CURS NR. 8
Matematici Speciale, AIA

○4. Şiruri de funcţii complexe cu valori complexe
○5. Serii de funcţii complexe cu valori complexe

○5.1. Serii de funcţii complexe cu valori complexe. Convergenţă. Teorema de transfer de mărginire, de existenţă a limitei, de continuitate, de derivabilitate, de integrabilitate asupra funcţiei sumă

5.2. Serii de puteri de numere complexe

Definiţia 5.2.1. Fie $a \in \mathbb{C}$ şi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere complexe. Se numeşte *serie de puteri ale* $z-a$ sau *centrată în* a seria

$$a_0 + a_1(z-a)^1 + a_2(z-a)^2 + ... + a_n(z-a)^n + ..., \forall z \in \mathbb{C} \text{ sau } a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-a)^n, \forall z \in \mathbb{C}.$$

Observaţia 5.2.1. O serie de puteri centrată în a este o serie de funcţii putere

$f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f_n(z) = a_n(z-a)^n$

şi, din acest motiv, se poate studia natura seriei (chiar şi suma seriei, care este o funcţie), ca la serii de funcţii. Există şi teoreme specifice.

Teorema 5.2.1 (**Cauchy-Hadamard**). Fie $\rho = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} \in [0, +\infty]$ şi $R = \dfrac{1}{\rho}$, numită *rază de convergenţă*. Atunci:

a) Seria de puteri centrată în a este o serie absolut convergentă, pentru $\forall z \in \mathbb{C}$ cu $|z-a| < R$; este serie uniform convergentă, $\forall z \in \mathbb{C}$ cu $|z-a| \leq r, r < R$.

b) Seria de puteri centrată în a este o serie divergentă, pentru $\forall z \in \mathbb{C}$ cu $|z-a| > R$.

c) Pentru $z \in \mathbb{C}$ cu $|z-a| = R$, nu se poate preciza natura seriei, se face studiu separat.

Observaţia 5.2.2. Dacă, în Teorema 1,

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \Rightarrow R = +\infty \Rightarrow$seria este absolut convergentă pentru $\forall z \in \mathbb{C}$.

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty \Rightarrow R = 0 \Rightarrow$seria este absolut convergentă pentru $z = a$ şi divergentă pentru $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$.

Observaţia 5.2.3. Dacă $a_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, şi $\exists \rho_1 = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ atunci $R = \dfrac{1}{\rho_1}$.

Observaţia 5.2.4. Fie $m \in \mathbb{N}$. Teoria anterioară este valabilă şi pentru $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ şi

$a_m(z-a)^m + a_{m+1}(z-a)^{m+1} + ... + a_n(z-a)^n + ..., \forall z \in \mathbb{C}$ sau

$\sum\limits_{n=m}^{\infty} a_n(z-a)^n, \forall z \in \mathbb{C}$.

Exemplul 5.2.1. Să se studieze natura următoarei serii de puteri:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2^{n+1}}{n} + \mathrm{j}\,\frac{2^n}{n} \right)(z+\mathrm{j})^n, \forall z \in \mathbb{C}$$

Rezolvare. Este o serie de puteri ale $(z-(-\mathrm{j}))$ sau centrată în $-\mathrm{j}$, cu

$a_n = \dfrac{2^{n+1}}{n} + \mathrm{j}\,\dfrac{2^n}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

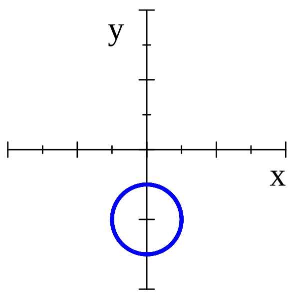
<u>Etapa 1.</u> Se determină raza de convergenţă a seriei

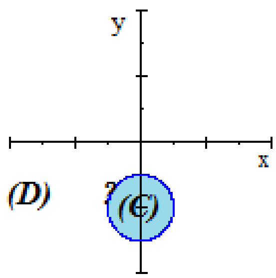
<u>Modul 1.</u> $\rho = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left| \dfrac{2^{n+1}}{n} + \mathrm{j}\,\dfrac{2^n}{n} \right|} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\sqrt{\left(\dfrac{2^{n+1}}{n}\right)^2 + \left(\dfrac{2^n}{n}\right)^2}}$

$$= \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\sqrt{\left(\frac{2^n}{n}\right)^2 \cdot 5}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n} \cdot \sqrt{5}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{2 \cdot \left(\sqrt{5}\right)^{\frac{1}{n}}}{\sqrt[n]{n}} = 2 \Rightarrow R = \tfrac{1}{2}.$$

<u>Modul 2.</u> $\exists \rho_1 = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left|\dfrac{2^{n+2}}{n+1} + \mathrm{j}\, \dfrac{2^{n+1}}{n+1}\right|}{\left|\dfrac{2^{n+1}}{n} + \mathrm{j}\, \dfrac{2^{n}}{n}\right|} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{n+1}}{2^n} \cdot \dfrac{n}{n+1} \cdot \dfrac{|2+\mathrm{j}|}{|2+\mathrm{j}|} = 2 \Rightarrow R = \frac{1}{2}.$

<u>Etapa 2.</u> Se aplică Teorema Cauchy-Hadamard.
•Seria este absolut convergentă, pentru $\forall z \in \mathbb{C}$ cu $|z + \mathrm{j}| < \frac{1}{2}$.
•Seria deste divergentă, pentru $\forall z \in \mathbb{C}$ cu $|z + \mathrm{j}| > \frac{1}{2}$.
•Pentru $z \in \mathbb{C}$ cu $|z + \mathrm{j}| = \frac{1}{2}$ nu se poate preciza natura seriei, se face studiu separat; nu se va studia aici.





<u>Seria geometrică.</u> Seria geometrică $\sum\limits_{n=m}^{\infty} z^n, \forall z \in \mathbb{C}$ este

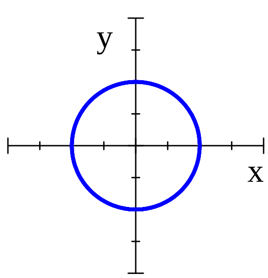
•punctual şi absolut convergentă, dacă $z \in \mathbb{C}$ cu $|z| < 1$, cu suma

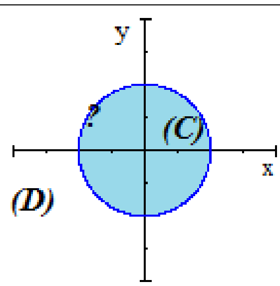
$$s : \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\} \to \mathbb{C},\ s(z) = z^m \frac{1}{1-z}$$

•divergentă, dacă $z \in \{z \in \mathbb{C}; |z| > 1\}$.

Pentru $m = 0$, se face convenţia să se noteze $1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} z^n$, adică

$$\boxed{(*)\ 1 + z + z^2 + ... + z^n + ... = \frac{1}{1-z}, \forall z \in \mathbb{C} \text{ cu } |z| < 1}$$





<u>Operaţii cu serii de puteri</u>

Observaţia 5.2.5. În orice serie de puteri se poate face schimbare de variabilă pe domeniul de convergenţă.

În $(*)$, din $z \rightsquigarrow -z \Rightarrow$

$$\boxed{(*_1)\ 1 - z + z^2 + ... + (-1)^n z^n + ... = \frac{1}{1+z}, \forall z \in \mathbb{C} \text{ cu } |-z| < 1, \text{ adică } |z| < 1}$$

În $(*)$, din $z \rightsquigarrow -z^2 \Rightarrow$

$$\boxed{(*_2)\, 1 - z^2 + z^4 + ... + (-1)^n z^{2n} + ... = \frac{1}{1+z^2}, \forall z \in \mathbb{C} \text{ cu } \left|-z^2\right| < 1, \text{ adică } |z| < 1}$$

Teorema 5.2.2. Fie $a_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n (z-a)^n, \forall z \in \mathbb{C}$ o serie de puteri centrată în a cu raza de convergenţă R_1 şi cu funcţia sumă $s_1(z)$ definită pe A_1. Fie $b_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n (z-a)^n, \forall z \in \mathbb{C}$ o serie de puteri centrată în a cu raza de convergenţă R_2 şi cu funcţia sumă $s_2(z)$ definită pe A_2. Fie $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Atunci

a) *seria sumă a celor două serii*

$$(a_0 + b_0) + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)(z-a)^n, \forall z \in \mathbb{C}$$

este tot o serie de puteri centrată în a cu raza de convergenţă $R \geq \min\{R_1, R_2\}$ şi cu funcţia sumă $s_s(z) = s_1(z) + s_2(z)$ definită cel puţin pe $A_1 \cap A_2$, adică

$$\left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-a)^n\right) + \left(b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z-a)^n\right) = (a_0 + b_0) + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)(z-a)^n, \forall z \in A_1 \cap A_2.$$

b) *seria produsul scalar al unei serii cu un scalar nenul*

$$(\lambda a_0) + \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n)(z-a)^n, \forall z \in \mathbb{C}$$

este tot o serie de puteri centrată în a cu raza de convergenţă R_1 şi cu funcţia sumă $s_p(z) = \lambda s_1(z)$ definită cel puţin pe A_1, adică

$$\lambda \left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-a)^n\right) = (\lambda a_0) + \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n)(z-a)^n, \forall z \in A_1.$$

Teorema 5.2.3. Fie $a_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n (z-a)^n, \forall z \in \mathbb{C}$ o serie de puteri centrată în a cu raza de convergenţă R şi cu funcţia sumă $s(z)$ definită pe A-domeniu de convergenţă (este domeniu simplu conex), adică

$$s : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ s(z) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-a)^n.$$

Atunci

a) funcţia sumă $s(z)$ este continuă pe A;

b) funcţia sumă $s(z)$ este derivabilă pe A (olomorfă pe A) şi *seria derivată*

$$1 + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n (z-a)^{n-1}, \forall z \in \mathbb{C}$$

este tot o serie de puteri centrată în a cu raza de convergenţă R şi suma $s_d(z) = s'(z)$ definită pe A, adică

$$\frac{d}{dz} \underbrace{\left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-a)^n\right)}_{s(z)} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n (z-a)^{n-1}, \forall z \in A;$$

(orice serie de puteri poate fi derivată termen cu termen pe domeniul de convergenţă).

c) funcţia sumă $s(x)$ este primitivabilă pe A şi *seria primitivă*

$$a_0 x + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{(z-a)^{n+1}}{n+1}$$

este tot o serie de puteri cu raza de convergenţă R şi suma $s_i(z) = \int_\gamma s(z)\, dz$ definită pe A, cu o constantă de integrare unic determinată, adică

$$\int_\gamma \underbrace{\left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-a)^n\right)}_{s(z)} dx = a_0 z + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{(z-a)^{n+1}}{n+1} + c, \forall z \in A,$$

cu c unic determinată din $z = a$ (orice serie de puteri poate fi integrată termen cu termen pe domeniul de convergenţă).

Exemplul 5.2.2. Să se determine intervalul de convergenţă şi suma seriei $\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$.

Rezolvare. Domeniul de convergenţă.
Este o serie de puteri ale z sau centrată în 0, cu
$a_n = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
Se determină raza de convergenţă a seriei
$\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|n|} = 1 \Rightarrow R = 1$.
Se aplică Teorema Cauchy-Hadamard.
•Seria este absolut convergentă, pentru $\forall z \in \mathbb{C}$ cu $|z| < 1$.
•Seria deste divergentă, pentru $\forall z \in \mathbb{C}$ cu $|z| > 1$.
•Pentru $z \in \mathbb{C}$ cu $|z| = 1$ nu se poate preciza natura seriei, se face studiu separat (nu aici).
Suma seriei.
Se poate intui că n poate să apară în faţa lui z^n prin operaţia de derivare.
De la seria geometrică,

$$(*)\, 1 + z + z^2 + ... + z^n + ... = \frac{1}{1-z}, \forall z \in \mathbb{C} \text{ cu } |z| < 1 \Big| \frac{d}{dz}$$

Se aplică Teorema 3 şi, prin derivare termen cu termen,

$$\Rightarrow 1 + 2z + ... + nz^{n-1} + ... = \frac{1}{(1-z)^2}, \forall z \in \mathbb{C} \text{ cu } |z| < 1 \Big| \cdot z \text{ cu } |z| < 1, z \neq 0$$

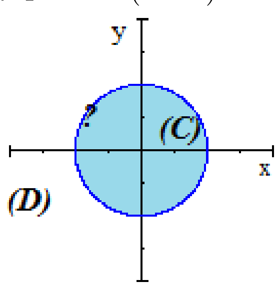
$$\Rightarrow z + 2z^2 + ... + nz^n + ... = \frac{z}{(1-z)^2}, \forall z \in \mathbb{C} \text{ cu } |z| < 1, z \neq 0.$$

Egalitatea precedentă se verifică şi pentru $z = 0$, adică

$$\Rightarrow 1z + 2z^2 + ... + nz^n + ... = \frac{z}{(1-z)^2}, \forall z \in \mathbb{C} \text{ cu } |z| < 1.$$

Deci suma seriei din enunţ este $s(z) = \frac{z}{(1-z)^2}, \forall z \in \mathbb{C}$ cu $|z| < 1$, adică

$$\sum_{n=1}^{\infty} nz^n = \frac{z}{(1-z)^2}, \forall z \in \mathbb{C} \text{ cu } |z| < 1.$$



5.3. Dezvoltarea în serie Taylor a unei funcţii complexe cu valori complexe

Definiţia 5.3.1. Fie Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ domeniu, $a \in D$ şi $V \in \mathcal{V}(a)$. Fie $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă pe $V \cap D$. Se numeşte *polinom Taylor de ordin n asociat funcţiei f pe o vecinătate a punctului a* ("în jurul" lui a) polinomul

$$T_{n,a}(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n, \forall z \in V \cap D \text{ sau}$$

$$T_{n,a}(z) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k, \forall z \in V \cap D.$$

Se notează tot cu $T_{n,a}(z)$ şi funcţia polinomială ataşată.

Definiţia 5.3.2. Fie Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ domeniu, $a \in D$ şi $V \in \mathcal{V}(a)$. Fie $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă pe $V \cap D$. Se numeşte *serie Taylor asociată funcţiei f pe o vecinătate a punctului a* ("în jurul" lui a) seria de puteri complexe

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + ..., \forall z \in V \cap D \text{ sau}$$

$$f(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n, \forall z \in V \cap D.$$

Teorema 5.3.1 (**Taylor**). Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu simplu conex şi $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Dacă $\underline{f \in \mathcal{H}(D)}$ (deci $\forall n \in \mathbb{N}^*$, f este <u>derivabilă de ordin n</u> pe D), atunci, pentru orice cerc $\gamma = \mathcal{C}(a,r) \subset D$ şi pentru orice $z \in \Delta(a;r) = \{z \in \mathbb{C}; |z-a| < r\}$, f este dezvoltabilă în serie Taylor pe o vecinătate a punctului a ("în jurul" lui a), adică

$$\boxed{f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + ..., \forall z \in \Delta(a;r)} \quad (1)$$

$$\boxed{f(z) = f(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n, \forall z \in \Delta(a;r).} \quad (1')$$

De precizat că $a_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!} \left(= \dfrac{1}{2\pi \mathrm{j}} \displaystyle\int_\gamma \dfrac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta \right)$ sunt coeficienţii dezvoltării lui f în **serie de puteri naturale** ale $(z-a)$.

Observaţia 5.3.1. Corespunzător lui $\mathbb{C}$ are loc: Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu simplu conex şi $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Dacă $f \in \mathcal{H}(D)$ atunci f este analitică pe D (conform Teoremei Taylor).

Corespunzător lui $\mathbb{R}$ există funcţii $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile, chiar de clasă $\mathcal{C}^\infty(D)$ care nu sunt analitice. Pentru ele se poate aplica doar formula lui Taylor de un anumit ordin pentru a le aproxima cu funcţii polinomiale, nu şi dezvoltarea în serie Taylor.

Exemplul 5.3.1. Să se dezvolte în serie Taylor funcţia

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = e^z$

în interiorul unui cerc cu centrul în 0; să se deducă dezvoltările în jurul originii pentru $\cos z, \sin z, \operatorname{ch} z, \operatorname{sh} z$.

Rezolvare. a) Fie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = e^z$.

Se observă că f este olomorfă pe $\mathbb{C}$ (deci $\forall n \in \mathbb{N}^*$, f este derivabilă de ordin n pe $\mathbb{C}$), şi în particular în $a = 0$.

$$\begin{array}{ll}
f(z) = e^z & f(0) = 1 \\
f'(z) = e^z & f'(0) = 1 \\
f''(z) = e^z & f''(0) = 1 \\
... & ... \\
f^{(n)}(z) = e^z & f^{(n)}(0) = 1 \\
... & ...
\end{array}$$

Atunci f este dezvoltabilă în serie Taylor pe $\Delta(0;R)$ (în raport cu puteri ale $(z-0)$) şi

$$e^z = 1 + \frac{1}{1!}z + \frac{1}{2!}z^2 + ... + \underbrace{\frac{1}{n!}}_{a_n} z^n + ..., \forall z \in \Delta(0;R).$$

Raza de convergenţă a seriei de puteri ale $(z-0)$ anterioare:

$$\exists\rho_1=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\dfrac{1}{(n+1)!}\right|}{\left|\dfrac{1}{n!}\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0\Rightarrow R=+\infty.$$

Se aplică Teorema Cauchy-Hadamard$\Rightarrow$ Seria este absolut convergentă, pentru $\forall z\in\mathbb{C}$. Deci

$$\boxed{e^z=1+\frac{1}{1!}z+\frac{1}{2!}z^2+...+\frac{1}{n!}z^n+...,\forall z\in\mathbb{C}}\text{ sau}\tag{2}$$

$$\boxed{e^z=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n,\forall z\in\mathbb{C}.}\tag{2'}$$

b) Pentru funcţiile $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}, f(z)=\cos z/\sin z/\operatorname{ch} z/\operatorname{sh} z$ se poate şi direct din Teoremă- a se vedea Cursul de Analiză Matematică şi a se aplica Teorema similar în $\mathbb{C}$.

Dezvoltarea în serie Taylor a funcţiilor transcendente $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}, f(z)=\cos z/\sin z/\operatorname{ch} z/\operatorname{sh} z$ se poate face şi folosind relaţia (2), dezvoltarea în serie Taylor a funcţiei e^z.

Pe domeniul de PC/SC într-o serie de funcţii se poate schimba variabila:

În (2), din $z\rightsquigarrow -z\Rightarrow$

$$e^{-z}=1-\frac{1}{1!}z+\frac{1}{2!}z^2+...+\frac{(-1)^n}{n!}z^n+...,\forall z\in\mathbb{C}\text{ cu }-z\in\mathbb{C},\text{ adică }z\in\mathbb{C}\tag{2_1}$$

În (2), din $z\rightsquigarrow \mathrm{j}\,z\Rightarrow$

$$e^{\mathrm{j}\,z}=1+\frac{1}{1!}(\mathrm{j}\,z)-\frac{1}{2!}z^2+...+\frac{1}{n!}\mathrm{j}^n z^n+...,\forall z\in\mathbb{C}\text{ cu }\mathrm{j}\,z\in\mathbb{C},\text{ adică }z\in\mathbb{C}\tag{2_2}$$

În (2), din $z\rightsquigarrow -\mathrm{j}\,z\Rightarrow$

$$e^{-\mathrm{j}\,z}=1+\frac{1}{1!}(-\mathrm{j}\,z)-\frac{1}{2!}z^2+...+\frac{1}{n!}(-\mathrm{j})^n z^n+...,\forall z\in\mathbb{C}\text{ cu }-\mathrm{j}\,z\in\mathbb{C},\text{ adică }z\in\mathbb{C}\tag{2_3}$$

Pe domeniul comun de PC/SC se pot aduna termen cu termen două serii şi se poate înmulţi o serie cu un scalar nenul$\Rightarrow$

$$\cos z=\frac{e^{\mathrm{j}\,z}+e^{-\mathrm{j}\,z}}{2}\overset{(2_2)\text{ şi }(2_3)}{=}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{1!}(\mathrm{j}\,z)+\frac{1}{2!}(\mathrm{j}\,z)^2+...+\frac{1}{n!}(\mathrm{j}\,z)^n+...\right)+$$
$$+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{1!}(-\mathrm{j}\,z)+\frac{1}{2!}(-\mathrm{j}\,z)^2+...+\frac{1}{n!}(-\mathrm{j}\,z)^n+...\right)=$$
$$=1-\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{4!}z^4-\frac{1}{6!}z^6...+\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}+...,\forall z\in\mathbb{C}$$

$$\sin z=\frac{e^{\mathrm{j}\,z}-e^{-\mathrm{j}\,z}}{2\,\mathrm{j}}\overset{(2_2)\text{ şi }(2_3)}{=}\frac{1}{2\,\mathrm{j}}\left(1+\frac{1}{1!}(\mathrm{j}\,z)+\frac{1}{2!}(\mathrm{j}\,z)^2+...+\frac{1}{n!}(\mathrm{j}\,z)^n+...\right)-$$
$$-\frac{1}{2\,\mathrm{j}}\left(1+\frac{1}{1!}(-\mathrm{j}\,z)+\frac{1}{2!}(-\mathrm{j}\,z)^2+...+\frac{1}{n!}(-\mathrm{j}\,z)^n+...\right)=$$
$$=\frac{1}{1!}z-\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{5!}z^5+...+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}+...,\forall z\in\mathbb{C}$$

$$\operatorname{ch} z=\frac{e^z+e^{-z}}{2}\overset{(2)\text{ şi }(2_1)}{=}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{1!}z+\frac{1}{2!}z^2+...+\frac{1}{n!}z^n+...\right)+$$
$$+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{1!}(-z)+\frac{1}{2!}(-z)^2+...+\frac{1}{n!}(-z)^n+...\right)=$$
$$=1+\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{4!}z^4+\frac{1}{6!}z^6...+\frac{1}{(2n)!}z^{2n}+...,\forall z\in\mathbb{C}$$

$$\operatorname{sh} z=\frac{e^z-e^{-z}}{2}\overset{(2)\text{ şi }(2_1)}{=}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{1!}z+\frac{1}{2!}z^2+...+\frac{1}{n!}z^n+...\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{1!}(-z)+\frac{1}{2!}(-z)^2+...+\frac{1}{n!}(-z)^n+...\right)=$$
$$=\frac{1}{1!}z+\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{5!}z^5+...+\frac{1}{(2n+1)!}z^{2n+1}+...,\forall z\in\mathbb{C}$$

S-a obţinut:

$$\boxed{\cos z=1-\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{4!}z^4-...+\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}+...,\forall z\in\mathbb{C}} \text{ sau} \tag{3}$$

$$\boxed{\cos z=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n},\forall z\in\mathbb{C}.} \tag{3'}$$

$$\boxed{\sin z=\frac{1}{1!}z-\frac{1}{3!}z^3+...+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}+...,\forall z\in\mathbb{C}} \text{ sau} \tag{4}$$

$$\boxed{\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1},\forall z\in\mathbb{C}.} \tag{4'}$$

$$\boxed{\operatorname{ch} z=1+\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{4!}z^4+...+\frac{1}{(2n)!}z^{2n}+...,\forall z\in\mathbb{C}} \text{ sau} \tag{5}$$

$$\boxed{\operatorname{ch} z=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}z^{2n},\forall z\in\mathbb{C}.} \tag{5'}$$

$$\boxed{\operatorname{sh} z=\frac{1}{1!}z+\frac{1}{3!}z^3+...+\frac{1}{(2n+1)!}z^{2n+1}+...,\forall z\in\mathbb{C}} \text{ sau} \tag{6}$$

$$\boxed{\operatorname{sh} z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}z^{2n+1},\forall z\in\mathbb{C}.} \tag{6'}$$

Exemplul 5.3.2. Să se dezvolte în serie Taylor după puterile lui z funcţia
$f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}, f(z)=\sin^3 z$.
Rezolvare. A se vedea Seminar.

Exemplul 5.3.3. a) Fie $\alpha\in\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$. Să se dezvolte în serie Taylor în jurul originii funcţia multivocă
$f:\mathbb{C}\to\mathcal{P}(\mathbb{C}), f(z)=((1+z)^{\alpha})_{\mathbb{C}}$,
alegându-se pentru f ramura ce satisface $f_k(0)=1$, cu tăietura $T=Ox_+$. Cazuri particulare:
b) $f(z)=\dfrac{1}{1+z}$;**c)** $f(z)=\dfrac{1}{1-z}$;**d)** $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$;
e) $f(z)=\dfrac{1}{1-z^2}$;**f)** $f(z)=(\mathrm{Log}(1+z))_{\mathbb{C}}$;**g)** $f(z)=(\mathrm{Log}(1-z))_{\mathbb{C}}$.
Rezolvare. a) Fie "funcţia" multivocă
$f:\mathbb{C}\to\mathcal{P}(\mathbb{C}), f(z)=((1+z)^{\alpha})_{\mathbb{C}}$.
Se observă că o ramură este olomorfă pe $\mathbb{C}\setminus T$ (deci $\forall n\in\mathbb{N}^*$, f este derivabilă de ordin n pe $\mathbb{C}\setminus T$), şi în particular în $a=0$. De menţionat că T este o tăietură ce uneşte punctele critice logaritmice -1 cu $\infty_{\mathbb{C}}$. Dacă se utilizează ramura pentru care $f_k(0)=1$, adică $((1+0)^{\alpha})_k=1$, atunci, pentru $T=Ox_+$,
$((1+0)^{\alpha})_k=e^{\alpha(\mathrm{Log}(1+0))_k}=e^{\alpha(\ln 1+2k\pi\,\mathrm{j})}=e^{\alpha\,\mathrm{j}\,2k\pi}$,
adică $k=0$.

$$\begin{array}{ll}
f_k(z) = ((1+z)^\alpha)_k & f_k(0) = 1 \\
f_k'(z) \overset{\text{formal}}{=} \alpha(1+z)^{\alpha-1} = \frac{\alpha}{1+z} f_k(z) & f_k'(0) = \alpha \\
f_k''(z) \overset{\text{formal}}{=} \alpha(\alpha-1)(1+z)^{\alpha-2} = \frac{\alpha(\alpha-1)}{(1+z)^2} f_k(z) & f_k''(0) = \alpha(\alpha-1) \\
f_k'''(z) = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{(1+z)^3} f_k(z) & f_k'''(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \\
... & ... \\
f_k^{(n)}(z) = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n)}{(1+z)^n} f_k(z) & f_k^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-(n-1)) \\
... & ...
\end{array}$$

Atunci această ramură a f pentru care $f_k(0) = 1$ este dezvoltabilă în serie Taylor pe în jurul originii (în funcţie de puterile lui z) şi

$$((1+z)^\alpha)_k = 1 + \frac{\alpha}{1!}z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-(n-1))}{n!}z^n + ..., \forall z \in \Delta(0; R)$$

sau

$$((1+z)^\alpha)_k = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-(n-1))}{n!} z^n, \forall z \in \Delta(0; R).$$

Se determină raza de convergenţă a seriei de puteri ale $z - 0$:

$$\exists \rho_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-(n-1))(\alpha-n)}{(n+1)!}\right|}{\left|\dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-(n-1))}{n!}\right|} = \frac{|\alpha-n|}{|n+1|} \overset{\alpha\neq n}{=} 1 \Rightarrow R = 1.$$

Se aplică Teorema Cauchy-Hadamard.

•Seria este absolut convergentă, pentru $\forall z \in \mathbb{C}$ cu $|z-0| < 1$.

•Seria deste divergentă, pentru $\forall z \in \mathbb{C}$ cu $|z-0| > 1$.

•Pentru $z \in \mathbb{C}$ cu $|z-0| = 1$ nu se poate preciza natura seriei, se face studiu separat; nu se va studia aici.

<u>Concluzii</u>:

•Pentru $\alpha = n \in \mathbb{N}_2 \Rightarrow$

$$(1+z)^n = 1 + \frac{n}{1!}z + \frac{n(n-1)}{2!}z^2 + ... + \frac{n(n-1)(n-2)...(n-(n-1))}{n!}z^n + 0 \cdot z^{n+1} + 0$$

$$\boxed{(1+z)^n = C_n^0 + C_n^1 z + C_n^2 z^2 + ... + C_n^n z^n, \forall z \in \mathbb{C}} \qquad (7)$$

adică s-a obţinut *binomul lui Newton*.

•Pentru $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}_2 \Rightarrow$ ramura lui f pentru care $f_k(0) = 1$ este dezvoltabilă în serie Taylor pe în jurul originii (în funcţie de puterile lui z) şi

$$\boxed{((1+z)^\alpha)_k = 1 + \frac{\alpha}{1!}z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-(n-1))}{n!}z^n + ..., \forall z \in \mathbb{C} \text{ cu } |z| < 1}$$

sau (8)

$$\boxed{((1+z)^\alpha)_k = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-(n-1))}{n!} z^n, \forall z \in \mathbb{C} \text{ cu } |z| < 1} \qquad (8')$$

adică s-a obţinut *seria binomială*.

b) $f(z) = \dfrac{1}{1+z}$;

Din a), pentru $\alpha = -1 \Rightarrow$

$$\boxed{\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + ... + (-1)^n z^n + ..., \forall z \in \mathbb{C} \text{ cu } |z| < 1} \text{ sau} \qquad (9)$$

$$\boxed{\frac{1}{1+z} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n z^n, \forall z \in \mathbb{C} \text{ cu } |z| < 1} \qquad (9')$$

adică s-a obţinut *seria geometrică alternantă*.

c) $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$;
Din b), făcând schimbarea de variabilă $z \rightsquigarrow -z$ pe domeniul de punctuală/absolută convergenţă$\Rightarrow$

$$\boxed{\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + ... + z^n + ..., \forall z \in \mathbb{C} \text{ cu } |z| < 1} \text{ sau} \tag{10}$$

$$\boxed{\frac{1}{1-z} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} z^n, \forall z \in \mathbb{C} \text{ cu } |z| < 1} \tag{10'}$$

adică s-a obţinut *seria geometrică*.

d) $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$;
Din b), făcând schimbarea de variabilă $z \rightsquigarrow z^2$ pe domeniul de punctuală/absolută convergenţă$\Rightarrow$

$$\boxed{\frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + ... + (-1)^n z^{2n} + ..., \forall z \in \mathbb{C} \text{ cu } |z| < 1} \text{ sau} \tag{11}$$

$$\boxed{\frac{1}{1+z^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n z^{2n}, \forall z \in \mathbb{C} \text{ cu } |z| < 1.} \tag{11'}$$

e) $f(z) = \dfrac{1}{1-z^2}$;
Din c), făcând schimbarea de variabilă $z \rightsquigarrow z^2$ pe domeniul de punctuală/absolută convergenţă$\Rightarrow$

$$\boxed{\frac{1}{1-z^2} = 1 + z^2 + z^4 + z^6 + ... + z^{2n} + ..., \forall z \in \mathbb{C} \text{ cu } |z| < 1} \text{ sau} \tag{12}$$

$$\boxed{\frac{1}{1-z^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} z^{2n}, \forall z \in \mathbb{C} \text{ cu } |z| < 1.} \tag{12'}$$

f) Fie funcţia multivocă $f : \mathbb{C} \to \mathcal{P}(\mathbb{C}), f(z) = (\mathrm{Log}(1+z))_{\mathbb{C}}$.
<u>modul 1.</u> Direct:
Se observă că o ramură f_k este olomorfă pe $\mathbb{C} \setminus T$ (deci $\forall n \in \mathbb{N}^*$, f_k este derivabilă de ordin n pe $\mathbb{C} \setminus T$), şi în particular în $a = 0$. De menţionat că T este o tăietură ce uneşte punctele critice logaritmice -1 cu $\infty_{\mathbb{C}}$.

$$\begin{array}{ll}
f_k(z) = (\mathrm{Log}(1+z))_k & f_k(0) = \mathrm{Log}\, 1 = 2k\pi\,\mathrm{j}, k \in \mathbb{Z} \\
f_k'(z) = (1+z)^{-1} & f_k'(0) = 1 \\
f_k''(z) = -1(1+z)^{-2} & f_k''(0) = -1 \\
f_k'''(z) = (-1)(-2)(1+z)^{-3} & f_k'''(0) = (-1)(-2) \\
... & ... \\
f_k^{(n)}(z) = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+z)^{-n} & f_k^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)! \\
... & ...
\end{array}$$

Atunci f_k este dezvoltabilă în serie Taylor pe $\Delta(0; R)$ şi

$$(\mathrm{Log}(1+z))_k = 2k\pi\,\mathrm{j} + \frac{1}{1!}z + \frac{-1}{2!}z^2 + ... + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}z^n + ..., \forall z \in \Delta(0; R), k \in \mathbb{Z}.$$

Se determină raza de convergenţă a seriei de puteri ale $(z-0)$:

$$\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right|} = 1 \Rightarrow R = 1 \text{ sau } \exists \rho_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\right|}{\left|\dfrac{(-1)^n}{n+1}\right|} = \frac{n+1}{n} = 1 \Rightarrow R = 1.$$

Se aplică Teorema Cauchy-Hadamard.
•Seria este absolut convergentă, pentru $\forall z \in \mathbb{C}$ cu $|z-0| < 1$.
•Seria deste divergentă, pentru $\forall z \in \mathbb{C}$ cu $|z-0| > 1$.

•Pentru $z \in \mathbb{C}$ cu $|z-0| = 1$ nu se poate preciza natura seriei, se face studiu separat; nu se va studia aici. Deci

$$\boxed{(\mathrm{Log}\,(1+z))_k = 2k\pi\,\mathrm{j} + \frac{1}{1}z + \frac{-1}{2}z^2 + ... + \frac{(-1)^{n-1}}{n}z^n + ..., \forall z \in \mathbb{C} \text{ cu } |z| < 1, k \in \mathbb{Z}} \text{ sau} \quad (13)$$

$$\boxed{(\mathrm{Log}\,(1+z))_k = 2k\pi\,\mathrm{j} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}z^n, \forall z \in \mathbb{C} \text{ cu } |z| < 1, k \in \mathbb{Z}} \quad (13')$$

modul 2. Se foloseşte seria geometrică alternantă de la b)

$\dfrac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + ... + (-1)^n z^n + ..., \forall z \in \mathbb{C}$ cu $|z| < 1.$

Se integrează termen cu termen pe domeniul de uniformă convergenţă (în sensul primitivei) $\Rightarrow$

$(\mathrm{Log}\,(1+z))_k = c + \dfrac{z}{1} - \dfrac{z^2}{2} + ... + \dfrac{(-1)^{n-1} z^n}{n} + \dfrac{(-1)^n z^{n+1}}{n+1} + ..., \forall z \in \mathbb{C}$ cu $|z| < 1.$

Pentru $z = 0 \in \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\} \Rightarrow$

$(\mathrm{Log}\,(1+0))_k = c + \dfrac{0}{1} - \dfrac{0^2}{2} + ... + \dfrac{(-1)^{n-1} 0^n}{n} + \dfrac{(-1)^n 0^{n+1}}{n+1} + ... \Rightarrow c = (\mathrm{Log}\,1)_k = 2k\pi\,\mathrm{j}, k \in \mathbb{Z}.$

Atunci

$(\mathrm{Log}\,(1+z))_k = 2k\pi\,\mathrm{j} + \dfrac{1}{1}z + \dfrac{-1}{2}z^2 + ... + \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}z^n + ..., \forall z \in \mathbb{C}$ cu $|z| < 1, k \in \mathbb{Z}.$

g) Fie funcţia multivocă $f : \mathbb{C} \to \mathcal{P}(\mathbb{C}), f(z) = (\mathrm{Log}\,(1+z))_{\mathbb{C}}$.

Analog cu f): sau direct, sau din c) $\Rightarrow$

$$\boxed{(\mathrm{Log}\,(1-z))_k = 2k\pi\,\mathrm{j} - \frac{1}{1}z - \frac{1}{2}z^2 + ... - \frac{1}{n}z^n + ..., \forall z \in \mathbb{C} \text{ cu } |z| < 1, k \in \mathbb{Z}.} \text{ sau} \quad (14)$$

$$\boxed{(\mathrm{Log}\,(1-z))_k = 2k\pi\,\mathrm{j} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}z^n, \forall z \in \mathbb{C} \text{ cu } |z| < 1, k \in \mathbb{Z}} \quad (14')$$

○**Exemplul 5.3.4**. Să se dezvolte în serie Taylor în jurul originii funcţia

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = \mathrm{th}\, z.$

Indicaţie. Se folosesc relaţiile (5) şi (6) de dezvoltare în serie Taylor pe o vecinătate a originii pentru funcţiile ch şi sh:

$\mathrm{ch}\, z = 1 + \dfrac{1}{2!}z^2 + \dfrac{1}{4!}z^4 ... + \dfrac{1}{(2n)!}z^{2n} + ..., \forall z \in \mathbb{C}$

$\mathrm{sh}\, z = \dfrac{1}{1!}z + \dfrac{1}{3!}z^3 + ... + \dfrac{1}{(2n+1)!}z^{2n+1} + ..., \forall z \in \mathbb{C}$

Funcţia th fiind impară, admite o dezvoltare de forma:

$\mathrm{th}\, z = c_1 + c_3 z^3 + c_5 z^5 + ... c_{2n+1} z^{2n+1}, \forall z \in \Delta(0; R)$

Dar $\mathrm{sh}\, z = \mathrm{th}\, z \cdot \mathrm{ch}\, z, \forall z \in \Delta(0; R)$.

Pe domeniul de PC/SC se pot înmulţi două serii folosind produse Cauchy (ca două polinoame pentru serii de puteri). Se obţine: $c_1 = 1, c_3 = -\frac{1}{3}, c_5 = \frac{2}{15}, ...$

Definiţia 5.3.3. Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ domeniu şi $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Funcţia f se numeşte *analitică pe D* dacă

$\forall a \in D, \exists V \in \mathcal{V}(a), V \subset D$ asfel încât să existe o serie de puteri $a_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n (z-a)^n$ cu proprietatea

$f(z) = a_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n (z-a)^n, \forall z \in V.$

Teorema 5.3.2 (**analiticitate şi olomorfie**). Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu şi $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Dacă f este analitică pe D atunci $f \in \mathcal{H}(D)$ şi reciproc, adică dacă $f \in \mathcal{H}(D)$ atunci f este analitică pe D.

Teorema 5.3.3 (**pricipiul prelungirii analitice**). Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu şi $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfă pe D. Fie $(z_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ este un şir din D ce are măcar un punct de acumulare $a \in D$ (există măcar un subşir convergent la a, are măcar un punct limită a).

Dacă $f(z_n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}_m$ atunci $f(z) = 0, \forall z \in D$.

(dacă f se anulează pe un şir din D, atunci f este identic nulă pe D)

Observaţia 5.3.2. Principiul prelungirii analitice se poate folosi pentru a extinde la $\mathbb{C}$ unele identităţi valabile în $\mathbb{R}$. De exemplu, toate formulele trigonometrice şi cele pentru funcţiile hiperbolice din $\mathbb{R}$ sunt valabile în $\mathbb{C}$.

Exemplul 5.3.5. Să se arate că

$\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z, \forall z \in \mathbb{C}$.

Rezolvare. Fie

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) = \cos 2z - \cos^2 z + \sin^2 z$.

Funcţia f este olomorfă pe domeniul $\mathbb{C}$.

Se alege un şir

$z_n = x_n + 0 \cdot \mathrm{j}, \forall n \in \mathbb{N}_m$

de numere complexe, care este de fapt de numere reale, având un punct de acumulare $x \in \mathbb{R}$. Deoarece, în $\mathbb{R}$,

$f(x_n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}_m$, atunci $f(z) = 0, \forall z \in D$.

5.4. Dezvoltarea în serie Laurent a unei funcţii complexe cu valori complexe

Teorema 5.4.1 (**Laurent**). Fie cercurile concentrice în a, $\gamma_1 = \mathcal{C}(a; r_1)$ şi $\gamma_2 = \mathcal{C}(a; r_2)$ cu $r_1 < r_2$ şi coroana circulară

$\Delta(a; r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C}; r_1 < |z - a| < r_2\}$.

Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu multiplu conex a.î. $\Delta(a; r_1, r_2) \cup \gamma_1 \cup \gamma_2 \subseteq D$ şi $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Dacă $f \in \mathcal{H}(D)$ atunci, pentru orice $\gamma = \mathcal{C}(a, r) \subset \Delta(a; r_1, r_2)$ şi pentru orice $z \in \Delta(a; r_1, r_2)$, f este dezvoltabilă în serie Laurent "în jurul" lui a, adică

$$\boxed{f(z) = ... + \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + ... + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + ... + c_n(z-a)^n + ..., \forall z \in \Delta(a; r_1, r_2)} \tag{15}$$

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n, \forall z \in \Delta(a; r_1, r_2),} \tag{15'}$$

unde

$$c_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta, \forall n \in \mathbb{Z},$$

sunt coeficienţii dezvoltării lui f în **serie de puteri întregi** ale $z - a$.

Observaţia 5.4.1 a) <u>Nu are loc</u>

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!},$$

nici măcar pentru $n \in \mathbb{N}^*$, dacă f nu este olomorfă în $\operatorname{Int} \gamma_1$; este posibil chiar ca f sa nu fie definită în a.

b) Seria de funcţii (15) este uniform convergentă pe orice altă coroană circulară concentrică şi inclusă în $\Delta(a; r_1, r_2)$. Se poate deriva şi integra termen cu termen pe astfel de coroane circulare.

c) Cu notaţiile din (15), seria

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z-a)^n = c_0 + c_1(z-a) + ... + c_n(z-a)^n + ...$$

este convergentă, $\forall z \in \mathbb{C}$, cu $|z-a| < r_2$ şi se numeşte *partea tayloriană* a seriei Laurent (15). Seria

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-a)^n = c_{-1}(z-a)^{-1} + ... + c_{-n}(z-a)^{-n} + ... = ... + \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + ... + \frac{c_{-1}}{z-a},$$

este convergentă, $\forall z \in \mathbb{C}$, cu $|z-a| > r_1$ şi se numeşte *partea principală* a seriei Laurent (15). Este o serie de puteri ale $\dfrac{1}{z-a}$.

d) Dezvoltarea în serie Laurent a unei funcţii este unică.

e) Dacă $f \in \mathcal{H}(\operatorname{Int}\gamma_2) \overset{\text{Teor. fund. Cauchy}}{\Rightarrow}$

$$c_n = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{j}} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta = 0, \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}; c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

în acest caz seria Laurent are doar parte tayloriană, este chiar seria Taylor ataşată lui f pe $\operatorname{Int}\gamma_2$,

Teorema 5.4.2. Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu, $a \in D$ şi $f : D \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ olomorfă. Punctul $z = a$ este pol multiplu de ordin p al lui f dacă şi numai dacă dezvoltarea în serie Laurent a f "în jurul" punctului a, este

$$\boxed{f(z) = \frac{c_{-p}}{(z-a)^p} + ... + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + ... + c_n(z-a)^n + ..., \forall z \in \Delta(a; \varepsilon, r_2)} \text{ sau}$$

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=-p}^{\infty} c_n (z-a)^n, \forall z \in \Delta(a; \varepsilon, r_2),}$$

cu $c_{-p} \neq 0$. De menţionat că ε este foarte mic, $\varepsilon < r_2$.

Teorema 5.4.3. Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu, $a \in D$ şi $f : D \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ olomorfă. Punctul $z = a$ este pol pentru f dacă şi numai dacă

$$\lim_{z \to a} f(z) = \infty_{\mathbb{C}}.$$

Teorema 5.4.4. Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu, $a \in D$ şi $f : D \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ olomorfă. Punctul $z = a$ este punct singular esenţial pentru f dacă şi numai dacă dezvoltarea în serie Laurent a f "în jurul" punctului a are partea principală cu o infinitate de termeni:

$$\boxed{f(z) = ... + \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + ... + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + ... + c_n(z-a)^n + ..., \forall z \in \Delta(a; \varepsilon, r_2)} \text{ sau}$$

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n, \forall z \in \Delta(a; \varepsilon, r_2).}$$

De menţionat că ε este foarte mic, $\varepsilon < r_2$.

Teorema 5.4.5. Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu, $a \in D$ şi $f : D \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ olomorfă. Punctul $z = a$ este punct singular removabil pentru f dacă şi numai dacă dezvoltarea în serie Laurent a f "în jurul" punctului a are partea principală nulă

$$\boxed{f(z) = 0 + c_0 + c_1(z-a) + ... + c_n(z-a)^n + ..., \forall z \in \Delta(a; \varepsilon, r_2)} \text{ sau}$$

$$\boxed{f(z) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z-a)^n, \forall z \in \Delta(a; \varepsilon, r_2).}$$

De menţionat că ε este foarte mic, $\varepsilon < r_2$.

Exemplul 5.4.1. **a)** Să se dezvolte

$$f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = e^{\frac{1}{z-1}}.$$

în serie de puteri întregi ale $(z-1)$. Să se deducă şi din dezvoltare că f are $a = 1$ un punct singular esenţial.

Rezolvare. f are în $a = 1$ un punct singular esenţial cu definiţia, deoarece $\nexists \lim_{z \to 1} f(z)$.

Folosind (2) $\Rightarrow$

$$e^{\frac{1}{z-1}} \underset{\text{cu } z \rightsquigarrow \frac{1}{z-1}}{\overset{(2)}{=}} 1+\frac{1}{1!}\left(\frac{1}{z-1}\right)+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{z-1}\right)^2+...+\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z-1}\right)^n+..., \forall z \in \mathbb{C} \text{ cu } \left|\frac{1}{z-1}\right| < +\infty$$

$$e^{\frac{1}{z-1}} = \underbrace{....+\frac{1}{n!}\frac{1}{(z-1)^n}+...+\frac{1}{2!}\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{1}{1!}\frac{1}{z-1}}_{\text{partea principală}} + \underbrace{1}_{\text{par. tayoriană}}, \forall z \in \mathbb{C} \text{ cu } \varepsilon < |z-1| < r_2.$$

De menţionat că $\varepsilon > 0$ este arbitrar, foarte mic, r_2 este arbitrar, foarte mare şi $\varepsilon < r_2$. Se poate scrie $0 < |z-1| < +\infty$, chiar $z \in \mathbb{C}\setminus\{1\} = \Delta(1;0,\infty)$.

Partea principală are o infinitate de termeni $\overset{\text{Teor. } 4}{\Rightarrow}$ $a = 1$ este punct singular esenţial pentru f.

b) Fie $f : \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}, f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$.

Să se dezvolte f în serie de puteri întregi ale $(z-0)$. Să se deducă şi din dezvoltare că f are $a = 0$ un punct singular removabil.

Rezolvare. f are în $a = 0$ un punct singular removabil cu definiţia, deoarece $\exists \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\sin z}{z} = 1 \in \mathbb{C}$.

Folosind (4) $\Rightarrow$

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z}\left(\frac{1}{1!}z - \frac{1}{3!}z^3 + ... + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1} + ...\right) =$$

$$= \underbrace{0}_{\text{partea principală}} + \underbrace{\frac{1}{1!} - \frac{1}{3!}z^2 + ... + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n} + ...}_{\text{partea tayloriană}}, \forall z \in \mathbb{C} \text{ cu } z \neq 0 \text{ şi } |z-0| < +\infty.$$

Se poate scrie $0 < |z-0| < +\infty$, chiar $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\} = \Delta(0;0,\infty)$.

Deci partea principală a dezvoltării Laurent ataşate este nulă $\overset{\text{Teor. } 5}{\Rightarrow}$ $a = 0$ este punct singular removabil pentru f.

c) Fie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = e^z$. Să se arate că f are în $a = \infty_{\mathbb{C}}$ un punct singular esenţial. Analog $\cos z, \sin z, \operatorname{ch} z, \operatorname{sh} z$ au în $a = \infty_{\mathbb{C}}$ un punct singular esenţial.

Rezolvare. Folosind (2) $\Rightarrow$

$$e^{\frac{1}{\zeta}} \underset{\text{cu } z \rightsquigarrow \frac{1}{\zeta}}{\overset{(2)}{=}} 1+\frac{1}{1!}\left(\tfrac{1}{\zeta}\right)+\frac{1}{2!}\left(\tfrac{1}{\zeta}\right)^2+...+\frac{1}{n!}\left(\tfrac{1}{\zeta}\right)^n+..., \forall z \in \mathbb{C} \text{ cu } \left|\tfrac{1}{\zeta}\right| < +\infty$$

$$e^{\frac{1}{\zeta}} = \underbrace{....+\frac{1}{n!}\frac{1}{\zeta^n}+...\frac{1}{2!}\frac{1}{\zeta^2}+\frac{1}{1!}\frac{1}{\zeta}}_{\text{partea principală}} + \underbrace{1}_{\text{partea tayloriană}}, \forall \zeta \in \mathbb{C} \text{ cu } \varepsilon < |\zeta-0| < r_2.$$

De menţionat că $\varepsilon > 0$ este arbitrar, foarte mic, r_2 este arbitrar, foarte mare şi $\varepsilon < r_2$. Se poate scrie $0 < |\zeta-0| < +\infty$, chiar $\zeta \in \mathbb{C}\setminus\{0\} = \Delta(0;0,\infty)$.

Deci, pentru $g(\zeta) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$, partea principală a dezvoltării Laurent ataşate are o infinitate de termeni $\overset{\text{Teor. } 4}{\Rightarrow}$ $b = 0$ este punct singular esenţial pentru $g \Rightarrow a = \infty_{\mathbb{C}}$ este punct singular esenţial pentru f.

Exemplul 5.4.2. Să se dezvolte în serie Laurent funcţia

$$f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$$

a) "în jurul" lui $a = 0$ pe $0 < |z| < 1$;**b)** "în jurul" lui $a = 0$ pe $1 < |z| < 2$;
c) "în jurul" lui $a = 0$ pe $|z| > 2$;**d)** "în jurul" lui $a = 1$ pe $0 < |z-1| < 1$.

Să se precizeze punctele singulare ale f şi natura lor.

Rezolvare. Conform definiţiei punctelor singulare ale unei funcţii, respectiv a polului simplu, se deduce că $a = 0, a = 1, a = 2$ sunt poli de ordinul 1 pentru f.

Se descompune f în fracţii simple:

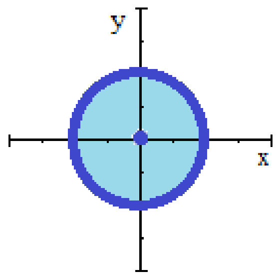
$$f(z)=\frac{1}{z(z-1)(z-2)}=\frac{1}{2}\frac{1}{z}-\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2}\frac{1}{z-2}.$$

Folosind seria geometrică (10) $\Rightarrow$

$$(*)\ \frac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3+...+z^n+...,\forall z\in\mathbb{C} \text{ cu } |z|<1.$$

Pe domeniul de PC/SC se poate schimba variabila. Pe domeniul comun de PC/SC se pot aduna termen cu termen două serii şi se poate înmulţi o serie cu un scalar nenul.

a) "în jurul" lui $a=0$ pe $0<|z-0|<1$; se dezvoltă f după puteri întregi ale $z-0$.



$$\frac{1}{z}=\frac{1}{z},\forall z\in\mathbb{C} \text{ cu } 0<|z|$$

$$\frac{1}{z-1}=\frac{-1}{1-z}\overset{(*)}{=}-\left(1+z+z^2+z^3+...+z^n+...\right)=-1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)\,z^n,\forall z\in\mathbb{C} \text{ cu } |z|<1$$

$$\frac{1}{z-2}=\frac{-1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}\underset{\text{cu } z\rightsquigarrow\frac{z}{2}}{\overset{(*)}{=}}\frac{-1}{2}\left(1+\left(\tfrac{z}{2}\right)+\left(\tfrac{z}{2}\right)^2+...+\left(\tfrac{z}{2}\right)^n+...\right)=\frac{-1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{2^{n+1}}z^n,$$

$\forall z\in\mathbb{C}$ cu $\left|\frac{z}{2}\right|<1$, adică $|z|<2$.

Atunci, pe domeniul comun de convergenţă$\Rightarrow$

$$f(z)=\tfrac{1}{2}\frac{1}{z}-\frac{1}{z-1}+\tfrac{1}{2}\frac{1}{z-2}=$$

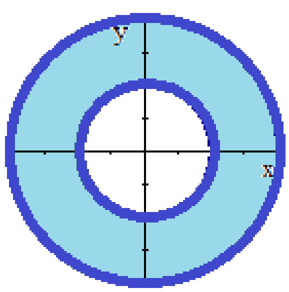
$$=\tfrac{1}{2}\frac{1}{z}+\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}z^n\right)+\left(\frac{-1}{2^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{2^{n+2}}z^n\right)=\tfrac{1}{2}\frac{1}{z}+1-\tfrac{1}{2^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\tfrac{1}{2^{n+2}}\right)z^n=$$

$$=\underbrace{\frac{1}{2}\frac{1}{z}}_{\text{partea princ.}}+\underbrace{\left(1-\frac{1}{2^2}\right)+\left(1-\frac{1}{2^3}\right)z^1+\left(1-\frac{1}{2^4}\right)z^1+...+\left(1-\frac{1}{2^{n+2}}\right)z^n+...}_{\text{partea tayloriană}},$$

$\forall z\in\mathbb{C}$ cu $0<|z|$ şi $|z|<1$ şi $|z|<2$, adică, intersectând, cu $0<|z|<1$.

$a=0$ este pol de ordin 1 pentru f şi din definiţia polului; şi deoarece partea principală a seriei Laurent anterioare (dezvoltare după puteri întregi ale $z-0$ pe $\Delta(0;0,1)$) are un singur termen.

b) "în jurul" lui $a=0$ pe $1<|z-0|<2$; se dezvoltă f după puteri întregi ale $z-0$.



$\frac{1}{z} = \frac{1}{z}, \forall z \in \mathbb{C}$ cu $0 < |z|$

$\frac{1}{z-1} \overset{\text{de la a)}}{=} -1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1) z^n, \forall z \in \mathbb{C}$ cu $\underline{|z| < 1}$-nu se poate folosi la intersectarea domeniilor de dezvoltare, încât să se obţină $\underline{1 < |z|} < 2$.

Aici $\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} \underset{\text{cu } z \rightsquigarrow \frac{1}{z}}{\overset{(*)}{=}} \frac{1}{z}\left(1 + \left(\frac{1}{z}\right) + \left(\frac{1}{z}\right)^2 + ... + \left(\frac{1}{z}\right)^n + ...\right) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}$,

$\forall z \in \mathbb{C}$ cu $\underline{|z| > 1}$- se poate folosi la intersectarea domeniilor de dezvoltare, încât să se obţină $\underline{1 < |z|} < 2$.

$\frac{1}{z-2} \overset{\text{de la a)}}{=} \frac{-1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{2^{n+1}} z^n, \forall z \in \mathbb{C}$ cu $|z| < 2$.

Atunci, pe domeniul comun de convergenţă$\Rightarrow$

$$f(z) = \tfrac{1}{2}\frac{1}{z} - \frac{1}{z-1} + \tfrac{1}{2}\frac{1}{z-2} = \tfrac{1}{2}\frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{-1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{-1}{2^{n+1}} z^n\right) =$$

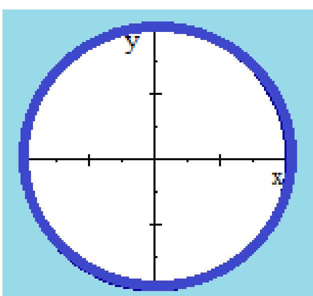
$$= \underbrace{... + (-1)\frac{1}{z^n} + ... + (-1)\frac{1}{z^2} + \left(\frac{1}{2} - 1\right)\frac{1}{z}}_{\text{partea principală}} + \underbrace{\frac{-1}{2^2} + \frac{-1}{2^3} z^1 + \frac{-1}{2^4} z^2 + ... + \frac{-1}{2^{n+2}} z^n + ...}_{\text{partea tayloriană}},$$

$\forall z \in \mathbb{C}$ cu $0 < |z|$ şi $|z| > 1$ şi $|z| < 2$, adică, intersectând, cu $1 < |z| < 2$.

$a = 0$ este pol de ordin 1 pentru f din definiţia polului; nu se poate folosi partea principală a seriei Laurent anterioare, deoarece $1 < |z| < 2$- este o coroană circulară centrată în 0, dar nu este "apropiată" de 0, are $r_1 \neq \varepsilon \to 0$..

$a = 1$ este pol de ordin 1 pentru f din definiţia polului; nu se poate folosi partea principală a seriei Laurent anterioare, deoarece $1 < |z| < 2$ nu este o coroană circulară centrată în 1, ci în 0.

c) "în jurul" lui $a = 0$ pe $|z - 0| > 2$; se dezvoltă f după puteri întregi ale $z - 0$.



$\frac{1}{z} = \frac{1}{z}, \forall z \in \mathbb{C}$ cu $0 < |z|$

$\frac{1}{z-1} \overset{\text{de la b)}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}, \forall z \in \mathbb{C}$ cu $\underline{|z| > 1}$- se poate folosi la intersectarea domeniilor de dezvoltare, încât să se obţină $|z| > 2 > 1$.

$\frac{1}{z-2} \overset{\text{de la a)}}{=} \frac{-1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{2^{n+1}} z^n, \forall z \in \mathbb{C}$ cu $\underline{|z| < 2}$-nu se poate folosi la intersectarea domeniilor de dezvoltare, încât să se obţină $\underline{|z| > 2}$.

Aici $\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}} \underset{\text{cu } z \rightsquigarrow \frac{2}{z}}{\overset{(*)}{=}} \frac{1}{z}\left(1 + \left(\frac{2}{z}\right) + \left(\frac{2}{z}\right)^2 + ... + \left(\frac{2}{z}\right)^n + ...\right) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{z^{n+1}}$,

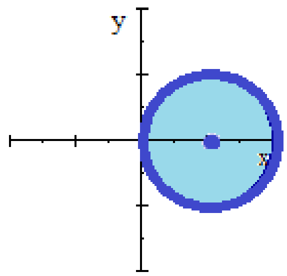
$\forall z \in \mathbb{C}$ cu $\left|\frac{2}{z}\right| > 1$, adică $\underline{|z| > 2}$- se poate folosi la intersectarea domeniilor de dezvoltare, încât să se obţină $\underline{|z| > 2}$.

Atunci, pe domeniul comun de convergenţă$\Rightarrow$

$$f(z)=\tfrac{1}{2}\frac{1}{z}-\frac{1}{z-1}+\tfrac{1}{2}\frac{1}{z-2}=\tfrac{1}{2}\frac{1}{z}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}+\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}2^n\tfrac{1}{z^{n+1}}\right)=$$
$$=\tfrac{1}{2}\frac{1}{z}-\frac{1}{z}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{z^n}+\tfrac{1}{2}\frac{1}{z}+\sum_{n=2}^{\infty}\tfrac{2^{n-1}}{2}\tfrac{1}{z^n}=\sum_{n=2}^{\infty}\left(-1+\tfrac{2^{n-1}}{2}\right)\tfrac{1}{z^n}=$$
$$=\underbrace{\ldots+\left(2^{n-2}-1\right)\frac{1}{z^n}+\ldots+\frac{1}{z^3}+0+}_{\text{partea principală}}\underbrace{0}_{\text{partea tayloriană}},$$

$\forall z\in\mathbb{C}$ cu $0<|z|$ şi $|z|>1$ şi $|z|>2$, adică, intersectând, cu $|z|>2$.
$a=0, a=1, a=2$ sunt poli de ordinul 1 pentru f din definiţia polului; nu se poate folosi partea principală a seriei Laurent anterioare, deoarece $|z|>2$.

d) "în jurul" lui $a=1$ pe $0<|z-\underline{1}|<1$; se dezvoltă f după puteri întregi ale $z-\underline{1}$.



$$\frac{1}{z}=\frac{1}{1+(z-1)}=\frac{1}{1-(-(z-1))}\underset{\text{cu } z\rightsquigarrow-(z-1)}{\overset{(*)}{=}}1-(z-1)+(z-1)^2+\ldots+(-1)^n(z-1)^n+\ldots=$$
$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n, \forall z\in\mathbb{C} \text{ cu } |-(z-1)|<1, \text{ adică } |z-1|<1$$
$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z-1}, \forall z\in\mathbb{C} \text{ cu } 0<|z-1|$$
$$\frac{1}{z-2}=-1\cdot\frac{1}{1-(z-1)}\underset{\text{cu } z\rightsquigarrow(z-1)}{\overset{(*)}{=}}-\left(1+(z-1)+(z-1)^2+\ldots+(z-1)^n+\ldots\right)=$$
$$=-1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)(z-1)^n, \forall z\in\mathbb{C} \text{ cu } |z-1|<1.$$

Atunci, pe domeniul comun de convergenţă$\Rightarrow$
$$f(z)=\tfrac{1}{2}\frac{1}{z}-\frac{1}{z-1}+\tfrac{1}{2}\frac{1}{z-2}=\tfrac{1}{2}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n\right)-\frac{1}{z-1}+\tfrac{1}{2}\left(-1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)(z-1)\right)=$$
$$=\tfrac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{(-1)^n}{2}(z-1)^n-\frac{1}{z-1}-\tfrac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{-1}{2}(z-1)^n=$$
$$=\underbrace{-\frac{1}{z-1}}_{\text{partea princ.}}+\underbrace{\left(-(z-1)-(z-1)^3-\ldots-(z-1)^{2n+1}-\ldots\right)}_{\text{partea tayloriană}},$$

$\forall z\in\mathbb{C}$ cu $0<|z-1|<1$.
$a=0$ este pol de ordin 1 pentru f din definiţia polului; nu se poate folosi partea principală a seriei Laurent anterioare, deoarece coroana circulară $0<|z-1|<1$ este centrată în 1;
$a=1$ este pol de ordin 1 pentru f şi din definiţia polului; şi deoarece partea principală a seriei Laurent anterioare are un singur termen.
$a=2$ este pol de ordin 1 pentru f din definiţia polului; nu se poate folosi partea principală a seriei Laurent anterioare, deoarece coroana circulară $0<|z-1|<1$ este centrată în 1.