CURS NR. 12
Matematici Speciale, AIA

10.3. Ecuaţii diferenţiale liniare în distribuţii

Ecuaţii diferenţiale cu coeficienţi variabili
Preliminarii 10.3.1. a) Fie ecuaţia diferenţială în distribuţii (în $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$)

$$\boxed{a_0T^{(n)} + a_1T^{(n-1)} + ... + a_nT = S,} \tag{1}$$

unde $a_0, ..., a_n \in C^\infty(\mathbb{R})$ sunt funcţii date (coeficienţi variabili), $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ este o distribuţie dată (termen liber), iar $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ este distribuţia necunoscută.

b) Se consideră operatorul diferenţial în distribuţii

$$L(T) = a_0T^{(n)} + a_1T^{(n-1)} + ... + a_nT, \tag{2}$$

unde $a_0, ..., a_n$ sunt funcţii de clasă $C^\infty(\mathbb{R})$, $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ este distribuţie. Este un operator liniar. Atunci ecuaţia (1) devine

$$\boxed{L(T) = S}$$

Definiţia 10.3.1. Se numeşte *soluţie fundamentală a operatorului diferenţial* L o distribuţie E care satisface ecuaţia diferenţială

$$\boxed{L(E) = \delta.} \tag{3}$$

Observaţia 10.3.1. a) Două soluţii fundamentale ale operatorului diferenţial L diferă printr-o soluţie a ecuaţiei omogene cu necunoscuta funcţie x, $Lx = 0$. Într-adevăr,

$L(E_1) = \delta, L(E_2) = \delta \Rightarrow L(E_1 - E_2) = 0 \Rightarrow E_1 - E_2$ este soluţie a ecuaţiei $Lx = 0$.

b) Soluţia ecuaţiei în distribuţii (3) este

$$E = E_0 + \left\{ \sum_{j=1}^{n} c_j x_j(t) \right\}, \text{ unde}$$

- E_0 este o soluţie fundamentală a lui L,
- $(x_1, ..., x_n)$ este un sistem fundamental de soluţii ale ecuaţiei omogene

$\boxed{Lx = 0}$, adică $\boxed{a_0(t)\, x^{(n)}(t) + a_1(t)\, x^{(n-1)}(t) + ... + a_n(t)\, x(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}.}$

O soluţie particulară E a operatorului L, adică a ecuaţiei $L(E) = \delta$, este dată de:

Teorema 10.3.1. Dacă $a_0(t) \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}$ şi $x = x(t)$ este soluţia problemei Cauchy

$$\boxed{\begin{cases} a_0x^{(n)} + a_1x^{(n-1)} + ... + a_nx = 0, \forall t \in \mathbb{R} \\ CI : x(0) = x'(0) = ... = x^{(n-2)}(0) = 0,\ x^{(n-1)}(0) = \dfrac{1}{a_0(0)}, \end{cases}} \tag{4}$$

atunci distribuţia $E = \{\eta x\}$ generată de funcţia $\eta(t)\, x(t)$ este soluţie fundamentală a operatorului L, unde $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \eta(t) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } t \geq 0 \\ 0, & \text{dacă } t < 0 \end{cases}$ este funcţia Heaviside.

Ecuaţii diferenţiale cu coeficienţi constanţi
Preliminarii 10.3.2. a) Fie ecuaţia diferenţială liniară în distribuţii (în $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$)

$$\boxed{a_0T^{(n)} + a_1T^{(n-1)} + ... + a_nT = S,} \tag{5}$$

unde $a_0, ..., a_n \in \mathbb{R}$ sunt numere date (coeficienţi constanţi), $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ este o distribuţie dată (termen liber), iar $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ este distribuţia necunoscută.

b) Se consideră operatorul diferenţial în distribuţii

$$L(T) = a_0T^{(n)} + a_1T^{(n-1)} + ... + a_nT, \tag{6}$$

unde $a_0, ..., a_n \in \mathbb{R}$, $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ este distribuţie. Este un operator liniar. Atunci ecuaţia (5) devine

$\boxed{L(T) = S}$

Teorema 10.3.2. Fie $S \in D'(\mathbb{R})$ o distribuţie dată şi E o soluţie fundamentală a operatorului L. Dacă $S * E$ are sens, atunci soluţia ecuaţiei (5) există şi este unică, dată de

$$\boxed{T = S * E.} \tag{7}$$

Exemplul 10.3.1. Să se rezolve ecuaţia diferenţială în distribuţii

$T''' - T'' - T' + T = \delta''$.

Rezolvare. Este ecuaţie diferenţială în distribuţii, de ordin $n = 3$, liniară, cu $1, -1, -1, 1$ coeficienţi constanţi, cu $S = \delta''$ distribuţie dată şi $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ distribuţia necunoscută.

Etapa 1 : Se determină o soluţie fundamentală a operatorului liniar

$L(T) = T''' - T'' - T' + T$,

adică o distribuţie $E =?$ care satisface ecuaţia diferenţială

$L(E) = \delta$.

Pasul 1 : Se determină soluţia generală a ecuaţiei omogene cu soluţii funcţii ataşate, adică a ecuaţiei:

$(*_{EO})\, x''' - x'' - x' + x = 0, t \in \mathbb{R}$.

•Se ataşează ecuaţiei diferenţiale $(*_{EO})$ ecuaţia ei caracteristică şi se rezolvă:

$$(*_{EC})\ \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 (\lambda + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \text{ cu } m(\lambda_1) = 2, \\ \lambda_2 = -1 \text{ cu } m(\lambda_2) = 1. \end{cases}$$

•Pentru fiecare rădăcină a ecuaţiei caracteristice găsim corespunzător soluţii particulare liniar independente ale ecuaţiei omogene $(*_{EO})$, după algoritmul dat la EDCO:

$$\lambda_1 = 1 \text{ cu } m(\lambda_1) = 2 \rightsquigarrow \begin{cases} x_1(t) = e^{1t}, \\ x_2(t) = te^{1t}. \end{cases}$$

$$\lambda_2 = -1 \text{ cu } m(\lambda_2) = 1 \rightsquigarrow \left\{ x_3(t) = e^{-1t}. \right.$$

•$B = (x_1, x_2, x_3)$ este un sistem fundamental de soluţii pentru $(*_{EO})$ (sunt exact 3 soluţii particulare pentru $(*_{EO})$ şi funcţii liniar independente). Soluţia generală a ecuaţiei $(*_{EO})$ este

$x_o(t; c_1, c_2, c_3) = c_1 e^{1t} + c_2 t e^{1t} + c_3 e^{-1t}, \forall t \in \mathbb{R}$ şi $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

Pasul 2 : Se determină soluţia problemei Cauchy

$$\begin{cases} (*_{EO})\, x''' - x'' - x' + x = 0, t \in \mathbb{R}. \\ CI : x(0) = x'(0) = 0,\ x''(0) = \dfrac{1}{1} \end{cases}$$

Se impun condiţiile iniţiale asupra soluţiei x găsite

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 e^{-t} \\ x'(t) = c_1 e^t + c_2 (t+1) e^t + c_3 \left(-e^{-t}\right) \\ x''(t) = c_1 e^t + c_2 (t+2) e^t + c_3 e^{-t} \end{cases} \underset{\begin{cases} x(0) = 0 \\ x'(0) = 0 \\ x''(0) = 1 \end{cases}}{\overset{CI}{\Rightarrow}} \begin{cases} c_1 1 + c_2 0 + c_3 1 = 0 \\ c_1 1 + c_2 1 - c_3 1 = 0 \\ c_1 1 + c_2 2 + c_3 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} c_1 + c_3 = 0 \\ c_1 + c_2 - c_3 = 0 \\ c_1 + 2c_2 + c_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -\frac{1}{4} \\ c_2 = \frac{1}{2} \\ c_3 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Atunci

$x(t) = -\frac{1}{4} e^t + \frac{1}{2} t e^t + \frac{1}{4} e^{-t}, \forall t \in \mathbb{R}$,

este unica soluţie a ecuaţiei $(*_{EO})$ ce verifică CI date.

Pasul 3 : O soluţie fundamentală a operatorului L este

$E = \{\eta(t)\, x(t)\} = \left\{\eta(t) \left(-\frac{1}{4} e^t + \frac{1}{2} t e^t + \frac{1}{4} e^{-t}\right)\right\}$.

Etapa 2 : Soluţia ecuaţiei date este

$T = S * E = \delta'' * \left\{\eta(t) \left(-\frac{1}{4} e^t + \frac{1}{2} t e^t + \frac{1}{4} e^{-t}\right)\right\}$.

Conform Propoziţiei 10.2.8,

$T = \delta'' * \{\eta(t)\,x(t)\} = \delta * \{\eta(t)\,x(t)\}'' = \{\eta(t)\,x(t)\}''.$

Conform Teoremei de derivare a distribuţiilor regulare,

$\{\eta(t)\,x(t)\}'' = \left\{(\eta(t)\,x(t))''\right\} + \sigma_1(0)\,\delta + \sigma_0(0)\,\delta',$

unde $\sigma_0(0)$ este saltul funcţiei $\eta(t)\,x(t)$ în $a = 0, \sigma_1(0)$ este saltul funcţiei $(\eta(t)\,x(t))'$ în $a = 0$.

$$\eta(t)\,x(t) = \begin{cases} -\frac{1}{4}e^t + \frac{1}{2}te^t + \frac{1}{4}e^{-t}, & \text{dacă } t \geq 0 \\ 0, & \text{dacă } t < 0 \end{cases} \Rightarrow \sigma_0(0) = l_d(0) - l_s(0) = 0.$$

$$(\eta(t)\,x(t))' = \begin{cases} -\frac{1}{4}e^t + \frac{1}{2}(t+1)\,e^t - \frac{1}{4}e^{-t}, & \text{dacă } t > 0 \\ 0, & \text{dacă } t = 0 \\ 0, & \text{dacă } t < 0 \end{cases} \Rightarrow \sigma_1(0) = f_d'(0) - f_s'(0) = 0.$$

$$(\eta(t)\,x(t))'' = \begin{cases} -\frac{1}{4}e^t + \frac{1}{2}(t+2)\,e^t + \frac{1}{4}e^{-t}, & \text{dacă } t > 0 \\ \nexists, & \text{dacă } t = 0 \\ 0, & \text{dacă } t < 0 \end{cases}.$$

Atunci, folosind identificarea distribuţiilor de tip funcţie pentru funcţii egale a.p.t.,

$T = \left\{(\eta(t)\,x(t))''\right\} + 0\delta + 0\delta' = \left\{\eta(t)\left(\frac{3}{4}e^t + \frac{1}{2}te^t + \frac{1}{4}e^{-t}\right)\right\}.$

Exemplul 10.3.2. Să se rezolve ecuaţia diferenţială în distribuţii

$T'' + T = \{\eta(t)\cos t\}.$

Rezolvare. Este ecuaţie diferenţială în distribuţii, de ordin $n = 2$, liniară, cu $1, 0, 1$ coeficienţi constanţi, cu $S = \{\eta(t)\cos t\}$ distribuţie dată şi $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ distribuţia necunoscută.

Etapa 1 : Se determină o soluţie fundamentală a operatorului liniar

$L(T) = T'' + T,$

adică o distribuţie $E =?$ care satisface ecuaţia diferenţială

$L(E) = \delta.$

Pasul 1 : Se determină soluţia generală a ecuaţiei omogene cu soluţii funcţii ataşate, adică a ecuaţiei:

$(*_{EO})\, x'' + x = 0, t \in \mathbb{R}.$

•Se ataşează ecuaţiei diferenţiale $(*_{EO})$ ecuaţia ei caracteristică şi se rezolvă:

$(*_{EC})\ \lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 1)^2 = 0 \Rightarrow \{\lambda_{1,2} = 0 \pm \mathrm{j}\ \text{ cu } m(\lambda_{1,2}) = 1.$

•Pentru fiecare rădăcină a ecuaţiei caracteristice se găsesc corespunzător soluţii particulare liniar independente ale ecuaţiei omogene $(*_{EO})$, după algoritmul dat la EDCO:

$$\lambda_{1,2} = 0 \pm \mathrm{j} \text{ cu } m(\lambda_{1,2}) = 1 \rightsquigarrow \begin{cases} x_1(t) = e^{0t}\cos(1t), \\ x_2(t) = e^{0t}\sin(1t). \end{cases}$$

•$B = (x_1, x_2)$ este un sistem fundamental de soluţii pentru $(*_{EO})$ (sunt exact 2 soluţii particulare pentru $(*_{EO})$ şi funcţii liniar independente). Soluţia generală a ecuaţiei $(*_{EO})$ este

$x_o(t; c_1, c_2) = c_1\cos t + c_2\sin t, \forall t \in \mathbb{R}$ şi $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Pasul 2 : Se determină soluţia problemei Cauchy

$$\begin{cases} (*_{EO})\, x'' + x = 0, t \in \mathbb{R}. \\ CI : x(0) = 0,\ x'(0) = \dfrac{1}{1} \end{cases}$$

Se impun condiţiile iniţiale asupra soluţiei x găsite

$$\begin{cases} x(t) = c_1\cos t + c_2\sin t \\ x'(t) = c_1(-\sin t) + c_2\cos t \end{cases} \underset{\begin{cases} x(0) = 0 \\ x'(0) = 1 \end{cases}}{\overset{CI}{\Rightarrow}} \begin{cases} c_1 1 + c_2 0 = 0 \\ c_1 0 + c_2 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 1 \end{cases}$$

Atunci $x(t) = \sin t, \forall t \in \mathbb{R}$, este unica soluţie a ecuaţiei $(*_{EO})$ ce verifică CI date.

Pasul 3 : O soluţie fundamentală a operatorului L este

$E = \{\eta(t)\,x(t)\} = \{\eta(t)\sin t\}.$

Etapa 2 : Soluţia ecuaţiei date este

$T = S * E = \{f\} * \{g\} \overset{\text{Propoziţia 10.2.6}}{=} \{f * g\}$,unde

$f(t) = \eta(t)\cos t = \begin{cases} \cos t, & \text{dacă } t \geq 0 \\ 0, & \text{dacă } t < 0 \end{cases}$ şi $g(t) = \eta(t)\sin t = \begin{cases} \sin t, & \text{dacă } t \geq 0 \\ 0, & \text{dacă } t < 0 \end{cases}$.

Se calculează convoluţia celor două funcţii $(f * g)(t) = ?$

$(f * g)(t) \overset{\text{Obs. 10.2.6.,}d)}{=} \eta(t) \int_0^t f(t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau = \eta(t) \int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau.$

Pentru $t < 0 \Rightarrow (f * g)(t) = 0.$

Pentru $t \geq 0 \Rightarrow (f * g)(t) = \int_0^t \cos\tau \sin(t-\tau)\, d\tau =$

$$= \int_0^t \frac{\sin(t-\tau+\tau) + \sin(t-\tau-\tau)}{2} d\tau = \tfrac{1}{2}\int_0^t (\sin t + \sin(t-2\tau))\, d\tau =$$

$$= \tfrac{1}{2}\left((\tau \sin t)\Big|_{\tau=0}^{\tau=t} + \left.\tfrac{-\cos(t-2\tau)}{-2}\right|_{\tau=0}^{\tau=t} \right) = \tfrac{1}{2}\left((t\sin t - 0) + \tfrac{-\cos(-t)+\cos t}{-2} \right) = \tfrac{1}{2}(t \sin t).$$

Atunci $T = \left\{ \eta(t)\, \tfrac{1}{2}(t \sin t) \right\}.$