CURS NR. 6
Matematici Speciale, AIA

3.3. Puncte ordinare şi puncte singulare la distanţă finită, respectiv infinită

Definiţia 3.3.1. Fie $A \subseteq \mathbb{C}$ o mulţime deschisă şi $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ o funcţie.
a) Un punct $z_0 \in \mathbb{C}$ se numeşte *punct ordinar pentru* f dacă există o sferă deschisă centrată în z_0 pe care f este olomorfă, adică $\exists \rho > 0$ şi
$\Delta(z_0; \rho) = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < \rho\}$
a.î. $f \in \mathcal{H}(\Delta(z_0; \rho))$.
b) Un punct $z_0 \in \mathbb{C}$ se numeşte *punct singular pentru* f dacă nu este punct ordinar pentru f.
c) Un punct $z_0 \in \mathbb{C}$ se numeşte *punct singular izolat pentru* f dacă este punct singular pentru f şi dacă există o sferă deschisă centrată z_0 care nu mai conţine alte puncte singulare ale f în afară de z_0.
Definiţia 3.3.2. Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu (mulţime deschisă şi conexă) şi $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă pe D.
a) Un punct $a \in D$ se numeşte *zero pentru* f dacă
$\exists \alpha \in \mathbb{N}^*$ şi $\exists \phi \in \mathcal{H}(D)$ cu $\phi(a) \neq 0$ a.î. $f(z) = (z-a)^\alpha \phi(z)$.
Numărul natural α se numeşte *ordinul de multiplicitate al zeroului* a.
b) Un punct $a \in D$ se numeşte *zero izolat pentru* f dacă este zero pentru f şi dacă există o sferă deschisă centrată a care nu mai conţine alte zerouri ale f în afară de a.
Teorema 3.3.1. Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu şi $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă pe D. Zerourile funcţiei f sunt puncte izolate în sensul topologiei pe $\mathbb{C}$.
Definiţia 3.3.3. Fie $A \subseteq \mathbb{C}$ o mulţime deschisă şi $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ o funcţie.
a) Un punct $a \in \mathbb{C}$ se numeşte *pol pentru* f dacă este punct singular pentru f şi dacă $\exists \alpha \in \mathbb{N}^*$ a.î. funcţia

$$\varphi : A \cup \{a\} \to \mathbb{C}, \varphi(z) = \begin{cases} (z-a)^\alpha f(z), & \text{dacă } z \in A \\ \text{o valoare din } \mathbb{C}, & \text{dacă } z = a \end{cases}$$

să aibă în a un punct ordinar, cu $\varphi(a) \neq 0$.
Numărul natural α se numeşte *ordinul polului* a.
Teorema 3.3.2. Fie $A \subseteq \mathbb{C}$ o mulţime deschisă şi $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ o funcţie. Polii funcţiei f sunt puncte singulare izolate.
Definiţia 3.3.4. Fie $A \subseteq \mathbb{C}$ o mulţime deschisă şi $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ o funcţie. Un punct $a \in \mathbb{C}$ se numeşte *punct singular esenţial pentru* f dacă este punct singular pentru f şi
$\nexists \lim\limits_{z \to a} f(z)$.
Definiţia 3.3.5. Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu, $a \in D$ şi $f : D \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$. Punctul $z = a$ se numeşte *punct singular removabil* sau *eliminabil* sau *aparent pentru* f dacă este punct singular pentru f şi
$\exists \lim\limits_{z \to a} f(z)$ şi este finită $(\in \mathbb{C})$.

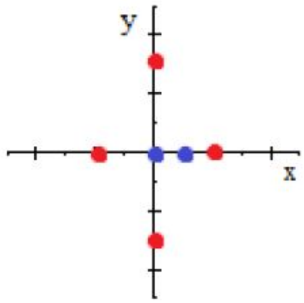
Exemplul 3.3.1. Se determină punctele ordinare, zerourile şi punctele singulare la distanţă finită pentru

$$f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = \frac{z(z-1)^2}{(z^2-4)(z^2+9)^2}.$$

$A = \mathbb{C} \setminus \{2, -2, 3\,\mathrm{j}, -3\,\mathrm{j}\}$.
•Punctele ordinare ale f sunt: $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{2, -2, 3\,\mathrm{j}, -3\,\mathrm{j}\}$.
Într-adevăr, $\forall z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{2, -2, 3\,\mathrm{j}, -3\,\mathrm{j}\}, \exists \rho > 0$ a.î. $f \in \mathcal{H}(\Delta(z_0; \rho))$.

•Zerourile lui f sunt: 0(de ordin 1) şi 1(de ordin 2)$-$ sunt zerouri izolate.

•Polii lui f sunt: 2(de ordin 1), -2(de ordin 1), $3\,\mathrm{j}$(de ordin 2), $-3\,\mathrm{j}$(de ordin 2)$-$ sunt puncte singulare izolate.



Într-adevăr, de exemplu

$\boxed{a_1 = 2}$ este punct singular; mai mult, este pol de ordin 1, deoarece:

-se scrie $f(z) = \dfrac{\frac{z(z-1)^2}{(z+2)(z^2+9)^2}}{z-2} = \dfrac{\varphi_1(z)}{(z-2)^1}$;

-se observă că $\varphi_1(z) = \dfrac{z(z-1)^2}{(z+2)(z^2+9)^2}, \forall z \in A \cup \{2\}$;

φ_1 este olomorfă pe o vecinătate a lui 2; $\varphi_1(2) = \dfrac{2(2-1)^2}{(2+2)(2^2+9)^2} \neq 0.$

Observaţia 3.3.1. Punctul $z = \infty_{\mathbb{C}} \in \overline{\mathbb{C}}$ ($\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty_{\mathbb{C}}\}$) este punct ordinar (respectiv punct singular) pentru $f(z)$ dacă şi numai dacă punctul $\zeta = 0$ este punct ordinar (respectiv punct singular) pentru $\psi(\zeta) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$.

Exemplul 3.3.2. Se determină punctele singulare, la distanţă finită şi apoi la infinit, şi natura lor pentru:

a) $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = 2 - z + z^3$

Rezolvare. f este bine definită, $\forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow A = \mathbb{C}$.

•Se observă că, $\forall z_0 \in \mathbb{C}, \exists \rho > 0$ a.î. $f \in \mathcal{H}(\Delta(z_0; \rho)) \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall z_0 \in \mathbb{C}$ este punct ordinar pentru $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

•f nu are puncte singulare pe $\mathbb{C}$ (la distanţă finită).

•Se studiază dacă $\boxed{z = \infty_{\mathbb{C}}}$ este punct ordinar sau singular pentru $f \Leftrightarrow$

$\zeta = 0$ este punct ordinar sau singular pentru

$\psi(\zeta) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = 2 - \frac{1}{\zeta} + \left(\frac{1}{\zeta}\right)^3 = \dfrac{2\zeta^3 - \zeta^2 + 1}{\zeta^3}$

$\zeta = 0$ este pol de ordin 3 pentru $\psi(\zeta) \Rightarrow z = \infty_{\mathbb{C}}$ este pol de ordin 3 pentru $f(z)$

b) $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = \dfrac{z^7 - 3z^2}{z^2 - 6z + 9}$

Rezolvare. f este bine definită, $\forall z \in \mathbb{C}\setminus\{3\} \Rightarrow A = \mathbb{C}\setminus\{3\}$.

•Se observă că, $\forall z_0 \in \mathbb{C}\setminus\{3\}, \exists \rho > 0$ a.î. $f \in \mathcal{H}(\Delta(z_0; \rho)) \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall z_0 \in \mathbb{C}\setminus\{3\}$ este punct ordinar pentru $f : \mathbb{C}\setminus\{3\} \to \mathbb{C}$

•f are puncte singulare pe $\mathbb{C}$ (la distanţă finită) :

$\boxed{a = 3}$ este punct singular; mai mult, este pol de ordin 2, deoarece:

-se scrie $f(z) = \dfrac{z^7 - 3z^2}{(z-3)^2} = \dfrac{\varphi_1(z)}{(z-3)^2}$;

-se observă că $\varphi_1(z) = z^7 - 3z^2, \forall z \in A \cup \{3\}$;

φ_1 este olomorfă pe o vecinătate a lui 3; $\varphi_1(3) = 3^7 - 3 \cdot 3^2 \neq 0$.

•Se studiază dacă $\boxed{z = \infty_{\mathbb{C}}}$ este punct ordinar sau singular pentru $f \Leftrightarrow$
$\zeta = 0$ este punct ordinar sau singular pentru

$$\psi(\zeta) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \frac{\left(\frac{1}{\zeta}\right)^7 - 3\left(\frac{1}{\zeta}\right)^2}{\left(\frac{1}{\zeta}\right)^2 - 6\left(\frac{1}{\zeta}\right) + 9} = \frac{1 - 3\zeta^5}{\zeta^5\left(1 - 6\zeta + 9\zeta^2\right)}$$

$\zeta = 0$ este pol de ordin 5 pentru $\psi(\zeta) \Rightarrow z = \infty_{\mathbb{C}}$ este pol de ordin 5 pentru $f(z)$.

3.4. Funcţii elementare complexe de o variabilă complexă

În cele ce urmează se consideră, pentru

$f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(x, y) = u(x, y) + \mathrm{j}\, v(x, y)$

funcţiile modul $|f|$ şi argument $\arg f$ ataşate, denumite şi "magnitudine", respectiv "fază". Se va conveni, conform profesor Eugene Khutoryansky, în

https://www.youtube.com/watch?v=bIY6ahHVgqA&t=745s,

să reprezentăm grafic o astfel de funcţie, reprezentând input-ul $z \in A$ în planul complex, alegând a 3-a dimensiune pentru magnitudinea output-ului pe o scară logaritmică, iar faza outputului fiind reprezentată printr-o scală de culoare, observabilă din reprezentarea funcţiei identitate $f(z) = z$.

1°. Funcţii polinomiale.

Definiţia 1. Fie $n \in \mathbb{N}$, $a_0, ..., a_n \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$. Se numeşte *funcţie polinomială* o funcţie

$P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, P(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n.$

Numărul natural n se numeşte *gradul polinomului*.

Teorema 1. **a)** O funcţie polinom este olomorfă pe orice domeniu mărginit şi

$P' : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ P'(z) = a_1 + 2a_2 z + ... + n a_n z^{n-1}.$

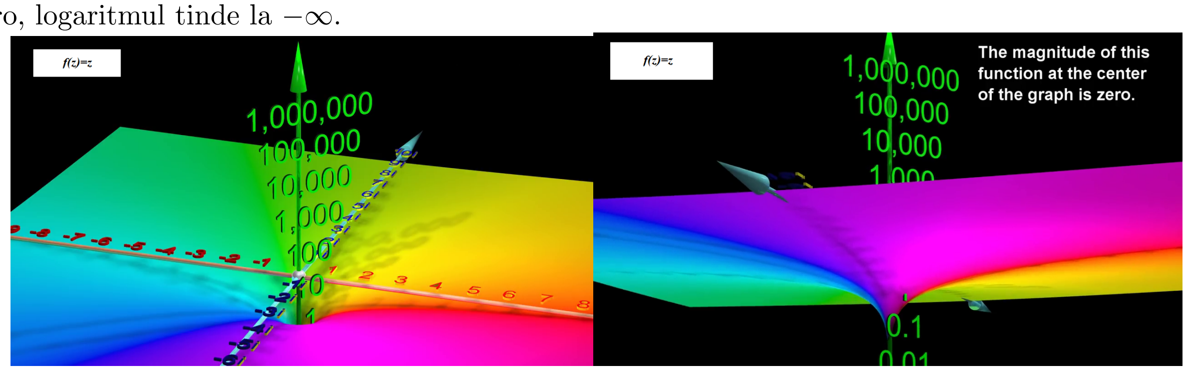
b) Punctul de la infinit, $z = \infty_{\mathbb{C}}$, este punct singular, pol de ordin n.

Exemplul 1.

a) Se calculează $P(1 + 3\,\mathrm{j})$, unde $P(z) = 2z^2 - 5\,\mathrm{j}\,z + 2 - \mathrm{j}$.

$P(1 + 3\,\mathrm{j}) = 2(1 + 3\,\mathrm{j})^2 - 5\,\mathrm{j}(1 + 3\,\mathrm{j}) + 2 - \mathrm{j} = 2(1 - 3 + 6\,\mathrm{j}) - 5\,\mathrm{j} + 15 + 2 - \mathrm{j} = 13 + 6\,\mathrm{j}$.

b) Reprezentarea funcţiei identitate, $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = z$, se observă mai jos. Acolo unde magnitudinea acestei funcţii este 0, adică în zeroul $z = 0 + 0\,\mathrm{j}$, se observă că o reprezentare de tip "pâlnie fără fund, abis", deoarece pe o scară logaritmică, atunci când argumentul se apropie de zero, logaritmul tinde la $-\infty$.



2°. Funcţii raţionale.

Definiţia 2. Fie $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$, $a_0, ..., a_n \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$ şi $b_0, ..., b_m \in \mathbb{C}$, $b_m \neq 0$. Se numeşte *funcţie raţională* o funcţie

$$R = \frac{P}{Q} : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + ... + b_m z^m}.$$

Se presupune că numărătorul P şi numitorul Q sunt relativ prime.

Teorema 2. **a)** O funcţie raţională este olomorfă pe orice domeniu mărginit care nu conţine rădăcini ale numitorului şi

$$R' : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ R'(z) = \frac{P'(z) \cdot Q(z) - P(z) \cdot Q'(z)}{Q^2(z)}.$$

Rădăcinile numitorului sunt puncte singulare, poli de ordin egal cu ordinul de multiplicitate a

rădăcinii corespunzătoare a numitorului.
b) Punctul de la infinit, $z = \infty_{\mathbb{C}}$, este
-punct singular, pol de ordin $n - m$ dacă $n > m$ şi
-punct ordinar dacă $n \leq m$.

Exemplul 2.

a) Se calculează $R(1+3\mathrm{j})$, unde $R(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)} = \dfrac{2z^2 - 5\mathrm{j}\,z + 2 - \mathrm{j}}{z^3}$.

$$R(1+3\mathrm{j}) = \frac{2(1+3\mathrm{j})^2 - 5\mathrm{j}(1+3\mathrm{j}) + 2 - \mathrm{j}}{(1+3\mathrm{j})^3} = \frac{2(1-3+6\mathrm{j}) - 5\mathrm{j} + 15 + 2 - \mathrm{j}}{(-2+6\mathrm{j})(1+3\mathrm{j})} = \frac{13+6\mathrm{j}}{16} =$$
$$= \frac{13}{16} + \frac{3}{8}\mathrm{j}.$$

b) Fie $\alpha \in \mathbb{N}^*$ şi $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = \dfrac{z^5+1}{z(z^2+1)^\alpha}$

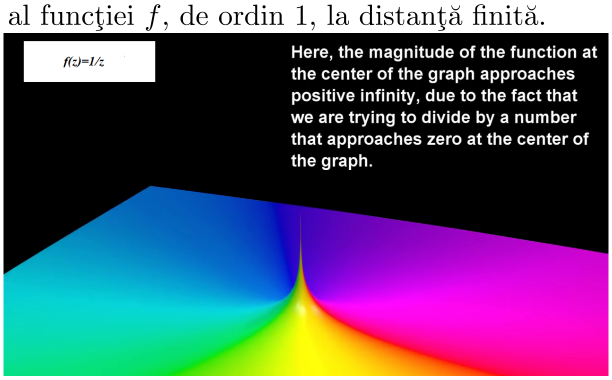
$A = \mathbb{C} \setminus \{0, \mathrm{j}, -\mathrm{j}\}$.

Punctele ordinare ale f sunt: $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, \mathrm{j}, -\mathrm{j}\}$.

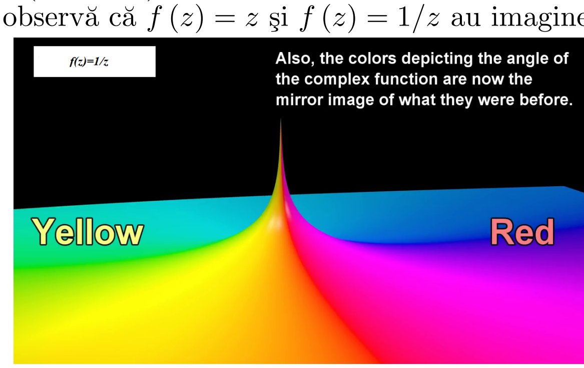
Polii lui f sunt: 0(de ordin 1), j(de ordin α), $-\mathrm{j}$(de ordin α)$-$ sunt puncte singulare izolate.

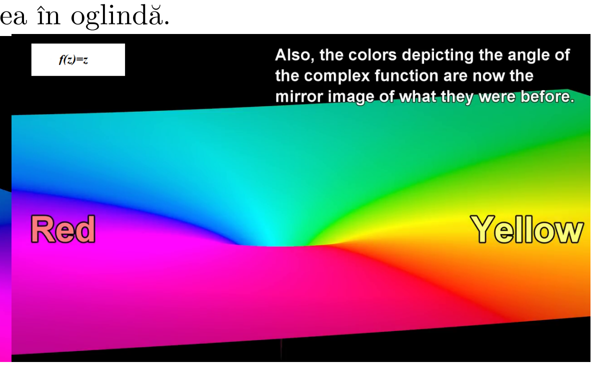
Punctul de la infinit, $z = \infty_{\mathbb{C}}$, este
-pol de ordin $5 - (1+2\alpha)$ dacă $5 > 1 + 2\alpha$, adică $\alpha = 1$;
-punct ordinar dacă $5 \leq 1 + 2\alpha$, adică $\alpha \in \mathbb{N}_2$.

c) Reprezentarea funcţiei pentru care output–ul este inversul input-ului, $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}, f(z) = 1/z$, se observă mai jos. Acolo unde z-ul se apropie de polul $0 + 0\mathrm{j}$, magnitudinea acestei funcţii se apropie de $+\infty$, se observă o reprezentare de tip "pisc fără vârf", deoarece pe o scară logaritmică, atunci când argumentul se apropie de $+\infty$, logaritmul tinde la $+\infty$. Punctul $z = 0 + 0\mathrm{j}$ este unicul pol al funcţiei f, de ordin 1, la distanţă finită.



În plus, deoarece, în ipoteze de existenţă,
$\frac{1}{r(\cos t + \mathrm{j}\sin t)} = \frac{1}{r}(\cos(-t) + \mathrm{j}\sin(-t))$,
se observă că $f(z) = z$ şi $f(z) = 1/z$ au imaginea în oglindă.





d) Fie $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = \dfrac{100z}{z^2 + 4}$.

f este bine definită, $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{2\,\mathrm{j}, -2\,\mathrm{j}\} \Rightarrow A = \mathbb{C} \setminus \{2\,\mathrm{j}, -2\,\mathrm{j}\}$.

•Se observă că, $\forall z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{2\,\mathrm{j}, -2\,\mathrm{j}\}, \exists \rho > 0$ a.î. $f \in \mathcal{H}(\Delta(z_0; \rho)) \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{2\,\mathrm{j}, -2\,\mathrm{j}\}$ este punct ordinar pentru $f : \mathbb{C} \setminus \{2\,\mathrm{j}, -2\,\mathrm{j}\} \to \mathbb{C}$

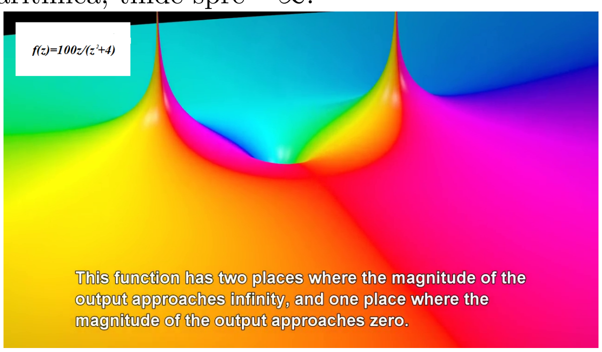
•f are puncte singulare pe $\mathbb{C}$ (la distanţă finită), polii simpli $a_1 = 2\,\mathrm{j}, a_2 = -2\,\mathrm{j}$.

Se studiază $\psi(\zeta) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \dfrac{100\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\left(\frac{1}{\zeta}\right)^2 + 4} = \dfrac{100\zeta}{1 + 4\zeta^2}$.

$\zeta = 0$ este punct ordinar pentru $\psi(\zeta) \Rightarrow z = \infty_{\mathbb{C}}$ este punct ordinar la distanţă infinită pentru $f(z)$.

Reprezentarea funcţiei se observă mai jos. Acolo unde z-ul se apropie de polii $0 + 2\,\mathrm{j}, 0 - 2\,\mathrm{j}$, magnitudinea acestei funcţii se apropie de $+\infty$, se observă o reprezentare de tip "pisc fără vârf", deoarece pe o scară logaritmică, atunci când argumentul se apropie de $+\infty$, logaritmul tinde la $+\infty$. Punctele $0 \pm 2\,\mathrm{j}$ sunt cei doi poli simpli ai funcţiei f la distanţă finită.

Mai mult, $z = 0 + 0\,\mathrm{j}$ este un zero de ordin 1 pentru f, unde magnitudinea, reprezentată în scală logaritmică, tinde spre $-\infty$.



e) Fie $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = \dfrac{100z}{z^2 + kz + 4}$, unde $k \in \mathbb{R}$ este o constantă dată.

Pentru $k = 0$, se obţine funcţia de la d), cu reprezentarea precizată.

f este bine definită, $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{a_1, a_2\} \Rightarrow A = \mathbb{C} \setminus \{a_1, a_2\}$, unde a_1, a_2 sunt rădăcinile ecuaţiei $z^2 + kz + 4 = 0$, din $\mathbb{R}$ pentru $k^2 - 16 \geq 0$ şi din $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ pentru $k^2 - 16 < 0$.

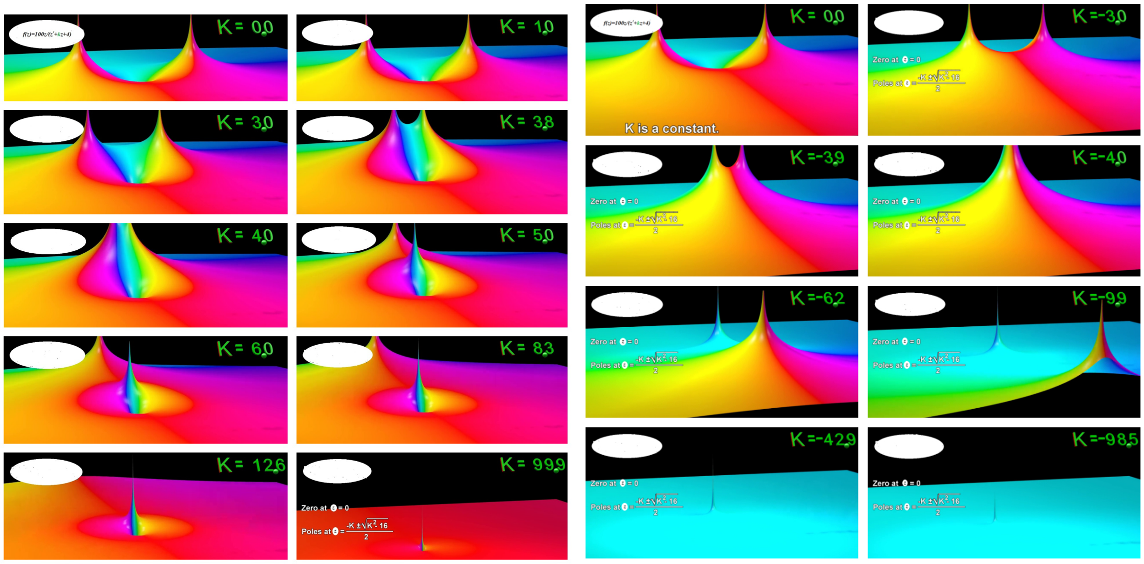
•Se observă că, $\forall z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{a_1, a_2\}, \exists \rho > 0$ a.î. $f \in \mathcal{H}(\Delta(z_0; \rho)) \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{a_1, a_2\}$ este punct ordinar pentru $f : \mathbb{C} \setminus \{a_1, a_2\} \to \mathbb{C}$

•f are puncte singulare pe $\mathbb{C}$ (la distanţă finită), polii simpli a_1, a_2.

Reprezentarea funcţiei se observă mai jos. Acolo unde z-ul se apropie de polii a_1, a_2, magnitudinea acestei funcţii se apropie de $+\infty$, se observă o reprezentare de tip "pisc fără vârf", deoarece pe o scară logaritmică, atunci când argumentul se apropie de $+\infty$, logaritmul tinde la $+\infty$. Punctele a_1, a_2 sunt cei doi poli simpli ai funcţiei f la distanţă finită.

Mai mult, $z = 0 + 0\,\mathrm{j}$ este un zero de ordin 1 pentru f, unde magnitudinea, reprezentată în scală logaritmică, tinde spre $-\infty$. Atunci când k variază, poziţia polilor variază. Când k este foarte mare unul din poli se depărtează, iar unul se apropie de zero.



3°. "Funcţia" radical

Definiţia 3. Fie $n \in \mathbb{N}_2$ şi $a \in \mathbb{C}$. Se numeşte *"funcţie" radical de ordin n din $z-a$* funcţia multivocă/ multiformă/ multifuncţia:

$$f : \mathbb{C} \to \mathcal{P}(\mathbb{C}),\ f(z) = \left(\sqrt[n]{z-a}\right)_{\mathbb{C}} =$$
$$= \left\{ w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{t^* + 2k\pi}{n} + \mathrm{j}\sin\frac{t^*+2k\pi}{n}\right);\, k \in \{0,1,...,n-1\}\right\}$$

unde $z - a = r(\cos t^* + \mathrm{j}\sin t^*) \in \mathbb{C}^*$, cu $r = |z-a|, t^* = \arg(z-a)$.

Prin definiţie, $\left(\sqrt[n]{0}\right)_{\mathbb{C}} = 0$.

Comentariu. Pentru $a = 0$, $(\sqrt[n]{z})_{\mathbb{C}}$ provine formal, după studiul funcţiei exponenţiale, pentru $z = r(\cos t + \mathrm{j}\sin t) = re^{\mathrm{j}\,t}$, din

$$(z)^{\frac{1}{n}} = \left(re^{\mathrm{j}\,t}\right)^{\frac{1}{n}} = (r)^{\frac{1}{n}} \cdot \left(e^{\mathrm{j}\,t}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r}\cdot e^{\mathrm{j}\,\frac{t}{n}} \overset{t=t^*+2k\pi}{=} \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{t^*+2k\pi}{n} + \mathrm{j}\sin\frac{t^*+2k\pi}{n}\right).$$

Teorema 3. **a)** Fie $n \in \mathbb{N}_2$ şi $a \in \mathbb{C}$. "Funcţia" radical de ordin n din $z-a$ este o funcţie multivocă cu exact n ramuri date de

$$f_k(z) = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{t^*+2k\pi}{n} + \mathrm{j}\sin\frac{t^*+2k\pi}{n}\right),\, k \in \{0,1,...,n-1\},$$

unde $z - a = r(\cos t^* + \mathrm{j}\sin t^*) \in \mathbb{C}^*$, cu $r = |z-a|, t^* = \arg(z-a)$.

$\left(\sqrt[n]{0}\right)_{\mathbb{C}} = 0$.

Fiecare ramură este olomorfă pe un domeniu obţinut prin eliminarea din planul complex (π) a punctelor unei semidrepte ce uneşte a cu $\infty_{\mathbb{C}}$ (numită tăietură). În plus, derivata unei ramuri este

$$f_k'(z) = \frac{f_k(z)}{n(z-a)}.$$

b) f are numai punctele singulare $z = a$ (în nici o vecinătate a punctului a, f nu este olomorfă) şi $z = \infty_{\mathbb{C}}$, numite *puncte critice algebrice*.

Exemplul 3. Cu tăietura $T = Ox_+$ şi $t^* \in [0, 2\pi[\Rightarrow$

a) Să se calculeze $f\left(1 + \mathrm{j}\sqrt{3}\right)$ pentru $f(z) = (\sqrt[3]{z})_{\mathbb{C}}$.

Deoarece $1 + \mathrm{j}\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{j}\sin\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow$

$$f\left(1+\mathrm{j}\sqrt{3}\right) = \left(\sqrt[3]{1+\mathrm{j}\sqrt{3}}\right)_{\mathbb{C}} = \left\{\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{3} + \mathrm{j}\sin\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{3}\right);\, k\in\{0,1,2\}\right\} =$$
$$= \left\{\sqrt[3]{2}\left(\cos\tfrac{\pi}{9} + \mathrm{j}\sin\tfrac{\pi}{9}\right), \sqrt[3]{2}\left(\cos\tfrac{7\pi}{9} + \mathrm{j}\sin\tfrac{7\pi}{9}\right), \sqrt[3]{2}\left(\cos\tfrac{13\pi}{9} + \mathrm{j}\sin\tfrac{13\pi}{9}\right)\right\}.$$

Comentariu. Pentru $a = 0$ singularităţile "funcţiei" radical de ordin n din z,

$f : \mathbb{C} \to \mathcal{P}(\mathbb{C}),\ f(z) = (\sqrt[n]{z})_{\mathbb{C}}$

sunt 0 şi $\infty_{\mathbb{C}}$ (puncte critice algebrice). Ca tăietură se poate alege orice semidreaptă din planul complex ce uneşte cele două puncte singulare, 0 şi $\infty_{\mathbb{C}}$.

Fie $z = r(\cos t^* + \mathrm{j}\sin t^*) \in \mathbb{C}$, cu $t^* = \arg z, r = |z|$.

În calculul lui $f_k(z)$, t^* se alege într-un interval de lungime 2π de forma $[\alpha, \alpha + 2\pi[$, măsurat în sens direct şi fără a trece peste tăietură. De exemplu:

•dacă se alege tăietura $T = Ox_+ = \{z = x + \mathrm{j}\,y \in \mathbb{C}; x \geq 0, y = 0\}$, atunci $t^* \in [0, 2\pi[$.

•dacă se alege tăietura $T = Ox_- = \{z = x + \mathrm{j}\,y \in \mathbb{C}; x \leq 0, y = 0\}$, atunci $t^* \in [-\pi, \pi[$.

•dacă se alege tăietura $T' = Oy_+ = \{z = x + \mathrm{j}\,y \in \mathbb{C}; x = 0, y \geq 0\}$,atunci $t^* \in \left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

4°. Funcţia exponenţială

Definiţia 4. Se numeşte *funcţie exponenţială de exponent complex* funcţia

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = e^z = e^x \cdot e^{\mathrm{j}\,y} = e^{x+\mathrm{j}\,y} = e^x(\cos y + \mathrm{j}\sin y), \forall z = x + \mathrm{j}\,y \in \mathbb{C}.$

Teorema 4. **a)** Funcţia exponenţială de exponent complex este olomorfă pe orice domeniu mărginit (monogenă în orice z la distanţă finită) şi

$f' : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f'(z) = e^z.$

b) Punctul de la infinit, $z = \infty_{\mathbb{C}}$, este punct singular esenţial pentru f.

Exemplul 4.

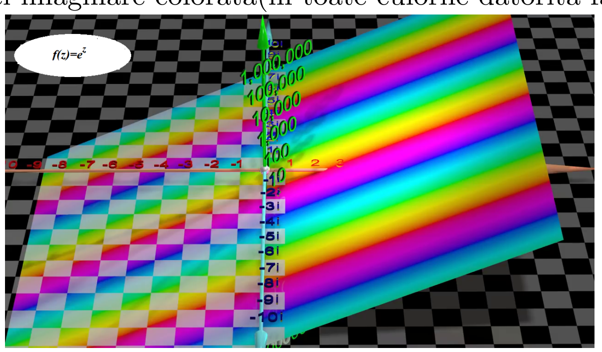
a) $e^{\mathrm{j}\cdot 3} = \cos 3 + \mathrm{j}\sin 3$;**b)** $e^{4+\mathrm{j}\cdot 3} = e^4(\cos 3 + \mathrm{j}\sin 3)$;

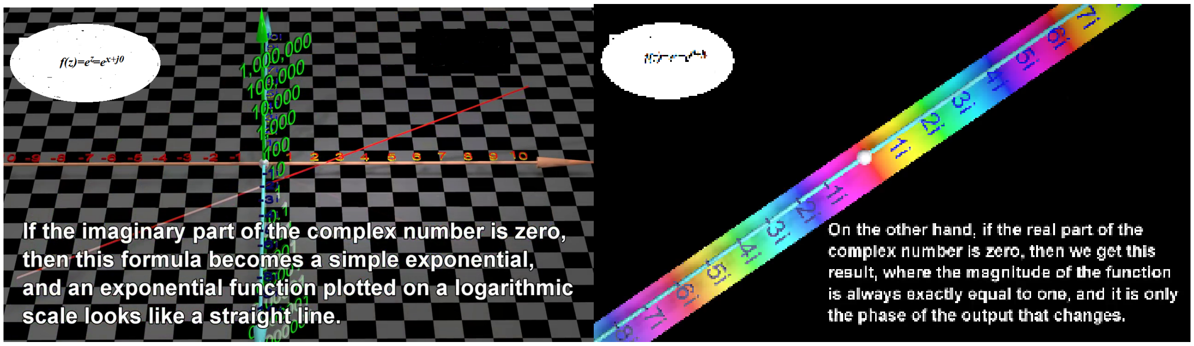
c) $e^{2+\mathrm{j}\cdot\pi} = e^2(\cos\pi + \mathrm{j}\sin\pi) = -e^2$;**d)** $e^{2+3\,\mathrm{j}\cdot\pi} = e^2(\cos 3\pi + \mathrm{j}\sin 3\pi) = -e^2$;

e) $e^{-1+\mathrm{j}\cdot\frac{\pi}{3}} = e^{-1}\left(\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{j}\sin\frac{\pi}{3}\right) = e^{-1}\left(\frac{1}{2} + \mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

f) Reprezentarea funcţiei se observă mai jos, în benzi de culoare orientate după drepte paralele. Nu are poli sau zerouri, "piscuri" sau "pâlnii".

Dacă partea imaginară a z este $y = 0$, atunci $e^z = e^{x+0\,\mathrm{j}}$, magnitudinea este e^x, faza este 0, iar reprezentarea grafică pe scala logaritmică devine cea a unei drepte colorată toată roşu (culoare corespunzătoare pentru faza outputului 0). Dacă partea reală a z este $x = 0$,atunci $e^z = e^{0+y\,\mathrm{j}}$, magnitudinea este 1, faza este y, iar atunci reprezentarea grafică pe scala logaritmică devine cea a axei imaginare colorată(în toate culorile datorită fazei outputului y).





Propoziţia 1. Au loc proprietăţile
a) $e^z \neq 0, \forall z \in \mathbb{C}$;
b) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;**c)** $e^{z_1-z_2} = \dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}}, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;
d) $e^{z_1} = e^{z_2} \Leftrightarrow [z_1 = z_2 + 2k\pi\,\mathrm{j}, k \in \mathbb{Z}]$.
e) Funcţia exponenţială de exponent complex este periodică, de perioadă $2\pi\,\mathrm{j}$.

5°. "Funcţia" logaritmică

Definiţia 5. Se numeşte *"funcţie" logaritm în planul complex* funcţia multivocă/ multiformă/ multifuncţia:

$$f : \mathbb{C}^* \to \mathcal{P}(\mathbb{C}),\ f(z) = (\operatorname{Log} z)_{\mathbb{C}} = \{w_k = \ln r + \mathrm{j}\,(t^* + 2k\pi)\,; k \in \mathbb{Z}\}$$

unde $z = r(\cos t^* + \mathrm{j}\sin t^*) \in \mathbb{C}^*$, cu $r = |z|\,, t^* = \arg z$.
Comentariu. $(\operatorname{Log} z)_{\mathbb{C}}$ provine formal, pentru $z = r(\cos t + \mathrm{j}\sin t) = re^{\mathrm{j}\,t}$, din

$$\operatorname{Log} z = \operatorname{Log}\left(re^{\mathrm{j}\,t}\right) = \operatorname{Log}(r) + \operatorname{Log}\left(e^{\mathrm{j}\,t}\right) = \ln r + \mathrm{j}\,t \overset{t=t^*+2k\pi}{=} \ln r + \mathrm{j}\,(t^* + 2k\pi)\,.$$

Teorema 5. **a)** "Funcţia" logaritm în planul complex este o funcţie multivocă cu exact o infinitate $k \in \mathbb{Z}$ de ramuri, date de

$$f_k(z) = \ln r + \mathrm{j}\,(t^* + 2k\pi)\,; k \in \mathbb{Z},$$

unde $z = r(\cos t^* + \mathrm{j}\sin t^*) \in \mathbb{C}^*$, cu $r = |z|\,, t^* = \arg z$.

Fiecare ramură este olomorfă pe un domeniu obţinut prin eliminarea din planul complex (π) a punctelor unei semidrepte ce uneşte 0 cu $\infty_{\mathbb{C}}$ (numită tăietură). În plus, derivata unei ramuri este:

$$f_k'(z) = \frac{1}{z}.$$

b) f are numai singularităţile $z = 0$ (în nici o vecinătate a punctului 0, f nu este olomorfă) şi $z = \infty_{\mathbb{C}}$, numite *puncte critice logaritmice*.
Exemplul 5. Cu tăietura $T = Ox_+$ şi $t^* \in [0, 2\pi[\Rightarrow$
a) $(\operatorname{Log}(3))_{\mathbb{C}} \overset{3=3(\cos 0+\mathrm{j}\sin 0)}{=} \{\ln 3 + \mathrm{j}\,(0 + 2k\pi)\,; k \in \mathbb{Z}\}\,;$
b) $(\operatorname{Log}(e))_{\mathbb{C}} \overset{e=e(\cos 0+\mathrm{j}\sin 0)}{=} \{1 + \mathrm{j}\,(0 + 2k\pi)\,; k \in \mathbb{Z}\}\,;$
c) $(\operatorname{Log}(1))_{\mathbb{C}} \overset{1=1(\cos 0+\mathrm{j}\sin 0)}{=} \{0 + \mathrm{j}\,(0 + 2k\pi)\,; k \in \mathbb{Z}\}\,;$
d) $(\operatorname{Log}(-2))_{\mathbb{C}} \overset{-2=2(\cos\pi+\mathrm{j}\sin\pi)}{=} \{\ln 2 + \mathrm{j}\,(\pi + 2k\pi)\,; k \in \mathbb{Z}\}\,;$
e) $(\operatorname{Log}(\mathrm{j}))_{\mathbb{C}} \overset{\mathrm{j}=1\left(\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{j}\sin\frac{\pi}{2}\right)}{=} \left\{0 + \mathrm{j}\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right); k \in \mathbb{Z}\right\}\,;$
f) $(\operatorname{Log}(-\mathrm{j}))_{\mathbb{C}} \overset{-\mathrm{j}=1\left(\cos\frac{3\pi}{2}+\mathrm{j}\sin\frac{3\pi}{2}\right)}{=} \left\{0 + \mathrm{j}\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right); k \in \mathbb{Z}\right\}\,;$
g) $\left(\operatorname{Log}\left(-1 + \mathrm{j}\sqrt{3}\right)\right)_{\mathbb{C}} \overset{-1+\mathrm{j}\sqrt{3}=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{j}\sin\frac{2\pi}{3}\right)}{=} \left\{\ln 2 + \mathrm{j}\left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right); k \in \mathbb{Z}\right\}.$
Propoziţia 2. **a)** $(\operatorname{Log}(z_1 z_2))_{\mathbb{C}} = (\operatorname{Log} z_1)_{\mathbb{C}} + (\operatorname{Log} z_2)_{\mathbb{C}}\,, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$;

b) $\left(\operatorname{Log}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)\right)_{\mathbb{C}} = (\operatorname{Log} z_1)_{\mathbb{C}} - (\operatorname{Log} z_2)_{\mathbb{C}}, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*.$

Propoziţia 3. **a)** $e^{(\operatorname{Log} z)_{\mathbb{C}}} = z, \forall z \in \mathbb{C}^*$;**b)** $(\operatorname{Log} e^z)_{\mathbb{C}} = z + \mathrm{j}\operatorname{Arg} 1, \forall z \in \mathbb{C}^*$.

Comentariu. Singularităţile "funcţiei" logaritmice în planul complex,

$f : \mathbb{C} \to \mathcal{P}(\mathbb{C}),\ f(z) = (\operatorname{Log} z)_{\mathbb{C}}$

sunt 0 şi $\infty_{\mathbb{C}}$ (puncte critice logaritmice). Ca tăietură se poate alege orice semidreaptă din planul complex ce uneşte cele două puncte singulare, 0 şi $\infty_{\mathbb{C}}$.

Fie $z = r(\cos t^* + \mathrm{j}\sin t^*) = re^{\mathrm{j}\,t^*} \in \mathbb{C}$, cu $t^* = \arg z, r = |z|$.

În calculul lui $f_k(z)$, t^* se alege într-un interval de lungime 2π de forma $[\alpha, \alpha + 2\pi[$, măsurat în sens direct şi fără a trece peste tăietură. De exemplu

•dacă se alege tăietura $T = Ox_+ = \{z = x + \mathrm{j}\,y \in \mathbb{C}; x \geq 0, y = 0\}$, atunci $t^* \in [0, 2\pi[$.

•dacă se alege tăietura $T = Ox_- = \{z = x + \mathrm{j}\,y \in \mathbb{C}; x \leq 0, y = 0\}$, atunci $t^* \in [-\pi, \pi[$.

•dacă se alege tăietura $T' = Oy_+ = \{z = x + \mathrm{j}\,y \in \mathbb{C}; x = 0, y \geq 0\}$, atunci $t^* \in \left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

6°. "Funcţia" putere complexă

Definiţia 6. Fie $\alpha \in \mathbb{C}$ dat. Se numeşte *"funcţie" putere complexă* funcţia

•dacă $\alpha = n \in \mathbb{N}^*, f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = z^n$-este o funcţie polinomială

•dacă $\alpha = 0, f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = 1$-este funcţie constantă

•dacă $\alpha = -n, n \in \mathbb{N}^*, f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}, f(z) = z^{-n} = \dfrac{1}{z^n}$-este o funcţie raţională

•dacă $\alpha = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, cu $m \in \mathbb{Z}^*$, $n \in \mathbb{N}_2$ şi m, n relativ prime,

$f : \mathbb{C} \to \mathcal{P}(\mathbb{C}),\ f(z) = \left(\sqrt[n]{z^m}\right)_{\mathbb{C}}$ este o funcţie multivocă ce implică "funcţia" radical

•dacă $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ sau $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$,

$f : \mathbb{C}^* \to \mathcal{P}(\mathbb{C}),\ f(z) = (z^\alpha)_{\mathbb{C}} = e^{\alpha \cdot (\operatorname{Log} z)_{\mathbb{C}}}$ -este o funcţie multivocă ce implică "funcţia" logaritm.

Teorema 6.

•Dacă $\alpha = n \in \mathbb{N}^*, f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = z^n$.

Funcţia putere este o funcţie polinomială care are $\forall z \in \mathbb{C}$ drept punct ordinar şi $z = \infty_{\mathbb{C}}$ drept pol de ordin n.

•Dacă $\alpha = 0, f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = 1$.

Funcţia putere este o funcţie constantă care are $\forall z \in \mathbb{C}$ şi $z = \infty_{\mathbb{C}}$ puncte ordinare.

•dacă $\alpha = -n, n \in \mathbb{N}^*, f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}, f(z) = z^{-n} = \dfrac{1}{z^n}$.

Funcţia putere este o funcţie raţională care are $\forall z \in \mathbb{C}^*$ puncte ordinare, $z = 0$ pol de ordin n, şi $z = \infty_{\mathbb{C}}$ punct ordinar.

•dacă $\alpha = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, cu $m \in \mathbb{Z}^*$, $n \in \mathbb{N}_2$ şi m, n relativ prime,

$f : \mathbb{C} \to \mathcal{P}(\mathbb{C}),\ f(z) = \left(\sqrt[n]{z^m}\right)_{\mathbb{C}}$.

"Funcţia" putere este o funcţie multivocă ce implică "funcţia" radical, cu n ramuri date de

$$f_k(z) = \sqrt[n]{r^m}\left(\cos\frac{mt^* + 2km\pi}{n} + \mathrm{j}\sin\frac{mt^* + 2km\pi}{n}\right), k \in \{0, 1, ..., n-1\},$$

unde $z = r(\cos t^* + \mathrm{j}\sin t^*) \in \mathbb{C}^*$, cu $t^* = \arg z, r = z$.

$\left(\sqrt[n]{0^m}\right)_{\mathbb{C}} = 0$

Are $\forall z \in \mathbb{C}^*$ puncte ordinare, $z = 0$ şi $z = \infty_{\mathbb{C}}$ puncte critice algebrice.

•dacă $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ sau $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$,

$f : \mathbb{C}^* \to \mathcal{P}(\mathbb{C}),\ f(z) = \boxed{(z^\alpha)_{\mathbb{C}} = e^{\alpha \cdot (\operatorname{Log} z)_{\mathbb{C}}}.}$

"Funcţia" putere este o funcţie multivocă ce implică "funcţia" logaritm, cu o infinitate $k \in \mathbb{Z}$ de ramuri, date de

$f_k(z) = e^{\alpha\cdot(\ln|z|+\mathrm{j}(t^*+2k\pi))}; k \in \mathbb{Z},$
unde $z = r(\cos t^* + \mathrm{j}\sin t^*) \in \mathbb{C}$, cu $t^* = \arg z, r = |z|$.
Are $\forall z \in \mathbb{C}^*$ puncte ordinare, $z = 0$ şi $z = \infty_{\mathbb{C}}$ puncte critice logaritmice.
Exemplul 6. Cu tăietura $T = Ox_+$ şi $t^* \in [0, 2\pi[\Rightarrow$
a) $\left(2^{\sqrt{3}}\right)_{\mathbb{C}} = e^{\sqrt{3}\cdot(\mathrm{Log}\,2)_{\mathbb{C}}} = \left\{e^{\sqrt{3}\cdot(\ln 2+\mathrm{j}(0+2k\pi))}; k \in \mathbb{Z}\right\} =$

$= \left\{\left(e^{\ln 2}\right)^{\sqrt{3}} \cdot e^{\mathrm{j}(2k\pi)\sqrt{3}}; k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{\left(2^{\sqrt{3}}\right)_{\mathbb{R}} \cdot e^{\mathrm{j}(2k\pi)\sqrt{3}}; k \in \mathbb{Z}\right\};$

$\left(2^{\sqrt{3}}\right)_{\mathbb{C}} = \left\{\left(2^{\sqrt{3}}\right)_{\mathbb{R}} \cdot \left(\cos\left(2\sqrt{3}k\pi\right) + \mathrm{j}\sin\left(2\sqrt{3}k\pi\right)\right); k \in \mathbb{Z}\right\};$

b) $\left(\mathrm{j}^{\sqrt{2}}\right)_{\mathbb{C}} = e^{\sqrt{2}\cdot(\mathrm{Log}(\mathrm{j}))_{\mathbb{C}}} = \left\{e^{\sqrt{2}\cdot\left(\ln 1+\mathrm{j}\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\right)}; k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{e^{\mathrm{j}\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\sqrt{2}}; k \in \mathbb{Z}\right\};$

$\left(\mathrm{j}^{\sqrt{2}}\right)_{\mathbb{C}} = \left\{\cos\left(\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\sqrt{2}\right) + \mathrm{j}\sin\left(\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\sqrt{2}\right); k \in \mathbb{Z}\right\};$

-are toate valorile complexe pe cercul de centru 0 de rază 1.

c) $\left(\mathrm{j}^{\mathrm{j}}\right)_{\mathbb{C}} = e^{\mathrm{j}\cdot(\mathrm{Log}(\mathrm{j}))_{\mathbb{C}}} = \left\{e^{\mathrm{j}\cdot\left(\ln 1+\mathrm{j}\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\right)}; k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}; k \in \mathbb{Z}\right\};$

-are toate valorile reale, chiar strict pozitive.

d) $\left(\left(1 + \mathrm{j}\sqrt{3}\right)^{1-\mathrm{j}}\right)_{\mathbb{C}} = e^{(1-\mathrm{j})\cdot\left(\mathrm{Log}\left(1+\mathrm{j}\sqrt{3}\right)\right)_{\mathbb{C}}} = \left\{e^{(1-\mathrm{j})\cdot\left(\ln 2+\mathrm{j}\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)\right)}; k \in \mathbb{Z}\right\} =$

$= \left\{e^{\ln 2+\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)+\mathrm{j}\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi-\ln 2\right)}; k \in \mathbb{Z}\right\} =$

$= \left\{2e^{\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} - \ln 2 + 2k\pi\right) + \mathrm{j}\sin\left(\frac{\pi}{3} - \ln 2 + 2k\pi\right)\right); k \in \mathbb{Z}\right\}.$

Propoziţia 4. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$,
a) $(z_1 z_2)^{\alpha}_{\mathbb{C}} = (z_1)^{\alpha}_{\mathbb{C}} \cdot (z_2)^{\alpha}_{\mathbb{C}}, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$;**b)** $(z)^{\alpha+\beta}_{\mathbb{C}} = (z)^{\alpha}_{\mathbb{C}} \cdot (z)^{\beta}_{\mathbb{C}}, \forall z \in \mathbb{C}^*$.

7°. Funcţii trigonometrice şi funcţiile hiperbolice

Definiţia 7. Se numesc *funcţii trigonometrice în planul complex* funcţiile

$$f_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f_1(z) = \boxed{\cos z = \frac{e^{\mathrm{j}z} + e^{-\mathrm{j}z}}{2};}$$

$$f_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f_2(z) = \boxed{\sin z = \frac{e^{\mathrm{j}z} - e^{-\mathrm{j}z}}{2\mathrm{j}};}$$

$$f_3 : A_3 \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f_3(z) = \boxed{\mathrm{ctg}\, z = \frac{\cos z}{\sin z} = \mathrm{j}\,\frac{e^{2\mathrm{j}z} + 1}{e^{2\mathrm{j}z} - 1};}$$

$$f_4 : A_4 \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f_4(z) = \boxed{\mathrm{tg}\, z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{1}{\mathrm{j}}\frac{e^{2\mathrm{j}z} - 1}{e^{2\mathrm{j}z} + 1};}$$

$A_3 = \{z \in \mathbb{C}; \sin z \neq 0\}, A_4 = \{z \in \mathbb{C}; \cos z \neq 0\}$.

Definiţia 8. Se numesc *funcţii hiperbolice în planul complex* funcţiile

$$f_5 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f_5(z) = \boxed{\mathrm{ch}\, z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2};}$$

$$f_6 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f_6(z) = \boxed{\mathrm{sh}\, z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2};}$$

$$f_7 : A_7 \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f_7(z) = \boxed{\mathrm{cth}\, z = \frac{\mathrm{ch}\, z}{\mathrm{sh}\, z};}$$

$$f_8 : A_8 \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f_8(z) = \boxed{\mathrm{th}\, z = \frac{\mathrm{sh}\, z}{\mathrm{ch}\, z};}$$

$A_7 = \{z \in \mathbb{C}; \mathrm{sh}\, z \neq 0\}, A_8 = \{z \in \mathbb{C}; \mathrm{ch}\, z \neq 0\}$.

Teorema 7. **a)** Funcţiile $\cos, \sin, \mathrm{ch}, \mathrm{sh}$ de argument complex sunt olomorfe în orice domeniu mărginit şi

$\boxed{(\cos z)' = -\sin z, \forall z \in \mathbb{C}}$ şi $\boxed{(\sin z)' = \cos z, \forall z \in \mathbb{C}}$;

$\boxed{(\mathrm{ch}\, z)' = \mathrm{sh}\, z, \forall z \in \mathbb{C}}$ şi $\boxed{(\mathrm{sh}\, z)' = \mathrm{ch}\, z, \forall z \in \mathbb{C}}$.

b) Funcţiile $\mathrm{ctg}, \mathrm{tg}, \mathrm{cth}, \mathrm{th}$ de argument complex sunt olomorfe în orice domeniu mărginit, cu excepţia punctelor unde nu sunt definite, care sunt poli simpli.

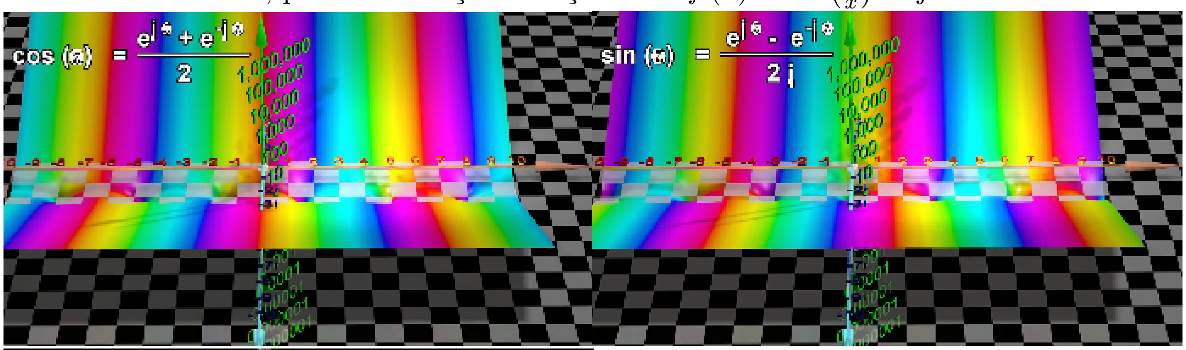
Exemplul 7.a) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\pi\,\mathrm{j}\right) = \dfrac{e^{\mathrm{j}\left(\frac{\pi}{2}-2\pi\,\mathrm{j}\right)} + e^{-\mathrm{j}\left(\frac{\pi}{2}-2\pi\,\mathrm{j}\right)}}{2} = \dfrac{e^{2\pi+\mathrm{j}\,\frac{\pi}{2}} + e^{-2\pi-\mathrm{j}\,\frac{\pi}{2}}}{2} =$

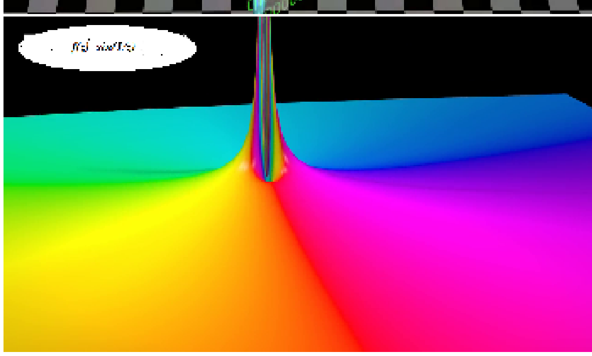
$$= \frac{e^{2\pi}\left(\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{j}\sin\frac{\pi}{2}\right) + e^{-2\pi}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{j}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)}{2} =$$

$$= \frac{e^{2\pi}\left(\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{j}\sin\frac{\pi}{2}\right) + e^{-2\pi}\left(\cos\frac{\pi}{2} - \mathrm{j}\sin\frac{\pi}{2}\right)}{2} =$$

$$= \frac{e^{2\pi} + e^{-2\pi}}{2}\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{j}\,\frac{e^{2\pi} - e^{-2\pi}}{2}\sin\frac{\pi}{2} = \mathrm{j}\,\frac{e^{2\pi} - e^{-2\pi}}{2} = \mathrm{j}\,\mathrm{sh}\,(2\pi)).$$

b) Reprezentările funcţiiilor $\cos$ şi $\sin$ se observă mai jos, în benzi paralele de culoare. Nu au poli, dar au zerouri, formaţiuni de tip "pâlnie", poziţionate periodic. Se observă defazajul din culoare al outputului celor două funcţii. Mai mult, pentru $f(z) = \sin\left(\frac{1}{z}\right)$, se observă că $z = 0$ este un punct singular esenţial din magnitudinea care "tinde rupt" spre infinit (pisc-abis) şi din faza colorată oscilant în toate culorile, precum oscilaţiile funcţiei reale $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ în jurul lui zero.





Exemplul 8.a) $\mathrm{sh}\left(\frac{\pi}{3} - \pi\,\mathrm{j}\right) = \dfrac{e^{\left(\frac{\pi}{3}-\pi\,\mathrm{j}\right)} - e^{-\left(\frac{\pi}{3}-\pi\,\mathrm{j}\right)}}{2} =$

$$= \frac{e^{\frac{\pi}{3}}\left(\cos(-\pi) + \mathrm{j}\sin(-\pi)\right) - e^{-\frac{\pi}{3}}\left(\cos\pi + \mathrm{j}\sin\pi\right)}{2} = \frac{e^{\frac{\pi}{3}}\left(\cos\pi - \mathrm{j}\sin\pi\right) - e^{-\frac{\pi}{3}}\left(\cos\pi + \mathrm{j}\sin\pi\right)}{2} =$$

$$= \frac{e^{\frac{\pi}{3}} - e^{-\frac{\pi}{3}}}{2}\cos\pi + \mathrm{j}\,\frac{-e^{\frac{\pi}{3}} - e^{-\frac{\pi}{3}}}{2}\sin\pi = -\frac{e^{\frac{\pi}{3}} - e^{-\frac{\pi}{3}}}{2} = -\,\mathrm{sh}\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

Propoziţia 5. **a)** $\cos(\mathrm{j}\,z) = \mathrm{ch}\,z$ şi $\sin(\mathrm{j}\,z) = \mathrm{j}\,\mathrm{sh}\,z, \forall z \in \mathbb{C}$;

b) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1, \forall z \in \mathbb{C}$;
c) $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;
$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;
d) $\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z, \forall z \in \mathbb{C}; \sin 2z = 2 \sin z \cos z, \forall z \in \mathbb{C}$;
e) $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1, \forall z \in \mathbb{C}$;
f) $\operatorname{ch}(z_1 + z_2) = \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;
$\operatorname{sh}(z_1 + z_2) = \operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{ch} z_1 \operatorname{sh} z_2, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;
g) $\operatorname{ch} 2z = \operatorname{ch}^2 z + \operatorname{sh}^2 z, \forall z \in \mathbb{C}; \operatorname{sh} 2z = 2 \operatorname{sh} z \operatorname{ch} z, \forall z \in \mathbb{C}$;
h) Funcţia trigonometrice şi hiperbolice de argument complex sunt periodice, şi anume:
cos este periodică, de perioadă principală 2π; sin este periodică, de perioadă principală 2π;
ctg este periodică, de perioadă principală π; tg este periodică, de perioadă principală π;
ch este periodică, de perioadă principală $2\pi\,\mathrm{j}$; sh este periodică, de perioadă principală $2\pi\,\mathrm{j}$;
cth este periodică, de perioadă principală $\pi\,\mathrm{j}$; th este periodică, de perioadă principală $\pi\,\mathrm{j}$;
i) Funcţia trigonometrice şi hiperbolice de argument complex au următoarele zerouri:
cos are zerourile $\pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$; sin are zerourile $k\pi, k \in \mathbb{Z}$;
ch are zerourile $\left(\pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\mathrm{j}, k \in \mathbb{Z}$; sh are zerourile $k\pi\,\mathrm{j}, k \in \mathbb{Z}$.

8°. Funcţii trigonometrice şi funcţiile hiperbolice inverse

Definiţia 9. Se numesc *funcţii trigonometrice inverse în planul complex* "funcţiile" multiforme cu legile:

$$\operatorname{Arccos} z = \left\{ \tfrac{1}{\mathrm{j}} \left(\operatorname{Log} \left(z + \mathrm{j} \left(\sqrt[2]{1 - z^2} \right)_{\mathbb{C}} \right) \right)_{\mathbb{C}}, \tfrac{1}{\mathrm{j}} \left(\operatorname{Log} \left(z - \mathrm{j} \left(\sqrt[2]{1 - z^2} \right)_{\mathbb{C}} \right) \right)_{\mathbb{C}} \right\};$$

$$\operatorname{Arcsin} z = \left\{ \tfrac{1}{\mathrm{j}} \left(\operatorname{Log} \left(\mathrm{j}\, z + \mathrm{j} \left(\sqrt[2]{1 - z^2} \right)_{\mathbb{C}} \right) \right)_{\mathbb{C}}, \tfrac{1}{\mathrm{j}} \left(\operatorname{Log} \left(\mathrm{j}\, z - \mathrm{j} \left(\sqrt[2]{1 - z^2} \right)_{\mathbb{C}} \right) \right)_{\mathbb{C}} \right\};$$

$$\operatorname{Arctg} z = \left\{ \tfrac{1}{2\mathrm{j}} \left(\operatorname{Log} \left(\frac{\mathrm{j} - z}{\mathrm{j} + z} \right) \right)_{\mathbb{C}} \right\}.$$

Comentariu:

a) $\cos w = z \Leftrightarrow \dfrac{e^{\mathrm{j}\,w} + e^{-\mathrm{j}\,w}}{2} = z \overset{e^{\mathrm{j}\,w} = t}{\Leftrightarrow} e^{\mathrm{j}\,w} = z \pm \mathrm{j} \sqrt[2]{1 - z^2}$.

$$\arccos z = \tfrac{1}{\mathrm{j}} \left(\operatorname{Log} \left(z + \mathrm{j} \left(\sqrt[2]{1 - z^2} \right)_{k=0} \right) \right)_{k=0}$$

este determinarea principală a "funcţiei" multiforme anterioare. În plus,

$$\operatorname{Arccos} z = \{ \arccos z + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \}.$$

b) $\sin w = z \Leftrightarrow \dfrac{e^{\mathrm{j}\,w} - e^{-\mathrm{j}\,w}}{2\,\mathrm{j}} = z \overset{e^{\mathrm{j}\,w} = t}{\Leftrightarrow} e^{\mathrm{j}\,w} = \mathrm{j}\, z \pm \mathrm{j} \sqrt[2]{1 - z^2}$.

$$\arcsin z = \tfrac{1}{\mathrm{j}} \left(\operatorname{Log} \left(\mathrm{j}\, z + \mathrm{j} \left(\sqrt[2]{1 - z^2} \right)_{k=0} \right) \right)_{k=0}$$

este determinarea principală a "funcţiei" multiforme anterioare. În plus,

$$\operatorname{Arcsin} z = \{ \arcsin z + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \}.$$

c) $\operatorname{tg} w = z \Leftrightarrow \dfrac{1}{\mathrm{j}} \dfrac{e^{2\,\mathrm{j}\,w} - 1}{e^{2\,\mathrm{j}\,w} + 1} = z \overset{e^{\mathrm{j}\,w} = t}{\Leftrightarrow} e^{2\,\mathrm{j}\,w} = \dfrac{\mathrm{j} - z}{\mathrm{j} + z}$.

$$\operatorname{arctg} z = \tfrac{1}{2\mathrm{j}} \left(\operatorname{Log} \left(\frac{\mathrm{j} - z}{\mathrm{j} + z} \right) \right)_{k=0}$$

este determinarea principală a "funcţiei" multiforme anterioare. În plus,

$$\operatorname{Arctg} z = \{ \operatorname{arctg} z + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \}.$$

Exemplul 9.

a) $\operatorname{Arccos}\left(\mathrm{j}\sqrt{3}\right) = ?$

$$\left(\sqrt[2]{1 + 3} \right)_{\mathbb{C}} = \{2, -2\}.$$

$\left(\mathrm{Log}\left(\mathrm{j}\sqrt{3}+\mathrm{j}\cdot 2\right)\right)_{\mathbb{C}}=\left\{\ln\left(\sqrt{3}+2\right)+\mathrm{j}\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right);k\in\mathbb{Z}\right\}.$
$\left(\mathrm{Log}\left(\mathrm{j}\sqrt{3}-\mathrm{j}\cdot 2\right)\right)_{\mathbb{C}}=\left\{\ln\left(2-\sqrt{3}\right)+\mathrm{j}\left(\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right);k\in\mathbb{Z}\right\}.$
$\dfrac{1}{\mathrm{j}}=-\mathrm{j}.$
$\mathrm{Arccos}\left(\mathrm{j}\sqrt{3}\right)=\left\{-\mathrm{j}\cdot\ln\left(\sqrt{3}+2\right)+\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right);k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\mathrm{j}\cdot\ln\left(2-\sqrt{3}\right)+\left(\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right);k\in\mathbb{Z}\right\}=$
$\quad=\left\{\frac{\pi}{2}-\mathrm{j}\cdot\ln\left(\sqrt{3}+2\right)+2k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}.$

c) $\mathrm{Arctg}\left(\dfrac{\sqrt{3}+\mathrm{j}\sqrt{5}}{2}\right)=?$

$$\frac{\mathrm{j}-\frac{\sqrt{3}+\mathrm{j}\sqrt{5}}{2}}{\mathrm{j}+\frac{\sqrt{3}+\mathrm{j}\sqrt{5}}{2}}=\frac{^{\left(\sqrt{3}-\left(2+\sqrt{5}\right)\mathrm{j}\right))}-\sqrt{3}+\left(2-\sqrt{5}\right)\mathrm{j}}{\sqrt{3}+\left(2+\sqrt{5}\right)\mathrm{j}}=$$
$$=\frac{-3+4-5+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{5}\sqrt{3}+2\sqrt{3}+\sqrt{5}\sqrt{3}\right)\mathrm{j}}{3+4+4\sqrt{5}+5}=\frac{-4+\left(4\sqrt{3}\right)\mathrm{j}}{12+4\sqrt{5}}=\frac{-1+\mathrm{j}\sqrt{3}}{3+\sqrt{5}}.$$
$$\left|\frac{-1+\mathrm{j}\sqrt{3}}{3+\sqrt{5}}\right|=\sqrt{\left(\frac{-1}{3+\sqrt{5}}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3+\sqrt{5}}\right)^2}=\frac{2}{3+\sqrt{5}}.$$
$$\arg\frac{-1+\mathrm{j}\sqrt{3}}{3+\sqrt{5}}\overset{\text{punct în cadr. II}}{=}\mathrm{arctg}\frac{\frac{\sqrt{3}}{3+\sqrt{5}}}{\frac{-1}{3+\sqrt{5}}}+1\cdot\pi=-\mathrm{arctg}\sqrt{3}+\pi=-\frac{\pi}{3}+\pi=\frac{2\pi}{3}.$$
$$\mathrm{Arctg}\,z=\left\{\frac{1}{2\mathrm{j}}\left(\ln\frac{2}{3+\sqrt{5}}+\mathrm{j}\left(\frac{2\pi}{3}+2k\pi\right)\right);k\in\mathbb{Z}\right\}=$$
$$=\left\{\left(\frac{\pi}{3}+k\pi\right)-\frac{1}{2}\mathrm{j}\ln\frac{2}{3+\sqrt{5}};k\in\mathbb{Z}\right\}=\left\{\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\mathrm{j}\ln\frac{2}{3+\sqrt{5}}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}.$$