axei) şi deasupra graficului (cu $-$ unde graficul este sub axă), limitate de Ot este finită pentru sinusul atenuat.

•g nu este absolut integrabilă pe $\mathbb{R}$. Într-adevăr,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt = \int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t} dt =$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{-\sin t}{t} dt + \int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin t}{t} dt + \int_{3\pi}^{4\pi} \frac{-\sin t}{t} dt + ... +$$

$$+ \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin t}{t} dt + \int_{(2k+1)\pi}^{(2k+2)\pi} \frac{-\sin t}{t} dt + ... \overset{formal}{\geq}$$

$$\geq \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{-\sin t}{\pi} dt + \int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin t}{2\pi} dt + \int_{3\pi}^{4\pi} \frac{-\sin t}{3\pi} dt + ... +$$

$$+ \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin t}{2k\pi} dt + \int_{(2k+1)\pi}^{(2k+2)\pi} \frac{-\sin t}{(2k+1)\pi} dt + ... \geq$$

$$\geq \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt + \frac{2}{\pi} + \frac{2}{2\pi} + \frac{2}{3\pi} + ... + \frac{2}{2k\pi} + \frac{2}{(2k+1)\pi} + ... \geq$$

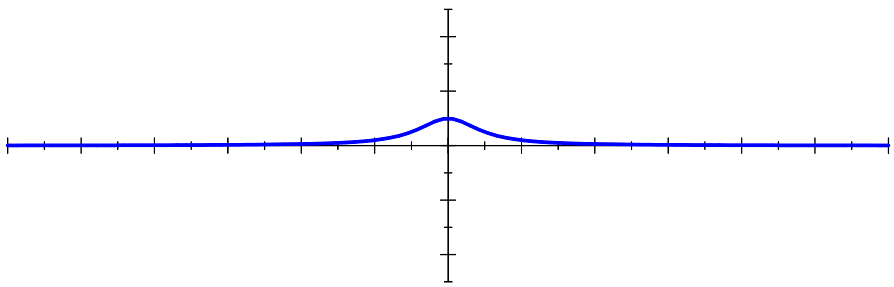
$$\geq \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt + \frac{2}{\pi}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2k}+...\right) = \underbrace{\int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt}_{\text{număr real}} + \frac{2}{\pi}\underbrace{\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2k}+...\right)}_{\infty,\text{ ca sumă a seriei } \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}} = \infty.$$

Se observă că pe $\mathbb{R}$, suma ariilor regiunilor situate sub grafic (cu + unde graficul este deasupra axei), limitate de Ot este infinită pentru modulul sinusului atenuat.

c) Definiţia este consistentă, adică există funcţii care sunt absolut integrabile pe $\mathbb{R}$.

De exemplu, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(t)=\dfrac{1}{t^2+1}$ este absolut integrabilă pe $\mathbb{R}$, $g\in L^1(\mathbb{R})$. Într-adevăr,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{1}{t^2+1}\right|dt \overset{\text{formal}}{=} \operatorname{arctg} t\Big|_{t\to-\infty}^{t\to\infty} = \frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi<+\infty.$$



(este aria subgraficului pentru $|g|$)

Definiţia 9.1.2. Fie $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (sau $g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$), $g\in L^1(\mathbb{R})$. Funcţia

$$\boxed{G:\mathbb{R}\to\mathbb{C}, G(\omega)=\int_{\mathbb{R}} g(t)\,e^{-\mathrm{j}\,\omega t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,e^{-\mathrm{j}\,\omega t}dt}$$

se numeşte *transformata Fourier a funcţiei g* sau *imaginea funcţiei g prin transformata Fourier* (sau *funcţie de densitate spectrală, spectru în frecvenţă, funcţie de distribuţie a frecvenţelor* cu notaţia $\widehat{g}(\omega)$) Se notează

$\boxed{G(\omega)=\mathcal{F}\{g(t)\}(\omega)}$ sau $\boxed{G(\omega)=\widehat{g}(\omega)\,.}$

Deoarece $e^{-\mathrm{j}\,\omega t}=\cos(\omega t)-\mathrm{j}\sin(\omega t)$, funcţiile

$$\boxed{G_c(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\cos(\omega t)\,dt=\operatorname{Re}G(\omega) \text{ şi } G_s(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\sin(\omega t)\,dt=-\operatorname{Im}G(\omega)}$$

se numesc *transformatele Fourier ale funcţiei g prin* cos, respectiv *prin* sin.

Teorema 9.1.1 (teorema fundamentală a transformatei Fourier). Dacă $g\in L^1(\mathbb{R})$ atunci integrala improprie pe interval nemărginit din Definiţie, cu parametrul $\omega\in\mathbb{R}$, este absolut convergentă şi uniform convergentă pe $\mathbb{R}$, adică transformata Fourier G este bine definită. Mai mult, este continuă şi mărginită pe $\mathbb{R}$, cu $\lim\limits_{|\omega|\to\infty} G(\omega)=0$.

Operatorul $\mathcal{F}:L^1(\mathbb{R})\to\mathcal{C}^0(\mathbb{R};\mathbb{C})$ se numeşte *operatorul Fourier (transformarea Fourier).*

Demonstraţie. Convergenţa se demonstrează utilizând Criteriul Comparaţiei cu Inegalităţi, iar continuitatea şi mărginirea utilizând proprietăţile integralei cu parametru.

Observaţia 9.1.2. Se menţionează că

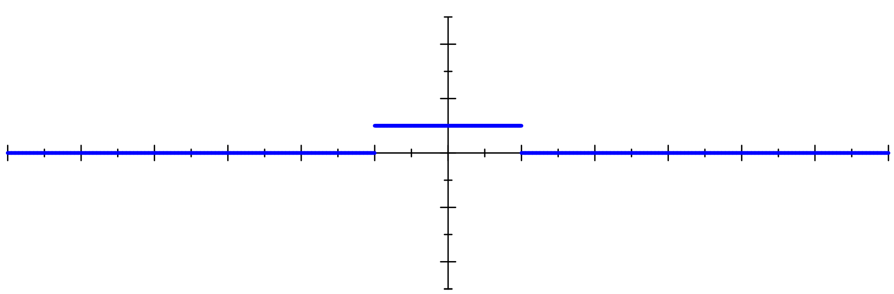
$$e^{-\mathrm{j}\,\omega t}=\cos(\omega t)-\mathrm{j}\sin(\omega t)=\overline{\cos(\omega t)+\mathrm{j}\sin(\omega t)}=\overline{e^{\mathrm{j}\,\omega t}}$$

şi că $e^{\mathrm{j}\,\omega t}$ este un semnal unitar, periodic, de perioadă principală $T=\frac{2\pi}{\omega}$ şi frecvenţă $\nu=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}$ (în ipoteza $\omega>0$ pentru modelare). Atunci:

$$G(\nu)=\int_{\mathbb{R}} g(t)\,e^{-2\pi\,\mathrm{j}\,\nu t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,e^{-2\pi\,\mathrm{j}\,\nu t}dt.$$

Observaţia 9.1.3. a) Transformata Fourier este o funcţie complexă. Conform teoremei de inversare dată ulterior, va permite un transfer bilateral de informaţie între domeniul "timp" şi domeniul "frecvenţă". Aşa cum o melodie (adică un şir de note muzicale) este transformată în unde electromagnetice, este transmisă cu viteza luminii şi ascultată apoi, prin recompunere.
b) Numărul complex $G(\omega)$ se poate scrie sub formă exponenţială:
$G(\omega) = A(\omega)\, e^{\mathrm{j}\,\Phi(\omega)}$,
unde $A(\omega) = |G(\omega)|$ este *amplitudinea în frecvenţă* a semnalului g şi $\Phi(\omega) = \arg G(\omega)$ este *faza în frecvenţă* a semnalului g. Mulţimea $\{(\omega, A(\omega)); \omega \in \mathbb{R}\}$ se numeşte *spectrul în amplitudine* (în frecvenţă) al semnalului g. ν se măsoară în Hz, ω în rad/s, iar A în decibeli.

Se mai spune că transformata Fourier $G(\omega)$ a răspunsului la impuls $g(t)$ al unui sistem se corelează cu *răspunsul în frecvenţă al sistemului.* Dependenţa magnitudinii $|G(\omega)|$ în funcţie de frecvenţă va fi *caracteristica de modul a sistemului.* Dependenţa fazei $\arg G(\omega)$ în funcţie de frecvenţă va fi *caracteristica de faze a sistemului.*
c) Se utilizează numere complexe pentru că oscilaţiile armonice au amplitudine şi frecvenţă (a se vedea Anexa 4 din Curs AM), deci o pereche de proprietăţi, pe care numerele complexe le pot încorpora împreună.
d) Funcţiile sinus, cosinus, exponenţială, treapta unitate, signum, constantele reale, polinoamele şi altele nu sunt în $L^1(\mathbb{R})$, deci nu admit transformată Fourier în sensul definiţiei date. Aceasta se va corecta utilizând *distribuţiile.*
e) Transformata Fourier a unui semnal g din $L^1(\mathbb{R})$ nu aparţine neapărat mulţimii $L^1(\mathbb{R})$, cum se observă din exemplul 2c) următor. Deci operatorul Fourier $\mathcal{F}$ nu este un operator al spaţiului $L^1(\mathbb{R})$.
f) Dacă g este original Laplace din $L^1(\mathbb{R})$ atunci transformata Fourier coincide cu transformata Laplace în $s = \mathrm{j}\,\omega$:
$\boxed{\mathcal{F}\{f(t)\}(\omega) = \mathcal{L}\{f(t)\}(\mathrm{j}\,\omega).}$
Exemplul 9.1.1. Utilizând definiţia, să se determine transformata Fourier pentru:
$g_\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g_\tau(t) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } |t| \le \tau \\ 0, & \text{dacă } |t| > \tau, \end{cases}$,unde $\tau > 0$.
(*semnalul rectangular, fereastra dreptunghiulară, poarta temporală*)



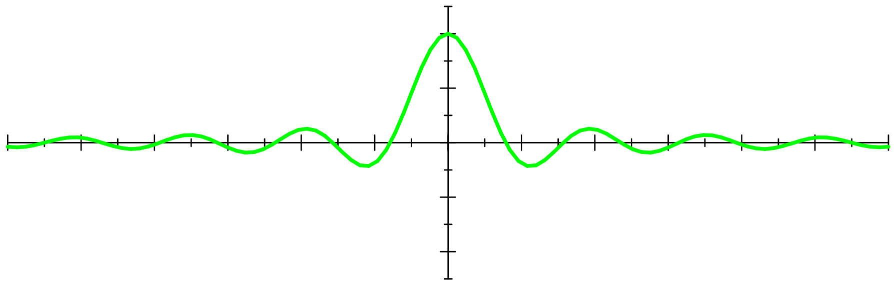
Rezolvare. Fie $g_\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g_\tau(t) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } t \in [-\tau, \tau] \\ 0, & \text{dacă } t \in]-\infty, -\tau[\cup]\tau, +\infty[\end{cases}$.
•Se observă că $g_\tau \in L^1(\mathbb{R})$, deoarece
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g_\tau(t)|\, dt \overset{(C)}{=} \int_{-\infty}^{-\tau} |0|\, dt + \int_{-\tau}^{\tau} |1|\, dt + \int_{\tau}^{+\infty} |0|\, dt = 2\tau < +\infty.$$
(este aria subgraficului pentru $|g_\tau|$)
•Se calculează
$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_\tau(t)\, e^{-\mathrm{j}\,\omega t} dt = \int_{-\infty}^{-\tau} 0 e^{-\mathrm{j}\,\omega t} dt + \int_{-\tau}^{\tau} 1 e^{-\mathrm{j}\,\omega t} dt + \int_{\tau}^{+\infty} 0 e^{-\mathrm{j}\,\omega t} dt =$$

$$\underset{\text{de integrare}}{\overset{t \text{ este variabilă}}{=}} 0+\left.\frac{e^{-\mathrm{j}\,\omega t}}{-\mathrm{j}\,\omega}\right|_{t=-\tau}^{t=\tau}+0=\frac{e^{-\mathrm{j}\,\omega\tau}-e^{-\mathrm{j}\,\omega\tau}}{-\mathrm{j}\,\omega}=\frac{2}{\omega}\sin(\omega\tau)=2\tau\cdot\frac{\sin(\omega\tau)}{\omega\tau}.$$

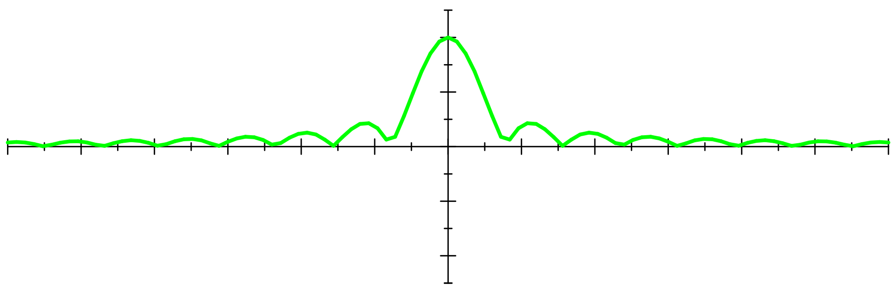
Deci $G:\mathbb{R}\to\mathbb{C}, G(\omega)=2\tau\cdot\dfrac{\sin(\omega\tau)}{\omega\tau}$ sau $\mathcal{F}\{g_\tau(t)\}(\omega)=2\tau\cdot\dfrac{\sin(\omega\tau)}{\omega\tau}+0\,\mathrm{j}$.

Deoarece semnalul rectangular g este un semnal real şi par (grafic simetric faţă de axa verticală), atunci spectrul G este real şi par

Mai mult, pentru această transformată, care are ca valoare un număr real, se poate reprezenta graficul ei (*anvelopa*)



iar *amplitudinea în frecvenţă* este $A(\omega)=|G(\omega)|=\sqrt{\left(\dfrac{2}{\omega}\sin(\omega\tau)\right)^2+(0)^2}=2\left|\frac{\sin(\omega\tau)}{\omega}\right|$ cu reprezentarea



Comentariu. În limbaj spaţial, fie semnalul rectangular de înălţime $A>0$ şi lungime $l>0$

$$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(t)=\begin{cases}A, & \text{dacă } t\in[-l,l]\\ 0, & \text{dacă } t\in\,]-\infty,-l[\,\cup\,]l,+\infty[\end{cases}.$$

•Se observă că $g\in L^1(\mathbb{R})$, deoarece

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|g(t)|\,dt\overset{(C)}{=}\int_{-\infty}^{-l}|0|\,dt+\int_{-l}^{l}|A|\,dt+\int_{l}^{+\infty}|0|\,dt=2l<+\infty.$$

•Se calculează

$$G(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(t)\,e^{-\mathrm{j}\,\omega t}dt\overset{(C)}{=}\int_{-\infty}^{-l}0e^{-\mathrm{j}\,\omega t}dt+\int_{-l}^{l}Ae^{-\mathrm{j}\,\omega t}dt+\int_{l}^{+\infty}0e^{-\mathrm{j}\,\omega t}dt=$$

$$\underset{\text{de integrare}}{\overset{t \text{ este variabilă}}{=}} 0+A\left.\frac{e^{-\mathrm{j}\,\omega t}}{-\mathrm{j}\,\omega}\right|_{t=-l}^{t=l}+0=A\frac{e^{-\mathrm{j}\,\omega l}-e^{-\mathrm{j}\,\omega(-l)}}{-\mathrm{j}\,\omega}=\frac{2A}{\omega}\sin(\omega l)=2Al\frac{\sin(\omega l)}{\omega l}.$$

Deci $G:\mathbb{R}\to\mathbb{C}, G(\omega)=2Al\dfrac{\sin(\omega l)}{\omega l}$ sau $\mathcal{F}\{g(t)\}(\omega)=2Al\dfrac{\sin(\omega l)}{\omega l}$.

Se mai scrie $G(\omega)=2Al\,\mathrm{sa}(\omega l)$, unde funcţia *sinus atenuat* este $\mathrm{sa}(u)=\dfrac{\sin u}{u}$.

Comentariu: Se va arăta că

- dacă $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g\in L^1(\mathbb{R})$ este un semnal real aleator, atunci partea reală a spectrului $\mathrm{Re}\,G$ şi modulul spectrului $A(\omega)=|G(\omega)|$ sunt funcţii pare, iar partea imaginară a spectrului $\mathrm{Im}\,G$ şi faza spectrului $\Phi(\omega)=\arg G(\omega)$ sunt funcţii impare;

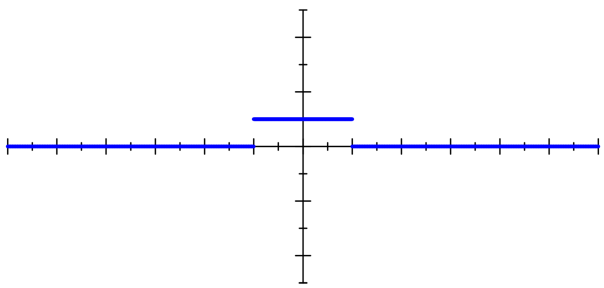
- dacă $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g \in L^1(\mathbb{R})$ este un semnal real şi par, atunci spectrul G este real şi par, unde $\operatorname{Re} G = G_c(\omega)$

- dacă $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g \in L^1(\mathbb{R})$ este un semnal real şi impar, atunci spectrul G este pur imaginar şi $\operatorname{Im} G$ este impar, unde $-\operatorname{Im} G = G_s(\omega)$.

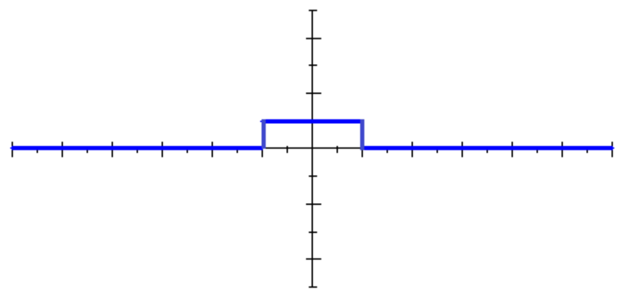
Observaţia 9.1.4. Fie semnalul rectangular

$$g_\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g_\tau(t) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } |t| \le \tau \\ 0, & \text{dacă } |t| > \tau, \end{cases} \text{,unde } \tau = T_1 > 0.$$

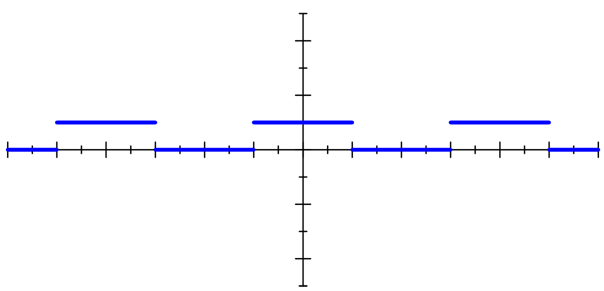
În teoria semnalelor, semnalul rectangular aperiodic apare reprezentat



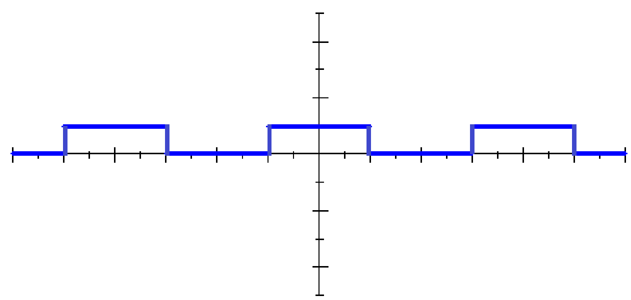
sau



şi se studiază cu transformata Fourier, unde $G(\omega) = \dfrac{2}{\omega}\sin(\omega T_1)$, în timp ce semnalul rectangular periodic corespunzător $\widetilde{g}(t) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} g(t - kT)$ apare reprezentat

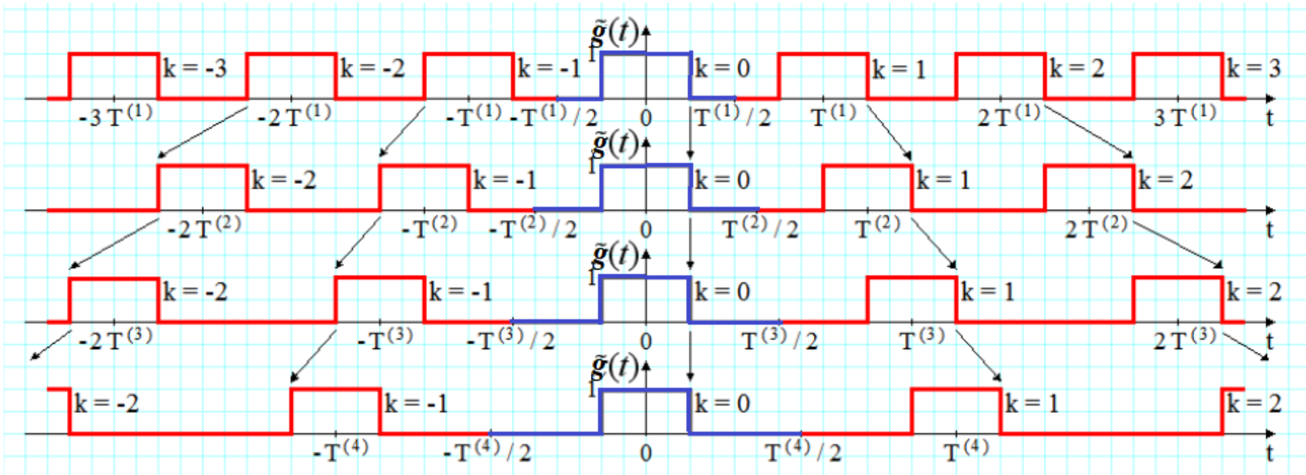


sau



şi se studiază cu serii Fourier, unde $T \cdot c_k = \begin{cases} \frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0}, & k \ne 0 \\ 2T_1, & k = 0 \end{cases}$.

Creşterea perioadei T face ca semnalul periodic să se apropie de cel aperiodic ($T \to \infty \Rightarrow \widetilde{g}(t) \dashrightarrow g(t)$).



De menţionat o teoremă de la calculul de integrale reale cu reziduuri, rescrisă:

T 1. Fie $\mathcal{I}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(t)}{Q(t)}e^{-\mathrm{j}\omega t}dt,\ a=-\omega>0$, unde
$P,Q\in\mathbb{R}[t]\,,\operatorname{grad}Q\geq\operatorname{grad}P+1, Q(t)\neq 0,\forall t\in\mathbb{R}$. Atunci:

$$\mathcal{I}=2\pi\mathrm{j}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{rez}f(z_k)\,,\ \text{unde } f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}e^{-\mathrm{j}\omega z},\ \text{iar } z_k \text{ sunt acei poli cu } \operatorname{Im}z_k>0.$$

Exemplul 9.1.2. Să se determine transformata Fourier pentru:

a) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(t)=e^{-a|t|}$, unde $a>0$ (*semnalul simetric exponenţial căzător,* cu $a=\omega_0$);

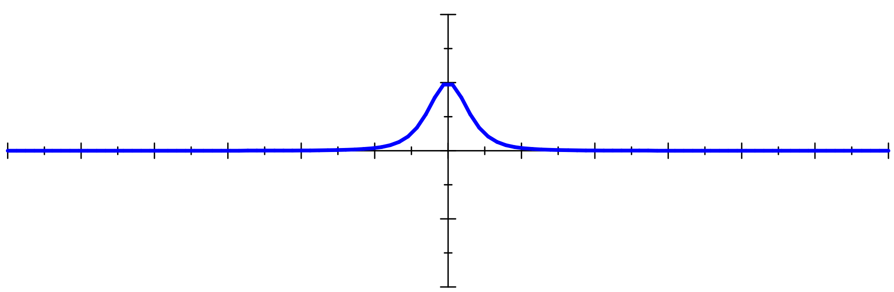
b) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(t)=e^{-a^2t^2}$, unde $a>0$ (*semnalul Gaussian*);

c) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(t)=\begin{cases}0, & \text{dacă } t<0\\ e^{-t}, & \text{dacă } t\geq 0,\end{cases}$; **d)** $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(t)=\begin{cases}0, & \text{dacă } t<0\\ e^{-3t}, & \text{dacă } t\geq 0,\end{cases}$

şi, în general, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(t)=\begin{cases}0, & \text{dacă } t<0\\ e^{-at}, & \text{dacă } t\geq 0,\end{cases}$ unde $a>0$ (interpretat ca produs între exponenţială şi treapta unitate, *semnalul exponenţial căzător,* cu $a=\omega_0$).

e) şi transformata Fourier prin cos pentru:

$$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(t)=\frac{1}{(t^2+1)^2}.$$



Rezolvare. a), b), c), d) A se vedea Seminar.

e) •Se observă că $g\in L^1(\mathbb{R})\,,$ deoarece

<u>modul 1.</u> Calcul direct:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|g(t)|\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(t^2+1)^2}dt=?$$

$$\int\frac{1}{(t^2+1)^2}dt=\int\frac{1+t^2-t^2}{(t^2+1)^2}dt=\int\frac{1}{t^2+1}dt-\int\frac{t^2}{(t^2+1)^2}dt=\int\frac{1}{t^2+1}dt+\frac{1}{2}\int t\cdot\frac{-2t}{(t^2+1)^2}dt=$$

$$= \int \frac{1}{t^2+1}dt + \tfrac{1}{2}\int t\cdot\left(\frac{1}{t^2+1}\right)' dt = \int \frac{1}{t^2+1}dt + \tfrac{1}{2}\left(t\cdot\frac{1}{t^2+1} - \int 1\cdot\frac{1}{t^2+1}dt\right) =$$

$$= \tfrac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+1}dt + \tfrac{1}{2}\frac{t}{t^2+1} = \tfrac{1}{2}\operatorname{arctg} t + \tfrac{1}{2}\frac{t}{t^2+1} + c$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t^2+1)^2}dt \overset{(C)}{=} \left(\tfrac{1}{2}\operatorname{arctg} t + \tfrac{1}{2}\frac{t}{t^2+1}\right)\Big|_{t\to-\infty}^{t\to\infty} = \tfrac{\pi}{2} < +\infty.$$

<u>modul 2.</u> Criteriul comparaţiei cu inegalităţi pentru (C) :

$$\left.\begin{array}{l} 0 \le |g(t)| = \dfrac{1}{t^2+1}\cdot\dfrac{1}{t^2+1} \le \dfrac{1}{t^2+1}, \forall t\in\mathbb{R} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2+1}dt \overset{(C)}{=} (\operatorname{arctg} t)|_{t\to-\infty}^{t\to\infty} = \pi - (C) \end{array}\right\} \overset{\text{Criteriul comparaţiei}}{\Rightarrow} \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|\,dt - (C).$$

•Se calculează

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,e^{-\mathrm{j}\,\omega t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t^2+1)^2}e^{-\mathrm{j}\,\omega t}dt \underset{\text{de integrare}}{\overset{t \text{ este variabilă}}{=}} ?$$

Nu se poate calcula elementar, cu primitive.

••Se poate calcula, folosind $T1$, doar pentru $a = -\omega > 0$, adică $\omega < 0$,

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t^2+1)^2}e^{-\mathrm{j}\,\omega t}dt = \mathcal{I}.$$

Aici $P(t) = 1; Q(t) = (t^2+1)^2$; $\operatorname{grad} Q \ge \operatorname{grad} P + 1, Q(t) \ne 0, \forall t\in\mathbb{R}$.

Fie $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)^2}e^{-\mathrm{j}\,\omega z}$.

$(z^2+1)^2 = 0 \Rightarrow z = \pm\mathrm{j}$ sunt poli de ordin 2 pentru f, cu $\operatorname{Im}(+\mathrm{j}) = 1 > 0$.

Atunci, pentru $\omega < 0$,

$$G(\omega) = \mathcal{I} \overset{T1}{=} 2\pi\,\mathrm{j}\operatorname{rez} f(\mathrm{j}) \underset{\text{conform 2}}{\overset{0+\mathrm{j}\ \text{e pol de ordin 2}}{=}}$$

$$= 2\pi\,\mathrm{j}\,\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to0+\mathrm{j}}\left(\left((z-\mathrm{j})^2\frac{1}{(z-\mathrm{j})^2(z+\mathrm{j})^2}e^{-\mathrm{j}\,\omega z}\right)^{(2-1)_z}\right) =$$

$$= 2\pi\,\mathrm{j}\lim_{z\to0+\mathrm{j}}\left(\left(\frac{1}{(z+\mathrm{j})^2}e^{-\mathrm{j}\,\omega z}\right)'_z\right) = 2\pi\,\mathrm{j}\lim_{z\to0+\mathrm{j}}\frac{e^{-\mathrm{j}\,\omega z}\cdot(-\mathrm{j}\,\omega)(z+\mathrm{j})^2 - e^{-\mathrm{j}\,\omega z}\cdot 2(z+\mathrm{j})}{(z+\mathrm{j})^4} =$$

$$= 2\pi\,\mathrm{j}\lim_{z\to0+\mathrm{j}}\frac{e^{-\mathrm{j}\,\omega z}\cdot(-\mathrm{j}\,\omega(z+\mathrm{j}) - 2)}{(z+\mathrm{j})^3} = 2\pi\,\mathrm{j}\,\frac{e^{-\mathrm{j}\,\omega\,\mathrm{j}}\cdot(-\mathrm{j}\,\omega(\mathrm{j}+\mathrm{j}) - 2)}{(\mathrm{j}+\mathrm{j})^3} = 2\pi\,\mathrm{j}\,\frac{e^{\omega}\cdot(2\omega-2)}{2\,\mathrm{j}\cdot(-4)} =$$

$$= \frac{\pi e^{\omega}\cdot(-\omega+1)}{2} + 0\,\mathrm{j}, \omega < 0.$$

•• Deoarece g este semnal real şi par, din grafic (grafic simetric faţă de axa verticală) sau din

$$g(-t) = \frac{1}{\left((-t)^2+1\right)^2} = g(-t), \forall t\in\mathbb{R},$$

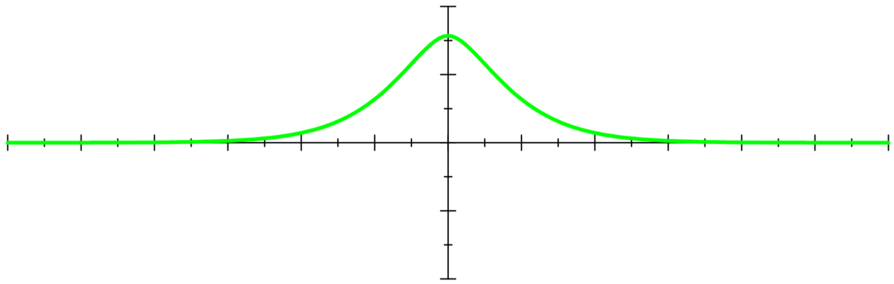
conform Observaţiei 9.1.5 ulterioare, rezultă că G este spectru real şi par.

Atunci, pentru $\omega > 0$,

$$G(\omega) \underset{G\ \text{pară}}{\overset{\text{Obs. 9.1.5}}{=}} G(-\omega) \overset{-\omega<0}{=} \frac{\pi e^{-\omega}\cdot(+\omega+1)}{2}, \omega > 0.$$

•• În plus, $G(0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(t^2+1)^2}dt = \tfrac{1}{2}\pi$.

$$\text{Deci } G(\omega) = \begin{cases} \dfrac{\pi e^{\omega}\cdot(-\omega+1)}{2} + 0\,\mathrm{j}, & \omega < 0 \\ \tfrac{1}{2}\pi + 0\,\mathrm{j}, & \omega = 0 \\ \dfrac{\pi e^{-\omega}\cdot(\omega+1)}{2} + 0\,\mathrm{j}, & \omega > 0 \end{cases}.$$



•Se calculează transformata Fourier prin cos

$G_c:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, G_c(\omega)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(t^2+1)^2}\cos(\omega t)\,dt,$

folosind transformata Fourier G şi $e^{-\mathrm{j}\,\omega t}=\cos(\omega t)-\mathrm{j}\sin(\omega t)$, deci:

$G:\mathbb{R}\to\mathbb{C}, G(\omega)=G_c(\omega)-\mathrm{j}\,G_s(\omega)$

$$\Rightarrow G_c(\omega)=\operatorname{Re}(G(\omega))=\begin{cases}\dfrac{\pi e^{\omega}\cdot(-\omega+1)}{2}, & \omega<0\\ \frac{1}{2}\pi, & \omega=0\\ \dfrac{\pi e^{-\omega}\cdot(\omega+1)}{2}, & \omega>0\end{cases}.$$

Teorema 9.1.2 (de liniaritate). Operatorul Fourier este liniar, adică $\forall g,h\in L^1(\mathbb{R}),\forall\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ are loc

$\boxed{\mathcal{F}\{\alpha g(t)+\beta h(t)\}(\omega)=\alpha\mathcal{F}\{g(t)\}(\omega)+\beta\mathcal{F}\{h(t)\}(\omega),\forall\omega\in\mathbb{R}}$

Teorema 9.1.3 (spectrul semnalului conjugat). Dacă $g\in L^1(\mathbb{R})$ cu $G(\omega)=\mathcal{F}\{g(t)\}(\omega)$, atunci

$\boxed{\mathcal{F}\{\overline{g}(t)\}(\omega)=\overline{G}(-\omega),\forall\omega\in\mathbb{R}}$

(spectrul conjugatului este simetricul conjugatului spectrului)

Demonstraţie. $\forall\omega\in\mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}\{\overline{g}(t)\}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{g}(t)\,e^{-\mathrm{j}\,\omega t}dt=\overline{\int_{-\infty}^{+\infty}g(t)\,e^{\mathrm{j}\,\omega t}dt}=\overline{G}(-\omega).$$

Teorema 9.1.4 (spectrul semnalului simetric, reflectarea în timp). Dacă $g\in L^1(\mathbb{R})$ cu $G(\omega)=\mathcal{F}\{g(t)\}(\omega)$, atunci

$\boxed{\mathcal{F}\{g(-t)\}(\omega)=G(-\omega),\forall\omega\in\mathbb{R}}$

(spectrul simetricului este simetricul spectrului)

Demonstraţie. $\forall\omega\in\mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}\{g(-t)\}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(-t)\,e^{-\mathrm{j}\,\omega t}dt\overset{t=-s}{=}\int_{-\infty}^{+\infty}g(s)\,e^{\mathrm{j}\,\omega s}ds=\int_{-\infty}^{+\infty}g(s)\,e^{\mathrm{j}\,\omega t}dt=G(-\omega).$$

Observaţia 9.1.5. a) Din Teorema de liniaritate şi Teoremele 9.1.3 şi 9.1.4 se observă că:

<u>Dacă $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g\in L^1(\mathbb{R})$ este un semnal real şi par, atunci spectrul G este real şi par.</u>

Într-adevăr, $\overline{g}(t)=g(t)=g(-t)\Rightarrow\overline{G}(-\omega)=G(\omega)=G(-\omega)$.

<u>Dacă $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g\in L^1(\mathbb{R})$ este un semnal real şi impar, atunci spectrul G este pur imaginar şi impar.</u>

Într-adevăr, $\overline{g}(t)=g(t)=-g(-t)\Rightarrow\overline{G}(-\omega)=G(\omega)=-G(-\omega)$.

b) Dacă $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g\in L^1(\mathbb{R})$, atunci

$G_c(\omega)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}g(t)\cos(\omega t)\,dt\in\mathbb{R}$ şi $G_s(\omega)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}g(t)\sin(\omega t)\,dt\in\mathbb{R}$

definesc $G(\omega)=G_c(\omega)-\mathrm{j}\,G_s(\omega)\Rightarrow G(-\omega)=G_c(\omega)+\mathrm{j}\,G_s(\omega)=\overline{G}(\omega)$,

deci frecvenţele negative dau o informaţie redundantă şi de aceea sunt fizic ignorate.

c) Dacă $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g\in L^1(\mathbb{R})$, atunci partea reală şi modulul spectrului sunt funcţii pare, iar partea imaginară şi faza spectrului sunt funcţii impare.

Într-adevăr, fie $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g\in L^1(\mathbb{R})$, cu
$G(\omega)=\mathrm{Re}(G(\omega))+\mathrm{j}\,\mathrm{Im}(G(\omega))$ sau
$G(\omega)=A(\omega)\cdot e^{\mathrm{j}\,\Phi(\omega)}$, unde $A(\omega)=|G(\omega)|$, $\Phi(\omega)=\arg G(\omega)$.
Atunci $\overline{g}(t)=g(t)\Rightarrow \overline{G}(-\omega)=G(\omega)\Leftrightarrow$

$$\bullet\ \mathrm{Re}(G(-\omega))-\mathrm{j}\,\mathrm{Im}(G(-\omega))=\mathrm{Re}(G(\omega))+\mathrm{j}\,\mathrm{Im}(G(\omega))\Longleftrightarrow\begin{cases}\mathrm{Re}(G(-\omega))=\mathrm{Re}(G(\omega))\\ -\mathrm{Im}(G(-\omega))=\mathrm{Im}(G(\omega))\end{cases}$$

$$\bullet\ \overline{A(-\omega)\cdot e^{\mathrm{j}\,\Phi(-\omega)}}=A(\omega)\,e^{\mathrm{j}\,\Phi(\omega)}\Leftrightarrow A(-\omega)\cdot e^{-\mathrm{j}\,\Phi(-\omega)}=A(\omega)\,e^{\mathrm{j}\,\Phi(\omega)}\Leftrightarrow\begin{cases}A(-\omega)=A(\omega)\\ -\Phi(-\omega)=\Phi(\omega)\end{cases}$$

Teorema 9.1.5 (**a asemănării, comportarea la omotetie, scalarea variabilei timp**). Fie $g\in L^1(\mathbb{R})$ cu $G(\omega)=\mathcal{F}\{g(t)\}(\omega)$. Atunci, $\forall\alpha\in\mathbb{R},\alpha>0$.

$$\boxed{\mathcal{F}\{g(\alpha t)\}(\omega)=\frac{1}{\alpha}G\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)\overset{\text{pentru }\alpha\in\mathbb{R}^*}{=}\frac{1}{|\alpha|}G\left(\frac{\omega}{\alpha}\right),\forall\omega\in\mathbb{R}.}$$

Demonstraţie. $\forall\omega\in\mathbb{R},\alpha>0$,

$$\mathcal{F}\{g(\alpha t)\}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(\alpha t)\,e^{-\mathrm{j}\,\omega t}dt\overset{\alpha t=s}{=}\int_{-\infty}^{+\infty}g(s)\,e^{-\mathrm{j}\,\frac{\omega}{\alpha}s}\tfrac{1}{\alpha}ds=\tfrac{1}{\alpha}G\left(\frac{\omega}{\alpha}\right).$$

Observaţia 9.1.6. Rezolvarea Exerciţiului $1,d)$ se putea face folosind Teorema 2 şi rezultatul de la $1,c)$:

$$\mathcal{F}\{g(t)\}(\omega)\overset{1,c)}{=}\frac{1-\mathrm{j}\,\omega}{1^2+\omega^2}\Rightarrow$$

$$\mathcal{F}\{g_d(t)\}(\omega)=\mathcal{F}\{g(3t)\}(\omega)=\frac{1}{|3|}G\left(\frac{\omega}{3}\right)=\frac{1-\mathrm{j}\,\frac{\omega}{3}}{1^2+\left(\frac{\omega}{3}\right)^2}=\frac{3-\mathrm{j}\,\omega}{3^2+\omega^2}.$$

Exemplul 9.1.3. Utilizând Teorema de scalare a timpului, să se determine transformata Fourier pentru $g_\tau(2t)$ şi $g_\tau\left(\frac{1}{2}t\right)$, unde g_τ este semnalul rectangular

$$g_\tau:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g_\tau(t)=\begin{cases}1, & \text{dacă } |t|\le\tau\\ 0, & \text{dacă } |t|>\tau,\end{cases}\ ,\ \tau>0.$$

Rezolvare. Se observă că

$$g_\tau:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g_\tau(2t)=\begin{cases}1, & \text{dacă } |2t|\le\tau\\ 0, & \text{dacă } |2t|>\tau\end{cases}=g_{\frac{\tau}{2}}(t);$$

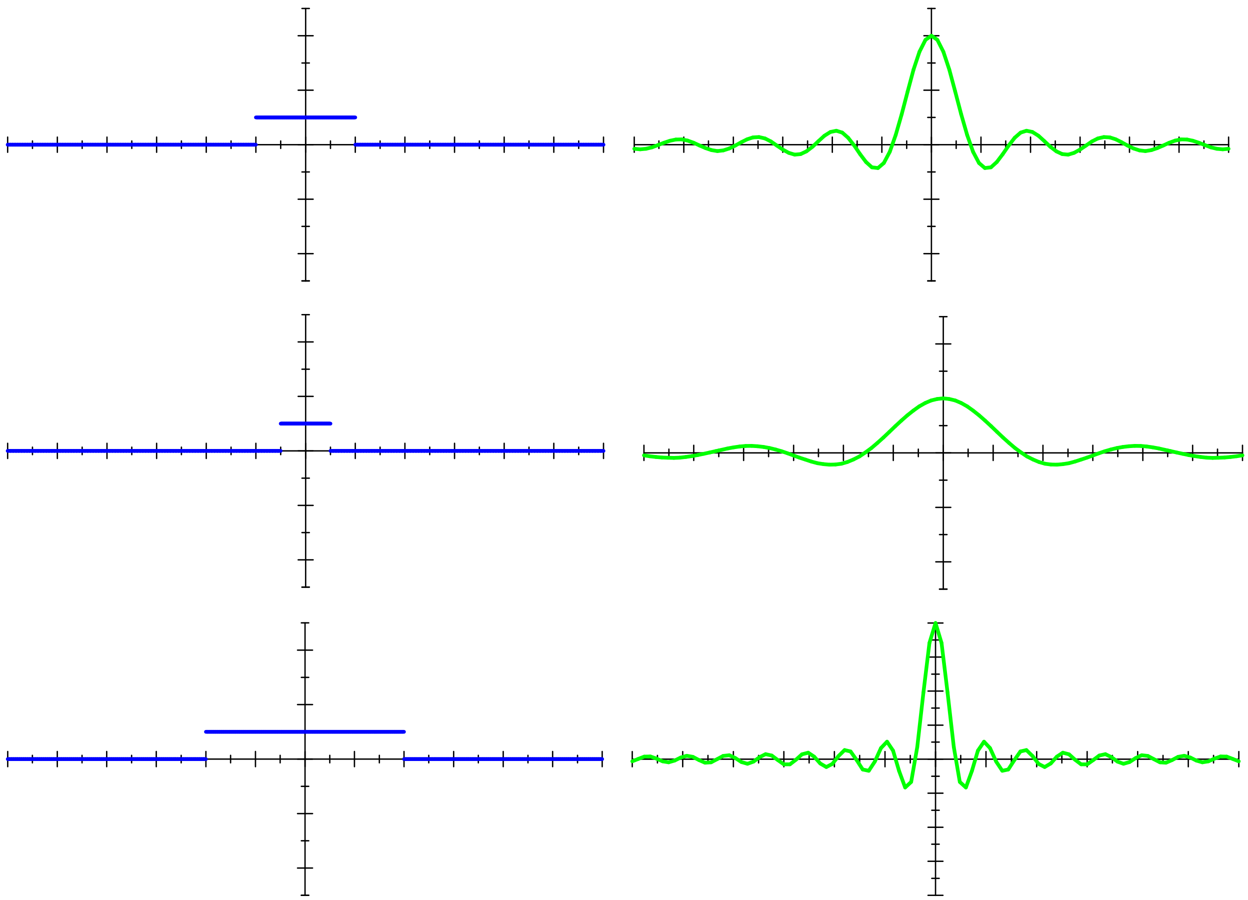
$$g_\tau:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g_\tau\left(\tfrac{1}{2}t\right)=\begin{cases}1, & \text{dacă } \left|\frac{1}{2}t\right|\le\tau\\ 0, & \text{dacă } \left|\frac{1}{2}t\right|>\tau\end{cases}=g_{2\tau}(t).$$

S-a arătat, în Exemplul 9.1.1 că $\mathcal{F}\{g_\tau(t)\}(\omega)=2\dfrac{\sin(\omega\tau)}{\omega}$.

Atunci, conform Teoremei de scalare a timpului,

$$\mathcal{F}\{g_\tau(2t)\}(\omega)=\frac{1}{2}2\frac{\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\frac{\omega}{2}}=2\frac{\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\omega}$$ (comprimarea în timp$\Rightarrow$expandare în frecvenţă) şi

$$\mathcal{F}\left\{g_\tau\left(\tfrac{1}{2}t\right)\right\}(\omega)=2\cdot 2\frac{\sin(2\omega\tau)}{2\omega}=2\frac{\sin(2\omega\tau)}{\omega}$$ (expandare în timp$\Rightarrow$comprimare în frecvenţă).



Teorema 9.1.6 (**a întârzierii-deplasării în timp, comportarea la translaţie**). Fie $g \in L^1(\mathbb{R})$ cu $G(\omega) = \mathcal{F}\{g(t)\}(\omega)$. Atunci, $\forall t_0 \in \mathbb{R}, t_0 > 0$,

$$\boxed{\mathcal{F}\{g(t-t_0)\}(\omega) = e^{-\mathrm{j}\, t_0 \omega} G(\omega).}$$

(întârzierea-deplasarea în timp a unui semnal cu $t_0 \Rightarrow$multiplicarea spectrului cu $e^{-\mathrm{j}\, t_0 \omega}$)

Demonstraţie. $\forall \omega \in \mathbb{R}, \forall t_0 \in \mathbb{R}, t_0 > 0$,

$$\mathcal{F}\{g(t-t_0)\}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-t_0)\, e^{-\mathrm{j}\,\omega t} dt \overset{t-t_0=s}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} g(s)\, e^{-\mathrm{j}\,\omega(s+t_0)} ds = e^{-\mathrm{j}\, t_0 \omega} G(\omega).$$

Teorema 9.1.7. (**a întârzierii-deplasării în frecvenţă, comportarea la modulaţie**). Fie $g \in L^1(\mathbb{R})$ cu $G(\omega) = \mathcal{F}\{g(t)\}(\omega)$. Atunci, $\forall \omega_0 \in \mathbb{R}, \omega_0 > 0$,

$$\boxed{\mathcal{F}\left\{e^{\mathrm{j}\,\omega_0 t} g(t)\right\}(\omega) = G(\omega - \omega_0).}$$

(modulare în timp-multiplicare a unui semnal cu o armonică $e^{\mathrm{j}\,\omega_0 t} \Rightarrow$întârziere cu ω_0- deplasare în frecvenţă)

Demonstraţie. $\forall \omega \in \mathbb{R}, \forall \omega_0 \in \mathbb{R}, \omega_0 > 0$,

$$\mathcal{F}\left\{e^{\mathrm{j}\,\omega_0 t} g(t)\right\}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\mathrm{j}\,\omega_0 t} g(t)\, e^{-\mathrm{j}\,\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, e^{-\mathrm{j}(\omega-\omega_0)t} dt = G(\omega - \omega_0).$$

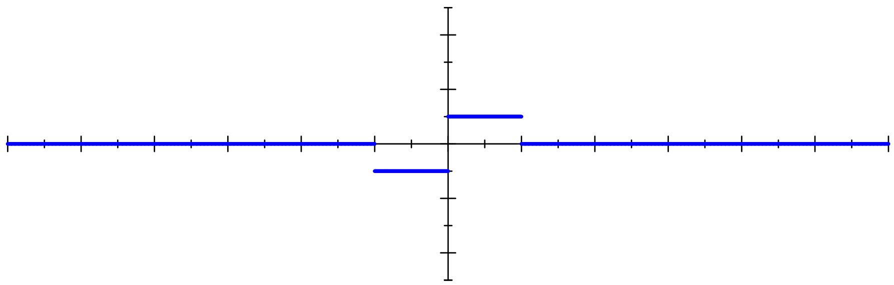
Exemplul 9.1.4. Să se determine transformata Fourier pentru:

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(t) = g_{\frac{\tau}{2}}\left(t - \frac{\tau}{2}\right) - g_{\frac{\tau}{2}}\left(t + \frac{\tau}{2}\right)$, unde

$g_\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g_\tau(t) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } |t| \le \tau \\ 0, & \text{dacă } |t| > \tau, \end{cases}$, $\tau > 0$ este *semnalul rectangular.*

Rezolvare. Se observă că:

$$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(t)=\begin{cases} 0, & \text{dacă } t\in\,]-\infty,-\tau[\\ -1, & \text{dacă } t\in[-\tau,0[\\ 0, & \text{dacă } t=0 \\ 1, & \text{dacă } t\in\,]0,\tau] \\ 0, & \text{dacă } t\in\,]\tau,+\infty[\end{cases} \quad -\text{funcţie impară.}$$



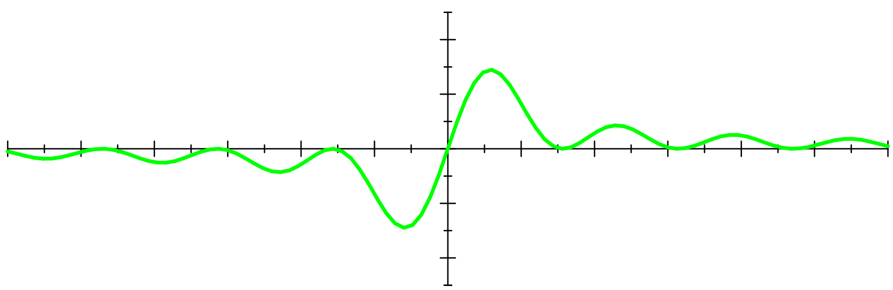
•Se observă că $g\in L^1(\mathbb{R})$, din teoremele anterioare.
•Se calculează, pe baza teoremelor anterioare

$$G(\omega)=\frac{2}{\omega}\left(\sin\left(\tfrac{\omega\tau}{2}\right)\right)\left(e^{-\mathrm{j}\frac{\omega\tau}{2}}-e^{\mathrm{j}\frac{\omega\tau}{2}}\right)=\frac{2}{\omega}\left(\sin\left(\tfrac{\omega\tau}{2}\right)\right)(-2\,\mathrm{j})\left(\sin\left(\tfrac{\omega\tau}{2}\right)\right)=\mathrm{j}\,\frac{-4}{\omega}\left(\sin\left(\tfrac{\omega\tau}{2}\right)\right)^2.$$

Deci $G:\mathbb{R}\to\mathbb{C}, G(\omega)=\mathrm{j}\,\dfrac{2}{\omega}(\cos(\omega\tau)-1)$- funcţie pur imaginară şi impară.

Se scrie şi $\mathcal{F}\{g(t)\}(\omega)=\mathrm{j}\,\dfrac{2}{\omega}(\cos(\omega\tau)-1)$.

Mai mult, pentru această transformată, care are ca valoare un număr pur imaginar, se poate reprezenta $-\frac{1}{\mathrm{j}}G(\omega)=-\operatorname{Im}G$.



Deoarece semnalul g este un semnal real şi impar (grafic simetric faţă de origine), atunci spectrul G este pur imaginar şi impar şi $-\operatorname{Im}G(\omega)=G_s(\omega)$.

Teorema 9.1.8 (continuitatea operatorului Fourier). Dacă $g_n\to g$ în $L^1(\mathbb{R})$, adică $\|g_n-g\|_{L^1(\mathbb{R})}\to 0$ atunci

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}G_n(\omega)=G(\omega),\forall\omega\in\mathbb{R}.}$$

Teorema 9.1.9 (spectrul semnalului derivat). Fie $n\in\mathbb{N}$ şi $g\in\mathcal{C}^n(\mathbb{R})$ a.î. $g^{(k)}\in L^1(\mathbb{R})$ cu $\lim\limits_{|t|\to\infty}g^{(k)}(t)=0,\forall 0\le k\le n$.

Atunci $\boxed{\mathcal{F}\left\{g^{(k)}(t)\right\}(\omega)=(\mathrm{j}\,\omega)^k\cdot\mathcal{F}\{g(t)\}(\omega),\forall\omega\in\mathbb{R},\forall 0\le k\le n}$

(derivarea de k ori în domeniul "timp"$\Rightarrow$multiplicare cu $(\mathrm{j}\,\omega)^k$ în domeniul "frecvenţă").
În particular

$\boxed{\mathcal{F}\{g'(t)\}(\omega)=\mathrm{j}\,\omega\cdot\mathcal{F}\{g(t)\}(\omega),\forall\omega\in\mathbb{R}}$ şi $\boxed{\mathcal{F}\{g''(t)\}(\omega)=-\omega^2\cdot\mathcal{F}\{g(t)\}(\omega),\forall\omega\in\mathbb{R}}$

Teorema 9.1.10 (derivarea spectrului unui semnal). Fie $g \in L^1(\mathbb{R})$ a.î.
$t^k g \in L^1(\mathbb{R}), \forall 0 \le k \le n.$
Atunci $G \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R};\mathbb{C})$ şi

$$\boxed{\frac{d^k}{d\omega^k}\mathcal{F}\{g(t)\}(\omega) = \mathcal{F}\left\{(-\mathrm{j}\,t)^k \cdot g(t)\right\}(\omega), \forall \omega \in \mathbb{R}}$$

(derivarea de k ori a spectrului, în domeniul "frecvenţă"$\Rightarrow$multiplicare cu $(-\mathrm{j}\,t)^k$ în domeniul "timp").

$$\boxed{\frac{d}{d\omega}\mathcal{F}\{g(t)\}(\omega) = \mathcal{F}\{-\mathrm{j}\,t \cdot g(t)\}(\omega) = -\mathrm{j}\cdot\mathcal{F}\{t \cdot g(t)\}(\omega), \forall \omega \in \mathbb{R}} \text{ şi}$$

$$\boxed{\frac{d^2}{d\omega^2}\mathcal{F}\{g(t)\}(\omega) = \mathcal{F}\left\{(-\mathrm{j}\,t)^2 \cdot g(t)\right\}(\omega) = -\mathcal{F}\left\{t^2 \cdot g(t)\right\}(\omega), \forall \omega \in \mathbb{R}}$$

Exemplul 9.1.4. Utilizând Teorema 9.1.9, să se determine $\mathcal{F}\left\{-\mathrm{j}\,t \cdot e^{-a|t|}\right\}(\omega)$, unde $a > 0$.
Rezolvare. A se vedea Seminar.
Observaţia 9.1.7. Rezolvarea Exerciţiului $2, b)$ se putea face folosind Teoremele de liniaritate şi de derivare. A se vedea Seminar.
Teorema 9.1.11. (spectrul semnalului integrat). Fie $g \in L^1(\mathbb{R})$ a.î. g să fie continuă. Atunci

$$\boxed{\mathcal{F}\left\{\left(\int_{-\infty}^{t} g(t)\,dt\right)\right\}(\omega) = \frac{\mathcal{F}\{g(t)\}(\omega)}{\mathrm{j}\,\omega}, \forall \omega \in \mathbb{R}}$$

Teorema 9.1.12 (integrarea spectrului unui semnal). ...
Definiţia 9.1.4. Fie $g, h \in L^1(\mathbb{R})$. Se numeşte *produs de convoluţie a funcţiilor din* $L^1(\mathbb{R})$ g şi h, funcţia $g * h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (sau $g * h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$), definită prin

$$\boxed{(g * h)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau.}$$

De menţionat că, dacă g, h sunt originale Laplace, atunci

$$(g * h)(t) = \eta(t)\left(\int_0^t g(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau\right) = \eta(t)\left(\int_0^t h(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau\right),$$

unde η este funcţia Heaviside.
Teorema 9.1.13 (spectrul produsului de convoluţie a două semnale). Fie $g, h \in L^1(\mathbb{R})$ cu transformatele Fourier $G(\omega) = \mathcal{F}\{g(t)\}(\omega)$, respectiv $H(\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\}(\omega)$. Atunci $g*h \in L^1(\mathbb{R})$ şi

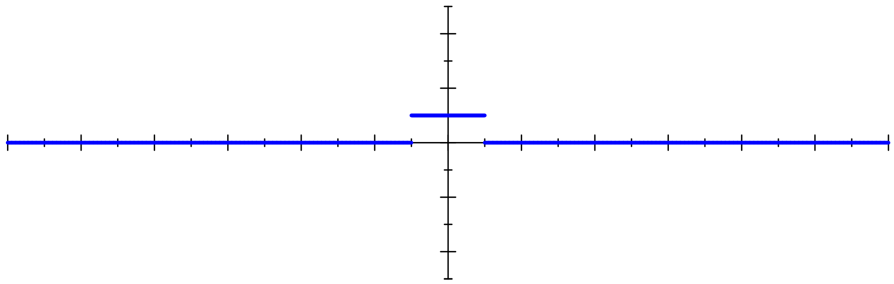
$$\boxed{\mathcal{F}\{g * h\}(\omega) = G(\omega) \cdot H(\omega), \forall \omega \in \mathbb{R}.}$$

(convoluţia în timp $\Rightarrow$ produs în frecvenţă).
Demonstraţie. $\forall \omega \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}\{g * h\}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} (g * h)(t)\,e^{-\mathrm{j}\,\omega t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau\right)e^{-\mathrm{j}\,\omega t}dt \overset{\text{Fubini}}{=}$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)\,e^{-\mathrm{j}\,\omega t}dt\right)g(\tau)\,d\tau \overset{t-\tau=s}{=} \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} h(s)\,e^{-\mathrm{j}\,\omega(s+\tau)}ds\right)g(\tau)\,d\tau =$$
$$= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)\,e^{-\mathrm{j}\,\omega\tau}d\tau\right)\cdot\left(\int_{-\infty}^{+\infty} h(s)\,e^{-\mathrm{j}\,\omega s}ds\right) = \mathcal{F}\{g(t)\}(\omega)\cdot\mathcal{F}\{h(t)\}(\omega).$$

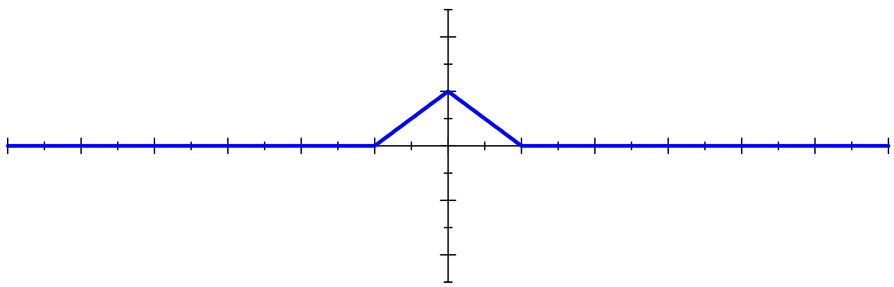
Observaţia 9.1.8. Produsul de convoluţie are proprietăţi de regularizare.

Fie semnalul rectangular cu $\tau = 1$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(t) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } |t| \le 1 \\ 0, & \text{dacă } |t| > 1 \end{cases}.$



Produsul de convoluţie a semnalului rectangular cu el însuşi este unul triunghiular

$$(g*g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau = \begin{cases} 0 & \text{dacă } t \in \left]-\infty, 2\right[\\ 2+t, & \text{dacă } t \in [-2, 0] \\ 2-t, & \text{dacă } t \in \left]0, 2\right] \\ 0 & \text{dacă } t \in \left]2, +\infty\right[\end{cases}$$



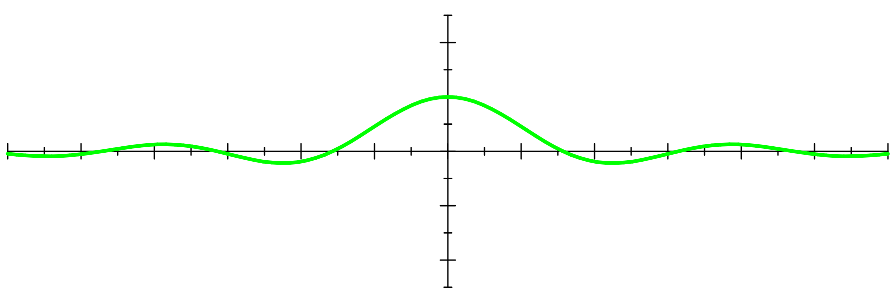
Se poate scrie chiar că $\left(g_{\frac{\tau}{2}} * g_{\frac{\tau}{2}}\right)(t) = \tau\left(1 - \frac{|t|}{\tau}\right) g_{\frac{\tau}{2}}(t), \forall t \in \mathbb{R}$.

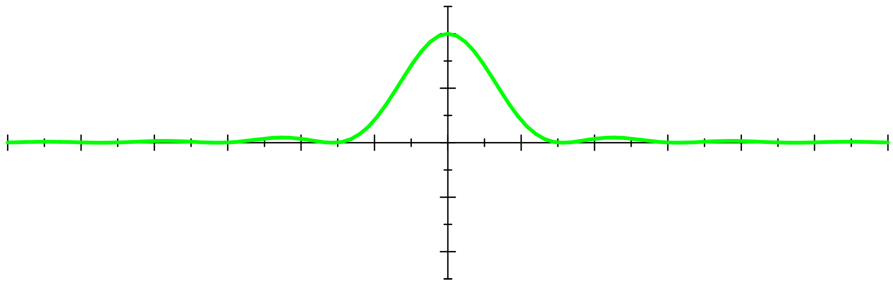
Se observă că g din exemplul anterior este discontinuă, iar $g*g$ este continuă. Mai mult, se poate arăta că $g*(g*g)$ este restricţia unui polinom de grad 2, că $g*(\underbrace{g*...*g}_{n-1 \text{ ori}})$ este restricţia unui polinom de grad $n-1$, iar la limită, pentru $n \to \infty$, se obţine o funcţie cu un grafic reprezentabil de tip clopotul lui Gauss.

Transormatele Fourier pentru cele două semnale reprezentate vor fi

$\mathcal{F}\{g(t)\}(\omega) = \dfrac{2}{\omega}\sin\omega \Rightarrow \mathcal{F}\{(g*g)(t)\}(\omega) = \left(\dfrac{2}{\omega}\sin\omega\right)^2$.

Mai mult, pentru aceste transformate, se pot reprezenta:





Observaţia 9.1.9. Operaţia de convoluţie nu are element neutru în clasa $L^1(\mathbb{R})$.
Exemplul 9.1.5. Utilizând Teorema 9.1.11, să se determine $\mathcal{F}\{g*h\}(\omega)$, unde

$$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(t)=\begin{cases}0, & \text{dacă } t<0\\ e^{-t}, & \text{dacă } t\geq 0,\end{cases} \text{ şi } h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, h(t)=e^{-t^2}.$$

Rezolvare. La Exemplul 9.1.2 s-a arătat că $g,h\in L^1(\mathbb{R})$ şi

$$\mathcal{F}\{g(t)\}(\omega)=G(\omega)=\frac{1-\mathrm{j}\,\omega}{1^2+\omega^2};\mathcal{F}\{h(t)\}(\omega)=H(\omega)=\mathcal{F}\left\{e^{-t^2}\right\}(\omega)\overset{a=1}{=}\sqrt{\pi}\cdot e^{\frac{-\omega^2}{4}}.$$

Atunci, conform Teoremei 9.1.11, se obţine:

$$\mathcal{F}\{g*h\}(\omega)=G(\omega)\cdot H(\omega)=\frac{1-\mathrm{j}\,\omega}{1^2+\omega^2}\cdot\sqrt{\pi}\cdot e^{\frac{-\omega^2}{4}},\forall\omega\in\mathbb{R}.$$

Comentariu. Determinarea transformatei precedente se putea face şi direct, cu definiţia, mai greu.
Definiţia 9.1.5. Fie $g\in L^1(\mathbb{R})$. Dacă g are valori reale, se numeşte *autocorelaţia funcţiei* g funcţia

$$\boxed{\Lambda:\mathbb{R}\to\mathbb{C}, \Lambda(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)\,g(t+\tau)\,d\tau.}$$

Teorema 9.1.14. Fie $g\in L^1(\mathbb{R})$. Dacă g are valori reale,

$$\mathcal{F}\{\Lambda(t)\}(\omega)=|\mathcal{F}\{g(t)\}(\omega)|^2,\forall\omega\in\mathbb{R}.$$

Demonstraţie. $\forall\omega\in\mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}\{\Lambda(t)\}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\Lambda(t)\,e^{-\mathrm{j}\,\omega t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}g(\tau)\,g(t+\tau)\,d\tau\right)e^{-\mathrm{j}\,\omega t}dt\overset{\text{Fubini}}{=}$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}g(t+\tau)\,e^{-\mathrm{j}\,\omega t}dt\right)g(\tau)\,d\tau\overset{t+\tau=s}{=}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}g(s)\,e^{-\mathrm{j}\,\omega(s-\tau)}ds\right)g(\tau)\,d\tau=$$

$$=\left(\int_{-\infty}^{+\infty}g(\tau)\,e^{+\mathrm{j}\,\omega\tau}d\tau\right)\cdot\left(\int_{-\infty}^{+\infty}g(s)\,e^{-\mathrm{j}\,\omega s}ds\right)=\overline{\mathcal{F}\{g(t)\}(\omega)}\cdot\mathcal{F}\{g(t)\}(\omega)=|\mathcal{F}\{g(t)\}(\omega)|^2.$$

Teorema 9.1.15 (inversarea transformatei Fourier). Fie $g\in L^1(\mathbb{R})$ a.î. $G\in L^1(\mathbb{R})$. Atunci are loc *formula de inversare a transformatei Fourier*:

$$\boxed{g(t)=\mathcal{F}^{-1}\{G(\omega)\}(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}G(\omega)\cdot e^{\mathrm{j}\,t\omega}d\omega,\forall t\in\mathbb{R}}$$

Comentariu. Dacă $\mathcal{F}\{g(t)\}(\omega)=\mathcal{F}\{h(t)\}(\omega)$, atunci

$$g(t)=h(t),\text{ a.p.t. } t\in\mathbb{R}.$$

Egalitatea "aproape peste tot" înseamnă că are loc cu excepţia unei mulţimi de măsură Lebesgue nulă.
Observaţia 9.1.10. Dacă în formula de inversare se face schimbarea de variabilă $\omega=-\psi$, atunci integrala devine

$$\int_{-\infty}^{+\infty}G(\omega)\cdot e^{\mathrm{j}\,t\omega}d\omega=\int_{-\infty}^{+\infty}G(-\psi)\cdot e^{\mathrm{j}\,t(-\psi)}d\psi,$$

sau, renotând ψ cu ω,

$$\mathcal{F}^{-1}\{G(\omega)\}(t)=\frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\{G(-\omega)\}(t)\Leftrightarrow\boxed{2\pi g(t)=\mathcal{F}\{G(-\omega)\}(t).}$$

În concluzie, determinarea transformatei Fourier inverse revine tot la determinarea unei transformate Fourier directe.

Observaţia 9.1.11. Se poate arăta că, dacă g este pară, atunci

$$\boxed{g(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} G_c(\omega)\cdot\cos(t\omega)\,d\omega, \forall t \in \mathbb{R}.}$$

Se poate arăta că, dacă g este impară, atunci

$$\boxed{g(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} G_s(\omega)\cdot\sin(t\omega)\,d\omega, \forall t \in \mathbb{R}.}$$

Comentariu. a) Are loc o teoremă ce oferă **spectrul produsului a două semnale.** Fie $g, h \in L^1(\mathbb{R})$ cu transformatele Fourier $G(\omega) = \mathcal{F}\{g(t)\}(\omega)$, respectiv $H(\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\}(\omega)$ în $L^1(\mathbb{R})$. Atunci $G * H \in L^1(\mathbb{R})$ şi

$$\boxed{\mathcal{F}\{g\cdot h\}(\omega) = \frac{1}{2\pi}(G * H)(\omega), \forall \omega \in \mathbb{R}.}$$

b) Are loc **formula lui Parseval**. Fie g care verifică anumite ipoteze. Atunci:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2\,dt = \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |G(\omega)|^2\,d\omega.$$

De menţionat o teoremă de la calculul de integrale reale cu reziduuri, rescrisă:

T 1′. Fie $\mathcal{I} = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(\omega)}{Q(\omega)} e^{\mathrm{j}\,t\omega} d\omega$, $a = t > 0$, unde

$P, Q \in \mathbb{R}[\omega]$, $\operatorname{grad} Q \geq \operatorname{grad} P + 1$, $Q(\omega) \neq 0, \forall \omega \in \mathbb{R}$. Atunci:

$$\mathcal{I} = 2\pi\,\mathrm{j}\sum_{k=1}^{n} \operatorname{rez} f(z_k),\ \text{ unde } f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} e^{\mathrm{j}\,tz}, \text{ iar } z_k \text{ sunt acei poli cu } \operatorname{Im} z_k > 0.$$

Exemplul 9.1.6. Să se rezolve ecuaţia integrală

$$(*)\int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega)\,e^{\mathrm{j}\,t\omega} d\omega = e^{-a|t|}, t \in \mathbb{R}, \text{ unde } a > 0 \text{ este dat.}$$

Rezolvare. A se vedea Seminar.

Exemplul 9.1.7. Fie $G : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, G(\omega) = \dfrac{1}{(1+\omega^2)^2}$.

Să se determine, dacă există, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ corespunzătoare, ca inversă prin transformata Fourier.

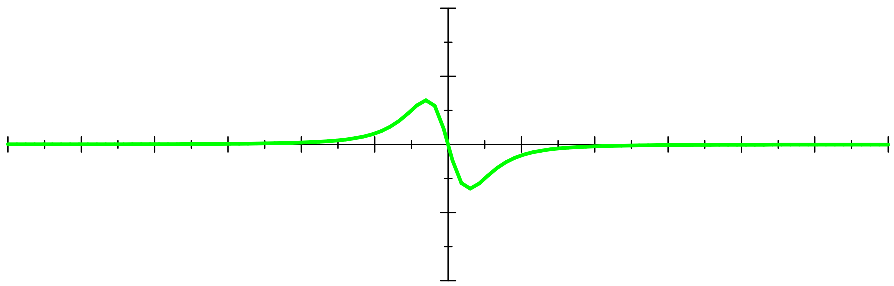
Rezolvare. A se vedea Seminar.

Exemplul 9.1.8. Să se rezolve ecuaţia integrală

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,e^{-\mathrm{j}\,\omega t} dt = \frac{\mathrm{j}\,\omega}{(1+\omega^2)^2}, \omega \in \mathbb{R}.$$

Rezolvare. Se determină $g =?$ funcţia necunoscută.

Se notează $G : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, G(\omega) = \dfrac{\mathrm{j}\,\omega}{(1+\omega^2)^2}$. Se reprezintă $-\operatorname{Im} G = \dfrac{-\omega}{(1+\omega^2)^2}$.



•Se observă că $G \in L^1(\mathbb{R})$, deoarece

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |G(\omega)|\, d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\mathrm{j}\,\omega}{(1+\omega^2)^2} \right| d\omega \overset{|\mathrm{j}|=1}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\omega|}{(1+\omega^2)^2} d\omega \overset{\text{SAU}}{=} \int_{-\infty}^{0} \frac{-\omega}{(1+\omega^2)^2} d\omega + \int_{0}^{+\infty} \frac{+\omega}{(1+\omega^2)^2} d\omega =$$

$$\overset{\text{SAU}}{=} 2\int_0^{+\infty} \frac{\omega}{(1+\omega^2)^2} d\omega = 2\, \frac{1}{-2} \frac{1}{1+\omega^2}\Bigg|_{\omega=0}^{\omega\to+\infty} = 1 < +\infty.$$

•Se observă, conform Teoremei de liniaritate şi Teoremei de inversare,

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{j}\,\omega}{(1+\omega^2)^2} e^{\mathrm{j}\,t\omega} d\omega.$$

••Se calculează, pentru $t > 0, g(t) = \dfrac{\mathrm{j}}{2\pi}\mathcal{I} \overset{T1'}{=} \dfrac{\mathrm{j}}{2\pi} 2\pi\,\mathrm{j}\,\mathrm{rez}\, f(\mathrm{j}) \underset{\text{conform 2.}}{\overset{0+\mathrm{j}\ \text{e pol de ordin 2}}{=}}$

$$= \frac{\mathrm{j}}{2\pi} 2\pi\,\mathrm{j}\, \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z\to 0+2\,\mathrm{j}} \left(\left((z-\mathrm{j})^2 \frac{z}{(z-\mathrm{j})^2 (z+\mathrm{j})^2} e^{\mathrm{j}\,tz} \right)^{(2-1)_z} \right) =$$

$$= -\lim_{z\to 0+\mathrm{j}} \left(\left(\frac{z e^{\mathrm{j}\,tz}}{(z+\mathrm{j})^2} \right)^{\prime_z} \right) = -\lim_{z\to 0+\mathrm{j}} \frac{\left(e^{\mathrm{j}\,tz} + z e^{\mathrm{j}\,tz}\cdot \mathrm{j}\,t\right)(z+\mathrm{j})^2 - z e^{\mathrm{j}\,tz}\cdot 2(z+\mathrm{j})}{(z+\mathrm{j})^4} =$$

$$= -\lim_{z\to 0+\mathrm{j}} \frac{e^{\mathrm{j}\,tz}\cdot\left((1+z\,\mathrm{j}\,t)(z+\mathrm{j}) - 2z\right)}{(z+\mathrm{j})^3} = -\frac{e^{\mathrm{j}\,t\,\mathrm{j}}\cdot\left((1+\mathrm{j}\cdot\mathrm{j}\,t)(\mathrm{j}+\mathrm{j}) - 2\,\mathrm{j}\right)}{(\mathrm{j}+\mathrm{j})^3} =$$

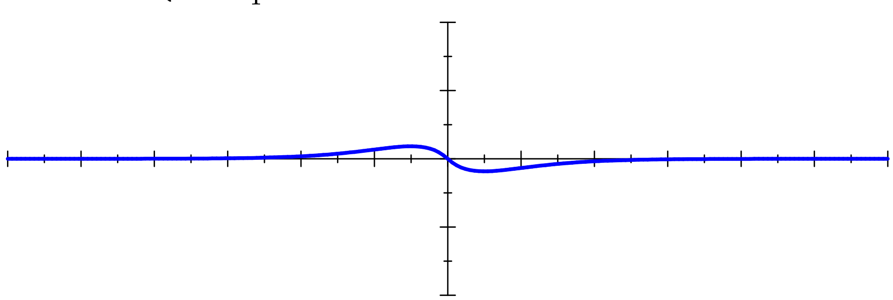
$$= -\frac{e^{-t}\cdot(-t)\,2\,\mathrm{j}}{2\,\mathrm{j}\cdot(-4)} = \frac{e^{-t}\cdot(-t)}{4},\ t > 0.$$

••Conform Observaţiei 9.1.5, pentru $t < 0$,

$$g(t) \underset{G \text{ impară şi pur imaginară, deci } g \text{ impară}}{\overset{\text{Observaţia 9.1.5}}{=}} -g(-t) \overset{t\le 0}{=} -\frac{e^{t}\cdot(+t)}{4}.$$

••În plus, $g(0) = \dfrac{\mathrm{j}}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega}{(1+\omega^2)^2} d\omega = 0.$

$$\text{Deci } g(t) = \begin{cases} -\dfrac{e^{t}\cdot(+t)}{4}, & t < 0 \\ 0, & t = 0 \\ \dfrac{e^{-t}\cdot(-t)}{4}, & t > 0 \end{cases}.$$



Exemplul 9.1.9. Să se rezolve ecuaţia integrală
$(*)\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, e^{-\mathrm{j}\,\omega t} dt = \dfrac{\omega}{\mathrm{j}\,(\omega^2+a^2)\,(\omega^2+b^2)}, \omega \in \mathbb{R}$, unde $a > 0$ şi $b > 0$ sunt date.
Caz particular: $(*)\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, e^{-\mathrm{j}\,yt} dt = \dfrac{y}{\mathrm{j}\,(y^2+1)\,(y^2+4)}, y \in \mathbb{R}$.
Rezolvare. A se vedea Seminar.