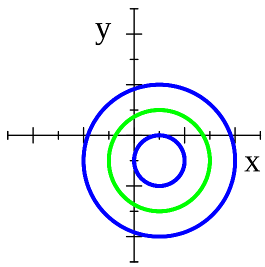
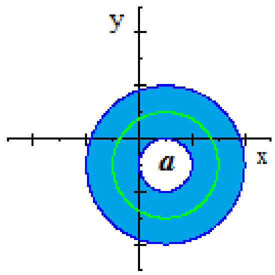
CURS NR. 9
Matematici Speciale, AIA

6. Teoria reziduurilor

6.1. Reziduuri. Definiţie, teorema de calcul a reziduurilor, teorema reziduurilor

Definiţia 6.1.1. Fie cercurile concentrice în a, $\gamma_1 = \mathcal{C}(a;\varepsilon)$, cu $\varepsilon > 0$ suficient de mic, şi $\gamma_2 = \mathcal{C}(a;r_2)$ cu $r_2 > \varepsilon > 0$ şi coroana circulară





$\Delta(a;\varepsilon,r_2) = \{z \in \mathbb{C}; \varepsilon < |z-a| < r_2\}$.

Fie $f : \Delta(a;\varepsilon,r_2) \to \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(\Delta)$ astfel încât $z = a$ să fie punct singular izolat pentru f. Atunci, pentru orice cerc $\gamma = \mathcal{C}(a,r) \subset \Delta(a;\varepsilon,r_2)$ se numeşte *reziduul funcţiei f în punctul a* numărul complex

$\boxed{\operatorname{rez}(f;a) = \dfrac{1}{2\pi \mathrm{j}}\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz.}$ Se notează şi $\operatorname{rez} f(a); \operatorname{Rez}(f;a); \operatorname{Rez} f(a)$.

(este unic, independent de cercul γ ales).

Teorema 6.1.1 (de calcul a reziduurilor). În ipotezele definiţiei anterioare, reziduul funcţiei f în punctul a se calculează astfel:

1°. În general,

$\boxed{\operatorname{rez}(f;a) = c_{-1}}$ = coeficientul lui $\dfrac{1}{z-a}$ din dezvoltarea în serie Laurent a f pe $\Delta(a;\varepsilon,r_2)$, în "jurul" lui a, în serie de puteri întregi ale lui $z-a$.

2°. În particular, dacă a este pol de ordin p pentru f:

$$\boxed{\operatorname{rez}(f;a) = \frac{1}{(p-1)!}\lim_{z\to a}\left(\left((z-a)^p f(z)\right)^{(p-1)}\right).}$$

În particular, dacă a este pol de ordin 1 pentru f:

$$\boxed{\operatorname{rez}(f;a) = \lim_{z\to a}\left((z-a) f(z)\right).}$$

3°. În particular, dacă $f(z) = \dfrac{g(z)}{h(z)}$, cu $g(a) \neq 0, h(a) = 0, h'(a) \neq 0$, iar $g,h \in \mathcal{H}(V)$, cu $V \in \mathcal{V}(a)$, atunci

$$\boxed{\operatorname{rez}(f;a) = \frac{g(a)}{h'(a)}.}$$

Demonstraţie. 1°.Din Teorema Laurent, în ipotezele Teoremei de calcul a reziduurilor, coeficienţii dezvoltării lui f pe $\Delta(a;\varepsilon,r_2)$ sunt:

$$c_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Atunci, pentru $n = -1$ se obţine concluzia.

2°. Dacă $z=a$ este pol de ordin p pentru f, atunci, din definiţia polului, $\varphi(z)=(z-a)^{p} f(z)$ este legea de asociere a unei funcţii monogene în $z=a$, cu $\varphi(a) \neq 0$. Atunci

$$\operatorname{rez}(f;a)=\frac{1}{2\pi\,\mathrm{j}}\int_{\gamma}\frac{\varphi(z)}{(z-a)^{p}}dz=\frac{1}{(p-1)!}\varphi^{(p-1)}(a),$$

deci are loc concluzia.

3°. Cum $g, h \in \mathcal{H}(V)$, din Teorema Taylor,

$$g(z)=a_0+a_1(z-a)+a_2(z-a)^2+\ldots, \forall z \in V$$
$$h(z)=b_0+b_1(z-a)+b_2(z-a)^2+\ldots, \forall z \in V$$
$$h'(z)=b_1+2b_2(z-a)+\ldots, \forall z \in V$$

cu $a_0=g(a)\neq 0, b_0=h(a)=0$ şi $b_1=h'(a)\neq 0$.

Deci $z=a$ este pol simplu pentru f şi, din 2^{0},

$$\operatorname{rez}(f;a)=\lim_{z\to a}((z-a)f(z))=\frac{a_0}{b_1}=\frac{g(a)}{h'(a)}.$$

Observaţie. Se menţionează că:

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3+\ldots+z^n+\ldots, \forall z\in\mathbb{C} \text{ cu } |z|<1 \quad (*)$$

$$e^{z}=1+\frac{1}{1!}z+\frac{1}{2!}z^2+\ldots+\frac{1}{n!}z^n+\ldots, \forall z\in\mathbb{C} \quad (2)$$

$$\cos z=1-\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{4!}z^4\ldots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}+\ldots, \forall z\in\mathbb{C} \quad (3)$$

$$\sin z=\frac{1}{1!}z-\frac{1}{3!}z^3+\ldots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}+\ldots, \forall z\in\mathbb{C} \quad (4)$$

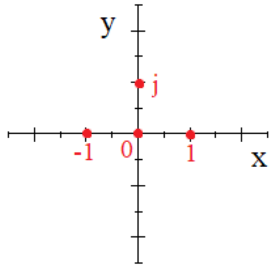
$$\operatorname{ch} z=1+\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{4!}z^4\ldots+\frac{1}{(2n)!}z^{2n}+\ldots, \forall z\in\mathbb{C} \quad (5)$$

$$\operatorname{sh} z=\frac{1}{1!}z+\frac{1}{3!}z^3+\ldots+\frac{1}{(2n+1)!}z^{2n+1}+\ldots, \forall z\in\mathbb{C} \quad (6)$$

Exemplul 6.1.1. Să se determine punctele singulare şi reziduurile funcţiei în aceste puncte pentru:

a) $f(z)=\dfrac{\sin z}{(z^3-z)(z-\mathrm{j})}$.

Rezolvare. •Se determină punctele singulare izolate ale f.



$$(z^3-z)(z-\mathrm{j})=0 \Leftrightarrow z(z-1)(z+1)(z-\mathrm{j})=0 \Leftrightarrow \{z_1=0,\ z_{2,3}=\pm 1,\ z_4=\mathrm{j}$$

Se scrie $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}\cdot\dfrac{1}{(z-1)(z+1)(z-\mathrm{j})}$

$*z_1=0$ este punct singular removabil pentru f, deoarece $\sin 0=0$, $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin z}{z}=1$, deci $\lim\limits_{z\to 0} f(z)=1\cdot\dfrac{1}{\mathrm{j}}\in\mathbb{C}$; sau deoarece este pentru

$$f_1(z)=\frac{\sin z}{z}\overset{(4)}{=}\frac{1}{z}\left(\frac{1}{1!}z-\frac{1}{3!}z^3+\ldots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}+\ldots\right)=$$

$$= \underbrace{0}_{\text{partea princ.}} + \underbrace{\left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{3!}z^2 + ... + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n} + ...\right)}_{\text{partea tayloriană}}, \forall z \in \mathbb{C}, \text{ cu } 0 < |z| < +\infty,$$

deci şi pentru f şi din faptul că partea principală a dezvoltării Laurent are 0 termeni (deci are $c_{-1} = 0$).

$*z_2 = 1, z_3 = -1, z_4 = \mathrm{j}$ sunt poli de ordinul 1 pentru f.

•Se aplică teorema de calcul a reziduurilor

$$\operatorname{rez}(f;1) \underset{\text{conform } 2^{\cdot}}{\overset{1 \text{ e pol de ordin } 1}{=}} \lim_{z\to 1}\left((z-1)\frac{\sin z}{z}\cdot\frac{1}{(z-1)(z+1)(z-\mathrm{j})}\right) = \frac{\sin 1}{2(1-\mathrm{j})} = \frac{(\sin 1)(1+\mathrm{j})}{4}.$$

$$\operatorname{rez}(f;-1) \underset{\text{conform } 2^{\cdot}}{\overset{-1 \text{ e pol de ordin } 1}{=}} \lim_{z\to -1}\left((z+1)\frac{\sin z}{z}\cdot\frac{1}{(z-1)(z+1)(z-\mathrm{j})}\right) = \frac{\sin(-1)}{2(-1-\mathrm{j})} = \frac{(\sin 1)(1-\mathrm{j})}{4}.$$

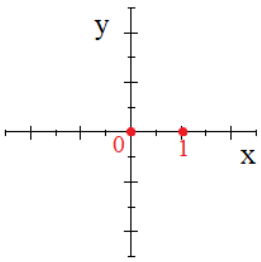
$$\operatorname{rez}(f;\mathrm{j}) \underset{\text{conform } 2^{\cdot}}{\overset{\mathrm{j} \text{ e pol de ordin } 1}{=}} \lim_{z\to \mathrm{j}}\left((z-\mathrm{j})\frac{\sin z}{z}\cdot\frac{1}{(z-1)(z+1)(z-\mathrm{j})}\right) = \frac{\sin \mathrm{j}}{\mathrm{j}(\mathrm{j}^2-1)} = \frac{-\operatorname{sh} 1}{2}.$$

$\operatorname{rez}(f_1;0) \underset{\text{conform } 1^{\cdot}}{\overset{0 \text{ este punct singular removabil}}{=}} c_{-1} =$"coeficientul lui $\frac{1}{z}$ din dezvoltarea în serie Laurent a f_1 pe $\Delta(0;\varepsilon,r_2)$, în "jurul" lui 0, în serie de puteri întregi ale lui $z-0 = 0$.

Deci $\operatorname{rez}(f;0) = 0$

b) $f(z) = \dfrac{e^{\frac{1}{z-1}}}{z}$.

Rezolvare. •Se determină punctele singulare izolate ale f.



$*z_1 = 0$ este pol de ordin 1 pentru f.

$*z_2 = 1$ este punct singular esenţial pentru f, deoarece $\nexists \lim\limits_{z\to 1}\dfrac{e^{\frac{1}{z-1}}}{z}$ sau deoarece

$$f(z) = \frac{1}{1-(-(z-1))}\cdot e^{\frac{1}{z-1}} \underset{(4) \text{ cu } z \rightsquigarrow \frac{1}{z-1}}{\overset{(*) \text{ cu } z\rightsquigarrow -(z-1)}{=}} \left(1-(z-1)+(z-1)^2+...+(-1)^n(z-1)^n+...\right)\cdot$$

$$\cdot\left(1+\frac{1}{1!}\left(\frac{1}{z-1}\right)+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{z-1}\right)^2+...+\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z-1}\right)^n+...\right) =$$

$$= ... + \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + ... + \frac{(-1)^{n-1}}{n!} + ...\right)\frac{1}{z-1} + ..., \forall z \in \mathbb{C}, \text{ cu } 0 < |z-1| < 1.$$

partea principală a dezvoltării Laurent anterioare are o infinitate de termeni.

•Se aplică teorema de calcul a reziduurilor

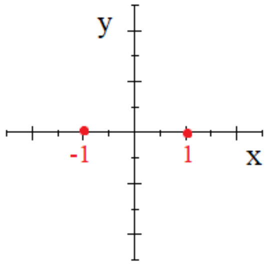
$$\operatorname{rez}(f;0) \underset{\text{conform } 2^{\cdot}}{\overset{0 \text{ e pol de ordin } 1}{=}} \lim_{z\to 0}\left((z-0)\frac{e^{\frac{1}{z-1}}}{z}\right) = e^{-1}.$$

$$\operatorname{rez}(f;1) \underset{\text{conform } 1^{\cdot}}{\overset{1 \text{ e punct singular esenţial}}{=}} = c_{-1} = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + ... + \frac{(-1)^{n-1}}{n!} + ...$$

Cum, din (2),

$$e^{-1} = 1 + \frac{-1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{(-1)^n}{n!} + ... \Rightarrow e^{-1} = 1 - c_{-1} \Rightarrow \operatorname{rez}(f;1) = 1 - e^{-1}.$$

Exemplul 6.1.2. Să se determine punctele singulare şi reziduurile funcţiei în aceste puncte pentru:
a) $f(z) = \dfrac{z}{(z+1)(z-1)^3}$;
Rezolvare. •Se determină punctele singulare izolate ale f.



$*z_1 = -1$ este pol de ordin 1 pentru f.
$*z_2 = 1$ este pol de ordin 3 pentru f.

•Se aplică teorema de calcul a reziduurilor:

$$\operatorname{rez}(f;-1) \underset{\text{conform } 2^{\cdot}}{\overset{-1 \text{ e pol de ordin } 1}{=}} \lim_{z\to -1}\left((z+1)\frac{z}{(z+1)(z-1)^3}\right) = \frac{1}{8}.$$

$$\operatorname{rez}(f;1) \underset{\text{conform } 2^{\cdot}}{\overset{1 \text{ e pol de ordin } 3}{=}} = \frac{1}{(3-1)!}\lim_{z\to 1}\left((z-1)^3 f(z)\right)^{(3-1)} = \frac{1}{2!}\lim_{z\to 1}\left((z-1)^3\frac{z}{(z+1)(z-1)^3}\right)^{(2)} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{z\to 1}\left(\frac{z}{z+1}\right)'' = \frac{1}{2}\lim_{z\to 1}\left(\frac{1\cdot(z+1)-z\cdot 1}{z+1}\right)' = \frac{1}{2}\lim_{z\to 1}\left(\frac{1}{(z+1)^2}\right)' =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{z\to 1}\left(\frac{-2}{(z+1)^3}\right) = \frac{1}{2}\frac{-2}{(1+1)^3} = -\frac{1}{8}.$$

Sau se dezvoltă f în serie Laurent, de puteri întregi ale $z-1$, pe $\Delta(1;\varepsilon,r_2)$, cu $\varepsilon > 0$ foarte mic.

$$f(z) = \frac{z}{(z+1)(z-1)^3} = \frac{1}{2}\frac{(z-1)+1}{(z-1)^3\left(\frac{z-1}{2}+1\right)} = \frac{1}{2}\frac{(z-1)+1}{(z-1)^3}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{z-1}{2}\right)}$$

Se foloseşte:

$$\frac{1}{1-\left(-\frac{z-1}{2}\right)} = 1-\tfrac{z-1}{2}+\left(\tfrac{z-1}{2}\right)^2+\ldots+(-1)^n\left(\tfrac{z-1}{2}\right)^n+\ldots, \forall z\in\mathbb{C}, \text{ cu } \left|-\tfrac{z-1}{2}\right| < 1, \text{ adică } |z-1| < 2$$

Atunci, scriind pe domeniul comun doar termenul ce conţine $\dfrac{1}{z-1}$ $\Rightarrow$

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{1}{(z-1)^3}\right)\cdot\left(1-\tfrac{z-1}{2}+\left(\tfrac{z-1}{2}\right)^2+\ldots+(-1)^n\left(\tfrac{z-1}{2}\right)^n+\ldots\right) =$$

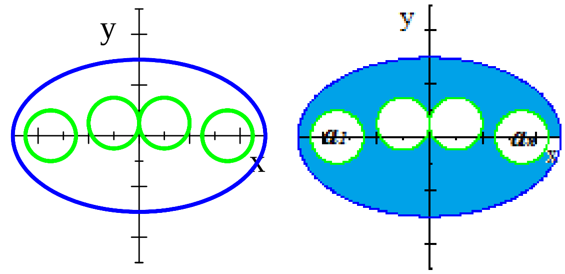
$$= \ldots + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}\right)\frac{1}{z-1}+\ldots, \forall z\in\mathbb{C}, \text{ cu } 0<|z-1|<2 \Rightarrow$$

$$\operatorname{rez}(f;1) = c_{-1} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}\right) = -\frac{1}{8}.$$

Teorema 6.1.2 (teorema reziduurilor). Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu simplu conex şi γ cu $\operatorname{Im}\gamma \subseteq D$ o curbă simplă, închisă. Fie f o funcţie ce are în $\operatorname{Int}\gamma$ un număr finit de puncte singulare izolate $a_1,\ldots,a_n$ şi a.î. $f \in \mathcal{H}(D\setminus\{a_1,\ldots,a_n\})$. Atunci

$$\boxed{\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi\,\mathrm{j}\cdot\sum_{k=1}^{n}\operatorname{rez}(f;a_k) = 2\pi\,\mathrm{j}\cdot(\operatorname{rez}(f;a_1)+\ldots+\operatorname{rez}(f;a_n)).}$$

Demonstraţie. Deoarece $a_k, k=\overline{1,n}$, sunt puncte singulare izolate din $\operatorname{Int}\gamma$, există n cercuri $\gamma_k = \mathcal{C}(a_k,r), k=\overline{1,n}$, cu $r>0$ suficient de mic, astfel încât $\gamma_k \subset \operatorname{Int}\gamma$, $k=\overline{1,n}$, $\gamma_k \cap \gamma_j = \emptyset$, pentru $k \neq j$, unde $k, j = \overline{1, n}$.



S-a format astfel un domeniu multiplu conex, de ordin de conexitate $n+1$, anume $\operatorname{Int}\gamma \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n} (\Delta(a_k, r_k))$. Pe acest domeniu, f este olomorfă, conform ipotezei. Atunci, conform Teoremei Fundamentale Cauchy pe domenii multiplu conexe şi formula reziduului, se obţine:

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} \operatorname{rez}(f; a_k).$$

Teorema 6.1.3 (**teorema semireziduurilor**). Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu simplu conex şi $\gamma \subseteq D$ o curbă simplă, închisă. Fie f o funcţie ce are în $\operatorname{Int}\gamma$ un număr finit de puncte singulare izolate $a_1, ..., a_n$, precum şi $b_1, ..., b_m$ un număr finit de poli de ordin 1 situaţi pe γ, a.î. $f \in \mathcal{H}(D \setminus \{a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_m\})$. Atunci

$$\boxed{\text{v.p.}\int_{\gamma} f(z)\,dz = 2\pi\,\mathrm{j} \cdot \sum_{k=1}^{n} \operatorname{rez}(f; a_k) + \mathrm{j} \cdot \sum_{l=1}^{m} (\pi - \delta_l) \operatorname{rez}(f; b_l),}$$

unde $\pi - \delta_l$ este unghiul format de cele două semitangente la γ în b_l.
Dacă γ admite tangentă în toate punctele b_l la γ, atunci $\pi - \delta_l = \pi$ şi

$$\boxed{\text{v.p.}\int_{\gamma} f(z)\,dz = 2\pi\,\mathrm{j} \cdot \sum_{k=1}^{n} \operatorname{rez}(f; a_k) + \pi\,\mathrm{j} \cdot \sum_{l=1}^{m} \operatorname{rez}(f; b_l)} \text{ sau}$$

$$\boxed{\text{v.p.}\int_{\gamma} f(z)\,dz = 2\pi\,\mathrm{j} \cdot (\operatorname{rez}(f; a_1) + ... + \operatorname{rez}(f; a_n)) + \pi\,\mathrm{j} \cdot (\operatorname{rez}(f; b_1) + ... + \operatorname{rez}(f; b_m)).}$$

Exemplul 6.1.3. Să se calculeze

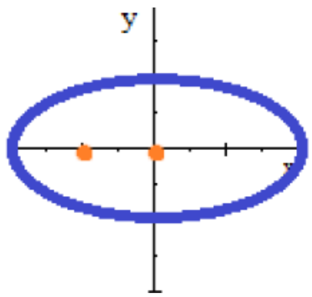
$\mathcal{I} = \displaystyle\int_{\gamma} \frac{1 + \sin\frac{\pi}{z}}{1+z}\,dz$, unde curba γ este elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, cu $a > 1, b > 0$, parcursă o singură dată în sens trigonometric.

Rezolvare. etapele $1, 2, 3$ - calculul integralei cu definiţia. Nu, din cauză că este greu de exprimat $f(z) = u(x, y) + \mathrm{j}\,v(x, y)$

etapa 4 - calculul integralei cu teoremele Cauchy. Nu, din cauză că f are $a = 0$ punct singular esenţial situat în $\operatorname{Int}\gamma$.

etapa 5 -calculul integralei cu teoria reziduurilor.

•Se reprezintă curba $\gamma : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > 1, b > 0$. Este o elipsă centrată în 0 şi de semiaxe $a > 1, b > 0$. Este curbă netedă, simplă, închisă.



•Se determină punctele singulare izolate ale

$f(z) = \dfrac{1+\sin\frac{\pi}{z}}{1+z}.$

$a_1 = z_1 = -1$ pol de ordin 1 pentru f.

$a_2 = z_2 = 0$ punct singular esenţial pentru f.

Se reprezintă.

•Se aplică teorema reziduurilor:

$a_1 = z_1 = -1 \in \operatorname{Int}\gamma$, deoarece $a > 1$; $a_2 = z_2 = 0 \in \operatorname{Int}\gamma$.

Se alege D simplu conex a.î. $\gamma \cup \operatorname{Im}\gamma \subset D$ şi $f \in \mathcal{H}(D \setminus \{0,-1\}) \underset{\text{pe dom. s. conexe}}{\overset{\text{teor. reziduurilor}}{\Rightarrow}}$

$\mathcal{I} = 2\pi\,\mathrm{j}\cdot(\operatorname{rez}(f;0) + \operatorname{rez}(f;-1)).$

•Se aplică teorema de calcul a reziduurilor:

$\operatorname{rez}(f;-1) \underset{\text{conform 2.}}{\overset{-1\text{ e pol de ordin 1}}{=}} \lim\limits_{z\to-1}((z-(-1))f(z)) = \lim\limits_{z\to-1}\left((z+1)\dfrac{1+\sin\frac{\pi}{z}}{1+z}\right) = \lim\limits_{z\to-1}\left(1+\sin\frac{\pi}{z}\right) = 1$

$\operatorname{rez}(f;0) \underset{\text{conform 1.}}{\overset{0\text{ e punct sing. esenţial}}{=}} c_{-1}$ =coef. lui $\dfrac{1}{z-0}$ din dezvoltarea în serie Laurent a f în "jurul" lui 0, pe $\Delta(0;\varepsilon,r_2)$, cu $\varepsilon > 0$ foarte mic.

Se scrie $f(z) = \dfrac{1+\sin\frac{\pi}{z}}{1+z} = \dfrac{1}{1+z}\left(1+\sin\frac{\pi}{z}\right).$

$\dfrac{1}{1-(-z)} \overset{(*)\text{ cu } z\rightsquigarrow -z}{=} 1 - z + z^2 - z^3 + ... + (-1)z^n + ..., \forall z \in \mathbb{C}$ cu $|-z| < 1$, adică $|z| < 1$.

$1+\sin\frac{\pi}{z} \overset{(4)\text{ cu } z\rightsquigarrow\frac{\pi}{z}}{=} 1 + \dfrac{1}{1!}\left(\dfrac{\pi}{z}\right) - \dfrac{1}{3!}\left(\dfrac{\pi}{z}\right)^3 + ... + \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\dfrac{\pi}{z}\right)^{2n+1} + ..., \forall z \in \mathbb{C}$ cu $\dfrac{\pi}{z} \in \mathbb{C}$,

adică $0 < |z|$.

Atunci, pe domeniul comun de convergenţă a dezvoltărilor anterioare în serie$\Rightarrow$

$$f(z) = \left(1 - z + z^2 - z^3 + ... + (-1)^n z^n + ...\right)\cdot$$
$$\cdot\left(1 + \frac{1}{1!}\frac{\pi}{z} - \frac{1}{3!}\frac{\pi^3}{z^3} + ... + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{\pi^{2n+1}}{z^{2n+1}} + ...\right) \underset{\text{doar termenul cu } c_{-1}}{\overset{\text{se scrie din dezvoltarea L.}}{=}}$$
$$= ... + \left(\frac{\pi}{1!} - \frac{\pi^3}{3!} + \frac{\pi^5}{5!} + ... + \frac{(-1)^n\pi^{2n+1}}{(2n+1)!} + ...\right)\frac{1}{z} + ..., \forall z \in \mathbb{C} \text{ cu } 0 < |z| < 1.$$

Se observă că $z_2 = 0$ punct singular esenţial pentru f şi din faptul că partea principală a dezvoltării Laurent anterioare are o infinitate de termeni. În plus,

$\operatorname{rez}(f;0) = c_{-1} = \dfrac{1}{1!}\pi - \dfrac{1}{3!}\pi^3 + \dfrac{1}{5!}\pi^5 + ... + \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}\pi^{2n+1} + ... \overset{(4)}{=} \sin\pi = 0.$

•Se înlocuieşte $\mathcal{I} = 2\pi\,\mathrm{j}\cdot(1+0) = 2\pi\,\mathrm{j}$.

Exemplul 6.1.4. Să se calculeze

$\mathcal{I} = \displaystyle\int_{|z|=R} \frac{1}{z(z^2+4)^2}dz$, unde $R > 2$.

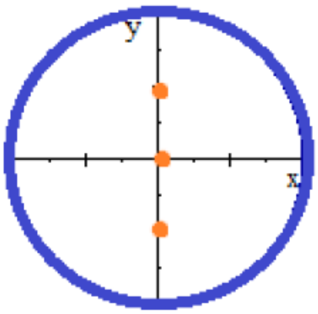
Rezolvare. etapele $1,2,3$ - calculul integralei cu definiţia. Nu, din cauză că este greu de exprimat

$f(z) = u(x,y) + \mathrm{j}\, v(x,y)$

<u>etapa 4</u> - calculul integralei cu teoremele Cauchy. Este posibil, temă.

<u>etapa 5</u> -calculul integralei cu teoria reziduurilor.

•Se reprezintă curba $\gamma : |z| = R, R > 2 > 0$. Este un cerc centrat în 0 şi de rază R. Este curbă netedă, simplă, închisă.



•Se determină punctele singulare izolate ale

$f(z) = \dfrac{1}{z\left(z^2+4\right)^2}$

$a_1 = z_1 = 0$ pol de ordin 1 pentru f,

$a_2 = z_2 = 2\,\mathrm{j}$ pol de ordin 2 pentru f,

$a_3 = z_3 = -2\,\mathrm{j}$ pol de ordin 2 pentru f.

Se reprezintă.

•Se aplică teorema reziduurilor:

$a_1 = 0 \in \operatorname{Int}\gamma, a_2 = 2\,\mathrm{j} \in \operatorname{Int}\gamma; a_3 = -2\,\mathrm{j} \in \operatorname{Int}\gamma.$

Se alege D simplu conex a.î. $\gamma \cup \operatorname{Im}\gamma \subset D$ şi $f \in \mathcal{H}(D \setminus \{0, 2\,\mathrm{j}, -2\,\mathrm{j}\}) \underset{\text{pe dom. s. conexe}}{\overset{\text{teor. reziduurilor}}{\Longrightarrow}}$

$\mathcal{I} = 2\pi\,\mathrm{j} \cdot (\operatorname{rez}(f;0) + \operatorname{rez}(f;2\,\mathrm{j}) + \operatorname{rez}(f;-2\,\mathrm{j}))\,.$

•Se aplică teorema de calcul a reziduurilor

$$\operatorname{rez}(f;0) \underset{\text{conform } 2^{\cdot}}{\overset{0 \text{ e pol de ordin } 1}{=}} \lim_{z\to 0}\left((z-0)\, f(z)\right) = \lim_{z\to 0}\left((z-0)\,\frac{1}{z\left(z^2+4\right)^2}\right) = \frac{1}{2^4}.$$

$$\operatorname{rez}(f;2\,\mathrm{j}) \underset{\text{conform } 2^{\cdot}}{\overset{\mathrm{j}\,a \text{ e pol de ordin } 2}{=}} \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 2\,\mathrm{j}}\left(\left((z-2\,\mathrm{j})^2 f(z)\right)^{(2-1)}\right) =$$

$$= \lim_{z\to 2\,\mathrm{j}}\left((z-2\,\mathrm{j})^2\,\frac{1}{z\,(z-2\,\mathrm{j})^2\,(z+2\,\mathrm{j})^2}\right)' = \lim_{z\to 2\,\mathrm{j}} -\left(\frac{(z+2\,\mathrm{j})^2 + z\cdot 2\cdot(z+2\,\mathrm{j})}{\left(z\,(z+2\,\mathrm{j})^2\right)^2}\right) =$$

$$= \lim_{z\to 2\,\mathrm{j}}\left(-\frac{3z+2\,\mathrm{j}}{z^2\,(z+2\,\mathrm{j})^3}\right) = -\frac{3\cdot 2\,\mathrm{j}+2\,\mathrm{j}}{(2\,\mathrm{j})^2\,(2\,\mathrm{j}+2\,\mathrm{j})^3} = -\frac{1}{2\,(2\,\mathrm{j})^4} = -\frac{1}{2\cdot 2^4}.$$

$$\operatorname{rez}(f;-2\,\mathrm{j}) \underset{\text{conform } 2^{\cdot}}{\overset{-\mathrm{j}\,a \text{ e pol de ordin } 2}{=}} \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to -2\,\mathrm{j}}\left(\left((z+2\,\mathrm{j})^2 f(z)\right)^{(2-1)}\right) =$$

$$= \lim_{z\to -2\,\mathrm{j}}\left((z+2\,\mathrm{j})^2\,\frac{1}{z\,(z-2\,\mathrm{j})^2\,(z+2\,\mathrm{j})^2}\right)' = \lim_{z\to -2\,\mathrm{j}}\left(-\frac{(z-2\,\mathrm{j})^2 + z\cdot 2\cdot(z-2\,\mathrm{j})}{\left(z\,(z-2\,\mathrm{j})^2\right)^2}\right) =$$

$$= \lim_{z\to -2\,\mathrm{j}}\left(-\frac{z-2\,\mathrm{j}+z\cdot 2}{z^2\,(z-2\,\mathrm{j})^3}\right) = -\frac{3\,(-2\,\mathrm{j})-2\,\mathrm{j}}{(-2\,\mathrm{j})^2\,(-2\,\mathrm{j}-2\,\mathrm{j})^3} = -\frac{4}{(-2\,\mathrm{j})\,(-4\,\mathrm{j})^3} = -\frac{1}{2\cdot 2^4}.$$

•Se înlocuieşte $\mathcal{I} = 2\pi\,\mathrm{j}\cdot\left(\dfrac{1}{2^4} + \left(-\dfrac{1}{2\cdot 2^4}\right) + \left(-\dfrac{1}{2\cdot 2^4}\right)\right) = 0.$

6.2. Calcul de integrale reale cu teoria reziduurilor (un singur tip)

Se face convenţia să se prezinte fără demonstraţie, fără a preciza reziduul unei funcţii în $\infty_{\mathbb{C}}$ şi fără a prezenta lemele lui Jordan ca aplicaţii ale Teoremei Reziduurilor, următoarea teoremă, utilă în determinarea Transformatei Fourier a unei funcţii:

Teorema 6.2.1. Fie $a > 0$ şi

$$\mathcal{I} = \int_{-\infty}^{\infty} R(x)\, e^{\mathrm{j}\, ax} dx,\ \mathcal{I}_1 = \int_{-\infty}^{\infty} R(x) \cos(ax)\, dx, \mathcal{I}_2 = \int_{-\infty}^{\infty} R(x) \sin(ax)\, dx.$$

Dacă $R = \dfrac{P}{Q}, P, Q \in \mathbb{R}[x], \operatorname{grad} Q \geq \operatorname{grad} P + 1, Q(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, atunci:

$$\mathcal{I} = 2\pi\, \mathrm{j} \sum_{k=1}^{n} \operatorname{rez}(f; z_k), \mathcal{I}_1 = \operatorname{Re} \mathcal{I}, \mathcal{I}_2 = \operatorname{Im} \mathcal{I},$$

unde $f(z) = R(z)\, e^{\mathrm{j}\, az}$, iar z_k sunt acei poli ai f cu $\operatorname{Im} z_k > 0$.

Exemplul 6.2.1. Să se calculeze $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 - 2x + 10} dx$.

Rezolvare. Fie

$$\mathcal{I}_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 2x + 10} dx, \mathcal{I}_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 - 2x + 10} dx. \text{ Atunci:}$$

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 + \mathrm{j}\, \mathcal{I}_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\cos x + \mathrm{j} \sin x)}{x^2 - 2x + 10} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2 - 2x + 10} e^{\mathrm{j}\, x} dx$$

Se observă că

$a = 1$.

$P(x) = x; \operatorname{grad} P = 1;$

$Q(x) = x^2 - 2x + 10; \operatorname{grad} Q = 1;$

$\operatorname{grad} Q \geq \operatorname{grad} P + 1.$

$\Delta = -36 \Rightarrow Q(x) \neq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$

Conform Teoremei 1 $\Rightarrow$

$$\mathcal{I} = 2\pi\, \mathrm{j} \sum_{k=1}^{n} \operatorname{rez} f(z_k), \text{cu } \operatorname{Im} z_k > 0.$$

Aici $f(z) = \dfrac{z}{z^2 - 2z + 10} e^{\mathrm{j}\, z}$ are $z_{1,2} = 1 \pm 3\,\mathrm{j}$ poli de ordin 1, cu $\operatorname{Im} z_1 = +3 > 0$. Deci

$$\mathcal{I} = 2\pi\, \mathrm{j} \operatorname{rez} f(1 + 3\,\mathrm{j}) \overset{1+3\,\mathrm{j}\ \text{e pol de ordin 1}}{\underset{\text{conform 2.}}{=}} 2\pi\, \mathrm{j} \lim_{z \to 1 + 3\,\mathrm{j}} \left((z - 1 - 3\,\mathrm{j}) \frac{z}{(z - 1 - 3\,\mathrm{j})(z - 1 + 3\,\mathrm{j})} e^{\mathrm{j}\, z} \right) =$$

$$= 2\pi\, \mathrm{j} \frac{1 + 3\,\mathrm{j}}{(1 + 3\,\mathrm{j} - 1 + 3\,\mathrm{j})} e^{\mathrm{j}(1+3\,\mathrm{j})} = \frac{\pi(1 + 3\,\mathrm{j})\, e^{-3+\mathrm{j}}}{3} = \frac{\pi e^{-3}(1 + 3\,\mathrm{j})(\cos 1 + \mathrm{j} \sin 1)}{3} =$$

$$= \frac{\pi e^{-3}}{3}(\cos 1 - 3 \sin 1) + \mathrm{j}\, \frac{\pi e^{-3}}{3}(3 \cos 1 + \sin 1).$$

Atunci $\mathcal{I}_2 = \dfrac{\pi e^{-3}}{3}(3 \cos 1 + \sin 1)$.

Exemplul 6.2.2. Să se calculeze

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\,\mathrm{j}\, x}}{x^4 + 8x^2 + 16} dx$; **b)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\mathrm{j}\, x}}{x^2 - 2\,\mathrm{j}\, x - 2} dx$.

Rezolvare. A se vedea Seminar.