CURS NR. 4
Matematici Speciale, AIA

# FUNCŢII COMPLEXE

## 1. Mulţimea numerelor complexe

### 1.1. Definiţii. Exemple. Structura algebrică a mulţimii $\mathbb{C}$

**Definiţia 1.1.1**. Fie mulţimea
$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y)\,; x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$,
cu operaţiile interne
$+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$,
$\cdot : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$.
Fiecare element al mulţimii $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ pe care sunt definite cele două operaţii precedente se numeşte *număr complex*. Se notează cu $\mathbb{C}$ *mulţimea numerelor complexe*.
**Teorema 1.1.1**. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ este corp comutativ cu elementul zero $(0, 0)$, iar elementul unitate $(1, 0)$.
**Observaţia 1.1.1**. **a)** $(\mathbb{C}, +, \cdot, \mathbb{R})$ este spaţiu liniar real, unde $+$ este adunarea numerelor complexe şi $\cdot$ este înmulţirea numerelor complexe cu scalari reali.
**b)** $(\mathbb{C}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ este spaţiu liniar euclidian, cu produsul scalar euclidian
$\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}, \langle (x_1, y_1), (x_2, y_2)\rangle = x_1x_2 + y_1y_2$.
**c)** $(\mathbb{C}, \|\cdot\|)$ este spaţiu liniar normat, cu norma euclidiană
$\|\cdot\| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}, \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
Norma este indusă de produsul scalar anterior, adică
$\|(x, y)\| = \sqrt{\langle (x, y), (x, y)\rangle}, \forall (x, y) \in \mathbb{C}$.
**d)** Pe $\mathbb{C}$ nu se poate introduce o relaţie de ordine totală.
**Observaţia 1.1.2**. (**Forma algebrică sau carteziană a numerelor complexe):** Fie submulţimea din $\mathbb{C}$ dată prin
$\mathbb{R} \times \{0\} = \{(x, y)\,; x \in \mathbb{R}, y = 0\} \subset \mathbb{C}$.
Aplicaţia
$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \{0\}, \varphi(x) = (x, 0)$
este un izomorfism de corpuri. Se poate considera $\mathbb{R}$ *ca şi submulţime a corpului* $\mathbb{C}$ şi se poate **identifica** $x \in \mathbb{R}$ cu $(x, 0) \in \mathbb{C}$. Atunci
$(x, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0)$.
Se notează $\boxed{(0, 1) = \mathrm{j}}$ (cu $\mathrm{j}^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$, adică $\boxed{\mathrm{j}^2 = -1}$)

*Orice număr complex $z = (x, y)$ se poate reprezenta în mod unic prin*
$\boxed{z = x + \mathrm{j}\,y, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R},}$ *unde* $\mathrm{j} = (0, 1) \in \mathbb{C}$ *se numeşte unitate imaginară*. $(1, 0)$ se va numi *unitate reală*.

Numerele de forma $\mathrm{j} \cdot y, y \in \mathbb{R}$ se numesc *imaginare*.

În multe aplicaţii **se foloseşte** $\mathrm{i}$ **(de la imaginar) în loc de** $\mathrm{j}$.

A se urmări profesor Eugene Khutoryansky, "Trigonometry" şi "Imaginary Numbers and functions of complex variables"

https://www.youtube.com/watch?v=ovLbCvq7FNA
https://www.youtube.com/watch?v=bIY6ahHVgqA

**Definiţia 1.1.2**. Fie $z = x + \mathrm{j}\,y \in \mathbb{C}$.
**a)** Se numeşte *partea reală* a lui $z$ numărul real $\mathrm{Re}\,(z) = x$;
**b)** Se numeşte *partea imaginară* a lui $z$ numărul complex $\mathrm{Im}\,(z) = \mathrm{j}\,y$, unde $y$ este număr real

numit şi coeficientul părţii imaginare;
**c)** Se numeşte *conjugatul lui* $z$ numărul complex $\overline{z} = x - \mathrm{j}\, y$;
**d)** Se numeşte *modulul lui* $z$ numărul real pozitiv $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
**Observaţia 1.1.3**. Operaţiile cu numere complexe sub formă algebrică devin

$$z_1 + z_2 = (x_1 + \mathrm{j}\, y_1) + (x_2 + \mathrm{j}\, y_2) = x_1 + x_2 + \mathrm{j}\,(y_1 + y_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + \mathrm{j}\, y_1) \cdot (x_2 + \mathrm{j}\, y_2) = x_1x_2 + \mathrm{j}\, x_1y_2 + \mathrm{j}\, y_1x_2 + \mathrm{j}^2\, y_1y_2 = \\ = x_1x_2 - y_1y_2 + \mathrm{j}\,(x_1y_2 + x_2y_1)\,.$$

**Propoziţia 1.1.1**. **a)** $\forall z \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$ şi $\mathrm{Im}\, z = \frac{1}{2\mathrm{j}}(z - \overline{z})\,;$
**b)** $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Im}\, z = 0 \Leftrightarrow z = \overline{z}$; **c)** $\forall z \in \mathbb{C}, \overline{(\overline{z})} = z$.
**d)** $\forall z = x + \mathrm{j}\, y \in \mathbb{C}, z + \overline{z} = 2x \in \mathbb{R}$ şi $z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}$;
**e)** $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ şi $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.
**Propoziţia 1.1.2**. **a)** $\forall z \in \mathbb{C}, |z| \geq 0$ şi $[|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0]$.
**b)** $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ şi $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.
În general, $\forall z_1, ..., z_n \in \mathbb{C}, |z_1 \cdot ... \cdot z_n| = |z_1| \cdot ... \cdot |z_n|$ şi $|z_1 + ... + z_n| \leq |z_1| + ... + |z_n|$.
**c)** $\forall z \in \mathbb{C}, z \cdot \overline{z} = |z|^2$ ;**d)** $\forall z \in \mathbb{C}, |z| = |-z| = |\overline{z}|\,;$
**e)** $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right)$
**f)** $\forall z \in \mathbb{C}, |\mathrm{Re}\, z| \leq |z|\,, |\mathrm{Im}\, z| \leq |z|\,, |z| \leq |\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z|\,.$
**Propoziţia 1.1.3**.(**puterile numărului complex** j) :

$$\mathrm{j} = (0, 1)\,; \mathrm{j}^2 = (-1, 0) \simeq -1; \mathrm{j}^3 = -\mathrm{j}; \mathrm{j}^4 = 1; ...$$

Prin inducţie matematică se arată că, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathrm{j}^n = \begin{cases} 1, & \text{dacă } n = 4k, k \in \mathbb{N}^* \\ \mathrm{j}, & \text{dacă } n = 4k + 1, k \in \mathbb{N} \\ -1 & \text{dacă } n = 4k + 2, k \in \mathbb{N} \\ -\mathrm{j} & \text{dacă } n = 4k + 3, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

**Exemplul 1.1.1**. Să se determine conjugatele următoarelor numere complexe:
**a)** $z = 1 + \frac{1}{\pi}\mathrm{j}; \overline{z} = 1 - \frac{1}{\pi}\mathrm{j}$ .**b)** $z = 3 - \sqrt{2}\mathrm{j}; \overline{z} = 3 + \sqrt{2}\mathrm{j}$ .
**c)** $z = \frac{7}{8}\mathrm{j} - 5 = -5 + \frac{7}{8}\mathrm{j}; \overline{z} = -5 - \frac{7}{8}\mathrm{j}$ .**d)** $z = 2000 = 2000 + 0\,\mathrm{j}; \overline{z} = 2000 - 0\,\mathrm{j} = 2000$.
**e)** $z = 14\,\mathrm{j} = 0 + 14\,\mathrm{j}; \overline{z} = 0 - 14\,\mathrm{j}$ .**f)** $z = 0 = 0 + 0\,\mathrm{j}; \overline{z} = 0 - 0\,\mathrm{j} = 0$.
**Exemplul 1.1.2**. Să se calculeze:
**a)** $(2 + 3\,\mathrm{j}) + (2 - \mathrm{j})(3 + 2\,\mathrm{j}) = 2 + 3\,\mathrm{j} + 6 + 4\,\mathrm{j} - 3\,\mathrm{j} - 2\,\mathrm{j}^2 = 10 + 4\,\mathrm{j}$;
**b)** $\left(\sqrt{2} + 3\,\mathrm{j}\right)\left(3 - \sqrt{2}\,\mathrm{j}\right) = 3\sqrt{2} - 2\,\mathrm{j} + 9\,\mathrm{j} - 3\sqrt{2}\,\mathrm{j}^2 = 6\sqrt{2} + 7\,\mathrm{j}$;
**c)** $\dfrac{{}^{1+2\,\mathrm{j})}4}{1 - 2\,\mathrm{j}} = \dfrac{4\,(1 + 2\,\mathrm{j})}{(1 - 2\,\mathrm{j})\,(1 + 2\,\mathrm{j})} = \dfrac{4 + 8\,\mathrm{j}}{1 - 4\,\mathrm{j}^2} = \dfrac{4 + 8\,\mathrm{j}}{5} = \dfrac{4}{5} + \dfrac{8}{5}\mathrm{j}\,.$
**Exemplul 1.1.3**. Să se calculeze:

$$E_1 = \mathrm{j}^6 + \mathrm{j}^{16} + \mathrm{j}^{26} + \mathrm{j}^{36} + \mathrm{j}^{46}$$

**Rezolvare:** <u>modul 1.</u> $E_1 = \left(\mathrm{j}^2\right)^3 + \left(\mathrm{j}^2\right)^8 + \left(\mathrm{j}^2\right)^{13} + \left(\mathrm{j}^2\right)^{18} + \left(\mathrm{j}^2\right)^{23} =$

$$= (-1)^3 + (-1)^8 + (-1)^{13} + (-1)^{18} + (-1)^{23} = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 = -1.$$

<u>modul 2.</u> $E_1 = \mathrm{j}^{4\cdot1+2} + \mathrm{j}^{4\cdot4+0} + \mathrm{j}^{4\cdot6+2} + \mathrm{j}^{4\cdot9+0} + \mathrm{j}^{4\cdot11+2} =$

$$= \left(\mathrm{j}^4\right)^1 \cdot \mathrm{j}^2 + \left(\mathrm{j}^4\right)^4 + \left(\mathrm{j}^4\right)^6 \cdot \mathrm{j}^2 + \left(\mathrm{j}^4\right)^9 + \left(\mathrm{j}^4\right)^{11} \cdot \mathrm{j}^2 = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 = -1.$$

**Observaţia 1.1.4**. (**Forma matriceală a numerelor complexe):** Fie submulţimea din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dată prin

$$\mathcal{C} = \left\{ Z \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\,; Z = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}, x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

Aplicaţia

$$\varphi : \mathbb{C} \to \mathcal{C}, \varphi(z) = Z$$

este un izomorfism de corpuri şi se poate **identifica**

$z = x \cdot 1 + y \cdot \mathrm{j} \in \mathbb{C}$ cu $Z = x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{C}$.

Mai mult, se observă că

$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ verifică $J_2^2 = -I_2$ (analog cu $\mathrm{j}^2 = -1$).

Se poate introduce $\mathrm{Re}\,(Z) = x$,$\mathrm{coefIm}\,(Z) = y$, $|Z| = \sqrt{\det Z}$.

**Observaţie 1.1.5**○. Numerele naturale $a, b, c \in \mathbb{N}$ ce verifică $a^2 + b^2 = c^2$ se numesc *numere pitagoreice*.

Fie $z = x + \mathrm{j}\, y \in \mathbb{C}$. Atunci

$x^2 + y^2 = |z|^2 = \left|z^2\right| = \left|x^2 - y^2 + \mathrm{j} \cdot 2xy\right| = \sqrt{(x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (*) \left(x^2 - y^2\right)^2 + (2xy)^2 = \left(x^2 + y^2\right)^2.$

Alegând în $(*)$ $x, y \in \mathbb{N}$ cu $x \geq y$, se obţine că

$\boxed{a = x^2 - y^2, b = 2xy, c = x^2 + y^2}$

sunt numere pitagoreice. De exemplu,

$x = 2, y = 1 \Rightarrow (a, b, c) = (3, 4, 5)$

$x = 3, y = 2 \Rightarrow (a, b, c) = (5, 12, 13)$

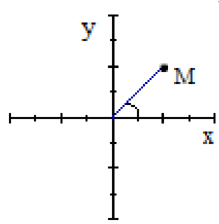
$x = 4, y = 2 \Rightarrow (a, b, c) = (12, 16, 20)$

$x = 4, y = 3 \Rightarrow (a, b, c) = (7, 24, 25)$.

**Observaţia 1.1.6**.(**Interpretare geometrică**) Fie un plan $(\pi)$ şi $\mathcal{R} = \left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ un reper ortonormat în planul $(\pi)$. Atunci aplicaţia

$\psi : \mathbb{C} \to (\pi), \psi(z) = M,$

ce face să corespundă numărului complex $z = x + \mathrm{j}\, y \in \mathbb{C}$ punctul $M(x, y) \in (\pi)$ este o aplicaţie bijectivă. Punctul $M(x, y)$ se numeşte *imaginea geometrică* a numărului $z$, iar numărul $z$ se numeşte *afixul* punctului $M$. Prin identificare, numărul complex $z$ se numeşte punct. Diagrama de reprezentare se numeşte **diagrama Argand.**

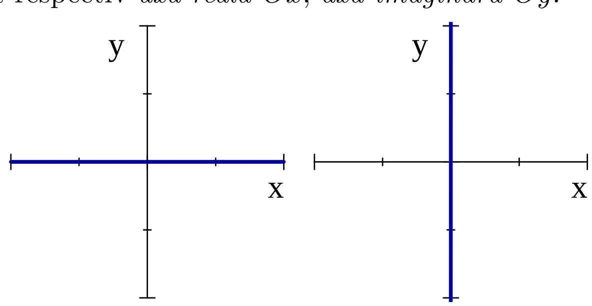



**a)** Planul $(\pi)$ se numeşte *planul complex*.

**b)** Mulţimile de puncte din $(\pi)$ corespunzătoare pentru

$\{z = x + \mathrm{j}\, y \in \mathbb{C}; y = 0\}, \{z = x + \mathrm{j}\, y \in \mathbb{C}; x = 0\}$

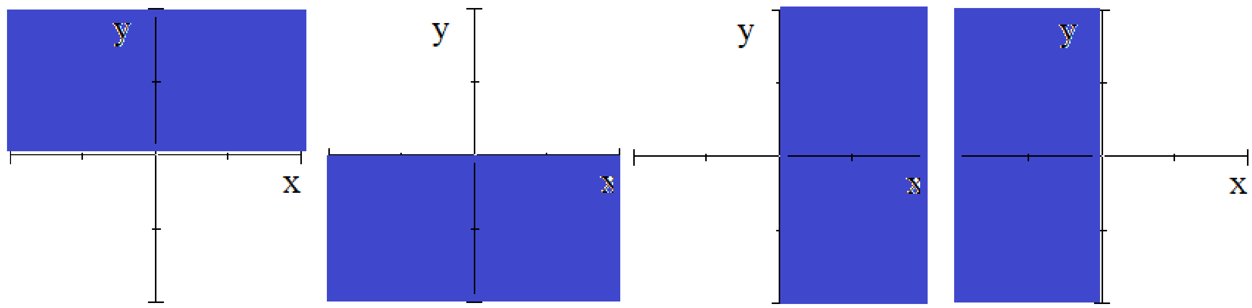
sunt respectiv *axa reală* $Ox$, *axa imaginară* $Oy$.



**c)** Mulţimile de puncte din $(\pi)$ corespunzătoare pentru

$\{z = x + \mathrm{j}\, y \in \mathbb{C}; y > 0\}, \{z = x + \mathrm{j}\, y \in \mathbb{C}; y < 0\},$
$\{z = x + \mathrm{j}\, y \in \mathbb{C}; x > 0\}, \{z = x + \mathrm{j}\, y \in \mathbb{C}; x < 0\}$

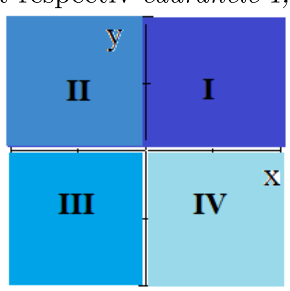
sunt respectiv *semiplanele superior, inferior, drept, stâng* ale planului complex.




Mulţimile de puncte din $(\pi)$ corespunzătoare pentru

$\{z = x + \mathrm{j}\, y \in \mathbb{C}; x > 0, y > 0\}, \{z = x + \mathrm{j}\, y \in \mathbb{C}; x < 0, y > 0\},$
$\{z = x + \mathrm{j}\, y \in \mathbb{C}; x < 0, y < 0\}, \{z = x + \mathrm{j}\, y \in \mathbb{C}; x > 0, y < 0\}$

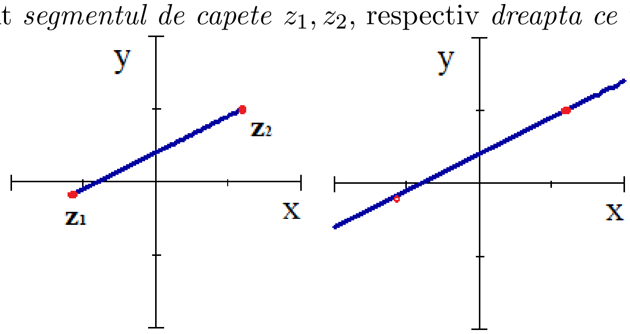
sunt respectiv *cadranele I, al II-lea, al III-lea, al patrulea* ale planului complex.




**d)** Fie $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ numere complexe oarecare date. Mulţimile de puncte din $(\pi)$ corespunzătoare pentru

$\{z \in \mathbb{C}; z = z_1 + t\,(z_2 - z_1), t \in [0, 1]\}, \{z \in \mathbb{C}; z = z_1 + t\,(z_2 - z_1), t \in \mathbb{R}\}$

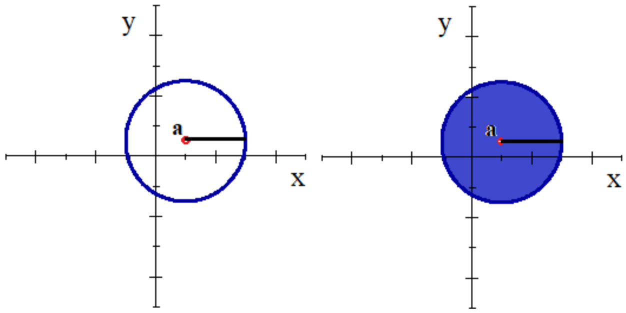
sunt *segmentul de capete* $z_1, z_2$, respectiv *dreapta ce trece prin punctele* $z_1, z_2$.




**e)** Fie $a \in \mathbb{C}$ număr complex oarecare dat şi fie $r \geq 0$ număr real dat. Mulţimile de puncte din $(\pi)$ corespunzătoare pentru

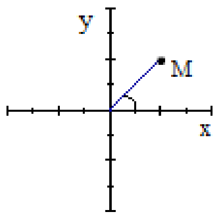
$\{z \in \mathbb{C}; |z - a| = r\}, \{z \in \mathbb{C}; |z - a| < r\}$

sunt *cercul centrat în* $a$ *şi de rază* $r$, respectiv *interiorul cercului centrat în* $a$ *şi de rază* $r$ (pentru $r = 0 \Rightarrow \{z \in \mathbb{C}; |z - a| = 0\} = \{a\}$ şi $\{z \in \mathbb{C}; |z - a| < 0\} = \emptyset$).




În particular, numerele complexe cu modulul egal cu $r$ se reprezintă în planul complex prin punctele cercului cu centrul în origine şi de rază egală cu $r$.

**Observaţia 1.1.7.** (**Forma trigonometrică sau polară a numerelor complexe):** Fie $\forall z = x + \mathrm{j}\, y \in \mathbb{C}$ şi $M(x, y)$ imaginea lui geometrică în planul complex dată prin coordonatele carteziene $x, y$.




Fie $r \geq 0, r = \operatorname{dist}(O, M)$ şi $t^* \in [0, 2\pi[\,, t^*$ măsura în radiani a unghiului orientat făcut de $Ox$ cu $OM$ *coordonatele polare* ale lui $M$, definite unic prin

$$\begin{cases} x = r\cos t^* \\ y = r\sin t^* \end{cases}.$$

Atunci $z = r(\cos t^* + \mathrm{j}\sin t^*), r \geq 0, t^* \in [0, 2\pi[$ . De menţionat că studiul se poate reface şi pentru $t^* \in [\alpha + 0, \alpha + 2\pi[\,, \alpha \in \mathbb{R}$ dat, corespunzător altei tăieturi decât $Ox_+$.

Se observă că *raza polară* a imaginii lui $z$ este egală cu modulul lui $z$,

$$\boxed{r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|\,.}$$

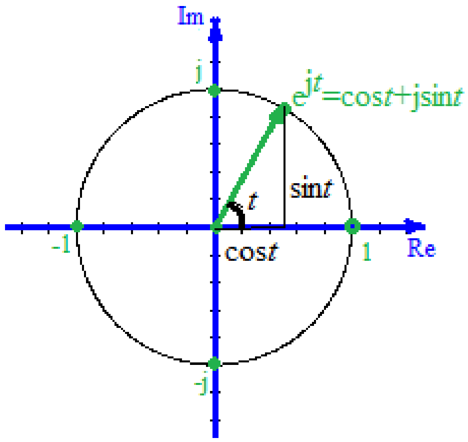
*Argumentul polar* $t^*$ al imaginii lui $z \in \mathbb{C}^*$ se numeşte *argumentul redus al lui* $z$ şi se notează $\arg z$. Dacă $z = 0$, modulul este egal cu 0, iar argumentul său redus se poate lua drept orice număr din $[0, 2\pi[$. Dacă $z \neq 0$, modulul şi argumentul redus ale lui $z$ sunt determinate unic. Cum $t^* = \mu\left(\widehat{Ox, \overrightarrow{OM}}\right)$ (unghiul orientat cu care se roteşte versorul $\overrightarrow{\mathbf{i}}$ al axei $Ox$ în sens pozitiv, trigonometric încât să se obţină orientarea lui $\left[\overrightarrow{OM}\right]$, dacă se consideră tăietura $Ox_+$), se deduce:

$$\boxed{\arg z = t^* = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + \widetilde{k}\pi, \text{ unde } \begin{cases} \widetilde{k} = 0 \text{ dacă } M \text{ este în cadranul } I \\ \widetilde{k} = 1 \text{ dacă } M \text{ este în cadranele } II \text{ sau } III \\ \widetilde{k} = 2 \text{ dacă } M \text{ este în cadranul } IV \end{cases} \\ 0, \text{ dacă } y = 0, x > 0 \\ \pi, \text{ dacă } y = 0, x < 0 \\ \frac{\pi}{2}, \text{ dacă } x = 0, y > 0 \\ \frac{3\pi}{2}, \text{ dacă } x = 0, y < 0 \end{cases}}$$

Se notează $\operatorname{Arg} z = \{t \in \mathbb{R}; t = \arg z + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ . Atunci orice număr complex $z \in \mathbb{C}$ poate fi scris sub forma

$\boxed{z = r\left(\cos t + \mathrm{j}\sin t\right), r \geq 0, t \in \mathbb{R},}$
numită *forma trigonometrică sau polară a lui z.*

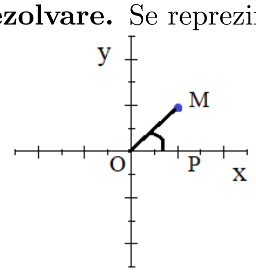
După studiul funcţiilor complexe, se va introduce şi *forma exponenţială* a lui $z$,
$\boxed{z = re^{\mathrm{j}\,t}, r \geq 0, t \in \mathbb{R},}$
bazându-se pe *formula Euler* $e^{\mathrm{j}\,t} = \cos t + \mathrm{j}\sin t$, din care se deduce identitatea Euler $e^{\mathrm{j}\,\pi} = -1$.



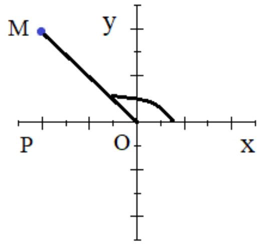

**Interpretare fizică:** Când electronii oscilează în jurul unei poziţii de echilibru, poziţia lor este dată de o ecuaţie de tipul

$z = Ae^{-\dfrac{ht}{2m} + \mathrm{j}\dfrac{\sqrt{4mf-h^2}}{2m-a}t}$, unde literele reprezintă mărimi cu interpretări caracteristice.

**Exemplul 1.1.4**. Să se scrie sub formă trigonometrică numerele
**a)** $z = 1 + \mathrm{j}$
**Rezolvare.** Se reprezintă $z$ în planul complex: $z = 1 + \mathrm{j} \rightsquigarrow M\left(1, 1\right) \in CI$




$r = |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$
$t^* \overset{\text{formulă}}{=} \arg z = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{1} + 0 \cdot \pi = \frac{\pi}{4}.$
Sau $t^* \overset{\text{desen}}{=} \alpha, \alpha = \mu\left(\widehat{POM}\right), P = pr_{Ox}M$, unde $\operatorname{tg}\alpha \overset{\text{în } \Delta POM}{=} \frac{MP}{PO} = \frac{|1|}{|1|}$.
Atunci $1 + \mathrm{j} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{j}\sin\frac{\pi}{4}\right).$
**b)** $z = -2 + 2\,\mathrm{j}$
**Rezolvare.** Se reprezintă $z$ în planul complex: $z = -2 + 2\,\mathrm{j} \rightsquigarrow M\left(1, 1\right) \in CII$




$r = |z| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}.$

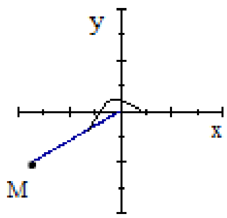
$t^* \overset{\text{formulă}}{=} \arg z = \operatorname{arctg} \dfrac{2}{-2} + 1 \cdot \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}.$

Sau $t^* \overset{\text{desen}}{=} \pi - \alpha, \alpha = \mu\left(\widehat{POM}\right), P = pr_{Ox}M$, unde $\operatorname{tg}\alpha \overset{\text{în } \Delta POM}{=} \frac{MP}{PO} = \frac{|2|}{|-2|}$.

Atunci $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + \mathrm{j}\sin\frac{3\pi}{4}\right)$.

**c)** $z = -\sqrt{3} - \mathrm{j}$

**Rezolvare.** Se reprezintă $z$ în planul complex: $z = -\sqrt{3} - \mathrm{j} \rightsquigarrow M\left(-\sqrt{3}, -1\right) \in CIII$




$r = |z| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = 2.$

$t^* \overset{\text{formulă}}{=} \arg z = \operatorname{arctg} \dfrac{-1}{-\sqrt{3}} + \pi = \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6}.$

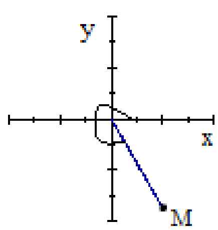
Sau $t^* \overset{\text{desen}}{=} \pi + \alpha, \alpha = \mu\left(\widehat{POM}\right), P = pr_{Ox}M$, unde $\operatorname{tg}\alpha \overset{\text{în } \Delta POM}{=} \frac{MP}{PO} = \frac{|-1|}{|-\sqrt{3}|}$.

Atunci $-\sqrt{3} - \mathrm{j} = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + \mathrm{j}\sin\frac{7\pi}{6}\right)$.

**Comentariu:** $z = -\sqrt{3} - \mathrm{j} = -2\left(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{j}\sin\frac{\pi}{6}\right)$ este corect din punct de vedere algebric, dar $\frac{\pi}{6} \neq \arg z, -2$ nu poate fi $r \geq 0$; relaţia nu reprezintă forma trigonometrică a numărului.

**d)** $z = 1 - \mathrm{j}\sqrt{3}$

**Rezolvare.** Se reprezintă $z$ în planul complex: $z = 1 - \mathrm{j}\sqrt{3} \rightsquigarrow M\left(1, -\sqrt{3}\right) \in CIV$




$r = |z| = \sqrt{1^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = 2.$

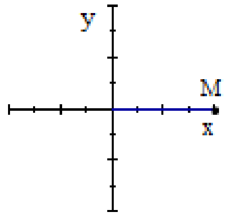
$t^* \overset{\text{formulă}}{=} \arg z = \operatorname{arctg} \dfrac{-\sqrt{3}}{1} + 2\pi = -\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3}.$

Sau $t^* \overset{\text{desen}}{=} 2\pi - \alpha, \alpha = \mu\left(\widehat{POM}\right), P = pr_{Ox}M$, unde $\operatorname{tg}\alpha \overset{\text{în } \Delta POM}{=} \frac{MP}{PO} = \frac{|-\sqrt{3}|}{|-1|}$.

Atunci $1 - \mathrm{j}\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + \mathrm{j}\sin\frac{5\pi}{3}\right)$.

**e)** $z = 2$

**Rezolvare.** Se reprezintă $z$ în planul complex: $z = 2 + \mathrm{j} \cdot 0 \rightsquigarrow M(2, 0)$




$r = |z| = \sqrt{2^2 + 0^2} = 2.$

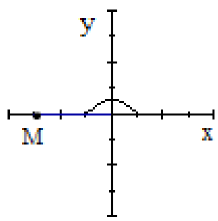
$t^* \overset{\text{formulă}}{=} \arg z = 0.$

Sau $t^* \overset{\text{desen}}{=} \mu\left(\widehat{Ox, \overrightarrow{OM}}\right) = 0.$

Atunci $2 = 2(\cos 0 + \mathrm{j} \sin 0)$.

**f)** $z = -\frac{3}{2}$

**Rezolvare.** Se reprezintă $z$ în planul complex: $z = -\frac{3}{2} + \mathrm{j} \cdot 0 \rightsquigarrow M\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$




$r = |z| = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 0^2} = \frac{3}{2}.$

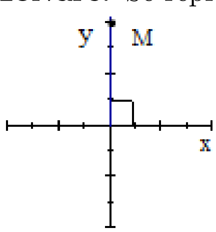
$t^* \overset{\text{formulă}}{=} \arg z = \pi.$

Sau $t^* \overset{\text{desen}}{=} \mu\left(\widehat{Ox, \overrightarrow{OM}}\right) = \pi.$

Atunci $-\frac{3}{2} = \frac{3}{2}(\cos \pi + \mathrm{j} \sin \pi)$.

**g)** $z = 2\,\mathrm{j}$

**Rezolvare.** Se reprezintă $z$ în planul complex: $z = 0 + \mathrm{j} \cdot 2 \rightsquigarrow M(0, 2)$




$r = |z| = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2.$

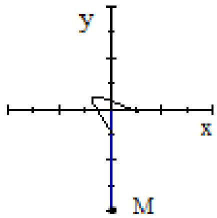
$t^* \overset{\text{formulă}}{=} \arg z = \frac{\pi}{2}.$

Sau $t^* \overset{\text{desen}}{=} \mu\left(\widehat{Ox, \overrightarrow{OM}}\right) = \frac{\pi}{2}.$

Atunci $2\,\mathrm{j} = 2\left(\cos \frac{\pi}{2} + \mathrm{j} \sin \frac{\pi}{2}\right)$.

**h)** $z = -2\,\mathrm{j}$

**Rezolvare.** Se reprezintă $z$ în planul complex: $z = 0 - \mathrm{j} \cdot 2 \rightsquigarrow M(0, -2)$




$r = |z| = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = 2$

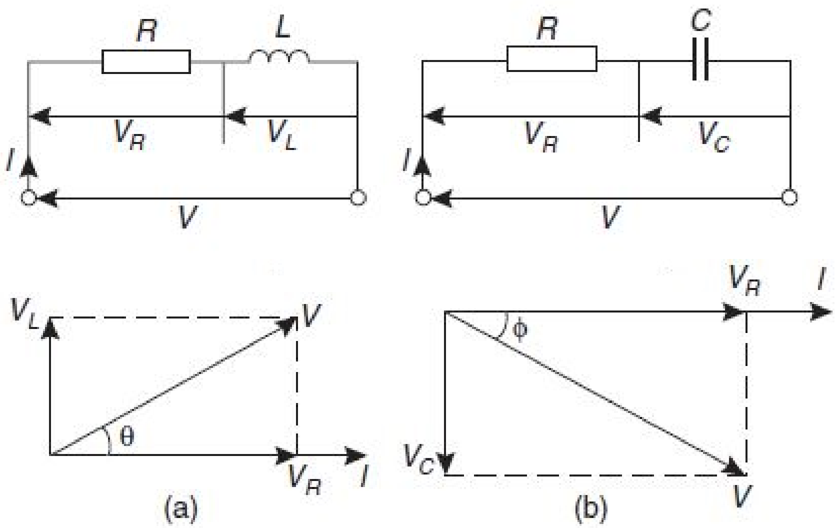
$t^* \overset{\text{formulă}}{=} \arg z = \frac{3\pi}{2}$.

Sau $t^* \overset{\text{desen}}{=} \mu\left(\widehat{Ox, \overrightarrow{OM}}\right) = \frac{3\pi}{2}$.

Atunci $-2\,\mathrm{j} = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + \mathrm{j}\sin\frac{3\pi}{2}\right)$.

**Interpretare fizică:** Există aplicaţii ale numerelor complexe în ştiinţă şi inginerie, în particular în teoria curentului electric alternativ şi în mecanica vectorială.

**A.** Efectul multiplicării cu j unui fazor (vector rotitor reprezentând, de exemplu, una dintre mărimile caracteristice ale curentului alternativ - intensitate, tensiune) reprezentat în diagrama Argand constă în rotirea în sens trigonometric cu $\frac{\pi}{2}$ fără a-i modifica lungimea. Similar, efectul multiplicării cu $-\mathrm{j}$ a unui fazor constă în rotirea cu $-\frac{\pi}{2}$ fără a-i modifica lungimea. Acestea se utilizează în teoria curentului alternativ, deoarece anumite mărimi reprezentate vectorial sunt la unghi de $\frac{\pi}{2}$ una de alta.




De exemplu, în circuitele RLC din figură.

În circuitul (a), $V_L$ şi $I$ fac un unghi de $90^0$, ceea ce se poate scrie ca $\mathrm{j}\,V_L$, axa verticală fiind axa imaginară din diagrama Argand. Astfel, $V_R + \mathrm{j}\,V_L = V$. Dar $V_R = IR, V = IX_L$ (unde $X_L$ =reactanţa inductivă, $2\pi Lf$ ohmi)$, V = IZ$ (unde $Z$ =impedanţa)$\Rightarrow R + \mathrm{j}\,X_L = Z$

În circuitul b) $I$ şi $V_C$ de $90^0$, ceea ce se poate scrie $V_R - \mathrm{j}\,V_C = V \Rightarrow R - \mathrm{j}\,X_C = Z$. (unde $X_C$ =reactanţa capacitivă, $\dfrac{1}{2\pi Lf}$ ohmi).

**B.** O undă de frecvenţă singulară se poate reprezenta printr-un fazor. În teoria sistemelor liniare, un sistem în care inputul (intrarea) este o undă de frecvenţă singulară produce un output (ieşire) de aceeaşi frecvenţă, ce poate fi defazat şi cu amplitudinea scalată. Utilizând numerele complexe, sistemul poate fi reprezentat printr-un număr care multiplică fazorul de input, având efectul de rotire a fazorului şi de scalare a amplitudinii. Se poate defini j ca fiind un număr ce multiplică fazorul de input, având efectul de rotire cu $\frac{\pi}{2}$, fără să schimbe amplitudinea. Dacă multiplicarea se repetă, atunci, rotind fazorul cu $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$, atunci outputul sistemului se inversează. Astfel obţinem interpretarea ecuaţiei $\mathrm{j}^2 = -1$.


**Propoziţia 1.1.4**. $\forall z \in \mathbb{C}$,$\arg \overline{z} = 2\pi - \arg z$.
**Propoziţia 1.1.5**. **a)** $\forall z_1 = r_1 (\cos t_1 + \mathrm{j} \sin t_1) \in \mathbb{C}$ şi $\forall z_2 = r_2 (\cos t_2 + \mathrm{j} \sin t_2) \in \mathbb{C}$:
$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos (t_1 + t_2) + \mathrm{j} \sin (t_1 + t_2))$;
**b)** $\forall z_1, z_2, ..., z_n \in \mathbb{C}$ :
$z_1 \cdot z_2 \cdot ... \cdot z_n = r_1 \cdot r_2 \cdot ... \cdot r_n (\cos (t_1 + t_2 + ... + t_n) + \mathrm{j} \sin (t_1 + t_2 + ... + t_n))$;
**c)** $\forall z = r (\cos t + \mathrm{j} \sin t) \in \mathbb{C}$ şi $\forall n \in \mathbb{N}^*$ :
$z^n = r^n (\cos (nt) + \mathrm{j} \sin (nt))$.
În particular, are loc *formula Moivre*
$\boxed{(\cos t + \mathrm{j} \sin t)^n = \cos (nt) + \mathrm{j} \sin (nt), \forall n \in \mathbb{N}^*}$
**d)** $\forall z = r (\cos t + \mathrm{j} \sin t) \in \mathbb{C}^*$ :
$\frac{1}{z} = \frac{1}{r} (\cos (-t) + \mathrm{j} \sin (-t))$
**e)** $\forall z_1 = r_1 (\cos t_1 + \mathrm{j} \sin t_1) \in \mathbb{C}$ şi $\forall z_2 = r_2 (\cos t_2 + \mathrm{j} \sin t_2) \in \mathbb{C}^*$ :
$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos (t_1 - t_2) + \mathrm{j} \sin (t_1 - t_2))$.

**Exemplul 1.1.5**. Să se calculeze
**a)** $E_1 = \left(-1 + \mathrm{j}\sqrt{3}\right)^{10}$;**b)** $E_2 = \frac{(1+\mathrm{j})^{2013}}{(1-\mathrm{j})^{2000}}$.
**Rezolvare. a)**
<u>modul 1.</u> (algebric-mai ales dacă se cere forma algebrică a $E_1$)
O variantă de calcul algebric este:
$z = -1 + \mathrm{j}\sqrt{3}$
$z^2 = \left(-1 + \mathrm{j}\sqrt{3}\right)^2 = -2 - 2\mathrm{j}\sqrt{3}$
$z^3 = 2\left(-1 - \mathrm{j}\sqrt{3}\right)\left(-1 + \mathrm{j}\sqrt{3}\right) = 2^3$
$E_1 = z^{10} = z^{3 \cdot 3 + 1} = \left(z^3\right)^3 \cdot z = \left(2^3\right)^3 \cdot \left(-1 + \mathrm{j}\sqrt{3}\right) = -2^9 + \mathrm{j} \cdot 2^9\sqrt{3}$.
<u>modul 2.</u> (trigonometric-mai ales dacă se cere forma trigonometrică a $E_1$)
Analog cu exerciţiul 1.1.4, se reprezintă trigonometric

$$z = -1 + \mathrm{j}\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{j}\sin\frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow$$

$$E_1 = z^{10} = \left(-1 + \mathrm{j}\sqrt{3}\right)^{10} = \left(2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{j}\sin\frac{2\pi}{3}\right)\right)^{10} = 2^{10}\left(\cos\frac{20\pi}{3} + \mathrm{j}\sin\frac{20\pi}{3}\right) =$$

$$= 2^{10}\left(\cos\left(6\pi + \frac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{j}\sin\left(6\pi + \frac{2\pi}{3}\right)\right) \overset{k=3}{=}$$

$$= 2^{10}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{j}\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

**b)** A se vedea Seminar.

**Definiţia 1.1.3**. Fie $z \in \mathbb{C}^*$ şi $n \in \mathbb{N}^*$. Se numeşte *rădăcină de ordinul* $n$ *a* $z$ orice număr complex $Z$ care verifică ecuaţia

$$Z^n = z.$$

**Propoziţia 6**. Fie $z = r(\cos t^* + \mathrm{j}\sin t^*) \in \mathbb{C}^*$, cu $r = |z|, t^* = \arg z \in [0, 2\pi[$(dacă se lucrează cu tăietura $Ox_+$; altfel $[0+\alpha, 2\pi+\alpha[, \alpha \in \mathbb{R}$). Numărul complex nenul $z$ are exact $n$ rădăcini complexe de ordin $n$, şi anume

$$\boxed{(\sqrt[n]{z})_{\mathbb{C}} = \left\{Z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{t^*+2k\pi}{n} + \mathrm{j}\sin\frac{t^*+2k\pi}{n}\right); k \in \{0, 1, ..., n-1\}\right\}.}$$

**Exemplul 1.1.6**. Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuaţiile

**a)** $(2+\mathrm{j})\,Z^3 - 3 + \mathrm{j} = 0;$

**Rezolvare.** A se vedea Seminar.

## 1.2. Structura topologică a mulţimii $\mathbb{C}$

**Teorema 1.2.1. a)** $(\mathbb{C}, \|\cdot\|)$ este spaţiu normat, cu *funcţia normă* uzuală pe $\mathbb{C}$

$\|\cdot\| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}, \|z\| = |z|$, adică

$(N_1)$ $\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (inegalitatea triunghiulară sau Minkovski);

$(N_2)$ $\forall (\alpha, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C} : |\alpha z| = |\alpha| \, |z|$;

$(N_3)$ $\forall z \in \mathbb{C} : [|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0]$.

**b)** Deci $(\mathbb{C}, d)$ este spaţiu metric, cu *funcţia distanţă* uzuală pe $\mathbb{C}$

$d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}, d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$, adică

$(M_1)$ $\forall (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 : d(z_1, z_3) \leq d(z_1, z_2) + d(z_2, z_3)$
(inegalitatea triunghiulară sau Minkovski);

$(M_2)$ $\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1)$;

$(M_3)$ $\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : [d(z_1, z_2) = 0 \Leftrightarrow z_1 = z_2]$.

**c)** Deci $(\mathbb{C}, \mathcal{T})$ este spaţiu topologic, cu *topologia* uzuală pe $\mathbb{C}$ dată mulţimea $\mathcal{T}$ a tuturor mulţimilor deschise, adică

$(T_1)$ $\emptyset \in \mathcal{T}, X \in \mathcal{T}$;

$(T_2)$ reuniunea mulţimilor oricărui sistem de elemente din $\mathcal{T}$ este un element din $\mathcal{T}$.

$(T_3)$ intersecţia mulţimilor oricărui sistem finit de elemente din $\mathcal{T}$ este un element din $\mathcal{T}$.

**Observaţie.** $(\mathbb{C}, d)$ şi $(\mathbb{R}, d)$ pot fi identificate ca spaţii normate, metrice, topologice.

**Definiţia 1.2.1.** O mulţime $D \subseteq \mathbb{C}$ se numeşte *mulţime deschisă în* $\mathbb{C}$

$$\begin{cases} \text{dacă } D = \emptyset \text{ sau} \\ \text{dacă } D \neq \emptyset \text{ şi } \forall a \in D, \exists r_a > 0 \text{ a.î. } \{z \in \mathbb{C}; |z - a| < r_a\} \subseteq D. \end{cases}$$

**Exemplul 1.2.1.** $A = \{z \in \mathbb{C}; |z - 0| < 1\}$ este mulţime deschisă în $\mathbb{C}$.

**Definiţia 1.2.2.** O mulţime $V \subseteq \mathbb{C}$ se numeşte *vecinătate în* $\mathbb{C}$ *a punctului* $z_0 \in \mathbb{C}$ dacă

$\exists r > 0$ a.î. $\{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < r\} \subseteq V)$.

Se notează cu $\mathcal{V}(z_0)$ mulţimea tuturor vecinătăţilor punctului $z_0 \in \mathbb{C}$.

**Observaţia 1.2.2.** Fie $z_0 \in \mathbb{C}$ şi $r > 0$. Mulţimea

$\{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| = r\}$

este *sfera* cu centrul în $z_0$ şi de rază $r$. Mulţimea

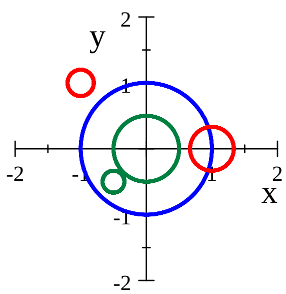
$\{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < r\}$

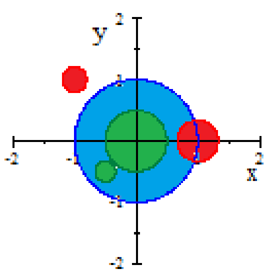
este *interiorul sferei* (*sfera deschisă*) cu centrul în $z_0$ şi de rază $r$. Mulţimea

$\{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| > r\}$

este *exteriorul sferei* cu centrul în $z_0$ şi de rază $r$.

**Exemplul 1.2.2. a)** Fie $A = \{z \in \mathbb{C}; |z - 0| < 1\}$. Atunci



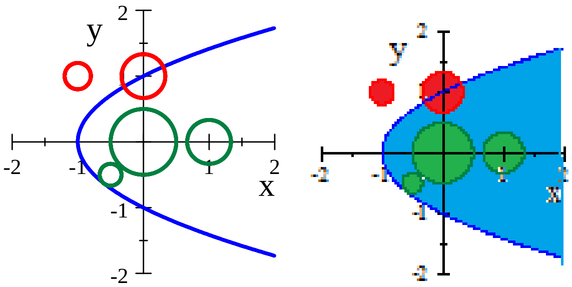




$A \in \mathcal{V}(0)$ deoarece $\exists r > 0$ (de exemplu $r = \frac{1}{2}$) a.î. $\left\{z \in \mathbb{C}; |z - 0| < \frac{1}{2}\right\} \subseteq A$.

$A \in \mathcal{V}\left(-\frac{1}{2} - \mathrm{j}\,\frac{1}{2}\right)$ deoarece $\exists r > 0$ (de exemplu $r = \frac{1}{6}$) a.î. $\left\{z \in \mathbb{C}; \left|z + \frac{1}{2} + \mathrm{j}\,\frac{1}{2}\right| < \frac{1}{6}\right\} \subseteq A$.

$A \notin \mathcal{V}(-1 + \mathrm{j})$ deoarece $-1 + \mathrm{j} \notin A$.

$A \notin \mathcal{V}(0.9)$ deoarece, chiar dacă $0.9 \in A$, totuşi $\forall r > 0$ avem $\{z \in \mathbb{C}; |z - 0.9| < r\} \nsubseteq A$.
**b)** Fie $B = \{z \in \mathbb{C}; z = x + \mathrm{j}\, y, y^2 \leq x + 1\}$. Atunci

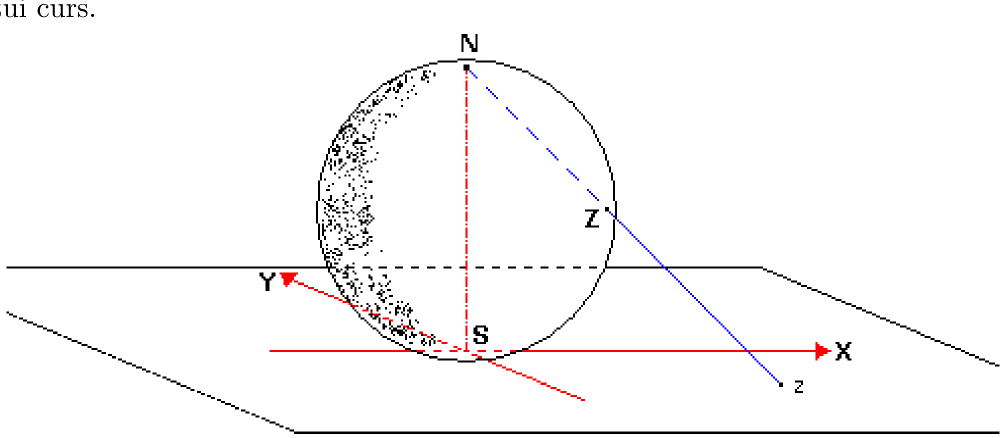



$B \in \mathcal{V}(0)$ deoarece $\exists r > 0$ (de exemplu $r = \frac{1}{2}$) a.î. $\{z \in \mathbb{C}; |z - 0| < \frac{1}{2}\} \subseteq B$.
$B \in \mathcal{V}\left(-\frac{1}{2} - \mathrm{j}\,\frac{1}{2}\right)$ deoarece $\exists r > 0$ (de exemplu $r = \frac{1}{6}$) a.î. $\left\{z \in \mathbb{C}; \left|z + \frac{1}{2} + \mathrm{j}\,\frac{1}{2}\right| < \frac{1}{6}\right\} \subseteq B$.
$B \in \mathcal{V}(0.9)$ deoarece $\exists r > 0$ (de exemplu $r = \frac{1}{3}$) a.î. $\{z \in \mathbb{C}; |z - 0.9| < \frac{1}{3}\} \subseteq B$.
$B \notin \mathcal{V}(-1 + \mathrm{j})$ deoarece $-1 + \mathrm{j} \notin B$.
$B \notin \mathcal{V}(\mathrm{j})$ deoarece, chiar dacă $\mathrm{j} \in A$, totuşi $\forall r > 0$ avem $\{z \in \mathbb{C}; |z - \mathrm{j}| < r\} \nsubseteq B$.
**Observaţia 1.2.3.** În $(\mathbb{C}, \|\cdot\|)$ care este spaţiu normat (deci $(\mathbb{C}, d)$ care este şi spaţiu metric), adică într-un spaţiu unde se pot defini sfere (sfera, sfera deschisă, sfera închisă), o mulţime $A \subseteq \mathbb{C}$ este *mărginită* dacă poate fi inclusă într-o sferă deschisă, adică
$\exists z_0 \in \mathbb{C}$ şi $\exists r > 0$ astfel încât $A \subseteq \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < r\}$ sau
$\exists M > 0$ astfel încât $A \subseteq \{z \in \mathbb{C}; |z - 0| < M\}$ sau
$\exists M > 0$ astfel încât $|z| < M, \forall z \in A$.
În $\mathbb{C}$ nu există noţiune de mărginire introdusă cu relaţia de ordine, cu $\inf, \sup$ deoarece nu se poate defini pe $\mathbb{C}$ o relaţie de ordine totală.
**Exemplul 1.2.3.** **a)** $A = \{z \in \mathbb{C}; |z - 0| < 1\}$ este mulţime mărginită în $\mathbb{C}$, deoarece
$\exists M = 3 > 0$ astfel încât $A \subseteq \{z \in \mathbb{C}; |z - 0| < 3\}$
**b)** $B = \{z \in \mathbb{C}; z = x + \mathrm{j}\, y, y^2 \leq x + 1\}$ nu este mulţime mărginită în $\mathbb{C}$, deoarece
$\forall M > 0,\ A \subsetneq \{z \in \mathbb{C}; |z - 0| < M\}$.
**Definiţia 1.2.3.** Fie $A \subseteq \mathbb{C}$ o submulţime şi $z \in \mathbb{C}$ un punct. Punctul $z \in \mathbb{C}$ se numeşte
**a)** *punct interior în $\mathbb{C}$ al mulţimii $A$* dacă
$\exists V \in \mathcal{V}(z)$ a.î. $V \subseteq A$;
Se notează cu $\mathrm{int}_{\mathbb{C}}\, A$ mulţimea tuturor punctelor interioare în $\mathbb{C}$ ale mulţimii $A$ şi se numeşte *interiorul în $\mathbb{C}$ al mulţimii $A$*;
**b)** *punct exterior în $\mathbb{C}$ al mulţimii $A$* dacă
$\exists V \in \mathcal{V}(z)$ a.î. $V \subseteq c_{\mathbb{C}}A$;
Se notează cu $\mathrm{ext}_{\mathbb{C}}\, A$ mulţimea tuturor punctelor exterioare în $\mathbb{C}$ ale mulţimii $A$ şi se numeşte *exteriorul în $\mathbb{C}$ al mulţimii $A$*;
**c)** *punct frontieră în $\mathbb{C}$ al mulţimii $A$* dacă
$\forall V \in \mathcal{V}(z) \Rightarrow [V \cap A \neq \emptyset$ şi $V \cap c_{\mathbb{C}}A \neq \emptyset]$;
Se notează cu $\mathrm{fr}_{\mathbb{C}}\, A$ mulţimea tuturor punctelor frontieră în $\mathbb{C}$ ale mulţimii $A$ şi se numeşte *frontiera în $\mathbb{C}$ a mulţimii $A$*;
**d)** *punct aderent în $\mathbb{C}$ al mulţimii $A$* dacă
$\forall V \in \mathcal{V}(z) \Rightarrow V \cap A \neq \emptyset$;
Se notează cu $\mathrm{ad}_{\mathbb{C}}\, A$ mulţimea tuturor punctelor aderente în $\mathbb{C}$ ale mulţimii $A$ şi se numeşte *aderenţa în $\mathbb{C}$ a mulţimii $A$*;
**e)** *punct de acumulare în $\mathbb{R}$ al mulţimii $A$* dacă

$\forall V \in \mathcal{V}(z) \Rightarrow V \cap (A \setminus \{a\}) \neq \emptyset$;
Se notează cu $\mathrm{ac}_{\mathbb{R}} A$ (sau cu $A'$) mulţimea tuturor punctelor de acumulare în $\mathbb{C}$ ale mulţimii $A$ şi se numeşte *mulţimea derivată sau a punctelor de acumulare în* $\mathbb{C}$ *a mulţimii* $A$;
**f)** *punct izolat în* $\mathbb{C}$ *al mulţimii* $A$ dacă
$\exists V \in \mathcal{V}(z)$ a.î. $V \cap A = \{a\}$;
Se notează cu $\mathrm{iz}_{\mathbb{C}} A$ mulţimea tuturor punctelor izolate în $\mathbb{C}$ ale mulţimii $A$ şi se numeşte *mulţimea punctelor izolate în* $\mathbb{C}$ *ale mulţimii* $A$.
**Propoziţia 1.2.1**. Fie $A \subseteq \mathbb{C}$ o submulţime. Atunci
**a)** $\mathrm{int}_{\mathbb{C}} A \subseteq A$;**b)** $\mathrm{int}_{\mathbb{C}} (c_{\mathbb{C}} A) = \mathrm{ext}_{\mathbb{C}} A \subseteq c_{\mathbb{C}} A$;**c)** $A' \subseteq \mathrm{ad}_{\mathbb{C}} A$;
**d)** $\mathrm{iz}_{\mathbb{C}} A \subseteq A$ şi $\mathrm{iz}_{\mathbb{C}} A \subseteq \mathrm{ad}_{\mathbb{C}} A$;**e)** Sistemul $(\mathrm{int}_{\mathbb{C}} A, \mathrm{fr}_{\mathbb{C}} A, \mathrm{ext}_{\mathbb{C}} A)$ este o partiţie a mulţimii $\mathbb{C}$.
**Definiţia 1.2.4**. Fie $A \subseteq \mathbb{C}$ o submulţime. Se numeşte *închiderea în* $\mathbb{C}$ *a mulţimii* $A$ mulţimea
$\overline{A}^{\mathbb{C}} = \mathrm{int}_{\mathbb{C}} A \cup \mathrm{fr}_{\mathbb{C}} A$.
**Propoziţia 1.2.2**. Fie $A \subseteq \mathbb{C}$ o submulţime. Atunci
**a)** $\overline{A}^{\mathbb{C}} = \mathrm{ad}_{\mathbb{C}} A$;**b)** $\mathrm{fr}_{\mathbb{C}} A = \overline{A}^{\mathbb{C}} \cap \overline{c_{\mathbb{C}} A}^{\mathbb{C}}$;**c)** $\overline{A}^{\mathbb{C}} = A \cup A'$;
**d)** Sistemul $(A', \mathrm{iz}_{\mathbb{C}} A)$ este o partiţie a mulţimii $\overline{A}^{\mathbb{C}}$.
**Teorema 1.2.2**. (**de caracterizare a interiorului şi a închiderii unei mulţimi în** $\mathbb{C}$) Fie $A \subseteq \mathbb{C}$ o submulţime.
**a)** $\mathrm{int}_{\mathbb{C}} A$ este reuniunea mulţimilor deschise incluse în $A$
$\mathrm{int}_{\mathbb{C}} A = \cup \{D \in \mathcal{T}; D \subseteq A\} \in \mathcal{T}$;
**b)** $\overline{A}^{\mathbb{C}}$ este intersecţia mulţimilor închise care includ $A$
$\overline{A}^{\mathbb{C}} = \cap \{F \in \mathcal{F}; A \subseteq F\} \in \mathcal{F}$.
**Teorema 1.2.3**. (**de caracterizare a mulţimilor deschise şi a mulţimilor închise în** $\mathbb{C}$) Fie $A \subseteq \mathbb{C}$ o submulţime.
**a)** $A \in \mathcal{T}$(este mulţime <u>deschisă</u> în $\mathbb{C}$) $\Leftrightarrow \mathrm{int}_{\mathbb{C}} A = A$;
**b)** $A \in \mathcal{F}$(este mulţime <u>închisă</u> în $\mathbb{C}$) $\Leftrightarrow \overline{A}^{\mathbb{C}} = A \Leftrightarrow \overline{A}^{\mathbb{C}} \subseteq A \Leftrightarrow A' \subseteq A$.

### 1.3$^{\bigcirc}$. Mulţimea numerelor complexe extinsă $\overline{\mathbb{C}}$-...

**Observaţia 1.3.1**. Analog cu $\mathbb{R}$, şi în $\mathbb{C}$ se poate introduce "punctul $\infty_{\mathbb{C}}$" ca fiind o mulţime de puncte situate pe un "cerc" cu centrul în 0 (sau în alt punct complex) şi de rază înfinit sau ca fiind pe orice dreaptă ce trece prin 0 (sau prin alt punct complex). Planul complex extins cu "punctul $\infty_{\mathbb{C}}$", $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty_{\mathbb{C}}\}$, se poate proiecta stereografic pe o sferă cu polul sud originea lui $\mathbb{C}$ şi cu polul nord $\infty_{\mathbb{C}}$, numită sfera Riemann. Studiul acesteia, precum şi al topologiei pe $\overline{\mathbb{C}}$ nu fac obiectul acestui curs.



Se prelungesc operaţiile de adunare şi înmulţire de pe $\mathbb{C}$ pe $\overline{\mathbb{C}}$ impunând ca:

$\forall z \in \mathbb{C} : z + \infty_{\mathbb{C}} = \infty_{\mathbb{C}}$;

$\forall z \in \mathbb{C} : z \cdot \infty_{\mathbb{C}} = \infty_{\mathbb{C}}$;

$\forall z \in \mathbb{C} : \dfrac{z}{\infty_{\mathbb{C}}} = 0; \dfrac{z}{0} = \infty_{\mathbb{C}}$.

**1.4**$^{\bigcirc}$. Şiruri de numere complexe-... **1.5**$^{\bigcirc}$. Serii de numere complexe...

## 2. Funcţii complexe de o variabilă reală $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

**Definiţia 2.1**. Se numeşte *funcţie complexă de o variabilă reală* orice funcţie
$f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}, f(t) = x(t) + \mathrm{j}\, y(t)$,
unde $x : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt funcţii reale de o variabilă reală.
**Observaţia 2.1**. Noţiunile de limită a funcţiei $f$ în $t_0 \in A'$ , de continuitate a funcţiei $f$ în $t_0 \in A$ (pe $A$) derivă din noţiunile de limită şi continuitate studiate în spaţii metrice, spaţii topologice gândind $\mathbb{R}$ şi $\mathbb{C}$ cu topologiile uzuale.
**Teorema 2.1**. **a)** Funcţia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ admite limită în $t_0 \in A'$ dacă şi numai dacă funcţiile $x$ şi $y$ admit limită în $t_0$. În acest caz
$$\lim_{t\to t_0} f(t) = \lim_{t\to t_0} x(t) + \mathrm{j} \lim_{t\to t_0} y(t);$$
**b)** Funcţia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ este continuă în $t_0 \in A$ (respectiv pe $A$)dacă şi numai dacă funcţiile $x : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $y : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt continue în $t_0$ (respectiv pe $A$).
**Teorema 2.2**. Funcţia $f : \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ este continuă în $t_0 \in A$ dacă şi numai dacă
sau $t_0$ este punct izolat
sau $t_0 \in A \cap A'$ şi $\lim\limits_{t\to t_0} f(t) = f(t_0)$.
**Interpretarea geometrică.** Dacă
$f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}, f(t) = x(t) + \mathrm{j}\, y(t)$
este funcţie continuă, atunci
$$\operatorname{Im}\gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in [a, b]$$
sunt ecuaţiile parametrice ale unui drum (reprezentant al unei curbe) în planul complex.
**Definiţia 2.2**. Se numeşte *funcţia modul al funcţiei* $f$ funcţia
$|f| : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, |f|(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$.
**Teorema 2.3**. **a)** Dacă $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ admite limită în $t_0 \in A'$ atunci şi funcţia $|f| : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admite limită în $t_0$. În acest caz
$$\lim_{t\to t_0} |f(t)| = \left|\lim_{t\to t_0} f(t)\right|.$$
**b)** Dacă $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ este continuă în $t_0 \in A$ (pe $A$) atunci şi $|f| : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este continuă în $t_0 \in A$ (pe $A$).
**Definiţia 2.3**. Fie $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ un interval şi $f : \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ şi $t_0 \in \mathbb{I} \cap \mathbb{I}'$. $f$ *are derivată în* $t_0$ dacă
$$\exists \lim_{t\to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \overset{\text{not.}}{=} f'(t_0)$$
$f$ *este derivabilă în* $t_0$ dacă limita anterioară există şi este finită.
**Teorema 2.4**. Funcţia $f : \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ este derivabilă în $t_0 \in \mathbb{I} \cap \mathbb{I}'$ dacă şi numai dacă funcţiile $x : \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ şi $y : \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sunt derivabile în $t_0$. În acest caz,
$$f'(t_0) = x'(t_0) + \mathrm{j}\, y'(t_0).$$
**Definiţia 2.4**. Fie $\mathbb{I} = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ şi $f : [a, b] \to \mathbb{C}$. $f$ este *integrabilă Riemann pe* $[a, b]$ dacă $x : [a, b] \to \mathbb{R}$ şi $y : [a, b] \to \mathbb{R}$ sunt integrabile Riemann pe $[a, b]$ şi se notează $f \in \mathcal{R}_{\mathbb{C}}([a, b])$. În acest caz,
$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b x(t)\,dt + \mathrm{j} \int_a^b y(t)\,dt.$$