CURS NR. 7
Matematici Speciale, AIA

3.5. Integrala curbilinie dintr-o funcţie complexă de o variabilă complexă
Definiţie, formulă de calcul
Teoremele fundamentale Cauchy pe domenii simplu / multiplu conexe
Formulele integrale Cauchy pe domenii simplu / multiplu conexe

Preliminarii 3.5.1. a) Peste tot în cele ce urmează se va nota cu γ atât o *curbă în planul complex* (o clasă de drumuri), cât şi un reprezentant parametrizat al său, adică o funcţie

$\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}, \gamma(t) = x(t) + \mathrm{j}\, y(t)$

continuă. Mulţimea imagine a intervalului $[a, b]$ prin funcţia γ, $\operatorname{Im}\gamma = \{\gamma(t); t \in [a, b]\}$, se numeşte *imaginea drumului* sau *traiectorie* sau *hodograf.* Se face convenţia ca reprezentarea geometrică a imaginii să fie denumită şi notată tot $\operatorname{Im}\gamma$.

Definiţiile şi rezultatele date pentru curbe din $\mathbb{R}^2$ se transferă asupra curbelor din $\mathbb{C}$. O curbă este:-*simplă*, dacă este un reprezentant este funcţie injectivă pe $[a, b[$;

-*închisă*, dacă un reprezentant verifică $\gamma(a) = \gamma(b)$;

-*contur*, dacă este simplă şi închisă.

Curbele închise au ca orientare directă orientarea în sens trigonometric (se parametrizează în acest sens). A se vedea cursul de Analiză Matematică pentru curbe de *lungime finită* sau *rectificabile*, curbe *netede/ netede pe porţiuni.*

b) Definiţiile şi rezultatele date pentru domenii, domenii simplu/ multiplu conexe din $\mathbb{R}^2$ se transferă asupra celor din $\mathbb{C}$. O mulţime $D \subseteq \mathbb{C}$ este:

-*domeniu,* dacă este deschisă şi conexă;

-*domeniu simplu conex,* dacă este domeniu şi orice curbă simplă şi închisă conţinută în D delimitează un domeniu inclus în D.

-*domeniu multiplu conex de ordin de conexitate* $p+1$, dacă este domeniu şi are frontiera formată din $p + 1$ curbe închise: una γ_0, în interiorul căreia sunt incluse celelalte, $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p$ şi astfel încât acestea din urmă sunt situate fiecare în exteriorul celeilalte.

Definiţia 3.5.1. Fie γ o curbă în $\mathbb{C}$. Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ cu $\operatorname{Im}\gamma \subset D$ şi funcţia

$f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = u(x, y) + \mathrm{j}\, v(x, y), \forall z = x + \mathrm{j}\, y.$

Dacă există integralele curbilinii de speţa a 2-a reale

$\int_\gamma (u(x, y)\, dx - v(x, y)\, dy)$ şi $\int_\gamma (v(x, y)\, dx + u(x, y)\, dy)$,

atunci se numeşte *integrala curbilinie din f pe curba* γ numărul complex

$$\boxed{\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\, dz &\overset{\text{formal}}{=} \int_\gamma (u(x, y) + \mathrm{j}\, v(x, y))(dx + \mathrm{j}\, dy) = \\ &\overset{\text{prin definiţie}}{=} \underbrace{\int_\gamma (u(x, y)\, dx - v(x, y)\, dy)}_{\text{dacă } \exists, \in\mathbb{R}} + \mathrm{j} \underbrace{\int_\gamma (v(x, y)\, dx + u(x, y)\, dy)}_{\text{dacă } \exists, \in\mathbb{R}}.\end{aligned}}$$

Propoziţia 3.5.1.(de liniaritate în raport cu integrantul) Fie γ o curbă în $\mathbb{C}$. Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ deschisă cu $\operatorname{Im}\gamma \subset D$ şi $f_1, f_2 : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ funcţii. Fie $\alpha \in \mathbb{R}$. Dacă $\exists \int_\gamma f_1(z)\, dz, \int_\gamma f_2(z)\, dz$ atunci $\exists \int_\gamma (f_1 + f_2)(z)\, dz$ şi $\int_\gamma (\alpha \cdot f_1)(z)\, dz$ şi

(**aditivitatea** în raport cu integrantul) : $\int_\gamma (f_1 + f_2)(z)\, dz = \int_\gamma f_1(z)\, dz + \int_\gamma f_2(z)\, dz$;

(**omogeneitatea** în raport cu integrantul) : $\int_\gamma (\alpha f_1)(x) = \alpha \int_\gamma f_2(z)\, dz$.

Propoziţia 3.5.2.(integrala drumului opus) Fie γ o curbă în $\mathbb{C}$. Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ deschisă cu $\operatorname{Im}\gamma \subset D$ şi $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ funcţie. Dacă $\exists \int_\gamma f(z)\, dz$ atunci $\exists \int_{\gamma^-} f(z)\, dz$ şi

$\int_{\gamma^-} f(z)\,dz = -\int_\gamma f(z)\,dz.$

Propoziţia 3.5.3.(**de aditivitate în raport cu drumul**) Fie γ o curbă rectificabilă în $\mathbb{C}$. Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ deschisă cu $\operatorname{Im}\gamma \subset D$ şi $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ funcţie. Fie $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ prin juxtapunere. Dacă $\exists \int_{\gamma_1} f(z)\,dz$ şi $\exists \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$ atunci $\exists \int_{\gamma_1\cup\gamma_2} f(z)\,dz$ şi

$\int_{\gamma_1\cup\gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz.$

Teorema 3.5.1.(**de reducere la integrale Riemann**) Fie $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}, \gamma(t) = x(t) + \mathrm{j}\,y(t)$ o curbă parametrizată în $\mathbb{C}$. Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu cu $\operatorname{Im}\gamma \subset D$ şi funcţia

$f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = u(x,y) + \mathrm{j}\,v(x,y), \forall z = x + \mathrm{j}\,y.$

Dacă

$$\left.\begin{array}{l}\gamma \text{ este curbă netedă (sau netedă pe porţiuni)} \\ f \text{ este funcţie continuă}\end{array}\right\}$$

atunci

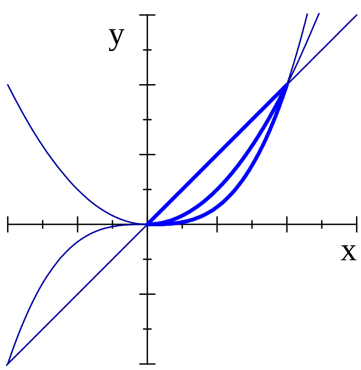
$$\boxed{\begin{array}{l}\int_\gamma f(z)\,dz \overset{z \text{ de pe curba } \gamma}{=} \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt = \\ = \int_a^b \left(u(x(t),y(t))\,x'(t) - v(x(t),y(t))\,y'(t)\right)dt + \mathrm{j}\int_a^b \left(v(x(t),y(t))\,x'(t) + u(x(t),y(t))\,y'(t)\right)dt.\end{array}}$$

Exemplul 3.5.1. Să se calculeze

$\int_\gamma \left(x^2 + \mathrm{j}\,y\right)dz$, între punctele 0 şi $1+\mathrm{j}$, de-a lungul curbelor γ date prin:

a) $y = x$; **b)** $y = x^2$; **c)** $y = x^3$.

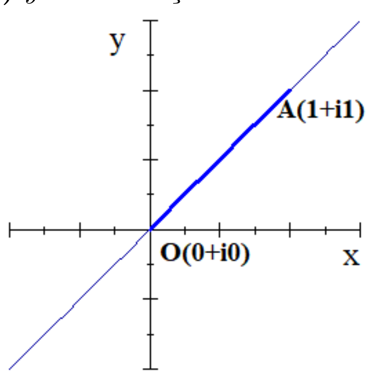
Rezolvare.



etapa 1. Se studiază curba

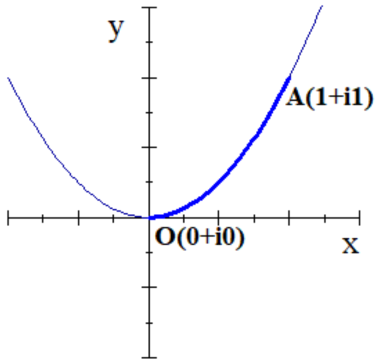
•Se parametrizează un reprezentant al curbei, deoarece nu este dată parametric.

a) $y = x$- ecuaţie carteziană explicită.



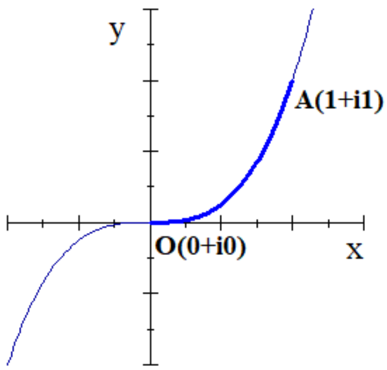
$$\operatorname{Im}\gamma_1 = \left[\overrightarrow{OA}\right] : \left\{\begin{array}{l} x(t) = t \\ y(t) = t \end{array}\right., t \in [0,1],\ \gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{C}, \gamma_1(t) = \underbrace{t}_{x(t)} + \mathrm{j}\underbrace{t}_{y(t)}.$$

b) $y = x^2$- ecuaţie carteziană explicită.



$$\mathrm{Im}\gamma_2 = \left[\overset{\frown}{OA}\right] : \left\{ \begin{array}{l} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \end{array} \right., t \in [0,1], \ \gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{C}, \gamma_2(t) = \underbrace{t}_{x(t)} + \mathrm{j} \underbrace{t^2}_{y(t)}.$$

c) $y = x^3$- ecuaţie carteziană explicită.



$$\mathrm{Im}\gamma_3 = \left[\overset{\frown}{OA}\right] : \left\{ \begin{array}{l} x(t) = t \\ y(t) = t^3 \end{array} \right., t \in [0,1], \ \gamma_3 : [0,1] \to \mathbb{C}, \gamma_3(t) = \underbrace{t}_{x(t)} + \mathrm{j} \underbrace{t^3}_{y(t)}.$$

•γ este curbă netedă:

$$\textbf{a)} \left\{ \begin{array}{l} \exists \gamma_1' : [0,1] \to \mathbb{C}, \gamma_1'(t) = \underbrace{1}_{x'(t)} + \mathrm{j} \cdot \underbrace{1}_{y'(t)}. \\ \gamma_1' \text{- este continuă pe } [0,1] \end{array} \right.$$

$$\textbf{b)} \left\{ \begin{array}{l} \exists \gamma_2' : [0,1] \to \mathbb{C}, \gamma_2'(t) = \underbrace{1}_{x'(t)} + \mathrm{j} \cdot \underbrace{(2t)}_{y'(t)}. \\ \gamma_2' \text{- este continuă pe } [0,1] \end{array} \right.$$

$$\textbf{c)} \left\{ \begin{array}{l} \exists \gamma_3' : [0,1] \to \mathbb{C}, \gamma_3'(t) = \underbrace{1}_{x'(t)} + \mathrm{j} \cdot \underbrace{(3t^2)}_{y'(t)}. \\ \gamma_3' \text{- este continuă pe } [0,1] \end{array} \right.$$

<u>etapa 2.</u> Se studiază integrantul, $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \underbrace{x^2}_{u(x,y)} + \mathrm{j} \underbrace{y}_{v(x,y)}$.

$D = \mathbb{C}$ este domeniu; $\mathrm{Im}\,\gamma_{1,2,3} \subset D$;

f este continuă pe D ($\Leftrightarrow u, v$ sunt continue pe D).

<u>etapa 3.</u> Calcul.

•$\mathcal{I}_1 = \int_{\gamma_1} \left(x^2 + \mathrm{j}\, y\right) dz$

<u>modul 1.</u> $\mathcal{I}_1 \overset{\text{formal}}{=} \int_{\gamma_1} \left(x^2 + \mathrm{j}\, y\right)(dx + \mathrm{j}\, dy) \overset{\text{def.}}{=} \int_{\gamma_1} \left(x^2 dx - y dy\right) + \mathrm{j} \int_{\gamma_1} \left(y dx + x^2 dy\right).$

$\text{Im}\gamma_1 : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t \end{cases}, t \in [0,1] \Rightarrow \begin{cases} dx(t) = 1dt \\ dy(t) = 1dt \end{cases}, t \in [0,1].$

$\mathcal{I}_1 = \int_0^1 (t^2 - t)\, dt + \mathrm{j} \int_0^1 (t + t^2)\, dt = \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} \right) \Big|_{t=0}^{t=1} + \mathrm{j} \left(\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} \right) \Big|_{t=0}^{t=1} = \frac{-1}{6} + \mathrm{j}\, \frac{5}{6}.$

<u>modul 1'.</u> $\mathcal{I}_1 = \int_{\gamma_1} (x^2 + \mathrm{j}\, y)\, dz = \int_0^1 (x^2(t) + \mathrm{j}\, y(t))\, \gamma_1'(t)\, dt = \int_0^1 (t^2 + \mathrm{j} \cdot t)(1 + \mathrm{j} \cdot 1)\, dt =$

$= (1 + \mathrm{j}) \left(\frac{t^3}{3} + \mathrm{j}\, \frac{t^2}{2} \right) \Big|_{t=0}^{t=1} = (1 + \mathrm{j}) \left(\frac{1}{3} + \mathrm{j}\, \frac{1}{2} \right) = \frac{-1}{6} + \mathrm{j}\, \frac{5}{6}.$

•$\mathcal{I}_2 = \int_{\gamma_2} (x^2 + \mathrm{j}\, y)\, dz$

<u>modul 1.</u> $\mathcal{I}_2 \overset{\text{formal}}{=} \int_{\gamma_2} (x^2 + \mathrm{j}\, y)(dx + \mathrm{j}\, dy) \overset{\text{def.}}{=} \int_{\gamma_2} (x^2 dx - y dy) + \mathrm{j} \int_{\gamma_2} (y dx + x^2 dy).$

$\text{Im}\gamma_2 : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \end{cases}, t \in [0,1] \Rightarrow \begin{cases} dx(t) = 1dt \\ dy(t) = 2tdt \end{cases}, t \in [0,1].$

$\mathcal{I}_2 = \int_0^1 (t^2 - t^2 \cdot 2t)\, dt + \mathrm{j} \int_0^1 (t^2 + t^2 \cdot 2t)\, dt = \left(\frac{t^3}{3} - 2\frac{t^4}{4} \right) \Big|_{t=0}^{t=1} + \mathrm{j} \left(\frac{t^3}{3} + 2\frac{t^4}{4} \right) \Big|_{t=0}^{t=1} =$

$= \frac{-1}{6} + \mathrm{j}\, \frac{5}{6}.$

<u>modul 1'.</u> $\mathcal{I}_2 = \int_{\gamma_2} (x^2 + \mathrm{j}\, y)\, dz = \int_0^1 (x^2(t) + \mathrm{j}\, y(t))\, \gamma_2'(t)\, dt = \int_0^1 (t^2 + \mathrm{j}\, t^2)(1 + \mathrm{j} \cdot (2t))\, dt =$

$= \int_0^1 (t^2 - t^2 \cdot 2t)\, dt + \mathrm{j} \int_0^1 (t^2 + t^2 \cdot 2t)\, dt = \left(\frac{t^3}{3} - 2\frac{t^4}{4} \right) \Big|_{t=0}^{t=1} + \mathrm{j} \left(\frac{t^3}{3} + 2\frac{t^4}{4} \right) \Big|_{t=0}^{t=1} =$

$= \frac{-1}{6} + \mathrm{j}\, \frac{5}{6}.$

•$\mathcal{I}_3 = \int_{\gamma_2} (x^2 + \mathrm{j}\, y)\, dz$

<u>modul 1.</u> $\mathcal{I}_3 \overset{\text{formal}}{=} \int_{\gamma_3} (x^2 + \mathrm{j}\, y)(dx + \mathrm{j}\, dy) \overset{\text{def.}}{=} \int_{\gamma_3} (x^2 dx - y dy) + \mathrm{j} \int_{\gamma_3} (y dx + x^2 dy).$

$\text{Im}\gamma_3 : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^3 \end{cases}, t \in [0,1] \Rightarrow \begin{cases} dx(t) = 1dt \\ dy(t) = 3t^2 dt \end{cases}, t \in [0,1].$

$\mathcal{I}_3 = \int_0^1 (t^2 - t^3 \cdot 3t^2)\, dt + \mathrm{j} \int_0^1 (t^3 + t^2 \cdot 3t^2)\, dt = \left(\frac{t^3}{3} - 3\frac{t^6}{6} \right) \Big|_{t=0}^{t=1} + \mathrm{j} \left(\frac{t^4}{4} + 3\frac{t^5}{5} \right) \Big|_{t=0}^{t=1} =$

$= \frac{-1}{6} + \mathrm{j}\, \frac{17}{20}.$

<u>modul 1'.</u> $\mathcal{I}_3 = \int_{\gamma_3} (x^2 + \mathrm{j}\, y)\, dz = \int_0^1 (x^2(t) + \mathrm{j}\, y(t))\, \gamma_3'(t)\, dt = \int_0^1 (t^2 + \mathrm{j}\, t^3)(1 + \mathrm{j} \cdot (3t^2))\, dt =$

$= \int_0^1 (t^2 - t^3 \cdot 3t^2)\, dt + \mathrm{j} \int_0^1 (t^3 + t^2 \cdot 3t^2)\, dt = \left(\frac{t^3}{3} - 3\frac{t^6}{6} \right) \Big|_{t=0}^{t=1} + \mathrm{j} \left(\frac{t^4}{4} + 3\frac{t^5}{5} \right) \Big|_{t=0}^{t=1} =$

$= \frac{-1}{6} + \mathrm{j}\, \frac{17}{20}.$

<u>Comentariu.</u> Prin calcul, se observă că $\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_2$ şi $\mathcal{I}_1 \neq \mathcal{I}_3$ şi $\mathcal{I}_2 \neq \mathcal{I}_3$.

Cele trei curbe au aceleaşi extremităţi $O(0 + \mathrm{j} \cdot 0)$ şi $A(1 + \mathrm{j} \cdot 1)$ şi acelaşi sens de parcurgere, de la O la A. Se observă că f nu este olomorfă pe $D = \mathbb{C}$, deoarece nu se verifică relaţiile Cauchy-Riemann pe D

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y) = (0,a), a \in \mathbb{R}$$

Atunci nu se poate aplica Corolarul dat ulterior.

Acest exerciţiu oferă un exemplu care arată că

-există funcţii f care nu sunt olomorfe şi pentru care totuşi, dacă γ_1 şi γ_2 au aceleaşi extremităţi şi acelaşi sens de parcurgere, $\int_{\gamma_1} f(z)\, dz = \int_{\gamma_2} f(z)\, dz$;

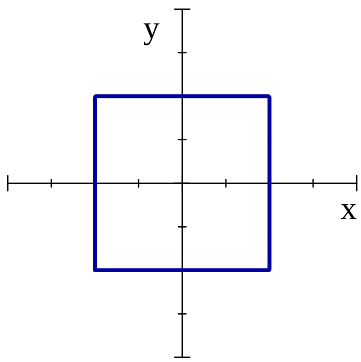
-dacă f nu este olomorfă, chiar dacă γ_1 şi γ_3, respectiv γ_2 şi γ_3 au aceleaşi extremităţi şi acelaşi sens de parcurgere, se poate obţine $\int_{\gamma_1} f(z)\,dz \neq \int_{\gamma_3} f(z)\,dz$, respectiv $\int_{\gamma_2} f(z)\,dz \neq \int_{\gamma_3} f(z)\,dz$.

Exemplul 3.5.2. Să se calculeze

$\int_\gamma \overline{z}dz$, unde γ este

pătratul de vârfuri $1+\mathrm{j}, -1+\mathrm{j}, -1-\mathrm{j}, 1-\mathrm{j}$ parcurs complet o singură dată de la $1+\mathrm{j}$ în sens trigonometric.

Rezolvare. etapa 1. Se studiază curba



Fie $A(1+\mathrm{j}), B(-1+\mathrm{j}), C(-1-\mathrm{j}); D(1-\mathrm{j})$. Se observă că γ este o curbă netedă pe 4 porţiuni şi că se obţine prin juxtapunerea

$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$,

cu respectarea sensului de parcurgere. Adică $\mathrm{Im}\,\gamma$ este linia poligonală închisă $\left[\overrightarrow{ABCDA}\right]$.

•Se parametrizează un reprezentant al curbei, deoarece nu este dată parametric. Se poate utiliza parametrizarea unui segment

$$\left[\overrightarrow{M_1M_2}\right] : \begin{cases} x(t) = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y(t) = y_1 + t(y_2 - y_1) \end{cases}, t \in [0,1]$$

sau orice altă parametrizare intuită.

$$\mathrm{Im}\gamma_1 = \left[\overrightarrow{AB}\right] : \begin{cases} x(t) = 1 + t(-1-1) \\ y(t) = 1 + t(1-1) \end{cases}, t \in [0,1],$$

$$\gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{C}, \gamma_1(t) = \underbrace{(1-2t)}_{x(t)} + \mathrm{j}\underbrace{(1)}_{y(t)}.$$

$$\mathrm{Im}\gamma_2 = \left[\overrightarrow{BC}\right] : \begin{cases} x(t) = -1 + t(-1+1) \\ y(t) = 1 + t(-1-1) \end{cases}, t \in [0,1],$$

$$\gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{C}, \gamma_2(t) = \underbrace{(-1)}_{x(t)} + \mathrm{j}\underbrace{(1-2t)}_{y(t)}.$$

$$\mathrm{Im}\gamma_3 = \left[\overrightarrow{CD}\right] : \begin{cases} x(t) = -1 + t(1+1) \\ y(t) = -1 + t(-1+1) \end{cases}, t \in [0,1],$$

$$\gamma_3 : [0,1] \to \mathbb{C}, \gamma_3(t) = \underbrace{(-1+2t)}_{x(t)} + \mathrm{j}\cdot\underbrace{(-1)}_{y(t)}.$$

$$\mathrm{Im}\gamma_4 = \left[\overrightarrow{DA}\right] : \begin{cases} x(t) = 1 + t(1-1) \\ y(t) = -1 + t(1+1) \end{cases}, t \in [0,1],$$

$$\gamma_4 : [0,1] \to \mathbb{C}, \gamma_4(t) = \underbrace{1}_{x(t)} + \mathrm{j}\underbrace{(-1+2t)}_{y(t)}.$$

•γ este curbă netedă pe 4 porţiuni

γ_1 este curbă netedă: $\begin{cases} \exists\gamma_1' : [0,1] \to \mathbb{C}, \gamma_1'(t) = \underbrace{-2}_{x'(t)} + \mathrm{j}\cdot\underbrace{0}_{y'(t)}. \\ \gamma_1'\text{- este continuă pe } [0,1] \end{cases}$

γ_2 este curbă netedă: $\begin{cases} \exists\gamma_2' : [0,1] \to \mathbb{C}, \gamma_2'(t) = \underbrace{0}_{x'(t)} + \mathrm{j}\cdot\underbrace{(-2)}_{y'(t)}. \\ \gamma_2'\text{- este continuă pe } [0,1] \end{cases}$

γ_3 este curbă netedă: $\begin{cases} \exists\gamma_3' : [0,1] \to \mathbb{C}, \gamma_3'(t) = \underbrace{2}_{x'(t)} + \mathrm{j}\cdot\underbrace{0}_{y'(t)}. \\ \gamma_3'\text{- este continuă pe } [0,1] \end{cases}$

γ_4 este curbă netedă: $\begin{cases} \exists\gamma_4' : [0,1] \to \mathbb{C}, \gamma_4'(t) = \underbrace{0}_{x'(t)} + \mathrm{j}\cdot\underbrace{2}_{y'(t)}. \\ \gamma_4'\text{- este continuă pe } [0,1] \end{cases}$

etapa 2. Se studiază integrantul, $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \underbrace{x}_{u(x,y)} + \mathrm{j}\underbrace{(-y)}_{v(x,y)}$.

$D = \mathbb{C}$ este domeniu; $\operatorname{Im}\gamma \subset D$;

f este continuă pe D ($\Leftrightarrow u, v$ sunt continue pe D).

etapa 3. Calcul:

modul 1′. $\mathcal{I} = \int_\gamma \overline{z}dz = \int_{\left[\overrightarrow{AB}\right]} \overline{z}dz + \int_{\left[\overrightarrow{BC}\right]} \overline{z}dz + \int_{\left[\overrightarrow{CD}\right]} \overline{z}dz + \int_{\left[\overrightarrow{DA}\right]} \overline{z}dz =$

$\overset{\text{formal}}{=} \int_{\left[\overrightarrow{AB}\right]} (x - \mathrm{j}\,y)(dx + \mathrm{j}\,dy) + \int_{\left[\overrightarrow{BC}\right]} (x - \mathrm{j}\,y)(dx + \mathrm{j}\,dy) +$

$+ \int_{\left[\overrightarrow{CD}\right]} (x - \mathrm{j}\,y)(dx + \mathrm{j}\,dy) + \int_{\left[\overrightarrow{DA}\right]} (x - \mathrm{j}\,y)(dx + \mathrm{j}\,dy) =$

$= \int_0^1 (1 - 2t - \mathrm{j}\cdot 1)(-2 + \mathrm{j}\cdot 0)\,dt + \int_0^1 (-1 - \mathrm{j}\cdot(1 - 2t))(0 + \mathrm{j}\cdot(-2))\,dt +$

$+ \int_0^1 (-1 + 2t - \mathrm{j}\cdot(-1))(2 + \mathrm{j}\cdot 0)\,dt + \int_0^1 (1 - \mathrm{j}\cdot(-1 + 2t))(0 + \mathrm{j}\cdot 2)\,dt =$

$= 2\,\mathrm{j} + 2\,\mathrm{j} + 2\,\mathrm{j} + 2\,\mathrm{j} = 8\,\mathrm{j}.$

Comentariu: Se observă că $\mathcal{I} \neq 0$, chiar dacă γ este curbă închisă. Se observă că f nu este olomorfă pe $D = \mathbb{C}$, deoarece nu se verifică relaţiile Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = -1 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \text{fals, } \forall (x,y).$$

Deci nu se poate aplica Teorema fundamentală Cauchy pe domenii simplu conexe dată ulterior.

Teorema 3.5.2.(**Teorema fundamentală Cauchy pe domenii simplu conexe**) Fie γ o curbă în $\mathbb{C}$. Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu cu $\operatorname{Im}\gamma \subset D$ şi funcţia $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Dacă

-D este domeniu simplu conex;

-γ este curbă netedă (sau netedă pe porţiuni) şi închisă;

-f este funcţie olomorfă pe D ($f \in \mathcal{H}(D)$), cu f' continuă $\left(f' \in \mathcal{C}^0(D)\right)$

atunci $\boxed{\int_\gamma f(z)\,dz = 0.}$

Demonstraţie. Fie Δ domeniul mărginit de γ.

•Pentru început, se presupune că γ este curbă simplă. Din definiţie, în ipotezele teoremei,

$\exists \int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma (u(x,y)\,dx - v(x,y)\,dy) + \mathrm{j}\int_\gamma (v(x,y)\,dx + u(x,y)\,dy)$

Forma diferenţială $\omega_1(x,y) = u(x,y)\,dx - v(x,y)\,dy$, cu $P_1 = u$, $Q_1 = -v$ verifică, din Teorema Cauchy-Riemann,

- P_1, Q_1 sunt de clasă $\mathcal{C}^1(\Delta)$;
- $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ pe Δ;

Deci ω_1 este închisă pe Δ simplu conex, adică exactă, de unde

$\int_\gamma (u(x,y)\,dx - v(x,y)\,dy) = 0$

Analog, $\int_\gamma (v(x,y)\,dx + u(x,y)\,dy) = 0$.

Deci $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.

•Dacă γ ar avea un punct dublu, atunci integrala pe γ s-ar descompune în două integrale pe curbe închise, ambele nule.

Observaţia 3.5.1. **a)** Reciproca teoremei nu are loc. Adică există $f : D_{\text{simplu conex}} \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ care să nu fie olomorfă a.î. $\int_{\gamma_{\text{închisă}}} f(z)\,dz = 0$.

b) Reciproc, are loc:

Teorema Morera Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu şi funcţia $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Dacă:

-$f \in \mathcal{C}(D)$;

-$\int_\gamma f(z)\,dz = 0, \forall\gamma$ este curbă simplă şi închisă,

atunci $f \in \mathcal{H}(D)$.

Corolar 3.5.1. Fie $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{C}$ şi $\gamma_2 : [c,d] \to \mathbb{C}$ două curbe parametrizate în $\mathbb{C}$. Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu cu $\operatorname{Im}\gamma_1 \subset D, \operatorname{Im}\gamma_2 \subset D$ şi funcţia $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Dacă

-D este domeniu simplu conex;

-γ_1, γ_2 sunt curbe netede (sau netede pe porţiuni),

cu aceleaşi extremităţi în sensul că $\operatorname{Im}\gamma_1 = A\overset{\frown}{L}B$ şi $\operatorname{Im}\gamma_2 = A\overset{\frown}{L'}B$;

-f este funcţie olomorfă pe D $(f \in \mathcal{H}(D))$, cu f' continuă $\left(f' \in \mathcal{C}^0(D)\right)$

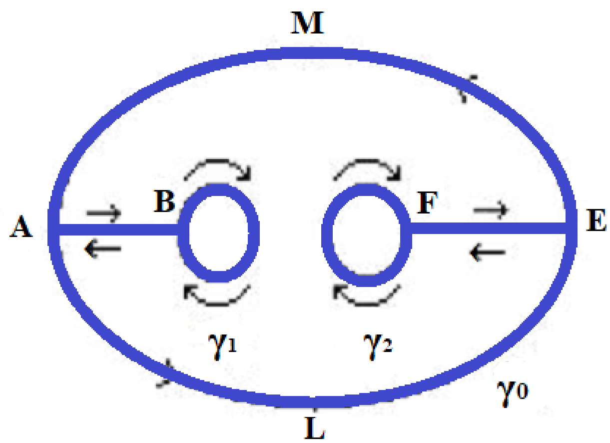
atunci $\boxed{\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz.}$

Observaţia 3.5.2. În ipotezele corolarului, integrala de la A la B nu depinde de drumul/curba γ alese astfel încât $\operatorname{Im}\gamma$ să unească A cu B, ci numai de extremităţi; se mai notează $\int_A^B f(z)\,dz$; considerând afixele punctelor A, B se notează $\int_{z_A}^{z_B} f(z)\,dz$.

Teorema 3.5.3.(**Teorema fundamentală Cauchy pe domenii multiplu conexe**) Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu multiplu conex cu ordinul de conexitate $p+1$ şi $\Delta \subset D$ un domeniu multiplu conex de acelaşi ordin de conexitate, mărginit de curba γ_0-exterioară şi $\gamma_1, ..., \gamma_p-$interioare. Fie $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ a.î. $f \in \mathcal{H}(D)$ şi $f' \in \mathcal{C}(D)$. Atunci

$\boxed{\int_{\gamma_0} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + ... + \int_{\gamma_p} f(z)\,dz.}$

Demonstraţie. Pentru simplitate, fie D un domeniu triplu conex şi $\Delta \subset D$ mărginit în exterior de γ_0 şi în interior de γ_1, γ_2 Fie A şi B punctele în care o tăietură intersectează curbele γ_0 şi γ_1, iar este şi F punctele în care o altă tăietură intersectează curbele γ_0 şi γ_2. Domeniul delimitat de curba $\left[\overset{\frown}{AB}\right] \cup \gamma_1 \cup \left[\overset{\frown}{BA}\right] \cup \left[A\overset{\frown}{L}E\right] \cup \left[\overset{\frown}{EF}\right] \cup \gamma_2 \cup \left[\overset{\frown}{FE}\right] \cup \left[E\overset{\frown}{M}A\right]$, unde L, M sunt alese pentru orientare, este simplu conex. Se aplică Teorema fundamentală Cauchy pe domenii simplu conexe$\Rightarrow$



$\int_{\left[\overset{\frown}{AB}\right]} f(z)\,dz - \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\left[\overset{\frown}{BA}\right]} f(z)\,dz + \int_{\left[\overset{\frown}{ALE}\right]} f(z)\,dz + \int_{\left[\overset{\frown}{EF}\right]} f(z)\,dz -$
$- \int_{\gamma_2} f(z)\,dz + \int_{\left[\overset{\frown}{FE}\right]} f(z)\,dz + \int_{\left[\overset{\frown}{EMA}\right]} f(z)\,dz = 0.$

Folosind Corolarul$\Rightarrow$

$\int_{\gamma_0} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$

Teorema 3.5.4.(Formula integrală Cauchy pe domenii simplu conexe) Fie γ o curbă în $\mathbb{C}$. Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu cu $\operatorname{Im}\gamma \subset D$ şi funcţia $g : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Dacă

-D este domeniu simplu conex;

-γ este curbă simplă şi închisă care delimitează un domeniu mărginit Δ;

-g este funcţie olomorfă pe D $(g \in \mathcal{H}(D))$

atunci, $\boxed{\forall a \in \Delta, g(a) = \dfrac{1}{2\pi\,\mathrm{j}} \displaystyle\int_\gamma \frac{g(z)}{z-a}dz.}$

Preliminarii 3.5.2.(pentru valoarea principală în sens Cauchy a unei integrale).

Fie D un domeniu simplu conex, $g \in \mathcal{H}(D)$.

Fie $\Gamma \subseteq D$ o curbă simplă închisă, netedă (de clasă $\mathcal{C}^1$) sau netedă pe porţiuni, cu $\Delta = \operatorname{Int}\Gamma$.

Se notează $\mathcal{I}(a) = \displaystyle\int_\Gamma \frac{g(z)}{z-a}dz$ şi se disting trei situaţii:

-Dacă $a \in \Delta$,atunci, conform Formulei integrale Cauchy$\Rightarrow$

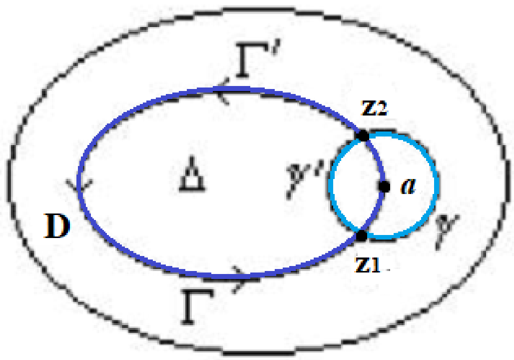
$\mathcal{I}(a) = 2\pi\,\mathrm{j}\,g(a)$

-Dacă $a \notin \Delta \cup \Gamma$, atunci, conform Teoremei fundamentale a lui Cauchy$\Rightarrow$

$\mathcal{I}(a) = 0$

-Dacă $a \in \Gamma$, se va da un sens pentru $\mathcal{I}(a)$, menţionând că a este un punct singular pentru funcţia

$f(z) = \dfrac{g(z)}{z-a}.$



Se ocoleşte punctul a, construind un cerc cu centrul a şi rază ρ, notat $\gamma = C(a, \rho)$, cu raza ρ suficient de mică astfel încât $\gamma \subset D$ şi $\Delta(a, \rho) \subset D$. Fie $\gamma \cap \Gamma = \{z_1, z_2\}$, $\gamma' = \gamma \cap \Delta$ (porţiunea din γ, inclusă în Δ) şi Γ' porţiunea din Γ care nu este conţinută în discul $\Delta(a, \rho)$. Atunci $\Gamma' \cup \gamma'$ este curbă simplă închisă, ce mărgineşte un domeniu simplu conex, pe care f este olomorfă$\Rightarrow$

$$\int_{\Gamma' \cup \gamma'} \frac{g(z)}{z-a} dz = 0 \Rightarrow \int_{\Gamma'} \frac{g(z)}{z-a} dz = -\int_{\gamma'} \frac{g(z)}{z-a} dz.$$

Definiţia 3.5.2. În ipotezele din preliminariile 3.5.1., pentru $a \in \Gamma$, se numeşte *valoare principală în sens Cauchy a integralei* $\mathcal{I}(a)$ numărul complex

$$\text{v.p.} \int_{\Gamma} \frac{g(z)}{z-a} dz = \lim_{\rho \to 0} \int_{\Gamma'} \frac{g(z)}{z-a} dz.$$

Teorema 3.5.5. În ipotezele din preliminariile 3.5.1., dacă $\pi - \delta$ este unghiul format de cele două semitangente în $a \in \Gamma$ la curba Γ, atunci

$$\boxed{\text{v.p.} \int_{\Gamma} \frac{g(z)}{z-a} dz = (\pi - \delta) \, \mathrm{j} \cdot g(a).}$$

În particular, dacă în punctul $a \in \Gamma$ curba admite tangentă (cele două semitangente sunt în prelungire), atunci $\pi - \delta = \pi$ şi

$$\boxed{\text{v.p.} \int_{\Gamma} \frac{g(z)}{z-a} dz = \pi \, \mathrm{j} \cdot g(a).}$$

numită *formula semireziduurilor.*

Observaţia 3.5.3. În ipotezele anterioare,

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathcal{I}(a) = \displaystyle\int_{\gamma} \frac{g(z)}{z-a} dz = \\ \quad \left\{ \begin{array}{cl} 2\pi \, \mathrm{j} \cdot g(a), & \text{dacă } a \in \Delta (\text{formula integrală Cauchy}) \\ (\pi - \delta) \, \mathrm{j} \cdot g(a), & \text{dacă } a \in \gamma (\text{valoarea principală}) \\ 0, & \text{dacă } a \notin \Delta \cup \gamma (\text{teorema fundamentală Cauchy}) \end{array} \right. \end{array}}$$

unde $\pi - \delta$ este unghiul format de cele două semitangente în $a \in \gamma$ la curba γ (dacă a este punct regulat, atunci $\delta = 0$).

Exemplul 3.5.3. Să se calculeze integrala $\displaystyle\int_{\gamma} \frac{e^{\mathrm{j}\, z}}{z^2 - \pi^2} dz$ pe următoarele curbe:

a) $|z| = R$, cu $R < \pi$ dat; **b)** $|z| = R$, cu $R = \pi$ dat; **c)** $|z| = R$, cu $R > \pi$ dat; **d)** $|z - \pi| = \frac{\pi}{2}$.

Rezolvare. Se reaminteşte că $|z - a| = r$ reprezintă ecuaţia punctelor z de pe cercul cu centrul în $a = a_1 + \mathrm{j}\, a_2 \in \mathbb{C}$ şi de rază $r \geq 0$.

Se reaminteşte că ecuaţiile parametrice ale unui arc de cerc sunt

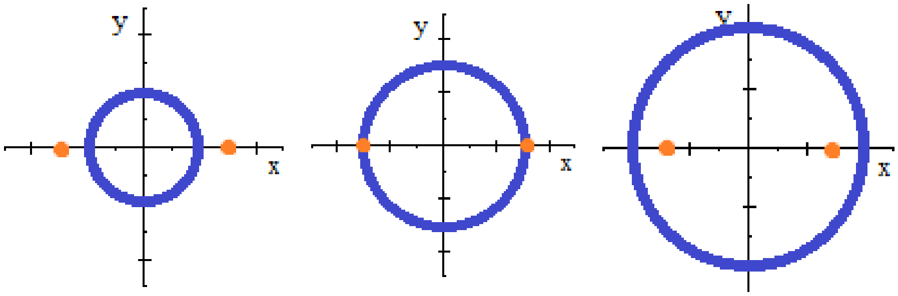
$\text{Im}\gamma : \begin{cases} x(t) = a_1 + r\cos t \\ y(t) = a_2 + r\sin t \end{cases}, t \in \mathbb{I}.$

Dacă cercul este parcurs o singură dată, trigonometric, atunci

$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \gamma(t) = \underbrace{a_1 + r\cos t}_{x(t)} + \mathrm{j}\,\underbrace{a_2 + r\sin t}_{y(t)} = a + re^{it}.$

a), b), c)

etapa 1. Se studiază curba– este cercul cu centrul 0 şi raza R.



La acest exerciţiu nu este necesar să se reprezinte parametric curba, din cauza formei f.

•Se poate parametriza un reprezentant.

$\text{Im}\gamma : \begin{cases} x(t) = 0 + R\cos t \\ y(t) = 0 + R\sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi],\ \gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \gamma(t) = \underbrace{R\cos t}_{x(t)} + \mathrm{j}\,\underbrace{R\sin t}_{y(t)} = Re^{it}.$

•γ este curbă netedă: $\begin{cases} \exists \gamma' : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \gamma'(t) = \underbrace{-R\sin t}_{x'(t)} + \mathrm{j}\cdot\underbrace{R\cos t}_{y'(t)} = Re^{it}i. \\ \gamma' \text{- este continuă pe } [0, 2\pi] \end{cases}$

etapa 2. Se studiază integrantul, $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) = \dfrac{e^{\mathrm{j}\,z}}{z^2 - \pi^2}.$

Este greu de exprimat $f(z) = u(x, y) + \mathrm{j}\cdot v(x, y)$.

D se va alege ca domeniu, $\text{Im}\,\gamma \subset D$; f este continuă pe D.

etapa 3. Calcul cu definiţia sau Teorema 1 de reducere-imposibil din cauză că este greu de exprimat $f(z) = u(x, y) + \mathrm{j}\cdot v(x, y)$..

etapa 4. Calcul cu Teoremele $2, 3, 4, 5, 6, 7$.

• Se reprezintă curba-este.

• Se determină punctele singulare izolate pentru f şi se reprezintă.

$z_1 = \pi$- pol de ordin 1 pt. f

$z_2 = -\pi$- pol de ordin 1 pt. f

caz $R \in \,]0, \pi[\ \Rightarrow z_1 = \pi \in \text{Ext}\,\gamma$ şi $z_2 = -\pi \in \text{Ext}\,\gamma$

Se alege D chiar simplu conex a.î. $\text{Im}\,\gamma \subset D$ şi $\pi, -\pi \notin D \Rightarrow f \in \mathcal{H}(D) \underset{\text{pe dom. s. conexe}}{\overset{\text{teor. fund. Cauchy}}{\Rightarrow}}$

$\mathcal{I} = \displaystyle\int_{|z|=R} f(z)\,dz = 0.$

caz $R = \pi \Rightarrow z_1 = \pi \in \gamma$ şi $z_2 = -\pi \in \gamma$-sunt puncte regulate

Se scrie $f(z) = \dfrac{e^{\mathrm{j}\,z}}{z^2 - \pi^2} = \dfrac{1}{2\pi}\left(\dfrac{e^{\mathrm{j}\,z}}{z - \pi} - \dfrac{e^{\mathrm{j}\,z}}{z + \pi}\right).$

Fie $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, g(z) = e^{\mathrm{j}\,z}$–olomorfă pe D, chiar pe $\mathbb{C} \overset{\text{val. princ. Cauchy}}{\Rightarrow}$

$\mathcal{I} = \dfrac{1}{2\pi}\left(\text{v.p.}\displaystyle\int_{|z|=R} \dfrac{e^{\mathrm{j}\,z}}{z - \pi}dz - \text{v.p.}\int_{|z|=R} \dfrac{e^{\mathrm{j}\,z}}{z + \pi}dz\right) =$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\pi\,\mathrm{j}\cdot g(\pi) - \pi\,\mathrm{j}\cdot g(-\pi)\right) = \frac{1}{2\pi}\left(\pi\,\mathrm{j}\cdot e^{\mathrm{j}\,\pi} - \pi\,\mathrm{j}\cdot e^{-\mathrm{j}\,\pi}\right) =$$
$$= \mathrm{j}\,\frac{e^{\mathrm{j}\,\pi} - e^{-\mathrm{j}\,\pi}}{2} = -\sin\pi = 0.$$

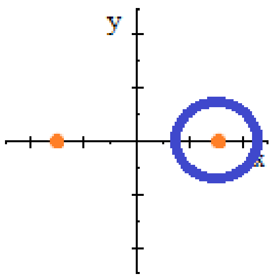
caz $R > \pi \Rightarrow z_1 = \operatorname{Int}\gamma$ şi $z_2 = -\pi \in \operatorname{Int}\gamma$.

Se scrie $f(z) = \dfrac{e^{\mathrm{j}\,z}}{z^2 - \pi^2} = \dfrac{1}{2\pi}\left(\dfrac{e^{\mathrm{j}\,z}}{z-\pi} - \dfrac{e^{\mathrm{j}\,z}}{z+\pi}\right)$

Fie $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, g(z) = e^{\mathrm{j}\,z}-$ olomorfă pe D, chiar pe $\mathbb{C}$ $\underset{\text{pe dom. d. s. conexe}}{\overset{\text{form. Cauchy}}{\Rightarrow}}$

$$\mathcal{I} = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{|z|=R}\frac{e^{\mathrm{j}\,z}}{z-\pi}dz - \int_{|z|=R}\frac{e^{\mathrm{j}\,z}}{z+\pi}dz\right) = \frac{1}{2\pi}\left(2\pi\,\mathrm{j}\cdot g(\pi) - 2\pi\,\mathrm{j}\cdot g(-\pi)\right) =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left(2\pi\,\mathrm{j}\cdot e^{\mathrm{j}\,\pi} - 2\pi\,\mathrm{j}\cdot e^{-\mathrm{j}\,\pi}\right) = 2\,\mathrm{j}\,\frac{e^{\mathrm{j}\,\pi} - e^{-\mathrm{j}\,\pi}}{2} = -2\sin\pi = 0.$$

d) etapa 1. Se studiază curba $|z-\pi| = \frac{\pi}{2}-$ este cercul cu centrul π şi raza $\frac{\pi}{2}$.



La acest exerciţiu nu este necesar să se reprezinte parametric curba, din cauza formei f.

•Se parametrizează un reprezentant al curbei, deoarece aici nu este dată parametric. Aici

$$\operatorname{Im}\gamma : \begin{cases} x(t) = \pi + \frac{\pi}{2}\cos t \\ y(t) = 0 + \frac{\pi}{2}\sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi],\ \gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \gamma(t) = \underbrace{\pi + \frac{\pi}{2}\cos t}_{x(t)} + \mathrm{j}\cdot\underbrace{\frac{\pi}{2}\sin t}_{y(t)} = \pi + \tfrac{\pi}{2}e^{it}.$$

$$\bullet\gamma \text{ este curbă netedă:} \begin{cases} \exists\gamma' : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \gamma'(t) = \underbrace{-\frac{\pi}{2}\sin t}_{x'(t)} + \mathrm{j}\cdot\underbrace{\frac{\pi}{2}\cos t}_{y'(t)} = \frac{\pi}{2}e^{it}i. \\ \gamma'\text{- este continuă pe } [0, 2\pi] \end{cases}$$

etapele 2, 3. ca la a), b), c).

etapa 4. Calcul cu Teoremele 2, 3, 4, 5, 6, 7.

- Se reprezintă curba-este.
- Se determină punctele singulare izolate pentru f şi se reprezintă.

$z_1 = \pi$- pol de ordin 1 pt. f şi $z_1 \in \operatorname{Int}\gamma$

$z_2 = -\pi$- pol de ordin 1 pt. f şi $z_2 \in \operatorname{Ext}\gamma$

Se scrie $f(z) = \dfrac{\frac{e^{\mathrm{j}\,z}}{z+\pi}}{z-\pi}$.

Fie D_g un domeniu simplu conex a.î. $\operatorname{Im}\gamma \subset D_g$ şi $-\pi \notin D_g$.

$g : D_g \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}, g(z) = \dfrac{e^{\mathrm{j}\,z}}{z+\pi}-$olomorfă pe D_g $\underset{\text{pe dom. d. s. conexe}}{\overset{\text{form. Cauchy}}{\Rightarrow}}$

$$\mathcal{I} = \int_{|z|=R}\frac{g(z)}{z-\pi}dz = 2\pi\,\mathrm{j}\cdot g(\pi) = 2\pi\,\mathrm{j}\cdot\frac{e^{\mathrm{j}\,\pi}}{\pi+\pi} = \mathrm{j}\,(\cos\pi + \mathrm{j}\sin\pi) = -\,\mathrm{j}\,.$$

Teorema 3.5.6.(**Formula integrală Cauchy pe domenii multiplu conexe**) Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu multiplu conex cu ordinul de conexitate $p+1$ şi $\Delta \subset D$ un domeniu multiplu conex de acelaşi ordin de conexitate, mărginit de curba γ_0−exterioară şi $\gamma_1, ..., \gamma_p$−interioare. Fie $g : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ a.î. $g \in \mathcal{H}(D)$. Atunci

$$\boxed{\forall a \in \Delta, g(a) = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \left(\int_{\gamma_0} \frac{g(z)}{z-a} dz - \left(\int_{\gamma_1} \frac{g(z)}{z-a} dz + ... + \int_{\gamma_p} \frac{g(z)}{z-a} dz \right) \right).}$$

Teorema 3.5.7. (**derivata de ordin n a unei funcţii olomorfe**) O funcţie $g : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfă pe domeniul D admite derivate de orice ordin. Mai mult, derivata de ordin $n \in \mathbb{N}^*$ se poate scrie

$$\boxed{g^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{j}} \int_\gamma \frac{g(z)}{(z-a)^{n+1}} dz, \forall a \in \operatorname{Int} \gamma,}$$

unde γ este o curbă simplă, închisă, netedă, inclusă în D, ce "înconjoară" (are în interior) punctul a.

Exemplul 3.5.4. Să se calculeze integrala

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2(z^2-9)} dz.$$

Rezolvare. A se vedea Seminar.