CURS NR. 5
Matematici Speciale, AIA

3. Funcţii complexe de o variabilă complexă $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

3.1. Funcţii complexe de o variabilă complexă. Definiţii, limită, continuitate.

Definiţia 3.1.1 Se numeşte *funcţie complexă de o variabilă complexă* orice funcţie
$f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = u(x, y) + \mathrm{j}\, v(x, y)$,
unde, pentru $\forall z = x + \mathrm{j}\, y, u : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ şi $v : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sunt funcţii reale de o variabilă pereche de numere reale. Se notează cu $\mathrm{Re}(f) = u$ şi $\mathrm{Im}(f) = v$ respectiv partea reală a funcţiei f şi coeficientul părţii imaginare a funcţiei f.
Observaţia 3.1.1 Noţiunile de limită a funcţiei f în $z_0 \in A'$, de continuitate a funcţiei f în $z_0 \in A$ (pe A) sunt cele de limită şi continuitate în spaţii normate, metrice, topologice, gândind $\mathbb{C}$ cu topologia uzuală.
Teorema 3.1.1. Fie funcţia
$f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) = u(x, y) + \mathrm{j}\, v(x, y)$.
a) Funcţia f admite limită în $z_0 = x_0 + \mathrm{j}\, y_0 \in A'$ dacă şi numai dacă funcţiile $u : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ şi $v : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ admit limită în (x_0, y_0). În acest caz,
$\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x, y) + \mathrm{j} \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x, y)$;
b) Funcţia f este continuă în $z_0 = x_0 + \mathrm{j}\, y_0 \in A$ (respectiv pe A) dacă şi numai dacă funcţiile $u : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $v : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sunt continue în (x_0, y_0) (respectiv pe A).
Teorema 3.1.2. Funcţia $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ este continuă în $z_0 \in A$ dacă şi numai dacă
sau z_0 este punct izolat;
sau $z_0 \in A \cap A'$ şi $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.
Definiţia 3.1.2. Fie funcţia
$f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) = u(x, y) + \mathrm{j}\, v(x, y)$.
Se numeşte *funcţia modul al funcţiei* f (*magnitudinea* funcţiei f) funcţia
$|f| : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{R}, |f|(z) = \sqrt{u^2(x, y) + v^2(x, y)}$.
Teorema 3.1.3. a) Dacă $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ admite limită în $z_0 \in A'$ atunci şi funcţia $|f| : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ admite limită în z_0. În acest caz,
$\lim\limits_{z \to z_0} |f(z)| = \left| \lim\limits_{z \to z_0} f(z) \right|$.
b) Dacă $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ este continuă în $z_0 \in A$ (pe A) atunci şi $|f| : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ este continuă în $z_0 \in A$ (pe A).

3.2. Funcţii complexe de o variabilă complexă. Funcţii monogene, funcţii olomorfe, funcţii întregi. Teorema Cauchy-Riemann

De precizat că, dacă $A \subseteq \mathbb{C}$ este deschisă atunci $A \cap A' = A$ şi că $A = D \subseteq \mathbb{C}$ este domeniu dacă este mulţime deschisă şi conexă.
Definiţia 3.2.1. a) Fie $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ şi $z_0 \in A \cap A'$. f *are derivată în* z_0 dacă
$\exists \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \overset{\text{not.}}{=} f'(z_0) \in \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty_{\mathbb{C}}\}$
Dacă limita anterioară există şi este în $\mathbb{C}$, f este *derivabilă* sau *monogenă în* z_0.
b) Fie $A \subseteq \mathbb{C}$ o mulţime deschisă şi $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. f este *derivabilă* sau *olomorfă pe* A dacă este

derivabilă în $\forall z_0 \in A$. Se notează cu $\mathcal{H}(A)$ mulţimea tuturor funcţiilor olomorfe pe A.
c) $f : A = \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ este *întreagă* dacă este olomorfă pe $A = \mathbb{C}$.
Observaţia 3.2.1. Dacă funcţia f este derivabilă pe mulţimea $A_1 \subset A$-deschisă, atunci se poate defini o funcţie

$$f' : A_1 \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

care asociază fiecărui $z \in A_1$, numărul complex $f'(z)$. Această funcţie se numeşte *funcţia derivată a* f.
Definiţia 3.2.2. Fie $A \subseteq \mathbb{C}$ o mulţime deschisă şi $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ o funcţie derivabilă pe A, cu $f' : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ funcţia derivată ataşată. Fie $z_0 \in A$
a) f *are derivată de ordin doi în* z_0 dacă

$$\exists \lim_{z \to z_0} \frac{f'(z) - f'(z_0)}{z - z_0} \overset{\text{not.}}{=} f''(z_0) \in \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty_{\mathbb{C}}\}.$$

b) f *este derivabilă de ordinul doi în punctul* z_0 dacă există limita anterioară în $\mathbb{C}$.
c) f *este derivabilă de ordinul doi pe mulţimea* A dacă este derivabilă în fiecare $z_0 \in A$.
Analog se defineşte, dacă există, $f^{(n)}(z_0), n \in \mathbb{N}_2$.
Observaţia 3.2.2. Se va demonstra ulterior că o funcţie $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfă pe domeniul D este derivabilă de orice ordin pe D. Acest rezultat este specific funcţiilor complexe, cele reale neverificându-l.
Teorema 3.2.1. (**operaţii cu funcţii derivabile**)
I. Fie $f, g : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ funcţii derivabile pe mulţimea deschisă A. Fie $\alpha \in \mathbb{C}$. Atunci funcţiile $f + g, \alpha f$ şi $f \cdot g$ sunt derivabile pe mulţimea deschisă A şi
a) $(f + g)'(z) = f'(z) + g'(z), \forall z \in A$;
b) $(\alpha \cdot f)'(z) = \alpha f'(z), \forall z \in A$;
c) $(f \cdot g)'(z) = f'(z) \cdot g(z) + f(z) \cdot g'(z), \forall z \in A$.
Dacă, în plus, $g(z) \neq 0, \forall z \in A$ atunci funcţia $\dfrac{f}{g}$ este derivabilă pe mulţimea deschisă A şi
d) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(z) = \dfrac{1}{g^2(z)}\left(f'(z) \cdot g(z) - f(z) \cdot g'(z)\right), \forall z \in A$.
Fie $f_1, f_2, ..., f_n : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ funcţii derivabile pe mulţimea deschisă. Atunci funcţiile $f_1 + f_2 + ... + f_n$ şi $f_1 \cdot f_2 \cdot ... \cdot f_n$ sunt derivabile pe mulţimea deschisă A şi
a) $(f_1 + f_2 + ... + f_n)'(z) = f_1'(z) + f_2'(z) + ... + f_n'(z), \forall z \in A$;
b) $(f_1 \cdot f_2 \cdot ... \cdot f_n)'(z) = f_1'(z) \cdot f_2(z) \cdot ... \cdot f_n(z) + f_1(z) \cdot f_2'(z) \cdot ... \cdot f_n(z) + ... +$
$+ f_1(z) \cdot f_2(z) \cdot ... \cdot f_n'(z), \forall z \in A$.
II. Fie $f : A \subseteq \mathbb{C} \to B \subseteq \mathbb{C}$ şi $g : B \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, unde A şi B sunt domenii din $\mathbb{C}$. Dacă
(i) f este derivabilă în $z \in A$
(ii) g este derivabilă în $f(z) \in B$,
atunci funcţia $g \circ f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ este derivabilă în z şi

$$(g \circ f)'(z) = g'(f(z)) \cdot f'(z).$$

Mai mult, dacă f este derivabilă pe A şi g este derivabilă pe B atunci $g \circ f$ este derivabilă pe A şi

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'.$$

III. Fie $f : A \subseteq \mathbb{C} \to B \subseteq \mathbb{C}$, unde A şi B sunt domenii din $\mathbb{C}$. Dacă
(i) f este funcţie bijectivă,
(ii) f este continuă pe A şi derivabilă în $z \in A$, cu $f(z) \neq 0$,
atunci funcţia inversă $f^{-1} : B \subseteq \mathbb{C} \to A \subseteq \mathbb{C}$ este derivabilă în $w = f(z)$ şi

$$\left(f^{-1}\right)'(w) = \frac{1}{f'(w)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))}.$$

Teorema 3.2.2. Fie $A \subseteq \mathbb{C}$ mulţime deschisă. Dacă $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ este funcţie monogenă în

$z_0 \in A$, atunci este continuă în z_0.
Definiţia 3.2.3. Fie $A \subseteq \mathbb{C}$ mulţime deschisă, fie $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ şi $z_0 \in A$.
a) Funcţia f este *diferenţiabilă de ordinul* 1 *în* z_0 dacă
$\exists c \in \mathbb{C}$ o constantă şi $\alpha : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ o funcţie cu $\lim\limits_{z\to z_0} \alpha(z) = \alpha(z_0) = 0$ astfel încât
$f(z) - f(z_0) = c \cdot (z - z_0) + \alpha(z) \cdot |z - z_0|, \forall z \in A$
(local, într-o vecinătate a lui z_0, f este *funcţie afină*)
b) Funcţia f este *diferenţiabilă de ordinul* 1 *pe mulţimea deschisă* A dacă este diferenţiabilă de ordinul 1 în $\forall z_0 \in A$.
Teorema 3.2.3. Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu, fie $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ şi $z_0 \in D$. Funcţia f este diferenţiabilă în z_0 dacă şi numai dacă este monogenă în z_0. În acest caz, $c = f'(z_0)$.
Demonstraţie. *Necesitatea.* Se presupune că f este diferenţiabilă în $z_0 \Rightarrow \exists c$ şi $\exists\alpha$ astfel încât să aibă loc definiţia
$f(z) - f(z_0) = c \cdot (z - z_0) + \alpha(z) \cdot |z - z_0|, \forall z \in D.$
Se înmulţeşte egalitatea anterioară cu $\dfrac{1}{z - z_0}$, pentru $z \neq z_0$, de unde
$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = c + \alpha(z)\frac{|z - z_0|}{z - z_0}.$$
Se trece la limită egalitatea rezultată pentru $z \to z_0$ şi, deoarece $\dfrac{|z - z_0|}{z - z_0}$ este mărginită ($\left|\dfrac{|z - z_0|}{z - z_0}\right| = 1$), iar $\lim\limits_{z\to z_0} \alpha(z) = \alpha(z_0) = 0$ se obţine că
$$\exists \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = c + 0 \in \mathbb{C},$$
deci f este monogenă în z_0 şi $f'(z_0) = c$.
Suficienţa. Se presupune că f este monogenă în z_0. Se defineşte
$c = f'(z_0) \in \mathbb{C}$ şi
$$\alpha : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ \alpha(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \cdot \dfrac{z - z_0}{|z - z_0|} - f'(z_0)\dfrac{z - z_0}{|z - z_0|}, & \text{dacă } z \in D \setminus \{z_0\} \\ 0, & \text{dacă } z = z_0 \end{cases}$$
Se observă că $\lim\limits_{z\to z_0} \alpha(z) = \alpha(z_0) = 0$ şi că se verifică definiţia$\Rightarrow$ f este diferenţiabilă în z_0. În plus, α este unic determinată.
Teorema 3.2.4. (**Cauchy-Riemann, CNS de monogeneitate**) Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu şi $z_0 \in D$. Fie funcţia
$f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) = u(x, y) + \mathrm{j}\, v(x, y), z = x + \mathrm{j}\, y.$
Funcţia f este monogenă în $z_0 = x_0 + \mathrm{j}\, y_0$ dacă şi numai dacă
(i) funcţiile $u : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,$v : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sunt diferenţiabile în (x_0, y_0);
(ii) au loc *condiţiile Cauchy-Riemann* $\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \end{cases}}$

În caz de monogeneitate,
$$\boxed{f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + \mathrm{j}\,\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)} = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) - \mathrm{j}\,\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) =$$
$$= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - \mathrm{j}\,\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) + \mathrm{j}\,\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$
Demonstraţie. Conform Teoremei 3.2.3, f este monogenă în z_0 dacă şi numai dacă este diferenţiabilă în z_0. Se obţine, din definiţia diferenţiabilităţii,

$$(u(x,y)-u(x_0,y_0))+\mathrm{j}\,(v(x,y)-v(x_0,y_0)) =$$
$$= (c_1+\mathrm{j}\,c_2)\cdot((x-x_0)+\mathrm{j}\,(y-y_0))+(\alpha_1(x,y)+\mathrm{j}\,\alpha_2(x,y))\cdot|z-z_0|.$$

Se identifică părţile reale, respectiv imaginare din cei doi membri$\Rightarrow$

$$\begin{cases} u(x,y)-u(x_0,y_0)=c_1(x-x_0)-c_2(y-y_0)+\alpha_1(x,y)\,|z-z_0| \\ v(x,y)-v(x_0,y_0)=c_2(x-x_0)+c_1(y-y_0)+\alpha_2(x,y)\,|z-z_0| \end{cases},$$

cu $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\alpha_1(x,y)=\alpha_1(x_0,y_0)=0$ şi $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\alpha_1(x,y)=\alpha_1(x_0,y_0)=0$.

Aceste relaţii sunt echivalente cu diferenţiabilitatea funcţiilor u şi v în (x_0,y_0) şi

$$\begin{cases} c_1=\dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0),\, -c_2=\dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0), \\ c_2=\dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0),\, c_1=\dfrac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \end{cases},$$

adică au loc condiţiile Cauchy-Riemann.

Mai mult, împărţind prin $(x-x_0)+\mathrm{j}\,(y-y_0)$ şi trecând la limită $z\to z_0$, se obţin formulele din final.

Observaţia 3.2.3. În ipotezele Teoremei 3.2.3., în caz de monogeneitate,

$$|f'(z_0)|^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)\right)^2=$$
$$=\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)\right)-\left(\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)\right)=$$
$$=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) & \dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) & \dfrac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \end{vmatrix}=\frac{D(u,v)}{D(x,y)}(x_0,y_0),$$

adică $\boxed{|f'(z_0)|^2=\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}(x_0,y_0)}$−jacobianul.

Corolar 3.2.1. Fie $D\subseteq\mathbb{C}$ un domeniu şi $z_0=x_0+\mathrm{j}\,y_0\in D$. Fie funcţia

$f:D\subseteq\mathbb{C}\to\mathbb{C},\ f(z)=u(x,y)+\mathrm{j}\,v(x,y),\ z=x+\mathrm{j}\,y.$

Dacă

(i) funcţiile $u:D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $v:D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ admit derivate parţiale într-o vecinătate V a punctului $(x_0,y_0)\in D$,

(i)' funcţiile $\dfrac{\partial u}{\partial x}:V\subseteq D\to\mathbb{R}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}:V\subseteq D\to\mathbb{R}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}:V\subseteq D\to\mathbb{R}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}:V\subseteq D\to\mathbb{R}$ sunt continue în punctul $(x_0,y_0)\in D$,

(ii) au loc condiţiile Cauchy-Riemann în z_0,

atunci f este monogenă în z_0.

$\bigcirc$**Observaţia 3.2.4**. Există funcţii f pentru care sunt îndeplinite doar **(i)** şi **(ii)** din Corolar 1 şi care nu sunt monogene în z_0. De exemplu, $z_0=0+0\,\mathrm{j}$ şi

$$f:\mathbb{C}\to\mathbb{C},\ f(z)=\begin{cases} \dfrac{z^2-(\overline{z})^2}{\overline{z}}, & \text{dacă } z\in\mathbb{C}\setminus\{0\} \\ 0, & \text{dacă } z=0 \end{cases}$$

Într-adevăr, $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C},\ f(z)=\begin{cases} \dfrac{-4xy^2}{x^2+y^2}+\mathrm{j}\,\dfrac{4x^2y}{x^2+y^2}, & \text{dacă } z=x+\mathrm{j}\,y\in\mathbb{C}\setminus\{0\} \\ 0, & \text{dacă } z=0 \end{cases}$ are

$$u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ u(x,y)=\begin{cases} \dfrac{-4xy^2}{x^2+y^2}, & \text{dacă } (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} \\ 0, & \text{dacă } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$$v:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, v\left(x,y\right)=\begin{cases}\dfrac{4x^2y}{x^2+y^2}, & \text{dacă } \left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\\ 0, & \text{dacă } \left(x,y\right)=\left(0,0\right)\end{cases}.$$

Fie $z_0=0+\mathrm{j}\cdot 0$.

(i) Se observă că u şi v admit derivate parţiale într-o vecinătate V a lui $(0,0)$, chiar pe $\mathbb{R}^2$.

•Se studiază dacă u este derivabilă parţial de ordinul 1 pe $\mathbb{R}^2=\left(\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\right)\cup\{(0,0)\}$, în raport cu x, respectiv y.

••pe $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, care e mulţime deschisă, se va deriva parţial folosind regulile de derivare parţială.

••în $a=(0,0)\in\left(\mathbb{R}^2\right)\cap\left(\mathbb{R}^2\right)'$ se va folosi definiţia derivatei parţiale în raport cu x, respectiv cu y.

$\exists?\dfrac{\partial u}{\partial x}:A_1\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, \dfrac{\partial u}{\partial x}\left(x,y\right)=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{-4xy^2}{x^2+y^2}\right)=\dfrac{-4y^2\left(x^2+y^2\right)-\left(-4xy^2\right)\left(2x+0\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$,

$\forall\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

$\exists?\dfrac{\partial u}{\partial x}\left(0,0\right)=\dfrac{du}{d\mathbf{e}_1}\left(0,0\right)=\lim\limits_{t\to0,t\in V}\dfrac{1}{t}\left(u\left(\left(0,0\right)+t\left(1,0\right)\right)-u\left(\left(0,0\right)\right)\right)=\lim\limits_{t\to0,t\in V}\dfrac{1}{t}\left(u\left(t,0\right)-u\left(0,0\right)\right)$

$=\lim\limits_{t\to0,t\in V}\dfrac{1}{t}\left(\dfrac{-4t\cdot0^2}{t^2+0^2}-0\right)=\lim\limits_{t\to0,t\in V}\dfrac{1}{t}\cdot0=\lim\limits_{t\to0,t\in V}0=0\Rightarrow\exists\dfrac{\partial u}{\partial x}\left(0,0\right)=0.$

Se observă că $A_1=\mathbb{R}^2$. Deci

$$\exists\frac{\partial u}{\partial x}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, \frac{\partial u}{\partial x}\left(x,y\right)=\begin{cases}\dfrac{4x^2y^2-4y^4}{\left(x^2+y^2\right)^2}, & \text{dacă } \left(x,y\right)\neq\left(0,0\right)\\ 0, & \text{dacă } \left(x,y\right)=\left(0,0\right)\end{cases}.$$

$\exists?\dfrac{\partial u}{\partial y}:A_2\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, \dfrac{\partial u}{\partial y}\left(x,y\right)=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{-4xy^2}{x^2+y^2}\right)=\dfrac{-8xy\left(x^2+y^2\right)-\left(-4xy^2\right)\left(0+2y\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$,

$\forall\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

$\exists?\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(0,0\right)=\dfrac{df}{d\mathbf{e}_2}\left(0,0\right)=\lim\limits_{t\to0,t\in V}\dfrac{1}{t}\left(u\left(\left(0,0\right)+t\left(0,1\right)\right)-u\left(\left(0,0\right)\right)\right)=\lim\limits_{t\to0,t\in V}\dfrac{1}{t}\left(u\left(0,t\right)-u\left(0,0\right)\right)$

$=\lim\limits_{t\to0,t\in V}\dfrac{1}{t}\left(\dfrac{-4\cdot0\cdot t^2}{0^2+t^2}-0\right)=\lim\limits_{t\to0,t\in V}0=0\Rightarrow\exists\dfrac{\partial u}{\partial y}\left(0,0\right)=0.$

Se observă că $A_2=\mathbb{R}^2$. Deci

$$\exists\frac{\partial u}{\partial y}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, \frac{\partial u}{\partial y}\left(x,y\right)=\begin{cases}\dfrac{-8x^3y}{\left(x^2+y^2\right)^2}, & \text{dacă } \left(x,y\right)\neq\left(0,0\right)\\ 0, & \text{dacă } \left(x,y\right)=\left(0,0\right)\end{cases}.$$

•Se studiază dacă v este derivabilă parţial de ordinul 1 pe $\mathbb{R}^2=\left(\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\right)\cup\{(0,0)\}$, în raport cu x, respectiv y.

••pe $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, care e mulţime deschisă, se va deriva parţial folosind regulile de derivare parţială.

••în $a=(0,0)\in\left(\mathbb{R}^2\right)\cap\left(\mathbb{R}^2\right)'$ se va folosi definiţia derivatei parţiale în raport cu x, respectiv cu y.

$\exists?\dfrac{\partial v}{\partial x}:A_1\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, \dfrac{\partial v}{\partial x}\left(x,y\right)=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{4x^2y}{x^2+y^2}\right)=\dfrac{8xy\left(x^2+y^2\right)-\left(4x^2y\right)\left(2x+0\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$,

$\forall\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

$\exists?\dfrac{\partial v}{\partial x}\left(0,0\right)=\dfrac{dv}{d\mathbf{e}_1}\left(0,0\right)=\lim\limits_{t\to0,t\in V}\dfrac{1}{t}\left(v\left(\left(0,0\right)+t\left(1,0\right)\right)-v\left(\left(0,0\right)\right)\right)=\lim\limits_{t\to0,t\in V}\dfrac{1}{t}\left(v\left(t,0\right)-v\left(0,0\right)\right)$

$=\lim\limits_{t\to0,t\in V}\dfrac{1}{t}\left(\dfrac{4\cdot0^2\cdot t}{t^2+0^2}-0\right)=\lim\limits_{t\to0,t\in V}\dfrac{1}{t}\cdot0=\lim\limits_{t\to0,t\in V}0=0\Rightarrow\exists\dfrac{\partial v}{\partial x}\left(0,0\right)=0.$

Se observă că $A_1 = \mathbb{R}^2$. Deci

$$\exists \frac{\partial v}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{8xy^3}{\left(x^2+y^2\right)^2}, & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

$$\exists ? \frac{\partial v}{\partial y} : A_2 \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{4x^2y}{x^2+y^2}\right) = \frac{4x^2\left(x^2+y^2\right) - \left(4x^2y\right)(0+2y)}{\left(x^2+y^2\right)^2},$$

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

$$\exists ? \frac{\partial v}{\partial y}(0,0) = \frac{dv}{d\mathbf{e}_2}(0,0) = \lim_{t\to 0, t\in V} \frac{1}{t}\left(v\left((0,0)+t(0,1)\right) - v\left((0,0)\right)\right) = \lim_{t\to 0, t\in V} \frac{1}{t}\left(v(0,t) - v(0,0)\right)$$

$$= \lim_{t\to 0, t\in V} \frac{1}{t}\left(\frac{4\cdot 0^2 \cdot t}{0^2+t^2} - 0\right) = \lim_{t\to 0, t\in V} 0 = 0 \Rightarrow \exists \frac{\partial v}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Se observă că $A_2 = \mathbb{R}^2$. Deci

$$\exists \frac{\partial v}{\partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4x^4 - 4x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}, & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

(ii) Se observă că au loc condiţiile Cauchy-Riemann în $z_0 = 0$, adică

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,0) = 0 = \dfrac{\partial v}{\partial y}(0,0) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(0,0) = 0 = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(0,0) \end{cases}$$

(Concluzii) Şi totuşi f nu este monogenă în $z_0 = 0$. Într-adevăr, se studiază dacă există în $\mathbb{C}$ limita funcţiei

$$R(z) = \frac{f(z) - f(0)}{z-0} \overset{z=x+\mathrm{j}\,y}{=} \frac{x-\mathrm{j}\,y)\left(\dfrac{-4xy^2}{x^2+y^2} + \mathrm{j}\,\dfrac{4x^2y}{x^2+y^2} - 0\right)}{x+\mathrm{j}\,y-0} =$$

$$= \frac{-4x^2y^2 + 4\,\mathrm{j}\,xy^3}{\left(x^2+y^2\right)^2} + \mathrm{j}\,\frac{4x^3y - 4\,\mathrm{j}\,x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \underbrace{\frac{0}{\left(x^2+y^2\right)^2}}_{u_R(x,y)} + \mathrm{j}\,\underbrace{\frac{4xy^3+4x^3y}{\left(x^2+y^2\right)^2}}_{v_R(x,y)}, z \neq 0$$

Funcţia R admite limită în $z_0 = 0 + \mathrm{j}\,0$ dacă şi numai dacă funcţiile u_R şi v_R admit limită în $(0,0)$. Cum

$$\lim_{n\to\infty} v_R\left(\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{4\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right)^3 + 4\left(\frac{1}{n}\right)^3\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2\right)^2} = \frac{8}{4} = 2$$

$$\lim_{n\to\infty} v_R\left(\tfrac{1}{n}, \tfrac{3}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{4\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{3}{n}\right)^3 + 4\left(\frac{1}{n}\right)^3\left(\frac{3}{n}\right)}{\left(\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{3}{n}\right)^2\right)^2} = \frac{4\cdot 27 + 4\cdot 3}{100} = \frac{6}{5}$$

şi $2 \neq \dfrac{6}{5} \Rightarrow \nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} v_R(x,y) \Rightarrow \nexists \lim\limits_{z\to z_0} R(z)$.

(i)'-Nu este verificată, $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$ nu sunt continue într-o vecinătate a lui $(0,0)$. De exemplu

$$\lim_{n\to\infty} u\left(\tfrac{1}{n}, \tfrac{3}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{4\left(\frac{1}{n}\right)^2\left(\frac{3}{n}\right)^2 - 4\left(\frac{3}{n}\right)^4}{\left(\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{3}{n}\right)^2\right)^2} = \frac{36 - 4\cdot 81}{100} = -\frac{72}{25} \neq u(0,0).$$

○**Exemplul 3.2.1**. Funcţia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = |z|$ nu este derivabilă în niciun punct din $\mathbb{C}$.

Rezolvare. Într-adevăr, $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = \sqrt{x^2+y^2} + \mathrm{j}\cdot 0, z = x + \mathrm{j}\,y \in \mathbb{C}$ are

$u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, u(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}; v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, v(x,y) = 0.$

•Se studiază dacă u este derivabilă parţial de ordinul 1 pe $\mathbb{R}^2 = \left(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\right) \cup \{(0,0)\}$, în raport cu x, respectiv y.

••pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, care e mulţime deschisă, se va deriva parţial folosind regulile de derivare parţială.

••în $a = (0,0) \in \left(\mathbb{R}^2\right) \cap \left(\mathbb{R}^2\right)'$ se va folosi definiţia derivatei parţiale în raport cu x, respectiv cu y.

$\exists ? \dfrac{\partial u}{\partial x} : A_1 \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) \underset{\text{de derivare}}{\overset{x \text{ este variabilă}}{=}} \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$

$\exists ? \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,0) = \dfrac{du}{d\mathbf{e}_1}(0,0) = \lim\limits_{t \to 0, t \in V} \dfrac{1}{t}\left(u\left((0,0) + t(1,0)\right) - u\left((0,0)\right)\right) = \lim\limits_{t \to 0, t \in V} \dfrac{1}{t}\left(u(t,0) - u(0,0)\right)$

$= \lim\limits_{t \to 0, t \in V} \dfrac{1}{t}\left(\sqrt{t^2} - 0\right) = \lim\limits_{t \to 0, t \in V} \dfrac{|t|}{t}.$

Cum $\lim\limits_{t \to 0, t<0} \dfrac{|t|}{t} = -1$ şi $\lim\limits_{t \to 0, t>0} \dfrac{|t|}{t} = 1 \Rightarrow \nexists \lim\limits_{t \to 0, t \in V} \dfrac{|t|}{t}$. Deci $\nexists \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,0)$. Deci

$\exists \dfrac{\partial u}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}, \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$

$\exists ? \dfrac{\partial u}{\partial y} : A_2 \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Analog, se observă că

$\exists \dfrac{\partial u}{\partial y} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}, \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$

•Se studiază dacă v este derivabilă parţial de ordinul 1 pe $\mathbb{R}^2$, în raport cu x, respectiv y. Se obţine că

$\exists \dfrac{\partial v}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 0$

$\exists \dfrac{\partial v}{\partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) = 0.$

Se aplică Teorema Cauchy-Riemann:

$*z_0 = 0 + \mathrm{j} \cdot 0$ nu poate fi punct de monogeneitate pentru f deoarece u nu admite derivate parţiale în $(0,0)$, deci u nu poate fi diferenţiabilă în $(0,0)$

$*z_0 \neq 0 + \mathrm{j} \cdot 0$ este punct de monogeneitate pentru $f \Leftrightarrow$

(i) funcţiile $u : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $v : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sunt diferenţiabile în (x_0, y_0) (sunt diferenţiabile);

(ii) au loc condiţiile Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}} = 0 \\ \dfrac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}} = -0 \end{cases} - \text{sistem incompatibil}$$

Deci şi toate punctele $z_0 \neq 0 + \mathrm{j} \cdot 0$ nu pot fi puncte de monogeneitate pentru f.

Exemplul 3.2.2. Să se determine punctele $z_0 \in \mathbb{C}$ în care funcţia

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = z^2 + z \cdot \overline{z} - (\overline{z})^2 + 2z - \overline{z}$

este monogenă şi să se calculeze în acele puncte derivata sa.

Rezolvare. Fie $z = x + \mathrm{j}\, y \in \mathbb{C} \Rightarrow \overline{z} = x - \mathrm{j}\, y$ şi

$f(z) = \left(x^2 - y^2 + 2\,\mathrm{j}\, xy\right) + x^2 + y^2 - \left(x^2 - y^2 - 2\,\mathrm{j}\, xy\right) + 2(x + \mathrm{j}\, y) - (x - \mathrm{j}\, y) =$

$= \left(x^2 + y^2 + x\right) + \mathrm{j}\,(4xy + 3y) \Rightarrow$

$u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, u(x,y) = x^2 + y^2 + x; v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, v(x,y) = 4xy + 3y.$

Se aplică Teorema Cauchy-Riemann: f este monogenă în $z_0 = x_0 + \mathrm{j}\, y_0 \in \mathbb{C} \Rightarrow$

(i) funcţiile u, v sunt diferenţiabile în (x_0, y_0) (sunt în $\forall (x_0, y_0)$, ca funcţii polonomiale)

(ii) au loc condiţiile Cauchy-Riemann

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)=\dfrac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)=-\dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}2x_0+1=4x_0+3\\ 2y_0=-(4y_0)\end{array}\right. \Rightarrow (x_0,y_0)=(-1,0)$$

Deci punctul $z_0=-1+\mathrm{j}\cdot 0$ este singurul punct de monogeneitate pentru f. Mai mult,

$$f'(z_0)=\frac{\partial u}{\partial x}(-1,0)+\mathrm{j}\,\frac{\partial v}{\partial x}(-1,0)=\left.(2x+1)\right|_{(x,y)=(-1,0)}+\mathrm{j}\left.(4y)\right|_{(x,y)=(-1,0)}=-1.$$

Comentariu: a) Există funcţii f care au $0,1,2,...,$ o infinitate de puncte de monogeneitate.

b) Funcţiile f care au legea de asociere depinzând de $\overline{z}$ pot avea $0,1,2,...,$ o infinitate de puncte de monogeneitate dintr-o mulţime închisă (de exemplu punctele unei drepte); nu sunt olomorfe pe o mulţime deschisă.

Teorema 3.2.5. (**de tip Cauchy-Riemann, CS de olomorfie**) Fie $D\subseteq\mathbb{C}$ un domeniu şi funcţia

$f:D\subseteq\mathbb{C}\to\mathbb{C},\ f(z)=u(x,y)+\mathrm{j}\,v(x,y),z=x+\mathrm{j}\,y.$

Dacă

(i) funcţiile $u:D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ v:D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ admit derivate parţiale pe D;

(ii) au loc *condiţiile Cauchy-Riemann pe* D, $\boxed{\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y)=\dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y)\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y)=-\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y)\end{array}\right.,\forall(x,y)\in D.}$

atunci funcţia f este olomorfă pe D.

În caz de olomorfie,

$$\boxed{f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)+\mathrm{j}\,\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)}=\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)-\mathrm{j}\,\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)=$$
$$=\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)-\mathrm{j}\,\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)+\mathrm{j}\,\frac{\partial v}{\partial x}(x,y),\forall z=x+\mathrm{j}\,y\in D.$$

Observaţia 3.2.5. În Teorema 3.2.5 condiţiile ca u,v să fie diferenţiabile pe D şi chiar ca derivatele parţiale ale u şi v să fie continue pe D se obţin din **(i)-(ii).**

Corolar 3.2.2. Fie $D\subseteq\mathbb{C}$ un domeniu şi funcţia

$f:D\subseteq\mathbb{C}\to\mathbb{C},\ f(z)=u(x,y)+\mathrm{j}\,v(x,y),z=x+\mathrm{j}\,y.$

Dacă f are u sau v sau $|f|$ sau $\arg f$ funcţii constante atunci f este constantă.

Exermplul 3.2.3. Să se determine $a,b,c\in\mathbb{R}$ astfel încât funcţia

$f:\mathbb{C}\to\mathbb{C},f(z)=x+ay+\mathrm{j}\,(bx+cy),z=x+\mathrm{j}\,y\in\mathbb{C}$

să fie funcţie olomorfă pe $\mathbb{C}$ (întreagă). Să se determine legea de asociere a f în funcţie de z şi funcţia derivată f'.

Rezolvare. Fie

$u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},u(x,y)=x+ay;v:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},v(x,y)=bx+cy.$

•Se determină $a,b,c\in\mathbb{R}$, impunând ca funcţia f să fie olomorfă pe domeniul $D=\mathbb{C}\Rightarrow$

(i) funcţiile u, v să fie diferenţiabile pe $\mathbb{R}^2$- sunt, deoarece admit derivate parţiale pe $\mathbb{R}^2$ şi acestea sunt continue-independent de a,b,c.

(ii) să aibă loc condiţiile Cauchy-Riemann pe $\mathbb{R}^2$

$$\left\{\begin{array}{l}1+0=0+c\\ 0+a=-(b+0)\end{array}\right.,\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}a=\alpha\in\mathbb{R}\\ b=-\alpha\\ c=1\end{array}\right.$$

•Se scrie legea de asociere a f în funcţie de z.

$f(z)=x+\alpha y+\mathrm{j}\,(-\alpha x+y)\,.$

<u>modul 1</u>. Grupând $z=x+\mathrm{j}\,y$,

$f(z) \overset{j^2=-1}{=} z - j\,\alpha z = (1 - j\,\alpha)\, z.$

modul 2. Folosind **regula**: Pentru funcţii olomorfe pe un domeniu D, de forma

$f(x + j\,y) = u(x, y) + j\,v(x, y),$

f are legea de asociere

$$\boxed{f(z) = u(x,y)\Big|_{\begin{cases} x \text{ înlocuit cu } z \\ y \text{ înlocuit cu } 0\end{cases}} + j\,v(x,y)\Big|_{\begin{cases} x \text{ înlocuit cu } z \\ y \text{ înlocuit cu } 0\end{cases}}.} \Rightarrow$$

$$f(z) = (x + \alpha y)\Big|_{\begin{cases} x \text{ înlocuit cu } z \\ y \text{ înlocuit cu } 0\end{cases}} + j\,(-\alpha x + y)\Big|_{\begin{cases} x \text{ înlocuit cu } z \\ y \text{ înlocuit cu } 0\end{cases}} = z + j\,(-\alpha z) = (1 - j\,\alpha)\, z.$$

•Se determină f' în funcţie de z.

modul 1. Din Teorema Cauchy-Riemann$\Rightarrow$

$f'(z) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(x, y) + j\,\dfrac{\partial v}{\partial x}(x, y) = 1 - j\,\alpha.$

modul 2. Deoarece f olomorfă pe $D \Rightarrow$

$f'(z) = \dfrac{d}{dz}\left((1 - j\,\alpha)\, z\right) = 1 - j\,\alpha.$

Definiţia 3.2.4. Fie A o mulţime deschisă şi $u : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. u este *funcţie armonică pe* A dacă

(i) funcţia u admite derivate parţiale de ordinul al doilea (continue) pe A.

(ii) se verifică $\underbrace{\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y)}_{\Delta u(x,y)} = 0, \forall\, (x, y) \in A.$

Teorema 3.2.6. (**CN de olomorfie**) Fie $D \subseteq \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ un domeniu. Dacă $f = u + j\,v \in \mathcal{H}(D)$ şi $u, v \in \mathcal{C}^2(D)$ atunci u şi v sunt funcţii armonice pe D.

Teorema 3.2.7. Fie $D \subseteq \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ un domeniu simplu conex. Dacă $u : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ este funcţie armonică pe D, atunci există o funcţie $v : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ astfel încât funcţia

$f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) = u(x, y) + j\,v(x, y),\ z = x + j\,y$

să fie olomorfă pe D (adică există $f \in \mathcal{H}(D)$ care să aibă funcţia u drept parte reală). Funcţia v se determină local sau prin rezolvarea unui sistem de ecuaţii cu derivate parţiale sau prin formulele

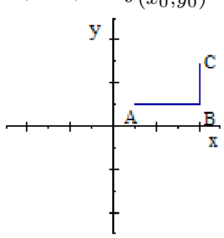
$$\boxed{v(x, y) = -\int_{x_0}^{x} \frac{\partial u}{\partial y}(x, y_0)\, dx + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y)\, dy} \text{ sau } \boxed{v(x, y) = -\int_{x_0}^{x} \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)\, dx + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y)\, dy.}$$

Comentariu-schiţă de dem. Se caută v diferenţiabilă astfel încât

$dv(x, y) = \dfrac{\partial v}{\partial x}(x, y)\, dx + \dfrac{\partial v}{\partial y}(x, y)\, dy.$

dv este formă diferenţială exactă (este diferenţială), are integrala independentă de drum şi se poate scrie, pentru $\forall\, (x_0, y_0)$ fixaţi în D,

$v(x, y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} dv(x, y),\ \forall\, (x, y) \in D.$



Se alege drept drum ce uneşte (x_0, y_0) cu (x, y) linia poligonală cu vârfurile $A(x_0, y_0)$, $B(x, y_0)$, $C(x, y)$. Din reprezentările parametrice ale

$$\left[\overrightarrow{AB}\right]:\begin{cases}\widetilde{x}(t)=t\\ \widetilde{y}(t)=y_0\end{cases},t\in[x_0,x],\begin{cases}d\widetilde{x}(t)=1dt\\ d\widetilde{y}(t)=0dt\end{cases},t\in[x_0,x],$$
$$\left[\overrightarrow{BC}\right]:\begin{cases}\widetilde{x}(t)=x\\ \widetilde{y}(t)=t\end{cases},t\in[y_0,y]\begin{cases}d\widetilde{x}(t)=0dt\\ d\widetilde{y}(t)=1dt\end{cases},t\in[y_0,y]$$

se deduce

$$v(x,y)=\int_{\left[\overrightarrow{AB}\right]}dv(x,y)+\int_{\left[\overrightarrow{BC}\right]}dv(x,y),\forall(x,y)\in D.$$
$$v(x,y)=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial v}{\partial x}(t,y_0)\,dt+\int_{y_0}^{y}\frac{\partial v}{\partial y}(x,t)\,dt,\forall(x,y)\in D\Rightarrow$$
$$v(x,y)=-\int_{x_0}^{x}\frac{\partial u}{\partial y}(x,y_0)\,dx+\int_{y_0}^{y}\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\,dy$$

Exemplul 3.2.4. Să se determine funcţia şi derivata funcţiei

$f:D\subseteq\mathbb{C}\to\mathbb{C},f(z)=u(x,y)+\mathrm{j}\,v(x,y),z=x+\mathrm{j}\,y\in D$

astfel încât f să fie olomorfă pe domeniul D şi

$D=\mathbb{C}\setminus\{0\};u(x,y)=e^x\cos y+x+\dfrac{x}{x^2+y^2},\forall(x,y)\in D;f(1)=e+2.$

Rezolvare. etapa 1 Se verifică o condiţie necesară (şi suficientă când D este simplu conex) pentru ca să existe o funcţie olomorfă f încât u să fie partea ei reală, şi anume u să fie armonică.

$D\subseteq\mathbb{C}\simeq\mathbb{R}^2$ este mulţime deschisă.

•Funcţia u admite derivate parţiale de ordinul al doilea pe D.

$$\exists\frac{\partial u}{\partial x}:D\to\mathbb{R},\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(e^x\cos y+x+\frac{x}{x^2+y^2}\right)=e^x\cos y+1+\frac{1\left(x^2+y^2\right)-x(2x+0)}{\left(x^2+y^2\right)^2}=$$
$$=e^x\cos y+1-\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2},\forall(x,y)\in D.$$
$$\exists\frac{\partial u}{\partial y}:D\to\mathbb{R},\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(e^x\cos y+x+\frac{x}{x^2+y^2}\right)=-e^x\sin y+0+\frac{0\left(x^2+y^2\right)-x(0+2y)}{\left(x^2+y^2\right)^2}=$$
$$=-e^x\sin y+0-\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2},\forall(x,y)\in D.$$
$$\exists\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}:D\to\mathbb{R},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(e^x\cos y+1-\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right)=$$
$$=e^x\cos y-\frac{2x\left(x^2+y^2\right)^2-\left(x^2-y^2\right)\cdot2\left(x^2+y^2\right)(2x+0)}{\left(x^2+y^2\right)^4}=e^x\cos y-\frac{-2x^3+6xy^2}{\left(x^2+y^2\right)^3},\forall(x,y)\in D\ .$$
$$\exists\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}:D\to\mathbb{R},\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(-e^x\sin y+0+\frac{-2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right)=$$
$$=-e^x\cos y-\frac{2x\left(x^2+y^2\right)^2-2xy\cdot2\left(x^2+y^2\right)(0+2y)}{\left(x^2+y^2\right)^4}=-e^x\cos y-\frac{2x^3-6xy^2}{\left(x^2+y^2\right)^3},\forall(x,y)\in D.$$

Analog există $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ şi $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$.

•Se verifică: $\Delta u(x,y)=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)=0,\forall(x,y)\in D.$

etapa 2 Se determină $f=u+\mathrm{j}\,v\in\mathcal{H}(D)$, adică se determină v astfel încât f să fie olomorfă pe D.

$f=u+\mathrm{j}\,v\in\mathcal{H}(D)\Rightarrow f$ satisface condiţiile Cauchy-Riemann$\Rightarrow$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y)=\dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y)\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y)=-\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y)\end{cases},\forall(x,y)\in D\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y)=-\left(-e^x\sin y-\dfrac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right)\\ \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y)=e^x\cos y+1-\dfrac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\end{cases},\forall(x,y)\in D$$

•Se determină coeficientul părţii imaginare v pentru f
<u>modul 1.</u> Se determină o funcţie $v : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a.î.

$$\begin{cases} (1.1)\ \dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) = e^x \sin y + \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \\ (1.2)\ \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) = e^x \cos y + 1 - \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \end{cases}, \forall (x,y) \in D.$$

<u>modul 1.1</u> (cu grad de dificultate mediu)

$$(1.1)| \int (\cdot)\, dx \Rightarrow \int \frac{\partial v}{\partial x}(x,y)\, dx = \int \left(e^x \sin y + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \right) dx, \forall (x,y) \in D.$$

Se foloseşte

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2\right) = 2x \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) = -\dfrac{2x}{(x^2+y^2)^2} \\ \int \left(-\dfrac{2x}{(x^2+y^2)^2}\right) dx = \dfrac{1}{x^2+y^2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$v(x,y) \underset{\text{de integrare}}{\overset{x \text{ este var.}}{=}} e^x \sin y + (-y) \cdot \frac{1}{x^2+y^2} \qquad \underbrace{\varphi(y)}_{\substack{\text{constantă în raport} \\ \text{cu variabila de integr. } x}} \qquad , \forall (x,y) \in D | \frac{\partial}{\partial y}(\cdot) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \underset{\text{de derivare}}{\overset{y \text{ este var.}}{=}} e^x \cos y - \frac{1\left(x^2+y^2\right) - y(2x+0)}{(x^2+y^2)^2} + \varphi'(y), \forall (x,y) \in D.$$

Se înlocuieşte (1.2) $\Rightarrow$

$$e^x \cos y + 1 - \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = e^x \cos y - \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} + \varphi'(y), \forall (x,y) \in D \Rightarrow$$

$$\varphi'(y) = 1, \forall (x,y) \in D | \int (\cdot)\, dy \Rightarrow \varphi(y) = y + c_1, \forall (x,y) \in D, \forall c_1 \in \mathbb{R}.$$

Deci $v(x,y) = e^x \sin y - \dfrac{y}{x^2+y^2} + y + c_1, \forall (x,y) \in D, \forall c_1 \in \mathbb{R}$ sunt toate funcţiile v, mulţimea lor fiind indexată dupa constanta c_1.

<u>modul 1.2</u> (cu grad mai ridicat de dificultate)

$$(1.2)| \int (\cdot)\, dy \Rightarrow \int \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\, dy = \int \left(e^x \cos y + 1 - \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \right) dy, \forall (x,y) \in D.$$

Se calculează separat

$$\mathcal{I} = \int \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} dy = \int \frac{\left(x^2+y^2\right) - 2x^2}{(x^2+y^2)^2} dy = \int \frac{1}{x^2+y^2} dy - 2x^2 \int \frac{1}{(x^2+y^2)^2} dy$$

Se observă că $\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial y}\left(x^2+y^2\right) = 2y \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) = -\dfrac{2y}{(x^2+y^2)^2} \end{cases}$

$$\mathcal{I}_1 = \int \frac{1}{x^2+y^2} dy \underset{\text{de integrare}}{\overset{y \text{ este var.}}{=}} \frac{1}{x} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \widetilde{c_1}$$

$$\mathcal{I}_2 = \int \frac{1}{(x^2+y^2)^2} dy \underset{\text{de integrare}}{\overset{y \text{ este var.}}{=}} \frac{1}{4x^2} \int \frac{4\left(x^2+y^2\right) - 4y^2}{(x^2+y^2)^2} dy = \frac{1}{4x^2} 4\mathcal{I}_1 - \frac{1}{4x^2} \int \frac{4y^2}{(x^2+y^2)^2} dy =$$

$$= \frac{1}{x^2}\mathcal{I}_1 + \frac{1}{4x^2} \int 2y \frac{-2y}{(x^2+y^2)^2} dy = \frac{1}{x^2}\mathcal{I}_1 + \frac{1}{4x^2} \int 2y \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) dy \underset{\text{în raport cu } y}{\overset{\text{integrare prin părţi}}{=}}$$

$$= \frac{1}{x^2}\mathcal{I}_1 + \frac{1}{4x^2} \cdot \frac{2y}{x^2+y^2} - \frac{1}{4x^2} \int 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{x^2+y^2} dy = \frac{1}{2x^2}\mathcal{I}_1 + \frac{1}{2x^2} \cdot \frac{y}{x^2+y^2} + \widetilde{c_2}$$

Atunci

$\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 - 2x^2\left(\frac{1}{2x^2}\mathcal{I}_1 + \frac{1}{2x^2}\cdot\frac{y}{x^2+y^2}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2} + \widetilde{c_2} \Rightarrow$

$$v(x,y) \underset{\text{de integrare}}{\overset{y\text{ este var.}}{=}} e^x\sin y + y - \frac{y}{x^2+y^2} + \underbrace{\psi(x)}_{\substack{\text{constantă în raport}\\ \text{cu variabila de integr. } y}}, \forall (x,y)\in D \Big| \frac{\partial}{\partial x}(\cdot) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) \underset{\text{de derivare}}{\overset{x\text{ este var.}}{=}} e^x\sin y + 0 - \frac{0\cdot\left(x^2+y^2\right) - y(2x+0)}{\left(x^2+y^2\right)^2} + \psi'(x), \forall (x,y)\in D$$

Se înlocuieşte (1.1) $\Rightarrow$

$$e^x\sin y + \frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2} = e^x\sin y + \frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2} + \psi'(x), \forall (x,y)\in D \Rightarrow \psi'(x) = 0, \forall (x,y)\in D \Big| \int(\cdot)\,dx \Rightarrow$$

$$\psi(x) = 0 + c_2, \forall (x,y)\in D, \forall c_2\in\mathbb{R}.$$

Deci $v(x,y) = e^x\sin y + y - \frac{y}{x^2+y^2} + c_2, \forall (x,y)\in D, \forall c_2\in\mathbb{R}$ sunt toate funcţiile v, mulţimea lor fiind indexată dupa constanta c_2.

○<u>modul 2.</u> Se foloseşte $v(x,y) = \int_{x_0}^{x}\frac{\partial v}{\partial x}(t,y_0)\,dt + \int_{y_0}^{y}\frac{\partial v}{\partial y}(x,t)\,dt, \forall (x,y)\in D \Rightarrow$

$$\boxed{v(x,y) = -\int_{x_0}^{x}\frac{\partial u}{\partial y}(t,y_0)\,dt + \int_{y_0}^{y}\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\,dt, \forall (x,y)\in D} \Rightarrow$$

$$v(x,y) = -\int_{x_0}^{x}\left(-e^t\sin y_0 - \frac{2ty_0}{\left(t^2+y_0^2\right)^2}\right)dt + \int_{y_0}^{y}\left(e^x\cos t + 1 - \frac{x^2-t^2}{\left(x^2+t^2\right)^2}\right)dt =$$

$$= \left(e^t\sin y_0 + y_0\frac{-1}{t^2+y_0^2}\right)\Bigg|_{t=x_0}^{t=x} + \left(e^x\sin t + t - \frac{t}{x^2+t^2}\right)\Bigg|_{t=y_0}^{t=y} =$$

$$= e^x\sin y + y - \frac{y}{x^2+y^2} - \underbrace{\left(e^{x_0}\sin y_0 + y_0 - \frac{y_0}{x_0^2+y_0^2}\right)}_{=-c\in\mathbb{R}}, \forall (x,y)\in D.$$

•Indiferent de mod, s-au determinat toate funcţiile

$$v(x,y) = e^x\sin y + y - \frac{y}{x^2+y^2} + c, \forall (x,y)\in D, c\in\mathbb{R},$$

pentru $f = u + \mathrm{j}\,v \in \mathcal{H}(D)$.

•Se scrie legea de asociere a f în funcţie de z.

$f: D\to\mathbb{C}, f(z) = \left(e^x\cos y + x + \frac{x}{x^2+y^2}\right) + \mathrm{j}\left(e^x\sin y + y - \frac{y}{x^2+y^2} + c\right), z = x + \mathrm{j}\,y \in D, c\in\mathbb{R}$.

<u>modul 1</u>. Grupând $z = x + \mathrm{j}\,y$ şi observând că

$$f(z) = e^x(\cos y + \mathrm{j}\sin y) + x + \mathrm{j}\,y + \frac{x - \mathrm{j}\,y}{x^2+y^2} + \mathrm{j}\,c = e^z + z + \frac{1}{z} + \mathrm{j}\,c, z = x + \mathrm{j}\,y\in D, c\in\mathbb{R}$$

S-a folosit $\boxed{e^z = e^{x+\mathrm{j}\,y} = e^x\cdot e^{\mathrm{j}\,y} = e^x(\cos y + \mathrm{j}\sin y), \forall z = x + \mathrm{j}\,y\in\mathbb{C}}$

<u>modul 2</u>. Folosind **regula**, pentru f olomorfă:

$$f(z) = \left(e^x\cos y + x + \frac{x}{x^2+y^2}\right)\Bigg|_{\begin{cases} x \text{ înlocuit cu } z\\ y \text{ înlocuit cu } 0\end{cases}} + \mathrm{j}\left(e^x\sin y + y - \frac{y}{x^2+y^2} + c\right)\Bigg|_{\begin{cases} x \text{ înlocuit cu } z\\ y \text{ înlocuit cu } 0\end{cases}}$$

$$= \left(e^z\cos 0 + z + \frac{z}{z^2+0^2}\right) + \mathrm{j}\left(e^z\sin 0 + 0 - \frac{0}{z^2+0^2} + c\right) = e^z + z + \frac{1}{z} + \mathrm{j}\,c.$$

•Se determină f' în funcţie de z.

<u>modul 1</u>. Din Teorema Cauchy-Riemann$\Rightarrow$

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \mathrm{j}\,\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) =$$
$$= \left(e^x \cos y + 1 + \frac{1\left(x^2+y^2\right) - x\,(2x+0)}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right) + \mathrm{j}\left(e^x \sin y + 0 - \frac{0\left(x^2+y^2\right) - y\,(2x+0)}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right) =$$
$$= e^x(\cos y + \mathrm{j}\sin y) + 1 - \frac{x^2 - y^2 - 2\,\mathrm{j}\,xy}{\left(x^2+y^2\right)^2} = e^z + 1 - \frac{(\overline{z})^2}{|z|^4} = e^z + 1 - \frac{1}{z^2}.$$

modul 2. Deoarece f olomorfă pe $D \Rightarrow$

$$f'(z) = \frac{d}{dz}\left(e^z + z + \frac{1}{z} + \mathrm{j}\,c\right) = e^z + 1 - \frac{1}{z^2}.$$

•Se impune $f(1) = e + 2 \Rightarrow e^1 + 1 + 1 + \mathrm{j}\,c = e + 2 \Rightarrow c = 0.$

Deci funcţia $f = u + \mathrm{j}\,v \in \mathcal{H}(D)$ ce are $u = \operatorname{Re} f$ şi verifică $f(1) = e + 2$ este

$$f : D \to \mathbb{C},\ f(z) = e^z + z + \frac{1}{z}.$$

Teorema 3.2.8. Fie $D \subseteq \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ un domeniu simplu conex. Dacă $v : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ este funcţie armonică pe D, atunci există o funcţie $u : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ astfel încât funcţia

$$f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) = u(x,y) + \mathrm{j}\,v(x,y),\ z = x + \mathrm{j}\,y$$

să fie olomorfă pe D (adică există $f \in \mathcal{H}(D)$ care să aibă funcţia v drept coeficientul părţii imaginare). Funcţia u se determină local sau prin rezolvarea unui sistem de ecuaţii cu derivate parţiale sau prin formulele

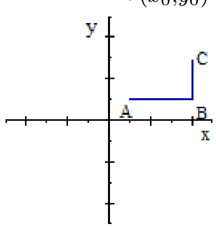
$$\boxed{u(x,y) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial v}{\partial y}(x,y_0)\,dx - \int_{y_0}^{y} \frac{\partial v}{\partial x}(x,y)\,dy} \text{ sau } \boxed{u(x,y) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\,dx - \int_{y_0}^{y} \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y)\,dy.}$$

Comentariu-schiţă de dem. Se caută u diferenţiabilă astfel încât

$$du(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\,dy.$$

du este formă diferenţială exactă (este diferenţială), are integrala independentă de drum şi se poate scrie, pentru $\forall\,(x_0,y_0)$ fixaţi în D,

$$u(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} du(x,y),\ \forall\,(x,y) \in D.$$



Se alege drept drum ce uneste (x_0,y_0) cu (x,y) linia poligonală cu vârfurile $A(x_0,y_0)$, $B(x,y_0)$, $C(x,y)$. Din reprezentările parametrice ale

$$\left[\overrightarrow{AB}\right] : \begin{cases} \widetilde{x}(t) = t \\ \widetilde{y}(t) = y_0 \end{cases},\ t \in [x_0,x],\ \begin{cases} d\widetilde{x}(t) = 1dt \\ d\widetilde{y}(t) = 0dt \end{cases},\ t \in [x_0,x],$$
$$\left[\overrightarrow{BC}\right] : \begin{cases} \widetilde{x}(t) = x \\ \widetilde{y}(t) = t \end{cases},\ t \in [y_0,y]\ \begin{cases} d\widetilde{x}(t) = 0dt \\ d\widetilde{y}(t) = 1dt \end{cases},\ t \in [y_0,y]$$

se deduce

$$u(x,y) = \int_{\left[\overrightarrow{AB}\right]} du(x,y) + \int_{\left[\overrightarrow{BC}\right]} du(x,y),\ \forall\,(x,y) \in D.$$
$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial u}{\partial x}(t,y_0)\,dt + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial u}{\partial y}(x,t)\,dt,\ \forall\,(x,y) \in D \Rightarrow$$
$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial v}{\partial y}(t,y_0)\,dt - \int_{y_0}^{y} \frac{\partial v}{\partial x}(x,t)\,dt,\ \forall\,(x,y) \in D$$

Exerciţiul 3.2.5. Să se determine funcţia

$f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = u(x, y) + \mathrm{j}\, v(x, y), z = x + \mathrm{j}\, y \in D$

astfel încât f să fie olomorfă pe D şi

$D = \mathbb{C} \setminus \{0\}; v(x, y) = \ln\left(x^2 + y^2\right) + x - 2y, \forall (x, y) \in D.$

Rezolvare. A se vedea Seminar.