CURS NR. 2
Matematici Speciale, AIA

2.1. Câmp vectorial: linii de câmp, suprafeţe de câmp

Definiţia 2.1.1.
a) Se numeşte *câmp vectorial* o funcţie $\overrightarrow{\mathbf{v}}: D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{V}_3$, unde D este un domeniu, $\mathbb{V}_3$ este mulţimea vectorilor tridimensionali şi

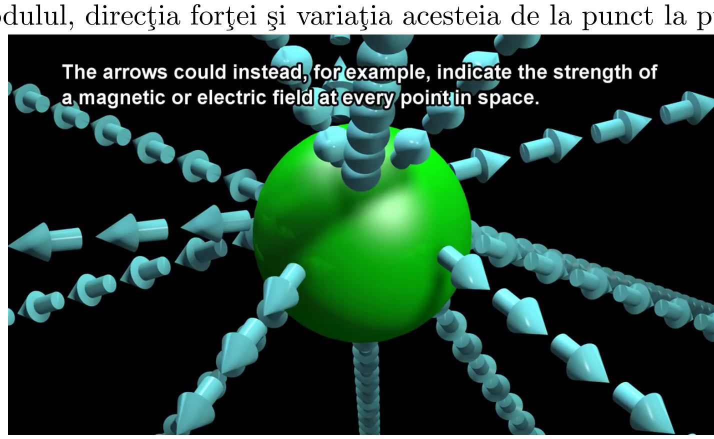
$\overrightarrow{\mathbf{v}}(x,y,z) = v_1(x,y,z)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + v_2(x,y,z)\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + v_3(x,y,z)\,\overrightarrow{\mathbf{k}}.$

Funcţiile componente v_1, v_2, v_3 sunt câmpuri scalare.
b) Se numeşte *linie de câmp* a câmpului vectorial $\overrightarrow{\mathbf{v}}: D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{V}_3$ orice curbă din domeniul D care este tangentă în fiecare punct al său la câmpul vectorial $\overrightarrow{\mathbf{v}}$.
c) Se numeşte *suprafaţă de câmp* a câmpului vectorial $\overrightarrow{\mathbf{v}}: D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{V}_3$ orice suprafaţă generată de liniile de câmp.
Comentariul 2.1.1. Condiţia ca D să fie domeniu (mulţime deschisă şi conexă) se impune pentru definirea riguroasă a unor condiţii de regularitate asupra câmpului (de continuitate, de clasă $\mathcal{C}^1$).

Se notează cu P punctul din $D \subseteq \mathbb{R}^3$ de coordonate (x,y,z) şi se scrie $\overrightarrow{\mathbf{v}}(P)$ în loc de $\overrightarrow{\mathbf{v}}(x,y,z)$, mai ales la punerea în evidenţă a unor interpretări fizice, în care dependenţa este legată de punct şi mai puţin de coordonatele sale.
Exemplul 2.1.1. A se vedea 3Blue1Brown, "Divergence and curl: The language of Maxwell's equations, fluid flow, and more",

https://www.youtube.com/watch?v=rB83DpBJQsE&t=699s,

minutele 0-1.48 pentru exemple. Restul filmului de vizionat pentru C3.
a) Câmpul vitezelor particulelor (punctelor) unui fluid dintr-un recipient este un câmp vectorial (indică viteza şi direcţia de curgere a fluidului).
b) Câmpul forţelor electrice, magnetice sau **gravitaţionale** este un câmp vectorial (indică modulul, direcţia forţei şi variaţia acesteia de la punct la punct).

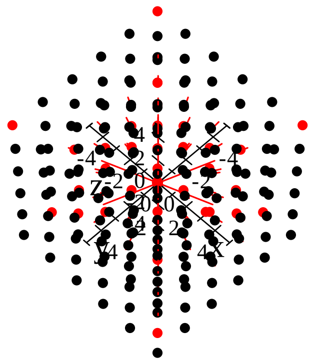


c) Fie O un punct material fixat. Atunci **câmpul atracţiilor newtoniene** realizate de O este un câmp vectorial pe $D = \mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$

$$\overrightarrow{\mathbf{v}}: D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{V}_3,\ \overrightarrow{\mathbf{v}}(P) = -\frac{k}{r^3(P)}\overrightarrow{\mathbf{r}}(P),$$

unde $\overrightarrow{\mathbf{r}}(P)$ este vectorul de poziţie a lui P şi $r = \left\|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right\|$. Alegând un reper ortogonal $Oxyz$, se poate scrie:

$$\overrightarrow{\mathbf{v}}\,(P)=\overrightarrow{\mathbf{v}}\,(x,y,z)=\frac{-k}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}\left(x\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}+z\,\overrightarrow{\mathbf{k}}\right).$$



Teorema 2.1.1. (ecuaţiile liniilor de câmp). Fie $\overrightarrow{\mathbf{v}}:D\subseteq\mathbb{R}^3\to\mathbb{V}_3$,
$\overrightarrow{\mathbf{v}}\,(P)=\overrightarrow{\mathbf{v}}\,(x,y,z)=v_1\,(x,y,z)\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+v_2\,(x,y,z)\,\overrightarrow{\mathbf{j}}+v_3\,(x,y,z)\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$.
a) Ecuaţiile liniilor de câmp ale câmpului vectorial $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ sunt soluţiile sistemului de ecuaţii diferenţiale (care provin din $\overrightarrow{\mathbf{v}}\times d\,\overrightarrow{\mathbf{r}}=\overrightarrow{\mathbf{0}}$):

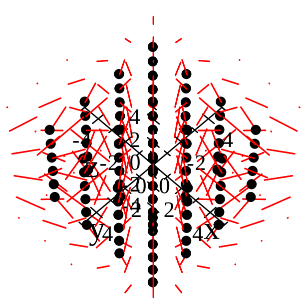
$$\frac{dx}{v_1\,(x,y,z)}=\frac{dy}{v_2\,(x,y,z)}=\frac{dz}{v_3\,(x,y,z)}. \tag{1}$$

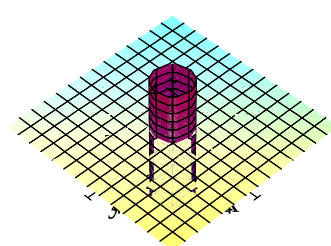
(2 ecuaţii diferenţiale$\Rightarrow$ 2 integrale prime)
b) Ecuaţia $F\,(x,y,z)=0$ reprezintă o suprafaţă de câmp a câmpului vectorial $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ dacă şi numai dacă F este soluţie a ecuaţiei cu derivate parţiale:

$$v_1\,(x,y,z)\,\frac{\partial F}{\partial x}\,(x,y,z)+v_2\,(x,y,z)\,\frac{\partial F}{\partial y}\,(x,y,z)+v_3\,(x,y,z)\,\frac{\partial F}{\partial z}\,(x,y,z)=0. \tag{2}$$

Observaţia 2.1.2. Suprafaţa de câmp a câmpului vectorial $\overrightarrow{\mathbf{v}}:D\subseteq\mathbb{R}^3\to\mathbb{V}_3$ care trece printr-o anumită curbă (γ) se obţine formând un sistem algebric alcătuit din ecuaţiile integralelor prime ale sistemului (1) şi ecuaţiile curbei (γ).

Exemplul 2.1.2. Fie:
câmpul vectorial $\overrightarrow{\mathbf{v}}\,(P)=\operatorname{grad}\left(x^2+y^2-2z^2\right);$
punctul $P_0\,(1,1,1);$
curba $(\gamma):\begin{cases}x^2+y^2=1\\ z=1\end{cases}$ cilindru circular$\cap$plan=cerc.





a) Să se determine liniile de câmp ale câmpului vectorial;
b) Să se afle linia de câmp ce trece prin P_0;

c) Să se determine suprafeţele de câmp;
d) Să se scrie ecuaţia suprafeţei de câmp ce conţine (γ).
Rezolvare. a) $\varphi(P) = \varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2; \varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$, cu

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y, z) = 2x; \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y, z) = 2y; \frac{\partial \varphi}{\partial z}(x, y, z) = -4z \Rightarrow$$

$$\operatorname{grad} \varphi(P) = \nabla \varphi(P) = 2x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + 2y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} - 4z\,\overrightarrow{\mathbf{k}}.$$

Atunci $\overrightarrow{\mathbf{v}}(P) = 2x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + 2y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} - 4z\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$.

Conform (1) $\Rightarrow$ecuaţiile liniilor de câmp ale câmpului vectorial $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ sunt soluţiile sistemului de ecuaţii diferenţiale:

$$\frac{dx}{2x} = \frac{dy}{2y} = \frac{dz}{-4z}$$

$$\bullet \frac{dx}{2x} = \frac{dy}{2y} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \Big| \int_{EVS} \overset{\text{formal}}{\Rightarrow}$$

$$\ln|x| = \ln|y| + k_1 \Rightarrow \ln\left|\frac{x}{y}\right| = \ln k_2 \overset{\text{formal}}{\Rightarrow} \boxed{\frac{x}{y} = c_1, c_1 \in \mathbb{R}.} \text{-o integrală primă.}$$

$$\bullet \frac{dx}{2x} = \frac{dz}{-4z} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dz}{-2z} \Big| \int_{EVS} \overset{\text{formal}}{\Rightarrow}$$

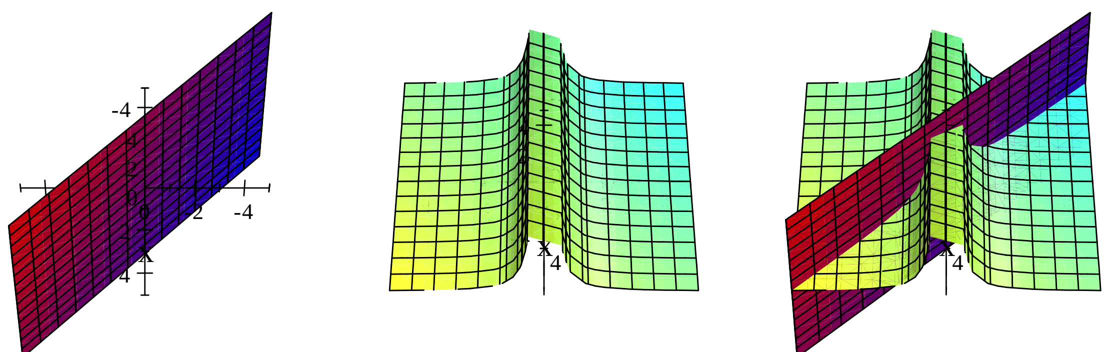
$$\ln|x| = \tfrac{-1}{2}\ln|z| + k_1' \Rightarrow \ln\left|x^2 z\right| = \ln k_2' \overset{\text{formal}}{\Rightarrow} \boxed{x^2 z = c_2, c_2 \in \mathbb{R}.} \text{-o integrală primă.}$$

Ecuaţiile liniilor de câmp sunt date de integralele prime funcţional independente:

$$(*) \begin{cases} \dfrac{x}{y} = c_1, c_1 \in \mathbb{R} \\ x^2 z = c_2, c_2 \in \mathbb{R} \end{cases} \text{ suprafaţă}\cap\text{suprafaţă=curbă.(o infinitate dublă).}$$

b) Linia de câmp trece prin $P_0(1, 1, 1) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{1} = c_1 \\ 1^2 \cdot 1 = c_2 \end{cases}$. Se obţine:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} = 1 \\ x^2 z = 1 \end{cases} \text{ este curba obţinută ca intersecţie dintre suprafaţa } \frac{x}{y} = 1 \text{ şi } x^2 z = 1$$



$\cap$ $=$

c) Suprafeţele de câmp sunt alcătuite din linii de câmp. Ele sunt date de

$$F\left(\frac{x}{y}, x^2 z\right) = 0, F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{D}) \text{ arbitrară.}$$

Într-adevăr, cum $\overrightarrow{\mathbf{v}}(P)$ este tangent la liniile de câmp$\Rightarrow \overrightarrow{\mathbf{v}}(P) \perp \overrightarrow{\mathbf{n}}(P)$, unde $\overrightarrow{\mathbf{n}}(P)$ este vectorul normal la liniile de câmp$\Rightarrow \overrightarrow{\mathbf{v}}(P) \cdot \overrightarrow{\mathbf{n}}(P) = 0$.

Dar $\overrightarrow{\mathbf{n}}(P) = \dfrac{\partial F}{\partial x}(P)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \dfrac{\partial F}{\partial y}(P)\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + \dfrac{\partial F}{\partial z}(P)\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$, unde $F(x, y, z) = 0$ este ecuaţia suprafeţei.

Atunci
$v_1(P)\cdot\dfrac{\partial F}{\partial x}(P)+v_2(P)\dfrac{\partial F}{\partial y}(P)+v_2(P)\cdot\dfrac{\partial F}{\partial z}(P)=0.$
Se ataşează
$\dfrac{dx}{v_1(x,y,z)}=\dfrac{dy}{v_2(x,y,z)}=\dfrac{dz}{v_3(x,y,z)}$(se rezolvă cu ajut. sist.) $\Rightarrow$
soluţia este dată de cele două integrale prime de la a).

d) Ecuaţia suprafeţei de câmp ce conţine (γ) este soluţia pentru sistemul algebric alcătuit din ecuaţiile integralelor prime şi ecuaţiile curbei (o relaţie între x,y,z fără c_1,c_2):

$$\begin{cases}\dfrac{x}{y}=c_1\\ x^2z=c_2\\ z=1\\ x^2+y^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=1\\ x^2=c_2\\ y^2=\dfrac{c_2}{c_1^2}\\ c_2+\dfrac{c_2}{c_1^2}=1\end{cases}\Rightarrow$$

$c_2\left(1+\dfrac{1}{c_1^2}\right)=1-$relaţia de condiţie (doar între c_1,c_2). Folosind $(*)\Rightarrow$

$$x^2z\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2}\right)=1\Rightarrow x^2z+y^2z=1\text{-ecuaţia suprafeţei de câmp cerute.}$$

(cu $F(u,v)=v\left(1+\dfrac{1}{u^2}\right)-1$)