CURS NR. 3
Matematici Speciale, AIA

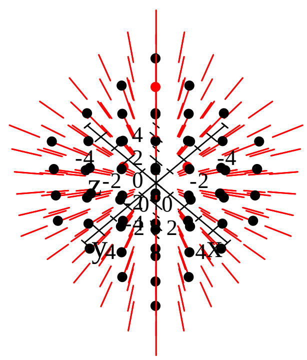
2.2. Câmp vectorial: flux, divergenţă, circulaţie, rotor

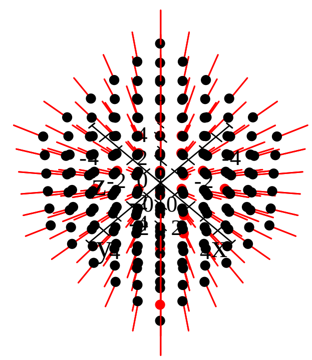
Euristica 2.2.1. Se caracterizează "emisia-absorbţia" şi "rotaţia" unui câmp vectorial, folosind operatori specifici.

Se consideră câmpuri vectoriale ce ar modela mişcarea unui fluid. Fie

$\overrightarrow{\mathbf{v}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{V}_3$, $\overrightarrow{\mathbf{v}}(x,y,z) = x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\overrightarrow{\mathbf{k}}$, adică $\overrightarrow{\mathbf{v}}(P) = \overrightarrow{\mathbf{r}}(P)$-vectorul de poziţie a punctului P şi

$\overrightarrow{\mathbf{v}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{V}_3$, $\overrightarrow{\mathbf{v}}(x,y,z) = -x\overrightarrow{\mathbf{i}} - y\overrightarrow{\mathbf{j}} - z\overrightarrow{\mathbf{k}}$, adică $\overrightarrow{\mathbf{v}}(P) = -\overrightarrow{\mathbf{r}}(P)$,
reprezentate spaţial prin

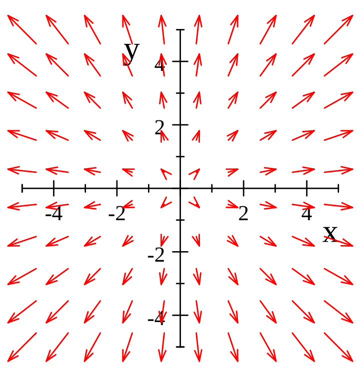


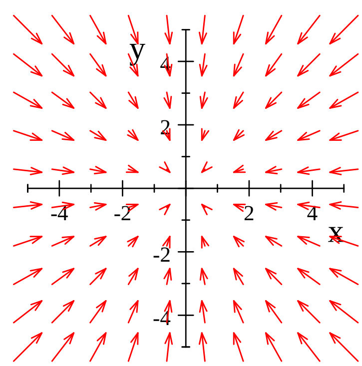


Corespondentele lor plane ar putea fi

$\overrightarrow{\mathbf{v}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{V}_2$, $\overrightarrow{\mathbf{v}}(x,y) = x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}}$, adică $\overrightarrow{\mathbf{v}}(P) = \overrightarrow{\mathbf{r}}(P)$, şi

$\overrightarrow{\mathbf{v}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{V}_2$, $\overrightarrow{\mathbf{v}}(x,y) = -x\overrightarrow{\mathbf{i}} - y\overrightarrow{\mathbf{j}}$, adică $\overrightarrow{\mathbf{v}}(P) = -\overrightarrow{\mathbf{r}}(P)$,
reprezentate plan prin



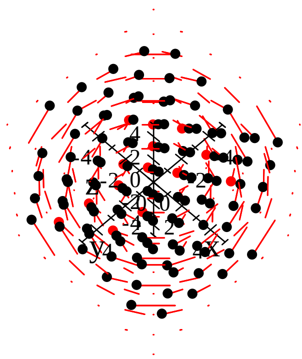


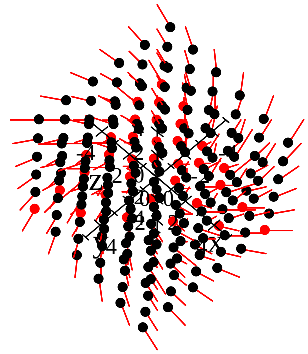
În figurile din stânga, câmpurile vectoriale par în expansiune, originea/ orice punct pare că emite/ generează câmpul vectorial, iar în figurile din dreapta, câmpurile vectoriale par a fi în contracţie, originea/ orice punct pare că absoarbe câmpul vectorial.

Fie

$\overrightarrow{\mathbf{v}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{V}_3$, $\overrightarrow{\mathbf{v}}(x,y,z) = \overrightarrow{\mathbf{v}}(P) = (y-z)\overrightarrow{\mathbf{i}} + (z-x)\overrightarrow{\mathbf{j}} + (x-y)\overrightarrow{\mathbf{k}}$,

$\overrightarrow{\mathbf{v}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{V}_3$, $\overrightarrow{\mathbf{v}}(x,y,z) = \overrightarrow{\mathbf{v}}(P) = (y-x)\overrightarrow{\mathbf{i}} + (z-y)\overrightarrow{\mathbf{j}} + (x-z)\overrightarrow{\mathbf{k}}$,
reprezentate spaţial prin



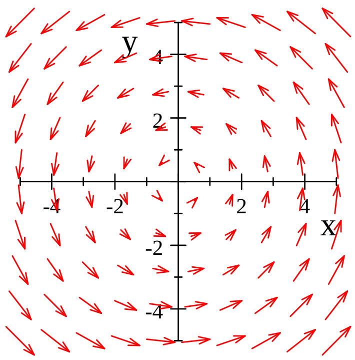


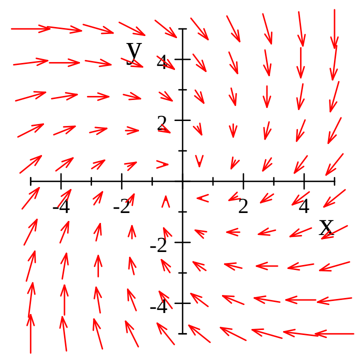
În plan, fie

$\overrightarrow{\mathbf{v}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{V}_2$, $\overrightarrow{\mathbf{v}}(x,y) = -y\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + x\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$ şi

$\overrightarrow{\mathbf{v}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{V}_2$, $\overrightarrow{\mathbf{v}}(x,y) = (y-x)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - (x+y)\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$,

reprezentate plan prin





În figurile din stânga, câmpurile vectoriale par a executa o mişcare de rotaţie în jurul originii, iar în figurile din dreapta, câmpurile vectoriale par a executa o mişcare mixtă, de rotaţie în jurul originii şi de absorbţie-emisie de către aceasta.

Emisia-absorbţia şi rotaţia se vor studia făcând apel la operatorii divergenţă şi rotor.

Comentariul 2.2.1. Definirea noţiunilor de flux şi divergenţă pentru un câmp vectorial implică noţiunea de integrală de suprafaţă; se vor defini la disciplinele de specialitate:

-*fluxul* unui câmp vectorial $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ într-un punct P_0 este numărul

$$\boxed{\Phi\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right)(P_0) = \iint_S \overrightarrow{\mathbf{v}}(P_0)\cdot\overrightarrow{\mathbf{n}}(P_0)\,ds;}$$

-*divergenţa* unui câmp vectorial $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ într-un punct P_0 este numărul

$$\boxed{\operatorname{div}\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right)(P_0) = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Phi\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right)(P_0)}{\Delta V}.}$$

A se vedea profesor Eugene Khutoryansky, "Divergence and Curl",

https://www.youtube.com/watch?v=qOcFJKQPZfo ,

minutele $0 - 11.40$, pentru a observa fluxul de particule emise-absorbite prin suprafaţa de intrare-ieşire într-un volum mic.

Teorema 2.2.1. (expresia divergenţei în coordonate carteziene). Fie $\overrightarrow{\mathbf{v}} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{V}_3$,

$\overrightarrow{\mathbf{v}}(x,y,z) = \overrightarrow{\mathbf{v}}(P) = v_1(x,y,z)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + v_2(x,y,z)\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + v_3(x,y,z)\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$

un câmp vectorial de clasă $\mathcal{C}^1$ pe un domeniu D şi $P_0 \in D$. Atunci

$$\boxed{\operatorname{div} \overrightarrow{\mathbf{v}}\,(P_0) = \frac{\partial v_1}{\partial x}(P_0) + \frac{\partial v_2}{\partial y}(P_0) + \frac{\partial v_3}{\partial z}(P_0)\,.} \tag{1}$$

Observaţia 2.2.1. Notând cu ∇ *operatorul Hamilton* de derivare parţială

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y}\overrightarrow{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z}\overrightarrow{\mathbf{k}},$$

se poate scrie formal

$$\boxed{\operatorname{div} \overrightarrow{\mathbf{v}}\,(P) = \nabla \cdot \overrightarrow{\mathbf{v}}\,(P)\,, \forall P \in D}$$

Definiţia 2.2.1. Un câmp vectorial $\overrightarrow{\mathbf{v}} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{V}_3$,

$$\overrightarrow{\mathbf{v}}\,(x,y,z) = \overrightarrow{\mathbf{v}}\,(P) = v_1(x,y,z)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + v_2(x,y,z)\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + v_3(x,y,z)\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$$

de clasă $\mathcal{C}^1$ pe un domeniu D se numeşte *câmp solenoidal* dacă

$$\operatorname{div} \overrightarrow{\mathbf{v}}\,(P) = 0, \forall P \in D.$$

Exemplul 2.2.1. Să se determine $\operatorname{div} \overrightarrow{\mathbf{v}}\,(P)$, unde

a) $\overrightarrow{\mathbf{v}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{V}_3$, $\overrightarrow{\mathbf{v}}\,(x,y,z) = \overrightarrow{\mathbf{v}}\,(P) = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$, adică $\overrightarrow{\mathbf{v}}\,(P) = \overrightarrow{\mathbf{r}}\,(P)$;

b) $\overrightarrow{\mathbf{v}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{V}_3$, $\overrightarrow{\mathbf{v}}\,(x,y,z) = \overrightarrow{\mathbf{v}}\,(P) = -x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} - z\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$, adică $\overrightarrow{\mathbf{v}}\,(P) = -\overrightarrow{\mathbf{r}}\,(P)$;

c) $\overrightarrow{\mathbf{v}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{V}_3$, $\overrightarrow{\mathbf{v}}\,(x,y,z) = \overrightarrow{\mathbf{v}}\,(P) = (y-z)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + (z-x)\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + (x-y)\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$

d) $\overrightarrow{\mathbf{v}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{V}_3$, $\overrightarrow{\mathbf{v}}\,(x,y,z) = \overrightarrow{\mathbf{v}}\,(P) = (y-x)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + (z-y)\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + (x-z)\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$,

Rezolvare. a) Conform (1) $\Rightarrow$

$$\operatorname{div} \overrightarrow{\mathbf{v}}\,(P) = 1+1+1 = 3 > 0, \forall P \in D.$$

Deci $\boxed{\operatorname{div} \overrightarrow{\mathbf{r}} = 3}$

b) Conform (1) $\Rightarrow$

$$\operatorname{div} \overrightarrow{\mathbf{v}}\,(P) = -1-1-1 = -3 < 0, \forall P \in D.$$

Studiind figurile din euristică se deduce că $\operatorname{div} \overrightarrow{\mathbf{v}}\,(P) > 0$ este asociată câmpurilor cu emisie în punctul P, iar $\operatorname{div} \overrightarrow{\mathbf{v}}\,(P) < 0$ este asociată câmpurilor cu absorbţie în punctul P. Nu numai originea O emite-absoarbe în exemplele a)-b), ci şi punctul $P(1,1,1)$, de exemplu.

c) Conform (1) $\Rightarrow$

$$\operatorname{div} \overrightarrow{\mathbf{v}}\,(P) = 0+0+0 = 0.$$

Studiind figura din euristică se deduce că $\operatorname{div} \overrightarrow{\mathbf{v}}\,(P) = 0$ este asociată câmpurilor fără emisie-absorbţie în P. Conform definiţiei se observă că $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ este câmp solenoidal, fără emisie-absorbţie în niciun punct P, fără surse sau cosurse.

d) Conform (1) $\Rightarrow$

$$\operatorname{div} \overrightarrow{\mathbf{v}}\,(P) = -1-1-1 = -3 < 0, \forall P \in D.$$

Teorema 2.2.2. (reguli de calcul cu divergenţă).

Fie $\overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{V}_3$, $\overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}} \in \mathcal{C}^1(D)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ şi $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \varphi \in \mathcal{C}^1(D)$. Atunci $\overrightarrow{\mathbf{v}} + \overrightarrow{\mathbf{w}}, \alpha\overrightarrow{\mathbf{v}}, \varphi\overrightarrow{\mathbf{v}}$ admit divergenţă în orice punct $P \in D$ şi

$$\boxed{\operatorname{div}\left(\overrightarrow{\mathbf{v}} + \overrightarrow{\mathbf{w}}\right)(P) = \operatorname{div}\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right)(P) + \operatorname{div}\left(\overrightarrow{\mathbf{w}}\right)(P)\,;}$$

$$\boxed{\operatorname{div}\left(\alpha\overrightarrow{\mathbf{v}}\right)(P) = \alpha\operatorname{div}\overrightarrow{\mathbf{v}}\,(P)\,;}$$

$$\boxed{\operatorname{div}\left(\varphi\overrightarrow{\mathbf{v}}\right)(P) = \varphi(P)\left(\operatorname{div}\overrightarrow{\mathbf{v}}\,(P)\right) + \left(\operatorname{grad}\varphi(P)\right)\cdot\overrightarrow{\mathbf{v}}\,(P)\,.}$$

Observaţia 2.2.2. Definiţiile şi teoremele se pot rescrie şi pentru câmpuri vectoriale plane $\overrightarrow{\mathbf{v}} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{V}_2$, unde D este un domeniu din $\mathbb{R}^2$, cu menţiunea că

$$\boxed{\operatorname{div} \overrightarrow{\mathbf{v}}\,(P) = \frac{\partial v_1}{\partial x}(P) + \frac{\partial v_2}{\partial y}(P)\,.}$$

Comentariul 2.2.2. Definirea noţiunilor de circulaţie şi rotor pentru un câmp vectorial implică noţiunea de integrală curbilinie; se vor defini la disciplinele de specialitate:

-*circulaţia* unui câmp vectorial $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ într-un punct P_0 este numărul

$$\boxed{\mathit{circula\c{t}ia}\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right)(P_0) = \int_\gamma \overrightarrow{\mathbf{v}}(P_0) \cdot d\overrightarrow{\mathbf{r}}(P_0);}$$

-*rotorul* unui câmp vectorial $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ într-un punct P_0 este vectorul rot $\overrightarrow{\mathbf{v}} \overset{\text{not.}}{=}$ curl $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ dat de formula

$$\boxed{\overrightarrow{\mathbf{n}}(P_0) \cdot \operatorname{rot}\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right)(P_0) = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\text{circulaţia}\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right)(P_0)}{\Delta S}.}$$

A se vedea profesor Eugene Khutoryansky, "Divergence and Curl",

https://www.youtube.com/watch?v=qOcFJKQPZfo,

minutele $11.40 - 25.30$, pentru a observa circulaţia particulelor care se rotesc în jurul unui contur ce delimitează o suprafaţă mică.

Observaţia 2.2.3. Fie câmpul vectorial $\overrightarrow{\mathbf{v}} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{V}_3$,

$\overrightarrow{\mathbf{v}}(P) = \overrightarrow{\mathbf{v}}(x,y,z) = v_1(x,y,z)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + v_2(x,y,z)\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + v_3(x,y,z)\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$.

Circulaţia câmpului vectorial de-a lungul curbei γ este

$$\boxed{\text{circulaţia}\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right)(P) = \int_\gamma \left(v_1(x,y,z)\,dx + v_2(x,y,z)\,dy + v_3(x,y,z)\,dz\right),} \tag{2}$$

dacă integrala curbilinie de speţa a doua există.

Teorema 2.2.3. (expresia rotorului în coordonate carteziene). Fie $\overrightarrow{\mathbf{v}} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{V}_3$,

$\overrightarrow{\mathbf{v}}(x,y,z) = \overrightarrow{\mathbf{v}}(P) = v_1(x,y,z)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + v_2(x,y,z)\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + v_3(x,y,z)\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$

un câmp vectorial de clasă $\mathcal{C}^1$ pe un domeniu D şi $P_0 \in D$. Atunci

$$\boxed{\operatorname{rot}\overrightarrow{\mathbf{v}}(P_0) \overset{\text{not.}}{=} \operatorname{curl}\overrightarrow{\mathbf{v}}(P_0) = \left|\begin{array}{ccc} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{array}\right|_{\text{formal}} (P_0) =}$$

$$\boxed{= \left(\frac{\partial v_3}{\partial y}(P_0) - \frac{\partial v_2}{\partial z}(P_0)\right)\overrightarrow{\mathbf{i}} - \left(\frac{\partial v_3}{\partial x}(P_0) - \frac{\partial v_1}{\partial z}(P_0)\right)\overrightarrow{\mathbf{j}} + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x}(P_0) - \frac{\partial v_1}{\partial y}(P_0)\right)\overrightarrow{\mathbf{k}}} \tag{3}$$

Observaţia 2.2.4. Notând cu ∇ *operatorul Hamilton* de derivare parţială

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y}\overrightarrow{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z}\overrightarrow{\mathbf{k}},$$

se poate scrie

$$\boxed{\operatorname{rot}\overrightarrow{\mathbf{v}}(P) = \nabla \times \overrightarrow{\mathbf{v}}(P), \forall P \in D.}$$

Definiţia 2.2.2. Un câmp vectorial $\overrightarrow{\mathbf{v}} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{V}_3$,

$\overrightarrow{\mathbf{v}}(x,y,z) = \overrightarrow{\mathbf{v}}(P) = v_1(x,y,z)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + v_2(x,y,z)\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + v_3(x,y,z)\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$

de clasă $\mathcal{C}^1$ pe un domeniu D se numeşte *câmp irotaţional* dacă

rot $\overrightarrow{\mathbf{v}}(P) = \overrightarrow{\mathbf{0}}, \forall P \in D$.

Definiţia 2.2.3. Un câmp vectorial $\overrightarrow{\mathbf{v}} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{V}_3$,

$\overrightarrow{\mathbf{v}}(x,y,z) = \overrightarrow{\mathbf{v}}(P) = v_1(x,y,z)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + v_2(x,y,z)\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + v_3(x,y,z)\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$

de clasă $\mathcal{C}^1$ pe un domeniu D se numeşte *câmp armonic* dacă este simultan solenoidal şi irotaţional, adică:

div $\overrightarrow{\mathbf{v}}(P) = 0, \forall P \in D$ şi rot $\overrightarrow{\mathbf{v}}(P) = \overrightarrow{\mathbf{0}}, \forall P \in D$.

Teorema 2.2.4. (reguli de calcul cu rotor).

Fie $\overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{V}_3$, $\overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}} \in \mathcal{C}^1(D)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ şi $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \varphi \in \mathcal{C}^1(D)$. Atunci $\overrightarrow{\mathbf{v}} + \overrightarrow{\mathbf{w}}, \alpha\overrightarrow{\mathbf{v}}, \varphi\overrightarrow{\mathbf{v}}$ admit rotor în orice punct $P \in D$ şi

$\boxed{\operatorname{rot}\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}+\overrightarrow{\mathbf{w}}\right)(P)=\operatorname{rot}\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right)(P)+\operatorname{rot}\left(\overrightarrow{\mathbf{w}}\right)(P)\,;}$

$\boxed{\operatorname{rot}\left(\alpha\overrightarrow{\mathbf{v}}\right)(P)=\alpha\operatorname{rot}\overrightarrow{\mathbf{v}}\,(P)\,;}$

$\boxed{\operatorname{rot}\left(\varphi\overrightarrow{\mathbf{v}}\right)(P)=\varphi(P)\left(\operatorname{rot}\overrightarrow{\mathbf{v}}\,(P)\right)+\left(\operatorname{grad}\varphi(P)\right)\times\overrightarrow{\mathbf{v}}\,(P)\,.}$

Dacă, în plus $\varphi\in\mathcal{C}^2(D)$, atunci

$\boxed{\operatorname{rot}\left(\operatorname{grad}\varphi\right)=\overrightarrow{\mathbf{0}}\,.}$

Observaţia 2.2.5. Definiţiile şi teoremele se pot rescrie şi pentru câmpuri vectoriale plane $\overrightarrow{\mathbf{v}}:D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{V}_2$, unde D este un domeniu din $\mathbb{R}^2$, cu menţiunea că

$\boxed{\operatorname{rot}\overrightarrow{\mathbf{v}}\,(P)=\left(\dfrac{\partial v_2}{\partial x}(x,y)-\dfrac{\partial v_1}{\partial y}(x,y)\right)\left(\overrightarrow{\mathbf{i}}\times\overrightarrow{\mathbf{j}}\right).}$

Observaţia 2.2.6. Pentru orice câmp vectorial $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ de clasă $\mathcal{C}^1$ pe un domeniu D **divergenţa şi rotorul nu depind de alegerea reperului ortogonal** în care se determină coordonatele carteziene, ci doar de punctul P.

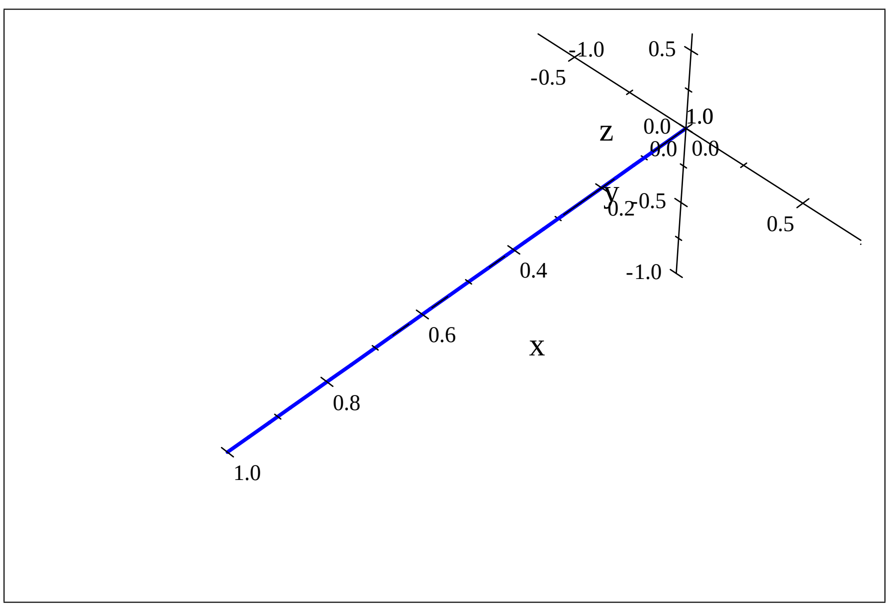
○**Exemplul 2.2.2**. Să se calculeze circulaţia câmpului vectorial

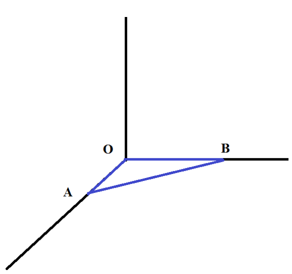
$\overrightarrow{\mathbf{v}}\,(P)=(y-z)\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+(z-x)\,\overrightarrow{\mathbf{j}}+(x-y)\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$

pe conturul închis $OABO$ format din laturile triunghiului cu vârfurile $O(0,0,0)$, $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$ (parcurs direct, trigonometric).

Rezolvare.

$(t,0,0)$





Ecuaţiile parametrice ale segmentului $\left[\overrightarrow{M_1M_2}\right]$, cu $M_1(x_1,y_1,z_1)$ şi $M_2(x_2,y_2,z_2)$, sunt

$$\boxed{\left[\overrightarrow{M_1M_2}\right] : \begin{cases} x(t) = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y(t) = y_1 + t(y_2 - y_1) \\ z(t) = z_1 + t(z_2 - z_1) \end{cases}, t \in [0,1]} \Rightarrow$$

$$\left[\overrightarrow{OA}\right] : \begin{cases} x(t) = 0 + t(1-0) = t \\ y(t) = 0 + t(0-0) = 0 \\ z(t) = 0 + t(0-0) = 0 \end{cases}, t \in [0,1] ; \begin{cases} dx(t) = 1dt \\ dy(t) = 0dt \\ dz(t) = 0dt \end{cases}, t \in [0,1]$$

$$\left[\overrightarrow{AB}\right] : \begin{cases} x(t) = 1 + t(0-1) = 1-t \\ y(t) = 0 + t(2-0) = 2t \\ z(t) = 0 + t(0-0) = 0 \end{cases}, t \in [0,1] ; \begin{cases} dx(t) = -dt \\ dy(t) = 2dt \\ dz(t) = 0dt \end{cases}, t \in [0,1]$$

$$\left[\overrightarrow{BO}\right] : \begin{cases} x(t) = 0 + t(0-0) = 0 \\ y(t) = 2 + t(0-2) = 2-2t \\ z(t) = 0 + t(0-0) = 0 \end{cases}, t \in [0,1] ; \begin{cases} x(t) = 0dt \\ y(t) = -dt \\ z(t) = 0dt \end{cases}, t \in [0,1]$$

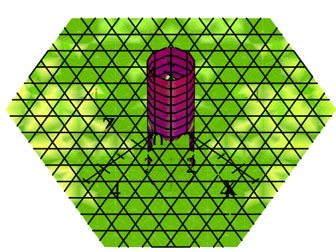
Circulaţia câmpului vectorial de-a lungul conturului (în sensul $OABO$) este

$$\int_{\left[\overrightarrow{OA}\right]\cup\left[\overrightarrow{AB}\right]\cup\left[\overrightarrow{BO}\right]} (v_1(x,y,z)\,dx + v_2(x,y,z)\,dy + v_3(x,y,z)\,dz) =$$
$$= \int_{\left[\overrightarrow{OA}\right]} ((y-z)\,dx + (z-x)\,dy + (x-y)\,dz) + \int_{\left[\overrightarrow{AB}\right]} ((y-z)\,dx + (z-x)\,dy + (x-y)\,dz) +$$
$$+ \int_{\left[\overrightarrow{BO}\right]} ((y-z)\,dx + (z-x)\,dy + (x-y)\,dz) =$$
$$= \int_0^1 (0\cdot 1 + (-t)\cdot 0 + t\cdot 0)\,dt + \int_0^1 (2t\cdot(-1) + (-1+t)\cdot 2 + (1-3t)\cdot 0)\,dt +$$
$$+ \int_0^1 ((2-2t)\cdot 0 + 0\cdot(-1) + (-2+2t)\cdot 0)\,dt = 0 - 2 + 0 = -2.$$

○**Exemplul 2.2.3**. Să se determine circulaţia câmpului vectorial

$$\overrightarrow{\mathbf{v}}(P) = xy\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + yz\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + xz\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$$

pe curba $(\Gamma) : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$ (cilindru$\cap$plan)



Exemplul 2.2.4. Să se determine rotorul următoarelor câmpuri vectoriale:

a) $\overrightarrow{\mathbf{v}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{V}_3$, $\overrightarrow{\mathbf{v}}(x,y,z) = \overrightarrow{\mathbf{v}}(P) = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$, adică $\overrightarrow{\mathbf{v}}(P) = \overrightarrow{\mathbf{r}}$,

b) $\overrightarrow{\mathbf{v}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{V}_3$, $\overrightarrow{\mathbf{v}}(x,y,z) = \overrightarrow{\mathbf{v}}(P) = -x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} - z\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$, adică $\overrightarrow{\mathbf{v}}(P) = -\overrightarrow{\mathbf{r}}$.

c) $\overrightarrow{\mathbf{v}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{V}_3$, $\overrightarrow{\mathbf{v}}(x,y,z) = \overrightarrow{\mathbf{v}}(P) = (y-z)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + (z-x)\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + (x-y)\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$,

d) $\overrightarrow{\mathbf{v}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{V}_3$, $\overrightarrow{\mathbf{v}}(x,y,z) = \overrightarrow{\mathbf{v}}(P) = yz\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + xz\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + xy\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$,

Rezolvare. a) Conform (3) $\Rightarrow$

$$\operatorname{rot}\overrightarrow{\mathbf{v}}(P)=\begin{vmatrix}\overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x & y & z\end{vmatrix}=$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial y}(z)-\frac{\partial}{\partial z}(y)\right)\overrightarrow{\mathbf{i}}-\left(\frac{\partial}{\partial x}(z)-\frac{\partial}{\partial z}(x)\right)\overrightarrow{\mathbf{j}}+\left(\frac{\partial}{\partial x}(y)-\frac{\partial}{\partial y}(x)\right)\overrightarrow{\mathbf{k}}=$$

$$=0\,\overrightarrow{\mathbf{i}}-0\,\overrightarrow{\mathbf{j}}+0\,\overrightarrow{\mathbf{k}}=\overrightarrow{\mathbf{0}}.$$

Se poate scrie: $\boxed{\operatorname{rot}\overrightarrow{\mathbf{r}}=\overrightarrow{\mathbf{0}}.}$

b) Conform (3) $\Rightarrow$

$$\operatorname{rot}\overrightarrow{\mathbf{v}}(P)=\begin{vmatrix}\overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ -x & -y & -z\end{vmatrix}=$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial y}(-z)-\frac{\partial}{\partial z}(-y)\right)\overrightarrow{\mathbf{i}}-\left(\frac{\partial}{\partial x}(-z)-\frac{\partial}{\partial z}(-x)\right)\overrightarrow{\mathbf{j}}+\left(\frac{\partial}{\partial x}(-y)-\frac{\partial}{\partial y}(-x)\right)\overrightarrow{\mathbf{k}}=$$

$$=0\,\overrightarrow{\mathbf{i}}-0\,\overrightarrow{\mathbf{j}}+0\,\overrightarrow{\mathbf{k}}=\overrightarrow{\mathbf{0}},\forall P.$$

Studiind figurile din euristică deducem că $\operatorname{rot}\overrightarrow{\mathbf{v}}(P)=\overrightarrow{\mathbf{0}}$ este asociată câmpurilor fără rotaţie în jurul punctului P. Deci câmpurile de la exemplele a)-b) sunt irotaţionale.

c) Conform (3) $\Rightarrow$

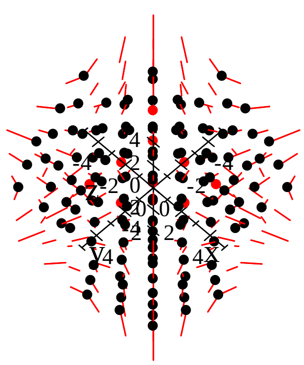
$$\operatorname{rot}\overrightarrow{\mathbf{v}}(P)=\begin{vmatrix}\overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y-z & z-x & x-y\end{vmatrix}=$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial y}(x-y)-\frac{\partial}{\partial z}(z-x)\right)\overrightarrow{\mathbf{i}}-\left(\frac{\partial}{\partial x}(x-y)-\frac{\partial}{\partial z}(y-z)\right)\overrightarrow{\mathbf{j}}+\left(\frac{\partial}{\partial x}(z-x)-\frac{\partial}{\partial y}(y-z)\right)\overrightarrow{\mathbf{k}}=$$

$$=-2\,\overrightarrow{\mathbf{i}}-2\,\overrightarrow{\mathbf{j}}-2\,\overrightarrow{\mathbf{k}},\forall P.$$

Studiind figura din euristică deducem că $\operatorname{rot}\overrightarrow{\mathbf{v}}(P)\neq\overrightarrow{\mathbf{0}}$ este asociată câmpurilor cu rotaţie în P. Direcţia şi sensul de rotaţie sunt date de vectorul $-2\,\overrightarrow{\mathbf{i}}-2\,\overrightarrow{\mathbf{j}}-2\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$.

d) $\overrightarrow{\mathbf{v}}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{V}_3$, $\overrightarrow{\mathbf{v}}(x,y,z)=\overrightarrow{\mathbf{v}}(P)=(yz)\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+(zx)\,\overrightarrow{\mathbf{j}}+(xy)\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$ are reprezentarea spaţială



Conform (3) $\Rightarrow$

$$\operatorname{rot}\overrightarrow{\mathbf{v}}(P)=\begin{vmatrix}\overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ yz & zx & xy\end{vmatrix}=$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial y}(xy) - \frac{\partial}{\partial z}(zx)\right)\overrightarrow{\mathbf{i}} - \left(\frac{\partial}{\partial x}(xy) - \frac{\partial}{\partial z}(yz)\right)\overrightarrow{\mathbf{j}} + \left(\frac{\partial}{\partial x}(zx) - \frac{\partial}{\partial y}(yz)\right)\overrightarrow{\mathbf{k}} =$$
$$= 0\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - 0\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + 0\,\overrightarrow{\mathbf{k}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}, \forall P.$$

Studiind figura deducem că $\operatorname{rot}\overrightarrow{\mathbf{v}}(P) = 0$ este asociată câmpurilor fără rotaţie în P. Este câmp irotaţional.

Comentariul 2.2.3.

A se vedea 3Blue1Brown, "Divergence and curl: The language of Maxwell's equations, fluid flow, and more",

https://www.youtube.com/watch?v=rB83DpBJQsE&t=699s.

A se observa utilizarea operatorilor diferenţiali $\operatorname{div}, \operatorname{rot}, \operatorname{grad}$ în scrierea ecuaţiilor fizicii matematice. De exemplu, Ecuaţiile Maxwell ale câmpului electromagnetic:

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \operatorname{curl}\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$$
$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0 \qquad \operatorname{curl}\mathbf{B} = \mu_0\left(\mathbf{J} + \varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right)$$

Tot în film apare şi modelul pradă-prădător (iepure-vulpe), precum şi interpretări legate de emisie-absorbţie şi rotaţie.

Definiţia 2.2.4. Un câmp vectorial $\overrightarrow{\mathbf{v}} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{V}_3$,

$\overrightarrow{\mathbf{v}}(x,y,z) = \overrightarrow{\mathbf{v}}(P) = v_1(x,y,z)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + v_2(x,y,z)\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + v_3(x,y,z)\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$

de clasă $\mathcal{C}^1$ pe un domeniu D.se numeşte *câmp de gradienţi* (sau *câmp derivând dintr-un potenţial*) dacă există un câmp scalar $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de clasă $\mathcal{C}^1$ pe D, numit *potenţial scalar* al lui $\overrightarrow{\mathbf{v}}$, astfel încât

$\overrightarrow{\mathbf{v}}(P) = \operatorname{grad}\varphi(P), \forall P \in D.$

Observaţia 2.2.7. Un câmp de gradienţi este câmp irotaţional,

$$\boxed{\operatorname{rot}(\operatorname{grad}\varphi(P)) = \overrightarrow{\mathbf{0}}, \forall P \in D.}$$

Într-adevăr,

$$\operatorname{rot}\overrightarrow{\mathbf{v}}(P) = \operatorname{rot}(\operatorname{grad}\varphi(P)) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y,z) & \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y,z) & \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y,z) \end{vmatrix} = \overrightarrow{\mathbf{0}}, \forall P \in D.$$

Mai mult,

$$\boxed{\operatorname{div}(\operatorname{grad}\varphi(P)) = \Delta\varphi(P), \forall P \in D.}$$

Într-adevăr,

$$\operatorname{div}\overrightarrow{\mathbf{v}}(P) = \operatorname{div}(\operatorname{grad}\varphi(P)) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}(P)\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}(P)\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}(P)\right) =$$
$$= \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(P) + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}(P) + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}(P) = \Delta\varphi(P), \forall P \in D.$$

Exemplul 2.2.5. a) Orice câmp vectorial constant este un câmp de gradienţi.

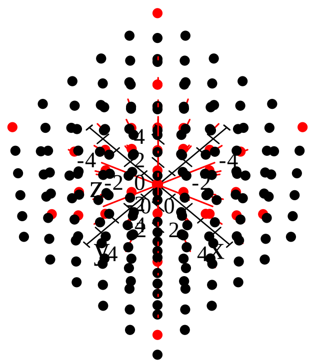
Într-adevăr, fie

$\overrightarrow{\mathbf{v}}(P)=\overline{\mathbf{c}}$, unde $\overline{\mathbf{c}}=c_1\overrightarrow{\mathbf{i}}+c_2\overrightarrow{\mathbf{j}}+c_3\overrightarrow{\mathbf{k}}$ este un vector constant.
Atunci există $\varphi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\varphi(P)=c_1x+c_2y+c_3z$ astfel încât $\overrightarrow{\mathbf{v}}=\operatorname{grad}\varphi$.

b) •Câmpul vectorial spaţial al atracţiilor newtoniene realizate de O

$$\overrightarrow{\mathbf{v}}:D\subseteq\mathbb{R}^3\to\mathbb{V}_3,\ \overrightarrow{\mathbf{v}}(P)=-\frac{k}{r^3(P)}\overrightarrow{\mathbf{r}}(P)=$$
$$=\frac{-kx}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}\overrightarrow{\mathbf{i}}+\frac{-ky}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}\overrightarrow{\mathbf{j}}+\frac{-kx}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}\overrightarrow{\mathbf{k}},$$

unde $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ este vectorul de poziţie al lui P şi $r=\left\|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right\|$ este un câmp pentru care:



$$\operatorname{div}\overrightarrow{\mathbf{v}}(P)=-k\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^{-3}-kx\left(\tfrac{-3}{2}\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{-5}{2}}\cdot 2x-$$
$$-k\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^{-3}-ky\left(\tfrac{-3}{2}\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{-5}{2}}\cdot 2y-$$
$$-k\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^{-3}-kz\left(\tfrac{-3}{2}\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{-5}{2}}\cdot 2z=$$
$$=-3k\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^{-3}+3k\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{-3}{2}}=$$

$=0$, deci **este un câmp solenoidal**, care nu "emite-absoarbe".

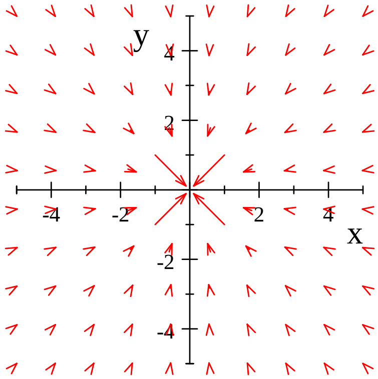
rot $\overrightarrow{\mathbf{v}}=\overrightarrow{\mathbf{0}}$, deci **este un câmp irotaţional**.

Atunci câmpul este unul **armonic**.

•Câmpul vectorial plan al atracţiilor newtoniene realizate de O

$$\overrightarrow{\mathbf{v}}:D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{V}_2,\ \overrightarrow{\mathbf{v}}(P)=-\frac{k}{r^3(P)}\overrightarrow{\mathbf{r}}(P)=$$
$$=\frac{-kx}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}\overrightarrow{\mathbf{i}}+\frac{-ky}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}\overrightarrow{\mathbf{j}},$$

unde $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ este vectorul de poziţie al lui P şi $r=\left\|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right\|$ este un câmp pentru care:



$\operatorname{div}\overrightarrow{\mathbf{v}} = -k\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{-3} - kx\left(\frac{-3}{2}\right)\left(x^2+y^2\right)^{\frac{-5}{2}}\cdot 2x-$

$-k\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{-3} - ky\left(\frac{-3}{2}\right)\left(x^2+y^2\right)^{\frac{-5}{2}}\cdot 2y =$

$= -2k\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{-3} + 3k\left(x^2+y^2\right)^{\frac{-3}{2}} =$

$= \dfrac{k}{r^3(P)} > 0$ pe D, deci este un câmp care **"emite".**

$\operatorname{rot}\overrightarrow{\mathbf{v}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$, deci este un **câmp irotaţional.**

$\overrightarrow{\mathbf{v}} = \operatorname{grad}\left(\dfrac{k}{r}\right)$, deci este un **câmp de gradienţi.**

Teorema 2.2.5. (reguli de calcul)

Fie $\overrightarrow{\mathbf{v}}: D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{V}_3, \overrightarrow{\mathbf{v}} \in \mathcal{C}^2(D)$ şi $\varphi: D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \varphi \in \mathcal{C}^2(D)$. Atunci:

$\operatorname{grad}\left(\operatorname{div}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right)$ −se poate calcula

$\boxed{\operatorname{div}\left(\operatorname{rot}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = 0}$ ⇒**un câmp de rotori este solenoidal**, fără surse.

$\boxed{\operatorname{div}(\operatorname{grad}\varphi) = \Delta\varphi}$ $(\nabla\cdot(\nabla\varphi) = \nabla^2\varphi = \Delta\varphi)$

$\boxed{\operatorname{rot}(\operatorname{grad}\varphi) = \overrightarrow{\mathbf{0}}}$ ⇒**un câmp de gradienţi este irotaţional, conservativ**.

$\operatorname{rot}\left(\operatorname{rot}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right)$ −se poate calcula.

Teorema 2.2.6. Fie $\overrightarrow{\mathbf{v}}: D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{V}_3, \overrightarrow{\mathbf{v}} \in \mathcal{C}^1(D)$, cu D domeniu isimplu conex. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) $\int_\gamma \overrightarrow{\mathbf{v}}\cdot d\overrightarrow{\mathbf{r}}$ este independentă de drum în D.

(ii) $\int_\gamma \overrightarrow{\mathbf{v}}\cdot d\overrightarrow{\mathbf{r}} = 0$ pentru orice curbă închisă netedă pe porţiuni conţinută în D.

(iii) $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ este câmp de gradienţi (derivând dintr-un potenţial).

(iv) $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ este câmp irotaţional.

Teorema 2.2.7. Fie $\overrightarrow{\mathbf{v}}: D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{V}_3, \overrightarrow{\mathbf{v}} \in \mathcal{C}^1(D)$, cu D domeniu simplu conex, un câmp de gradienţi (derivând dintr-un potenţial) şi fie $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^3$ o curbă netedă pe porţiuni, cu $\operatorname{Im}\gamma = \overset{\frown}{AB}$. Atunci:

$\int_\gamma \overrightarrow{\mathbf{v}}\cdot d\overrightarrow{\mathbf{r}} = \varphi(B) - \varphi(A)$,

unde φ este un potenţial pentru $\overrightarrow{\mathbf{v}}$, adică $\overrightarrow{\mathbf{v}} = \operatorname{grad}\varphi$.

Teorema 2.2.8.

a) Fluxul unui câmp solenoidal $\overrightarrow{\mathbf{v}}: D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{V}_3, \overrightarrow{\mathbf{v}} \in \mathcal{C}^1(D)$ (cu $\operatorname{div}\overrightarrow{\mathbf{v}} = 0$) printr-o suprafaţă netedă închisă este 0 (consecinţă a formulei Stokes).

b) Rotorul unui câmp $\overrightarrow{\mathbf{v}}: D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{V}_3, \overrightarrow{\mathbf{v}} \in \mathcal{C}^2(D)$ este un câmp solenoidal $\left(\operatorname{div}\left(\operatorname{rot}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = 0\right)$ (consecinţă a formulei Gauss-Ostrogradski).