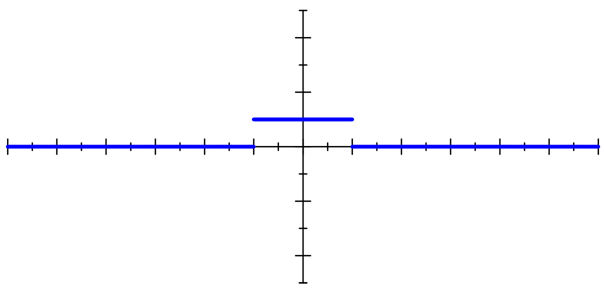
CURS NR. 11
Matematici Speciale, AIA

10. DISTRIBUŢII
10.1.Spaţiul funcţiilor test. Distribuţii: definiţie, tipuri, exemple.

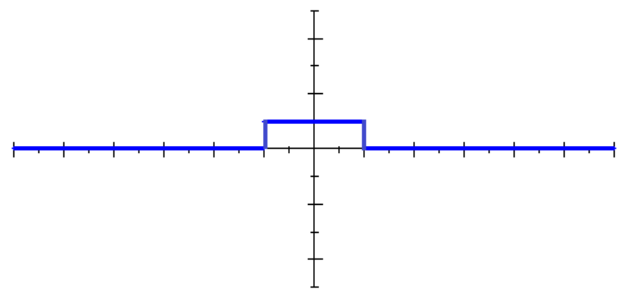
Motivaţii pentru introducerea noţiunii.
a) *Semnalul rectangular*

$$g_\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g_\tau(t) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } |t| \le \tau \\ 0, & \text{dacă } |t| > \tau, \end{cases} \text{,unde } \tau > 0.$$

are transformata Fourier $G : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, G(\omega) = 2\tau \cdot \dfrac{\sin(\omega\tau)}{\omega\tau}$. În teoria semnalelor apare reprezentat în ambele forme de mai jos.



sau

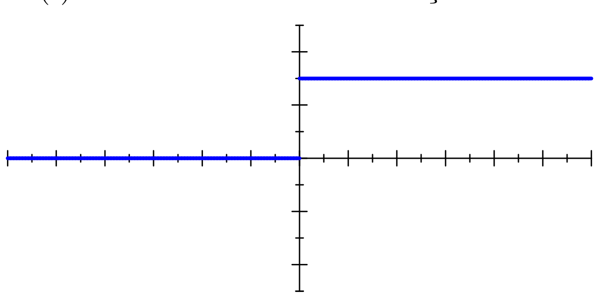


Ca funcţie, semnalul dreptunghiular nu este nici măcar continuă pe $\mathbb{R}$. Pentru a putea fi folosită în modelarea matematică a proceselor fizice prin ecuaţii diferenţiale, se va utiliza noţiunea de distribuţie şi de derivare în sensul distribuţiilor.

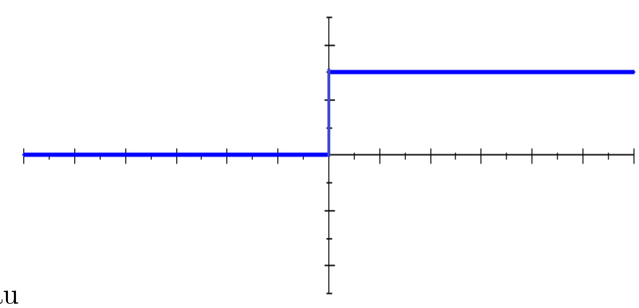
b) Fie un *circuit RLC serie*, conectat la momentul $t = 0$ la o sursă de tensiune (voltaj) constantă v_0. Atunci intensitatea i a curentului în reţea verifică la fiecare moment t dintr-un interval compact $[-T, T]$ ecuaţia integro-diferenţială

$$Li'(t) + Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)\,dt = v(t),$$

unde $v(t)$ este tensiunea la bornele reţelei. Deoarece



sau

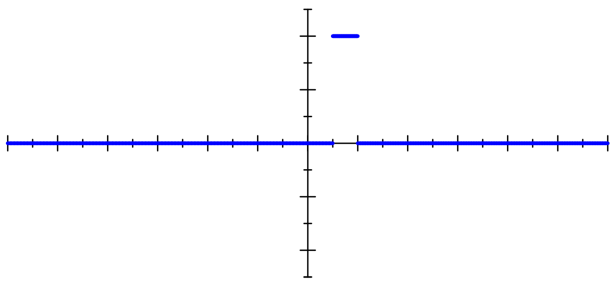


$$v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, v(t) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } t < 0 \\ v_0, & \text{dacă } t \ge 0 \end{cases}$$

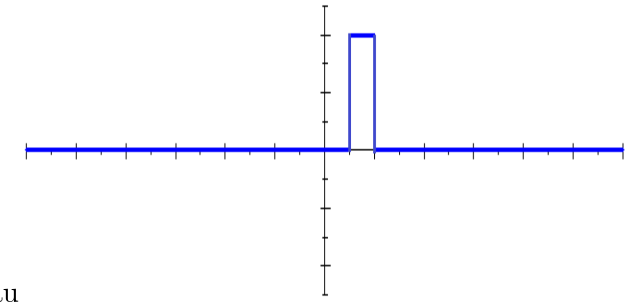
nu este funcţie derivabilă, nefiind nici măcar continuă, nu se poate deriva clasic ecuaţia integro-diferenţială pentru a determina funcţia necunoscută i. Se va utiliza noţiunea de distribuţie şi de derivare în sensul distribuţiilor.

c) Fie $a \in \mathbb{R}$ punct-spaţiu sau punct-moment. Un *impuls aplicat în a* este un semnal de amplitudine constantă mare $A > 0$ pe un interval scurt $[a, a + \varepsilon]$, adică având lungimea $\varepsilon > 0$ mică. Se obţine semnalul dreptunghiular nesimetric

$$\delta_{a,\varepsilon} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \delta_{a,\varepsilon}(t) = \begin{cases} A, & \text{dacă } t \in [a, a+\varepsilon] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases} .$$



sau



Este o funcţie din $L^1_{\mathrm{loc}}, \forall \varepsilon > 0$.

Dacă aria subgraficului (dreptunghiului) este 1 $\Rightarrow A = \dfrac{1}{\varepsilon}$ şi

$$\delta_{a,\varepsilon} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \delta_{a,\varepsilon}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon}, & \text{dacă } t \in [a, a+\varepsilon] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

este un *impuls unitar impur* aplicat în a, depinzând de lungimea mică a intervalului de aplicare $\varepsilon > 0$, cu $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_{a,\varepsilon}(t)\, dt = \int_a^{a+\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} dt = 1$.

Dacă $\varepsilon \to 0$, *impulsul unitar pur* devine "funcţia" δ_a

$$\delta_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \delta_a(t) = \begin{cases} \infty, & \text{dacă } t = a \\ 0, & \text{dacă } t \neq a \end{cases}$$

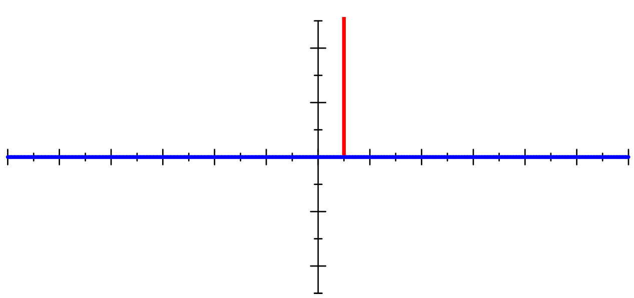
cu proprietatea contradictorie de a fi 0 a.p.t. şi de a avea $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_a(t)\, dt = 1$.

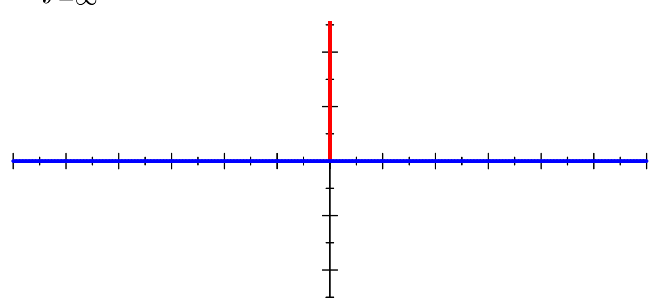
Se va utiliza noţiunea de distribuţie pentru a da un sens matematic-fizic pentru "graficul"/ "subgraficul" acestui "băţ vertical infinit" plasat în punctul a.

Dacă $a = 0$, impulsul unitar pur devine *"funcţia Dirac"* $\delta_0 = \delta$

$$\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \delta(t) = \begin{cases} \infty, & \text{dacă } t = 0 \\ 0, & \text{dacă } t \neq 0 \end{cases}$$

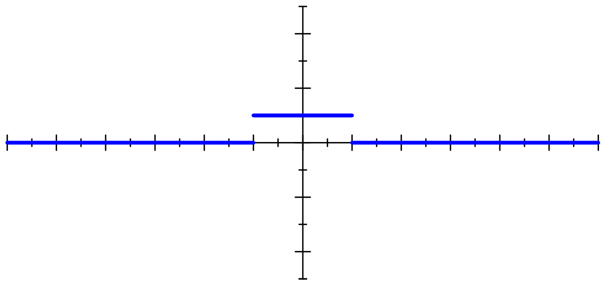
cu proprietatea contradictorie de a fi 0 a.p.t. şi de a avea $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, dt = 1$.



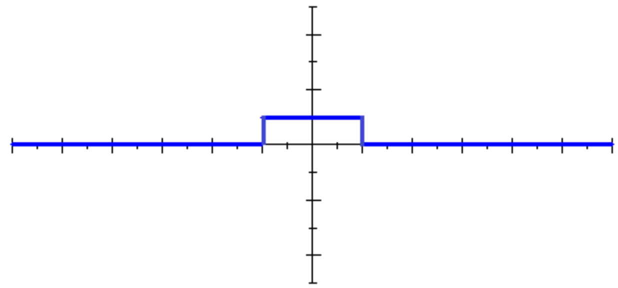


d) Fie un punct material de masă $m > 0$ plasat în originea unei axe. Pentru a defini *densitatea liniară* a acelei mase, se defineşte *densitatea medie*, adică masa raportată la lungime prin împrăştiere liniară

$$\delta_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{m}{2\varepsilon}, & \text{dacă } x \in [-\varepsilon, +\varepsilon] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases} .$$



sau

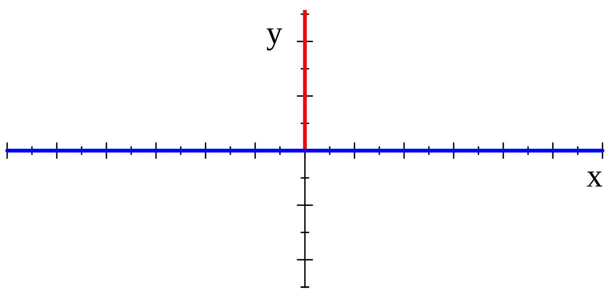


Este o funcţie din $L^1_{\text{loc}}, \forall \varepsilon > 0$. Se observă că $\forall \varepsilon > 0, \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\varepsilon (x)\, dx = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{m}{2\varepsilon} dx = m.$

Masa fiind concentrată în punctul-spaţiu $x = 0$, pentru $\varepsilon \to 0$, densitatea devine "funcţia Dirac" δ

$$\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \delta(x) = \begin{cases} \infty, & \text{dacă } x = 0 \\ 0, & \text{dacă } x \neq 0 \end{cases}$$

cu proprietatea contradictorie de a fi 0 a.p.t. şi de a avea $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, dt = m.$



Similar, <u>*densitatea unei sarcini electrice concentrate într-un punct*</u>, <u>*densitatea unui dipol electric*</u> şi alte noţiuni fizice necesită noţiunea de distribuţie pentru studiu.

Definiţia 10.1.1. Se numeşte *suportul funcţiei* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (sau $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$) închiderea în $\mathbb{R}$ a mulţimii punctelor $t \in \mathbb{R}$ în care φ nu se anulează

$$\operatorname{supp} \varphi = \overline{\{t \in \mathbb{R}; \varphi(t) \neq 0\}}. \tag{1}$$

Observaţia 10.1.1. **a)** $\forall \varphi, \operatorname{supp} \varphi$ este mulţime închisă în $\mathbb{R}$.

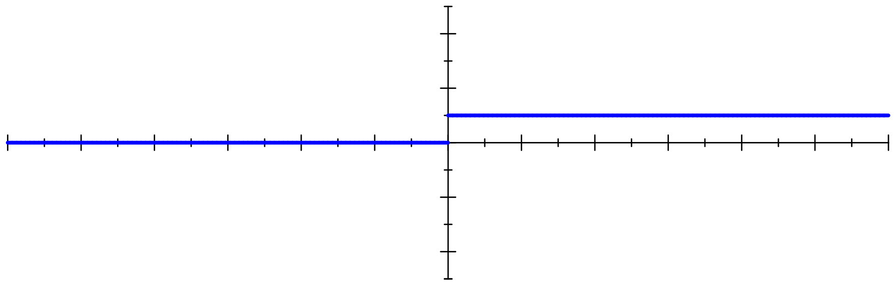
b) $\forall \varphi, \varphi(t) = 0$ pe $\mathbb{R} \setminus \operatorname{supp} \varphi$.

c) $\forall \varphi, \operatorname{supp} \varphi$ este complementara celei mai mari (în sensul incluziunii) mulţimi deschise din $\mathbb{R}$ pe care φ se anulează.

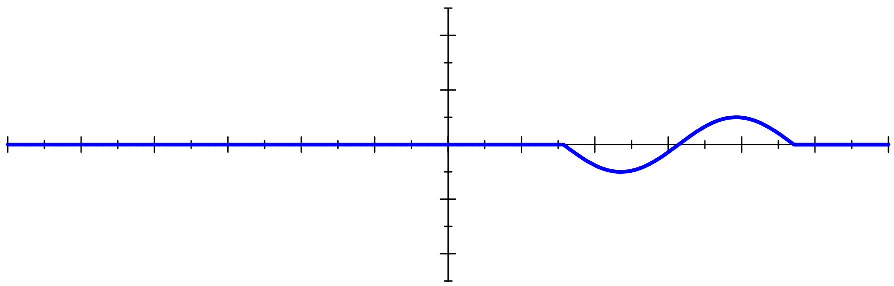
Propoziţia 10.1.1. $\operatorname{supp}(\varphi_1 + \varphi_2) \subseteq \operatorname{supp} \varphi_1 \cup \operatorname{supp} \varphi_2, \forall \varphi_1, \varphi_2$.

Exemplul 10.1.1. **a)** Funcţia *treaptă unitate (Heaviside)*

$$\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \eta(t) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } t \geq 0 \\ 0, & \text{dacă } t < 0 \end{cases} \text{ are } \operatorname{supp} \eta = [0, \infty[\,.$$



b) Funcţia $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(t)=\begin{cases}\sin t, & \text{dacă } t\in[\pi,3\pi]\\ 0, & \text{dacă } t\notin[\pi,3\pi]\end{cases}$ are $\operatorname{supp} g=[\pi,3\pi]$.



c) Funcţia Dirichlet $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, h(t)=\begin{cases}1, & \text{dacă } t\in\mathbb{Q}\\ 0, & \text{dacă } t\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$ are $\operatorname{supp} h=\overline{\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$.

Definiţia 10.1.2. Se numeşte *funcţie test* o funcţie $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (sau $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$), $\varphi\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ care are $\operatorname{supp}\varphi$ mulţime compactă în $\mathbb{R}$. Mulţimea funcţiilor test se notează

$$\boxed{\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})=\{\varphi\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R});\operatorname{supp}\varphi \text{ compact}\}.} \tag{2}$$

Exemplul 10.1.2. a) Funcţiile de la Exemplul 1 nu sunt funcţii test (la a) şi c) suportul nu este compact; la b) funcţia, chiar dacă are suportul compact, nu este infinit derivabilă).

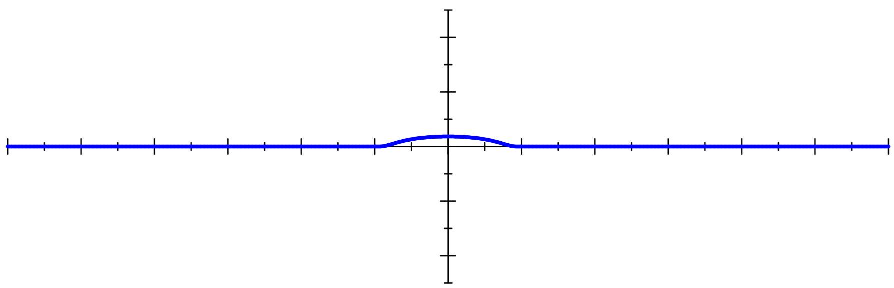
b) Există funcţii test. De exemplu, pentru orice $\varepsilon>0$, funcţia

$$\omega_\varepsilon:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \omega_\varepsilon(t)=\begin{cases}e^{\frac{\varepsilon^2}{t^2-\varepsilon^2}}, & \text{dacă } |t|<\varepsilon\\ 0, & \text{dacă } |t|\geq\varepsilon\end{cases} \tag{3}$$

are $\operatorname{supp}\omega_\varepsilon=[-\varepsilon,\varepsilon]$ compact. Mai mult, $\omega_\varepsilon\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, deoarece>

-ω_ε este continuă în $\pm\varepsilon$;

-ω_ε este infinit derivabilă pe $\mathbb{R}\setminus\{\pm\varepsilon\}$, derivatele lui ω_ε fiind egale cu exponenţiala din definiţie, înmulţită cu o funcţie raţională. $\omega_\varepsilon^{(k)}(t)\to 0$ când $|t|\to\varepsilon$.



Definiţia 10.1.3. Se notează cu $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ spaţiul funcţiilor test $C_0^\infty(\mathbb{R})$ în care s-a introdus topologia dată de convergenţa de mai jos:

Şirul $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset C_0^\infty(\mathbb{R})$ este *convergent la* $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ *în* $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ (şi se notează $\varphi_n\overset{\mathcal{D}(\mathbb{R})}{\to}\varphi$) dacă:

(i) $(\exists)\, \mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ interval mărginit astfel încât $\operatorname{supp}\varphi_n \subseteq \mathbb{I}, \forall n \in \mathbb{N}$;
(ii) $\varphi_n^{(k)} \xrightarrow{u} \varphi^{(k)}$ uniform pe $\mathbb{I}$, pentru $n \to \infty$, $\forall k = 0, 1, 2, ...$

Definiţia 10.1.4. Se numeşte *funcţională* pe $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ o aplicaţie $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ (sau $\mathbb{R}$). Se notează $\langle T, \varphi \rangle$ în loc de numărul complex $T(\varphi)$, numit *media lui T pe φ.*
Definiţia 10.1.5. Funcţionala $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ este *liniară* dacă $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$

$$\langle T, \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 \rangle = \alpha_1 \langle T, \varphi_1 \rangle + \alpha_2 \langle T, \varphi_2 \rangle. \tag{4}$$

Propoziţia 10.1.2. Dacă $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ este liniară, atunci $\langle T, 0_{\mathcal{D}(\mathbb{R})} \rangle = 0_{\mathbb{C}}$.
Demonstraţie. $\langle T, 0_{\mathcal{D}(\mathbb{R})} \rangle = \langle T, \varphi - \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle - \langle T, \varphi \rangle = 0_{\mathbb{C}}, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.
Definiţia 10.1.6. Funcţionala $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ este *continuă* dacă

$\forall \varphi_n \overset{\mathcal{D}(\mathbb{R})}{\to} \varphi \Rightarrow \langle T, \varphi_n \rangle \overset{\text{în } \mathbb{C}}{\to} \langle T, \varphi \rangle$ (pentru $n \to \infty$).

Propoziţia 10.1.3. Funcţionala liniară $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ este continuă dacă şi numai dacă

$\forall \varphi_n \overset{\mathcal{D}(\mathbb{R})}{\to} 0 \Rightarrow \langle T, \varphi_n \rangle \overset{\text{în } \mathbb{C}}{\to} 0$ (pentru $n \to \infty$).

Demonstraţie. Necesitatea. T continuă $\overset{\varphi=0}{\Rightarrow}$ q.e.d.

Suficienţa. Fie $\forall \varphi_n \overset{\mathcal{D}(\mathbb{R})}{\to} \varphi \Rightarrow \varphi_n - \varphi \overset{\mathcal{D}(\mathbb{R})}{\to} 0$. Atunci, conform ipotezei, $\langle T, \varphi_n - \varphi \rangle \overset{\text{în } \mathbb{C}}{\to} 0$. Deoarece T este liniară $\Rightarrow$q.e.d.

Definiţia 10.1.7. Se numeşte *distribuţie* sau *funcţie generalizată* orice funcţională $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ liniară şi continuă pe $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Mulţimea distribuţiilor se notează $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

$$\boxed{\mathcal{D}'(\mathbb{R}) = \{T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}; T \text{ liniară şi continuă}\}.} \tag{5}$$

Observaţia 10.1.2. Aşa cum o funcţie $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este "testată" pe numerele din D, în sensul că în $\forall t \in \mathbb{R}$ se defineşte $f(t)$, o distribuţie $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ este "testată" pe funcţiile test din $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, în sensul că în $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ se defineşte $T(\varphi) \equiv \langle T, \varphi \rangle$. Nu are sens $T(t)$, dar uneori se face convenţia de a se scrie $\langle T(t), \varphi(t) \rangle$ pentru a sublinia cum se notează variabila funcţiei test φ.
Exemplul 10.1.3. *Distribuţia nulă* O are proprietatea că

$O(\varphi) = 0_{\mathbb{C}}, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Observaţia 10.1.3. Mulţimea distribuţiilor se descompune ca partiţie a două mulţimi disjuncte:

$\mathcal{D}'(\mathbb{R}) = \mathcal{D}'_r(\mathbb{R}) \cup \mathcal{D}'_s(\mathbb{R})$,

unde $\mathcal{D}'_r(\mathbb{R})$ este *mulţimea distribuţiilor regulare* (*sau mulţimea distribuţiilor de tip funcţie* definite cu ajutorul funcţiilor local integrabile prin (6) ulterior) şi $\mathcal{D}'_s(\mathbb{R})$ este *mulţimea distribuţiilor singulare* (conţine distribuţiile care nu se pot scrie sub forma (6), cu ajutorul unei funcţii local integrabile).

Un exemplu important de distribuţie singulară este distribuţia Dirac.
Definiţia 10.1.8. Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (sau $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$) se numeşte *funcţie local integrabilă pe* $\mathbb{R}$ dacă este integrabilă pe orice interval compact $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Se notează $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$.
Propoziţia 10.1.3. Orice funcţie $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ defineşte o distribuţie, notată $\{f\}$, prin relaţia

$$\langle \{f\}, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \varphi(t)\, dt, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \tag{6}$$

numită *distribuţie (de tip funcţie) generată de f*. De menţionat că integrala este calculată pe suportul compact al unei φ
Exemplul 10.1.4. Dacă $f = \eta$, atunci

$\langle \{\eta\}, \varphi \rangle = \int_0^{\infty} \varphi(t)\, dt, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Integrala se calculează pe $\operatorname{supp}\varphi$.

Exemplul 10.1.5. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, f(t) = c$, unde c este o constantă dată. Atunci

$\langle \{f\}, \varphi \rangle = c \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, dt, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Integrala se calculează pe $\operatorname{supp}\varphi$.

Observaţia 10.1.4. Se poate demonstra că aplicaţia $r : L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ definită prin $r(f) = \{f\}$ din Propoziţia 3 este liniară şi injectivă. Atunci orice funcţie $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ se poate identifica cu distribuţia de tip funcţie asociată $\{f\}$, privind $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ ca submulţime în $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Aplicaţia r devine chiar un izomorfism $\mathbb{C}-$liniar între $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ şi $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Calculul cu distribuţii s-a dezvoltat extinzând operaţii şi formule valabile în $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ la clasa $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ sau la subclase ale acesteia.

Propoziţia 10.1.4. Funcţionala $\delta : D(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$, definită prin

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0), \ \forall \varphi \in D(\mathbb{R}) \tag{7}$$

este o distribuţie, numită *distribuţia Dirac.*

În unele materiale se notează relaţia de definiţie prin "formula de filtrare"

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, \varphi(t)\, dt, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Propoziţia 10.1.5. Distribuţia Dirac nu este de tip funcţie, nu există nicio funcţie $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ care să o genereze în sensul formulei (6).

Propoziţia 10.1.6. Funcţionala $\delta_a : D(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$, definită prin

$$< \delta_a, \varphi >= \varphi(a), \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \tag{8}$$

este o distribuţie, numită *distribuţia Dirac generalizată.*

10.2.Operaţii cu distribuţii (ale algebrei şi ale analizei matematice)

Definiţia 10.2.1. Se numeşte *suma distribuţiilor* $T_1 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ şi $T_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ aplicaţia $T_1 + T_2 : D(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ definită prin

$$\langle T_1 + T_2, \varphi \rangle = \langle T_1, \varphi \rangle + \langle T_2, \varphi \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}). \tag{9}$$

Propoziţia 10.2.1. Dacă T_1 şi T_2 sunt distribuţii, atunci aplicaţia $T_1 + T_2$ este distribuţie, adică:

a) $\langle T_1 + T_2, \varphi \rangle \in \mathbb{C}, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$;

b) $T_1 + T_2$ este liniară;

c) $T_1 + T_2$ este continuă.

Definiţia 10.2.2. Se numeşte *produsul cu un scalar* $\lambda \in \mathbb{C}$ *al distribuţiei* $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ aplicaţia $\lambda T : D(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ definită prin

$$\langle \lambda T, \varphi \rangle = \lambda \langle T, \varphi \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}). \tag{10}$$

Propoziţia 10.2.2. Dacă T este distribuţie şi $\lambda \in \mathbb{C}$, atunci aplicaţia λT este distribuţie, adică:

a) $\langle \lambda T, \varphi \rangle \in \mathbb{C}, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$;

b) λT este liniară;

c) λT este continuă.

Definiţia 10.2.3. Se numeşte *produsul cu funcţia* $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R})$ *al distribuţiei* $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ aplicaţia αT definită prin

$$\langle \alpha T, \varphi \rangle = \langle T, \alpha \varphi \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}). \tag{11}$$

Propoziţia 10.2.3. Dacă T este distribuţie şi $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R})$, atunci aplicaţia $\alpha T : D(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ este distribuţie, adică:

a) $\langle \alpha T, \varphi \rangle \in \mathbb{C}, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$;

Dacă $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R})$ şi $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) = C_0^\infty(\mathbb{R})$ cu topologia convergenţei$\Rightarrow \alpha\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

b) αT este liniară;

c) αT este continuă.

Exemplul 10.2.1. Dacă $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R})$, atunci

$$\langle \alpha\delta_a, \varphi \rangle = \langle \delta_a, \alpha\varphi \rangle = \alpha(a)\, \varphi(a) = \alpha(a) \langle \delta_a, \varphi \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \Rightarrow \boxed{\alpha\delta_a = \alpha(a)\, \delta_a} \tag{12}$$

În particular,

$(i)\, \alpha(t) = t - a \Rightarrow (t - a)\, \delta_a = 0.$

$(ii)\, \alpha(t) = t^4, a = 0 \Rightarrow t^4 \delta = 0.$

Definiţia 10.2.4. Se numeşte *schimbare de variabilă liniară în distribuţii* pentru $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ şi $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0, u = at + b$ aplicaţia definită prin

$$\boxed{\langle T\left(at+b\right),\varphi\left(t\right)\rangle=\tfrac{1}{|a|}\left\langle T\left(u\right),\varphi\left(\tfrac{u-b}{a}\right)\right\rangle,\forall\varphi\in\mathcal{D}\left(\mathbb{R}\right).} \tag{13}$$

Observaţia 10.2.1. Aplicaţia din definiţia anterioară este o distribuţie. În scrierea formulei s-a folosit convenţia din Observaţia 10.1.2.

Observaţia 10.2.2. **a)** $\forall f\in L^1_{\text{loc}}\left(\mathbb{R}\right)$, pentru $T=\{f\}$ relaţia (13) reprezintă o schimbare de variabilă într-o integrală:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}f\left(at+b\right)\varphi\left(t\right)dt=\tfrac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty}f\left(u\right)\varphi\left(\tfrac{u-b}{a}\right)du,\forall\varphi\in\mathcal{D}\left(\mathbb{R}\right).}$$

b) $\forall\varphi\in\mathcal{D}\left(\mathbb{R}\right)$, pentru $T=\delta$ relaţia (13) devine:

$$\langle\delta\left(at+b\right),\varphi\left(t\right)\rangle=\tfrac{1}{|a|}\left\langle\delta\left(u\right),\varphi\left(\frac{u-b}{a}\right)\right\rangle=\frac{1}{|a|}\varphi\left(-\frac{b}{a}\right),\forall\varphi\in\mathcal{D}\left(\mathbb{R}\right)\Rightarrow\boxed{\delta\left(at+b\right)=\frac{1}{|a|}\delta_{-\frac{b}{a}}}$$

În particular,

$(i)\, b=0,a\neq0\Rightarrow\langle\delta\left(at\right),\varphi\left(t\right)\rangle=\dfrac{1}{|a|}\varphi\left(0\right)=\dfrac{1}{|a|}\langle\delta,\varphi\rangle,\forall\varphi\in\mathcal{D}\left(\mathbb{R}\right)\Rightarrow\boxed{\delta\left(at\right)=\dfrac{1}{|a|}\delta}$

$(ii)\, b=0,a=-1\Rightarrow\boxed{\delta\left(-t\right)=\delta\left(t\right)}$

$(iii)\, b\neq0,a=1\Rightarrow\langle\delta\left(t+b\right),\varphi\left(t\right)\rangle=\langle\delta\left(u\right),\varphi\left(u-b\right)\rangle=\varphi\left(-b\right)=\langle\delta_{-b},\varphi\rangle,\forall\varphi\in\mathcal{D}\left(\mathbb{R}\right)\Rightarrow\boxed{\delta\left(t+b\right)=\delta_{-b}}$

Definiţia 10.2.5. Fie $\left(T_n\right)_{n\in\mathbb{N}_m}$ un şir de distribuţii, din $\mathcal{D}'\left(\mathbb{R}\right)$. Se spune că $T_n\overset{\text{în }\mathcal{D}'(\mathbb{R})}{\to}T$ pentru $n\to\infty$ dacă $T_n\left(\varphi\right)\overset{\text{în }\mathbb{C}}{\to}T\left(\varphi\right)$ pentru $n\to\infty$.

Observaţia 10.2.3. $\forall f\in L^1_{\text{loc}}\left(\mathbb{R}\right),f$ derivabilă pe $\mathbb{R}$,

$$\int_{-\infty}^{\infty}f'\left(t\right)\varphi\left(t\right)dt=f\left(t\right)\varphi\left(t\right)\Big|_{t\to-\infty}^{t\to\infty}-\int_{-\infty}^{\infty}f\left(t\right)\varphi'\left(t\right)dt,\forall\varphi\in\mathcal{D}\left(\mathbb{R}\right).$$

Deoarece φ are suport compact,

$$\int_{-\infty}^{\infty}f'\left(t\right)\varphi\left(t\right)dt=-\int_{-\infty}^{\infty}f\left(t\right)\varphi'\left(t\right)dt,\forall\varphi\in\mathcal{D}\left(\mathbb{R}\right).$$

Această observaţie conduce la definirea noţiunii de derivată în sensul distribuţiilor.

Definiţia 10.2.6. Se numeşte *derivata de ordin* $n\in\mathbb{N}$ *a distribuţiei* $T\in\mathcal{D}'\left(\mathbb{R}\right)$ aplicaţia $T^{(n)}:D\left(\mathbb{R}\right)\to\mathbb{C}$ definită prin

$$\boxed{\left\langle T^{(n)},\varphi\right\rangle=\left(-1\right)^n\left\langle T,\varphi^{(n)}\right\rangle,\forall\varphi\in\mathcal{D}\left(\mathbb{R}\right).} \tag{11}$$

Propoziţia 10.2.4. Dacă T este distribuţie şi $n\in\mathbb{N}$, atunci aplicaţia $T^{(n)}$ este distribuţie, adică:

a) $\left\langle T^{(n)},\varphi\right\rangle\in\mathbb{C},\forall\varphi\in\mathcal{D}\left(\mathbb{R}\right)$;

b) $T^{(n)}$ este liniară;

c) $T^{(n)}$ este continuă.

Orice distribuţie are derivate de orice ordin, fiecare derivată fiind tot o distribuţie.

Exemplul 10.2.2. Să se arate că, $\forall n\in\mathbb{N}$

$$\boxed{\left\langle\delta^{(n)},\varphi\right\rangle=\left(-1\right)^n\varphi^{(n)}\left(0\right),\forall\varphi\in\mathcal{D}\left(\mathbb{R}\right).} \tag{12}$$

Într-adevăr, $\forall\varphi\in\mathcal{D}\left(\mathbb{R}\right)$

$$\left\langle\delta^{(n)},\varphi\right\rangle=\left(-1\right)^n\left\langle\delta,\varphi^{(n)}\right\rangle=\left(-1\right)^n\varphi^{(n)}\left(0\right).$$

Exemplul 10.2.3. Să se arate că

$$\boxed{\{\eta\}'=\delta.} \tag{13}$$

Într-adevăr, $\forall\varphi\in\mathcal{D}\left(\mathbb{R}\right)$

$$\left\langle\{\eta\}',\varphi\right\rangle=\left(-1\right)^1\left\langle\{\eta\},\varphi'\right\rangle=-\int_{-\infty}^{\infty}\eta\left(t\right)\varphi'\left(t\right)dt=-\int_{0}^{\infty}\varphi'\left(t\right)dt=\varphi\left(0\right)=\langle\delta,\varphi\rangle.$$

Teorema 10.2.1. Dacă $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ admite derivate de ordin n din $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ şi $f, f', ..., f^{(n-1)}$ au în $t = 0$ un punct de discontinuitate de speţa întâi, atunci

$$\boxed{\{f\}^{(n)} = \left\{f^{(n)}\right\} + \sigma_{n-1}(0)\,\delta + \sigma_{n-2}(0)\,\delta' + ... + \sigma_0(0)\,\delta^{(n-1)},} \tag{14}$$

unde $\sigma_k(0) = f^{(k)}(0+0) - f^{(k)}(0-0), k = \overline{0, n-1}$ este saltul funcţiei $f^{(k)}$ în 0 şi

$$f^{(k)}(0+0) = f^{(k)}_d(0) = \lim_{t\to 0, t>0} f^{(k)}(t) \text{ şi } f^{(k)}(0-0) = f^{(k)}_s(0-0) = \lim_{t\to 0, t<0} f^{(k)}(t).$$

Teorema 10.2.2. **(generalizare)** Dacă $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ admite derivate de ordin n din $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ şi $f, f', ..., f^{(n-1)}$ au în $t = a$ un punct de discontinuitate de speţa întâi, atunci

$$\boxed{\{f\}^{(n)} = \left\{f^{(n)}\right\} + \sigma_{n-1}(a)\,\delta_a + \sigma_{n-2}(a)\,\delta'_a + ... + \sigma_0(a)\,\delta^{(n-1)}_a,} \tag{15}$$

unde $\sigma_k(a) = f^{(k)}(a+0) - f^{(k)}(a-0), k = \overline{0, n-1}$ este saltul funcţiei $f^{(k)}$ în a şi

$$, f^{(k)}(a+0) = f^{(k)}_d(a) = \lim_{t\to a, t>a} f^{(k)}(t) \text{ şi } f^{(k)}(a-0) = f^{(k)}_s(a) = \lim_{t\to a, t<a} f^{(k)}(t)$$

Teorema 10.2.3. **(generalizare)** Dacă $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ este derivabilă pe porţiuni, cu $f' \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ şi f are numai discontinuităţi de speţa întâi în $a_1, ..., a_n$, atunci

$$\boxed{\{f\}' = \{f'\} + \sigma_1(a_1)\,\delta_{a_1} + ... + \sigma_n(a_n)\,\delta_{a_n},} \tag{16}$$

unde $\sigma_k(a_k) = f(a_k+0) - f(a_k-0), k = \overline{1, n}$ este saltul funcţiei f în a_k şi

$$f(a_k+0) = f^{(k)}_d(a_k) = \lim_{t\to a_k, t>a_k} f(t) \text{ şi } f(a_k-0) = f^{(k)}_s(a_k) = \lim_{t\to a_k, t<a_k} f(t).$$

Exemplul 10.2.4. Să se calculeze derivata de ordin $n \in \mathbb{N}$ a distribuţiei de tip funcţie generată de

$$f(t) = \eta(t)\cos(t),$$

unde η este funcţia Heaviside, $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \eta(t) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } t \geq 0 \\ 0, & \text{dacă } t < 0 \end{cases}$.

Rezolvare. Se utilizează Teorema 10.2.1 (cu $a = 0$).

$$f(t) = \begin{cases} \cos t, & \text{dacă } t \geq 0 \\ 0, & \text{dacă } t < 0 \end{cases} \Rightarrow \sigma_0(0) = l_d(0) - l_s(0) = 1.$$

$$f'(t) = \begin{cases} -\sin t, & \text{dacă } t > 0 \\ \nexists, & \text{dacă } t = 0 \\ 0, & \text{dacă } t < 0 \end{cases} \Rightarrow \sigma_1(0) = f'_d(0) - f'_s(0) = 0.$$

$$f''(t) = \begin{cases} -\cos t, & \text{dacă } t > 0 \\ \nexists, & \text{dacă } t = 0 \\ 0, & \text{dacă } t < 0 \end{cases} \Rightarrow \sigma_2(0) = f''_d(0) - f''_s(0) = -1.$$

$$f'''(t) = \begin{cases} \sin t, & \text{dacă } t > 0 \\ \nexists, & \text{dacă } t = 0 \\ 0, & \text{dacă } t < 0 \end{cases} \Rightarrow \sigma_3(0) = f'''_d(0) - f'''_s(0) = 0.$$

$$f^{(4)}(t) = \begin{cases} \cos t, & \text{dacă } t > 0 \\ \nexists, & \text{dacă } t = 0 \\ 0, & \text{dacă } t < 0 \end{cases} \Rightarrow \sigma_4(0) = f^{(4)}_d(0) - f^{(4)}_s(0) = 1.$$

...

$$f^{(4k)}(t) = \begin{cases} \cos t, & \text{dacă } t > 0 \\ \nexists, & \text{dacă } t = 0 \\ 0, & \text{dacă } t < 0 \end{cases} \Rightarrow \sigma_{4k}(0) = f^{(4k)}_d(0) - f^{(4k)}_s(0) = 1.$$

$$f^{(4k+1)}(t) = \begin{cases} -\sin t, & \text{dacă } t > 0 \\ \nexists, & \text{dacă } t = 0 \\ 0, & \text{dacă } t < 0 \end{cases} \Rightarrow \sigma_{4k+1}(0) = f^{(4k+1)}_d(0) - f^{(4k+1)}_s(0) = 0.$$

$$f^{(4k+2)}(t)=\begin{cases}-\cos t, & \text{dacă } t>0\\ \nexists, & \text{dacă } t=0\\ 0, & \text{dacă } t<0\end{cases}\Rightarrow \sigma_{4k+2}(0)=f_d^{(4k+2)}(0)-f_s^{(4k+2)}(0)=-1.$$
$$f^{(4k+3)}(t)=\begin{cases}\sin t, & \text{dacă } t>0\\ \nexists, & \text{dacă } t=0\\ 0, & \text{dacă } t<0\end{cases}\Rightarrow \sigma_{4k+3}(0)=f_d^{(4k+3)}(0)-f_s^{(4k+3)}(0)=0.$$
...

Atunci, conform Teoremei 10.2.1, pentru

$n\in\mathbb{N}=\{4k;k\in\mathbb{N}\}\cup\{4k+1;k\in\mathbb{N}\}\cup\{4k+2;k\in\mathbb{N}\}\cup\{4k+3;k\in\mathbb{N}\}\Rightarrow$

$\{f\}^{(4k)}=\{\eta(t)\cos t\}+\sigma_{4k-1}(0)\delta+\sigma_{4k-2}(0)\delta'+\sigma_{4k-3}(0)\delta''+...+\sigma_0(0)\delta^{(4k-1)}=$
$=\{\eta(t)\cos t\}+0\cdot\delta-1\cdot\delta'+0\cdot\delta''+...+1\cdot\delta^{(4k--1)}.$

$\{f\}^{(4k+1)}=\{-\eta(t)\sin t\}+\sigma_{4k}(0)\delta+\sigma_{4k-1}(0)\delta'+\sigma_{4k-2}(0)\delta''+...+\sigma_0(0)\delta^{(4k)}=$
$=\{-\eta(t)\sin t\}+1\cdot\delta+0\cdot\delta'-1\cdot\delta''+...+1\cdot\delta^{(4k)}.$

$\{f\}^{(4k+2)}=\{-\eta(t)\cos t\}+\sigma_{4k+1}(0)\delta+\sigma_{4k}(0)\delta'+\sigma_{4k-1}(0)\delta''+...+\sigma_0(0)\delta^{(4k+1)}=$
$=\{-\eta(t)\cos t\}+0\cdot\delta+1\cdot\delta'+0\cdot\delta''+...+1\cdot\delta^{(4k+1)}.$

$\{f\}^{(4k+3)}=\{\eta(t)\sin t\}+\sigma_{4k+2}(0)\delta+\sigma_{4k+1}(0)\delta'+\sigma_{4k}(0)\delta''+...+\sigma_0(0)\delta^{(4k+2)}=$
$=\{\eta(t)\sin t\}-1\cdot\delta+0\cdot\delta'+1\cdot\delta''+...+1\cdot\delta^{(4k+2)}.$

S-a folosit:

-identificarea distribuţiilor de tip funcţie pentru funcţii egale a.p.t. Adică
$f^{(4)}=\eta(t)\cos t$ egale, ca funcţii, doar a.p.t. (în $t=0,\nexists f^{(4)}(0)$ şi $\eta(t)\cos t|_{t=0}=1$), dar
$\{f^{(4)}(t)\}=\{\eta(t)\cos t\}$ egale, ca distribuţii, peste tot.

-periodicitatea

$\sigma_{4k-1}(0)=\sigma_{4k+3}(0)=\sigma_3(0)=0$
$\sigma_{4k-2}(0)=\sigma_{4k+2}(0)=\sigma_2(0)=-1$
$\sigma_{4k-3}(0)=\sigma_{4k+1}(0)=\sigma_1(0)=0$
$\sigma_{4k-4}(0)=\sigma_{4k}(0)=\sigma_0(0)=1$

-derivatele distribuţiei Dirac sunt date de (12)

$\left\langle\delta^{(n)},\varphi\right\rangle=(-1)^n\varphi^{(n)}(0),\forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}).$

Se defineşte produsul de convoluţie a două funcţii din $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, chiar oarecare, nu numai din $L^1(\mathbb{R})$, ca la transformata Fourier.

Definiţia 10.2.7. Se reaminteşte de la Transformata Fourier:

a) O funcţie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (sau $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$) se numeşte *funcţie absolut integrabilă pe* $\mathbb{R}$ sau *funcţie din* $L^1(\mathbb{R})$ dacă

$\exists\int_{\mathbb{R}}|f(t)|\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\,dt<+\infty.$

b) O funcţie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (sau $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$) se numeşte *funcţie local integrabilă pe* $\mathbb{R}$ sau *funcţie din* $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ dacă este integrabilă pe orice interval compact din $\mathbb{R}$.

Observaţia 10.2.5. S-a arătat că orice funcţie absolut integrabilă pe $\mathbb{R}$ este şi local integrabilă pe $\mathbb{R}$. Reciproca nu este adevărată.

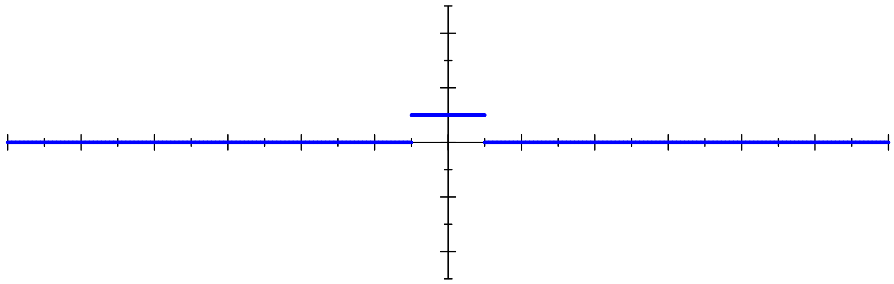
Definiţia 10.2.8. Fie $f,g\in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$. Se numeşte *produs de convoluţie a funcţiilor* f *şi* g *din* $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ funcţia $f*g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (sau $f*g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$), definită prin

$$\boxed{h(t)=(f*g)(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t-\tau)\,g(\tau)\,d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau,}$$

dacă integralele ce apar sunt convergente. În caz de convergenţă f şi g se numesc *convolutabile.*

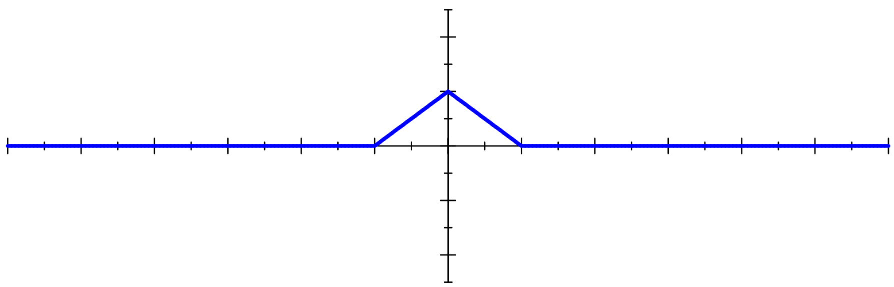
Observaţia 10.2.6. **a)** Operaţia de convoluţie $*$, în caz de bine definire, este comutativă. Se face schimbarea de variabilă de integrare $t-\tau=s$.

b) Fie semnalul rectangular cu $\tau=1$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(t)=\begin{cases}1, & \text{dacă } |t|\le 1\\ 0, & \text{dacă } |t|>1\end{cases}$.



La transformata Fourier, s-a observat că produsul de convoluţie a semnalului rectangular cu el însuşi este unul triunghiular

$$(f*f)(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\,f(t-\tau)\,d\tau=\begin{cases}0 & \text{dacă } t\in\,]-\infty,2[\\ 2+t, & \text{dacă } t\in[-2,0]\\ 2-t, & \text{dacă } t\in\,]0,2]\\ 0 & \text{dacă } t\in\,]2,+\infty[\end{cases}.$$



Produsul de convoluţie are efect regularizant, f fiind discontinuă, iar $f*f$ continuă.

c) Fie $f\in L^1(\mathbb{R}), g=\eta$. Atunci $\exists\,(f*\eta)(t)=(\eta*f)(t)=\displaystyle\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\,d\tau, \forall t\in\mathbb{R}$.

d) Fie $f,g\in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ cu $f(t)=0,\forall t<0$ şi $g(t)=0,\forall t<0$. Atunci

$\boxed{(f*g)(t)=\eta(t)\int_0^t f(t-\tau)\,g(\tau)\,d\tau=\eta(t)\int_0^t f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau,}$ unde $\eta:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \eta(t)=\begin{cases}1, & \text{dacă } t\ge 0\\ 0, & \text{dacă } t<0\end{cases}$.

e) $f\in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}), g=\delta_\varepsilon$ impulsul unitar impur aplicat în 0,

$\delta_\varepsilon:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \delta_\varepsilon(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\varepsilon}, & \text{dacă } t\in[0,0+\varepsilon]\\ 0, & \text{în rest}\end{cases}$

depinzând de lungimea mică a intervalului de aplicare $\varepsilon>0$. Atunci

$\boxed{(f*\delta_\varepsilon)(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\,\delta_\varepsilon(t-\tau)\,d\tau=\frac{1}{\varepsilon}\int_{t-\varepsilon}^{t} f(\tau)\,d\tau,}$

adică este tocmai media lui f pe $[t-\varepsilon,t]$.

Propoziţia 10.2.5.(**clase de funcţii convolutabile**)

a) Fie $f,g\in L^1(\mathbb{R})$. Atunci $\exists f*g\in L^1(\mathbb{R})$ şi

$\|f*g\|_{L^1(\mathbb{R})}\le\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}\cdot\|g\|_{L^1(\mathbb{R})}$.

b) Fie $f\in L^1(\mathbb{R})$ şi g mărginită, adică $\exists M>0$ a.î. $|g(t)|<M,\forall t\in\mathbb{R}$. Atunci $\exists f*g$ şi

$|(f*g)(t)|\le M\,\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}, \forall t\in\mathbb{R}$.

c) Fie $f\in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ şi $g\in L^1(\mathbb{R})$ cu $\operatorname{supp} g$ compact. Atunci $\exists f*g\in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$. În plus dacă f şi g

au supp conţinut în $[a, b]$, atunci $\operatorname{supp}(f * g) \subset [2a, 2b]$.
d) Fie $f, g, h \in L^1(\mathbb{R})$. Atunci $\exists f * g \in L^1(\mathbb{R})$, $\exists f * (g * h) \in L^1(\mathbb{R})$, $\exists f * (g + h) \in L^1(\mathbb{R})$ şi
$f * g = g * f$ (comutativitate);
$f * (g * h) = (f * g) * h$ (asociativitate)
$f * (g + h) = f * g + f * h$ (distributivitate în raport cu adunarea)
Operaţia $*$ nu are element neutru în $L^1(\mathbb{R})$. În $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, δ va fi element neutru.
e) Fie $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. Atunci $\exists f * g$ este continuă şi
$|(f * g)(t)| \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \cdot \|g\|_{L^1(\mathbb{R})}, \forall t \in \mathbb{R}$.
f) Fie $f \in L^1(\mathbb{R}), g \in L^2(\mathbb{R})$. Atunci $\exists f * g \in L^2(\mathbb{R})$ şi
$\|f * g\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \cdot \|g\|_{L^2(\mathbb{R})}$.
g) Fie f, g continue pe porţiuni şi cu supp compact (respectiv pozitiv). Atunci $\exists f * g$ continuă şi cu supp compact (respectiv pozitiv).

Observaţia 10.2.7. Există o serie de proprietăţi care leagă convoluţia de derivare, dar nu sunt puse în evidenţă aici.

Observaţia 10.2.8. Pentru a defini noţiunea de convoluţie a două distribuţii, se presupune iniţial că ele sunt de tip funcţie, $T = \{f\}$, $S = \{g\}$, unde $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Se determină $\{h\}$, unde $h = f * g$.

$$\langle \{h\}(s), \varphi(s) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} h(s) \varphi(s)\, ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(s - \tau) g(\tau)\, d\tau \right) \varphi(s)\, ds.$$

Cum f, g sunt absolut integrabile pe $\mathbb{R}$, ultima integrală converge absolut şi se poate schimba ordinea de integrare:

$$\langle \{h\}(s), \varphi(s) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(s - \tau) g(\tau) \varphi(s)\, ds \right) d\tau.$$

Se face schimbarea de variabilă de integrare $s - \tau = t$, de unde

$$\langle \{h\}, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(\tau) \varphi(t + \tau)\, ds \right) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \varphi(t + \tau)\, ds \right) d\tau =$$
$$= \langle \{g\}(\tau), \langle \{f\}(t), \varphi(t + \tau) \rangle \rangle.$$

Relaţia anterioară permite generalizarea la cazul a două distribuţii oarecare T şi S.

Definiţia 10.2.10. Se numeşte *produs de convoluţie a distribuţiilor* $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ şi $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ aplicaţia $T * S$ definită prin

$$\langle T * S, \varphi \rangle = \langle S(\tau), \langle T(t), \varphi(t + \tau) \rangle \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \tag{18}$$

în ipoteza că funcţionala din membrul drept defineşte o distribuţie, adică funcţia $\psi(\tau) = \langle T(t), \varphi(t + \tau) \rangle$ este din $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ şi $T * S$ este liniară şi continuă. Dacă există $T * S$, distribuţiile T şi S se numesc *convolutabile*.

Observaţia 10.2.9. **a)** Dacă T şi S sunt distribuţii, atunci aplicaţia $T * S$ poate să nu fie bine definită sau să nu fie o distribuţie.
b) Dacă T şi S sunt distribuţii a.î. $\exists T * S$, atunci $\exists S * T$ şi $T * S = S * T$, adică
$\langle T * S, \varphi \rangle = \langle T(t), \langle S(\tau), \varphi(t + \tau) \rangle \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Propoziţia 10.2.6. **(clase de distribuţii convolutabile)**
a) Fie $T, S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ distribuţii regulare generate de funcţii $T = \{f\}, S = \{g\}$, cu $f, g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ pentru care $\exists f * g$. Atunci $\exists T * S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ şi

$$\boxed{\{f\} * \{g\} = \{f * g\}.} \tag{19}$$

b) Fie $T, S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ distribuţii a.î. T sau S este δ sau o derivată a sa. Atunci aplicaţia $T * S$ este bine definită şi $T * S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
c) Fie $T, S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ distribuţii cu $\operatorname{supp} T \subseteq [a, \infty[$, $\operatorname{supp} S \subseteq [a, \infty[$ sau $\operatorname{supp} T \subseteq]-\infty, b]$, $\operatorname{supp} S \subseteq]-\infty, b]$, cu $a, b \in \mathbb{R}$. Atunci aplicaţia $T * S$ este bine definită şi $T * S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Propoziţia 10.2.8. **a)** $\forall T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $\exists T * \delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ şi

$\boxed{T * \delta = \delta * T = T,}$

adică δ *este element neutru în* $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ la operaţia $*$.

b) Fie $T, S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ distribuţii a.î. $\exists T * S$. Atunci $\exists T * S^{(k)}$, $\exists T^{(k)} * S$ şi

$\boxed{(T * S)^{(k)} = T^{(k)} * S = T * S^{(k)} = S * T^{(k)} = S^{(k)} * T, \forall k \in \mathbb{N}.}$

În particular,

$\boxed{T * \delta^{(k)} = \delta^{(k)} * T = T^{(k)}, \forall k \in \mathbb{N}.}$

c) Convoluţia a trei distribuţii, cel puţin două având supp compact (respectiv pozitiv), este asociativă. În general, *nu este asociativă.*

De exemplu, $T = \{1\}, S = \delta'$ şi $H = \{\eta\}$.

$T * S = \{1\} * \delta' = \{1\}' * \delta = \{1\}' = \{1'\} = \{0\} \Rightarrow$

$\Rightarrow (T * S) * H = \{0\} * \{\eta\} = \{0 * \eta\} = \{0\} = 0_{\mathcal{D}'(\mathbb{R})}$.

$S * H = \delta' * \{\eta\} = \delta * \{\eta\}' = \delta * \delta = \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow T * (S * H) = \{1\} * \delta = \{1\} \neq 0_{\mathcal{D}'(\mathbb{R})}$.

Dar $\operatorname{supp}\{1\} = \mathbb{R}, \operatorname{supp}\delta' = \{0\}$ şi $\operatorname{supp}\{\eta\} = [0, \infty[$.

Exemplul 10.2.5. Să se calculeze convoluţia distribuţiilor de tip funcţie generate de

$f(t) = \eta(t)\, t^2$ şi $g(t) = \eta(t) \sin t$,

unde η este funcţia Heaviside $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \eta(t) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } t \geq 0 \\ 0, & \text{dacă } t < 0 \end{cases}$.

Rezolvare. Se explicitează

$$f(t) = \eta(t)\, t^2 = \begin{cases} t^2, & \text{dacă } t \geq 0 \\ 0, & \text{dacă } t < 0 \end{cases} \text{ şi } g(t) = \eta(t) \sin t = \begin{cases} \sin t, & \text{dacă } t \geq 0 \\ 0, & \text{dacă } t < 0 \end{cases}.$$

Conform Propoziţiei 10.2.6 $\Rightarrow$

$\{f\} * \{g\} = \{f * g\}$.

Se calculează convoluţia celor două funcţii. Conform Observaţiei 10.2.6., $d) \Rightarrow$

$(f * g)(t) = \eta(t) \int_0^t f(t - \tau)\, g(\tau)\, d\tau = \eta(t) \int_0^t f(\tau)\, g(t - \tau)\, d\tau$.

Pentru $t < 0 \Rightarrow (f * g)(t) = 0 \cdot \displaystyle\int_0^t f(\tau)\, g(t - \tau)\, d\tau = 0$.

$$\text{Pentru } t \geq 0 \Rightarrow (f * g)(t) = \int_0^t \tau^2 \sin(t - \tau)\, d\tau = \int_0^t \tau^2 \tfrac{d}{d\tau}(+\cos(t - \tau))\, d\tau =$$

$$= \tau^2 \cos(t - \tau)\Big|_{\tau=0}^{\tau=t} - \int_0^t 2\tau \cos(t - \tau)\, d\tau = t^2 \cos 0 - 2\int_0^t \tau \tfrac{d}{d\tau}\left(\frac{\sin(t - \tau)}{-1}\right) d\tau =$$

$$= t^2 - 2\left(\tau \frac{\sin(t - \tau)}{-1}\Bigg|_{\tau=0}^{\tau=t} - \int_0^t 1 \cdot \frac{\sin(t - \tau)}{-1} d\tau\right) = t^2 + 2\left(t \sin 0 - 0 - \cos(t - \tau)\big|_{\tau=0}^{\tau=t}\right) =$$

$= t^2 + 2(-\cos 0 + \cos t)$.

Deci $(f * g)(t) = \eta(t)\left(t^2 - 2 + 2\cos t\right)$.

Atunci $\{f\} * \{g\} = \left\{\eta(t)\left(t^2 - 2 + 2\cos t\right)\right\}$.