SEMINAR NR. 10, REZOLVĂRI
Matematici Speciale, AIA

9.1. TRANSFORMATA FOURIER

Definiţia 1. a) O funcţie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (sau $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$) se numeşte *funcţie absolut integrabilă pe* $\mathbb{R}$ sau *funcţie din* $L^1(\mathbb{R})$ dacă $\exists \int_{\mathbb{R}} |g(t)|\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|\, dt < +\infty$.
Definiţia 2. Fie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (sau $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$), $g \in L^1(\mathbb{R})$. Funcţia

$$\boxed{G : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, G(\omega) = \int_{\mathbb{R}} g(t)\, e^{-\mathrm{j}\,\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, e^{-\mathrm{j}\,\omega t} dt}$$

se numeşte *transformata Fourier a funcţiei* g sau *imaginea funcţiei* g *prin transformata Fourier* (sau *funcţie de densitate spectrală, spectru în frecvenţă, funcţie de distribuţie a frecvenţelor* cu notaţia $\widehat{g}(\omega)$).

Se notează $\boxed{G(\omega) = \mathcal{F}\{g(t)\}(\omega)}$ sau $\boxed{G(\omega) = \widehat{g}(\omega)\,.}$

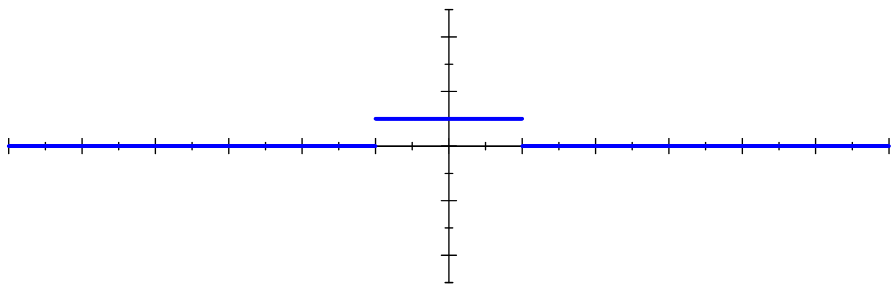
Deoarece $e^{-\mathrm{j}\,\omega t} = \cos(\omega t) - \mathrm{j}\sin(\omega t)$, funcţiile

$$\boxed{G_c(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\cos(\omega t)\, dt = \operatorname{Re} G(\omega) \text{ şi } G_s(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\sin(\omega t)\, dt = -\operatorname{Im} G(\omega)}$$

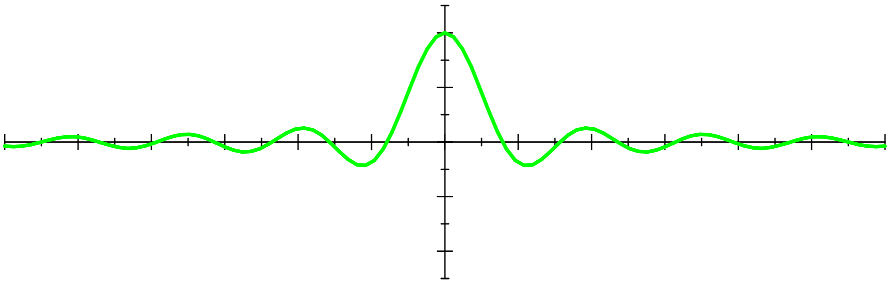
se numesc *transformatele Fourier ale funcţiei* g *prin* cos, respectiv *prin* sin.
Teorema 1. (teorema fundamentală a transformatei Fourier) Dacă $g \in L^1(\mathbb{R})$ atunci integrala improprie pe interval nemărginit din Definiţie, cu parametrul $\omega \in \mathbb{R}$, este absolut convergentă şi uniform convergentă pe $\mathbb{R}$, adică transformata Fourier G este bine definită. Mai mult, este continuă şi mărginită pe $\mathbb{R}$, cu $\lim\limits_{|\omega|\to\infty} G(\omega) = 0$.
Operatorul $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R};\mathbb{C})$ se numeşte *operatorul Fourier (transformarea Fourier).*
Observaţii. A se vedea Curs.

Exerciţiul 1. Să se determine transformata Fourier pentru:
a) $g_\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g_\tau(t) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } |t| \le \tau \\ 0, & \text{dacă } |t| > \tau, \end{cases}$,unde $\tau > 0$

(*semnalul rectangular, fereastra dreptunghiulară, poarta temporală*)
Rezolvare. A se vedea Curs.



Se obţine $G : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, G(\omega) = 2\tau \cdot \dfrac{\sin(\omega\tau)}{\omega\tau}$, cu reprezentarea



Deoarece semnalul rectangular g este un semnal real şi par (grafic simetric faţă de axa verticală), atunci spectrul G este real şi par.

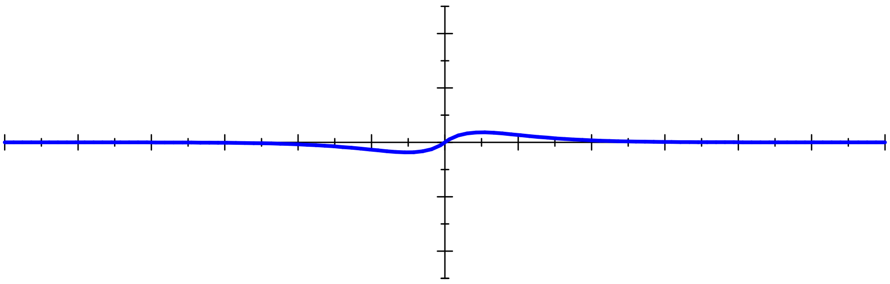
Comentariu: Se arată în Curs că

- dacă $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g \in L^1(\mathbb{R})$ este un semnal real aleator, atunci partea reală a spectrului $\operatorname{Re} G(\omega)$ şi modulul spectrului $A(\omega) = |G(\omega)|$ sunt funcţii pare, iar partea imaginară a spectrului $\operatorname{Im} G(\omega)$ şi faza spectrului $\Phi(\omega) = \arg G(\omega)$ sunt funcţii impare;

- dacă $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g \in L^1(\mathbb{R})$ este un semnal real şi par, atunci spectrul $G(\omega)$ este real şi par, unde $\operatorname{Re} G(\omega) = G_c(\omega)$

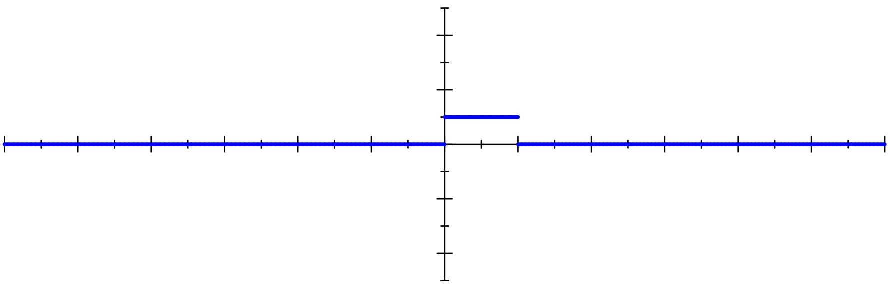
- dacă $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g \in L^1(\mathbb{R})$ este un semnal real şi impar, atunci spectrul $G(\omega)$ este pur imaginar şi $\operatorname{Im} G(\omega)$ este impar, unde $-\operatorname{Im} G(\omega) = G_s(\omega)$.

b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(t) = te^{-|t|}$;-temă.



c) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(t) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } t \in [0,2] \\ 0, & \text{dacă } t \in \left]-\infty, 0\right[\cup \left]2, \infty\right[\end{cases}$

Rezolvare.



•Se observă că $g \in L^1(\mathbb{R})$, deoarece

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|\, dt \overset{(C)}{=} \int_{-\infty}^{0} |0|\, dt + \int_{0}^{2} |1|\, dt + \int_{2}^{+\infty} |0|\, dt = 2 < +\infty.$$

•Se calculează

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, e^{-\mathrm{j}\,\omega t} dt = \int_{-\infty}^{0} 0 e^{-\mathrm{j}\,\omega t} dt + \int_{0}^{2} 1 e^{-\mathrm{j}\,\omega t} dt + \int_{2}^{+\infty} 0 e^{-\mathrm{j}\,\omega t} dt \overset{t \text{ este variabilă}}{\underset{\text{de integrare}}{=}}$$

$$= 0 + \left.\frac{e^{-\mathrm{j}\,\omega t}}{-\mathrm{j}\,\omega}\right|_{t=0}^{t=2} + 0 = \frac{e^{-\mathrm{j}\,\omega 2} - e^{-\mathrm{j}\,\omega 0}}{-\mathrm{j}\,\omega} = \frac{\mathrm{j}}{\omega}\left(\cos(-2\omega) + \mathrm{j}\sin(-2\omega) - 1\right) =$$

$$= \frac{1}{\omega}\left(\sin(2\omega) - \mathrm{j}\left(1 - \cos(2\omega)\right)\right) = \frac{1}{\omega}\sin(2\omega) + \mathrm{j}\,\frac{-1}{\omega}\left(1 - \cos(2\omega)\right).$$

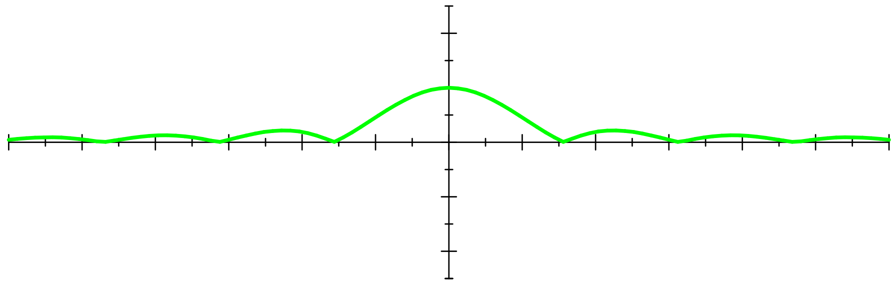
Deci $G : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, G(\omega) = \underbrace{\frac{1}{\omega}\sin(2\omega)}_{\operatorname{Re} G(\omega),\ \text{pară}} + \mathrm{j}\underbrace{\frac{-1}{\omega}\left(1 - \cos(2\omega)\right)}_{\operatorname{Im} G(\omega),\ \text{impară}}.$

Se scrie şi că $\mathcal{F}\{g(t)\}(\omega) = \frac{1}{\omega}\sin(2\omega) + \mathrm{j}\,\frac{-1}{\omega}\left(1 - \cos(2\omega)\right).$

Din grafic, se observă că semnalul g nu este nici par (grafic simetric faţă de axa verticală), nici impar (grafic simetric faţă de origine). Se observă că partea reală şi modulul spectrului sunt funcţii pare, iar partea imaginară şi faza spectrului sunt funcţii impare.

Mai mult, pentru această transformată, care are ca valoare o un număr complex, amplitudinea în frecvenţă este

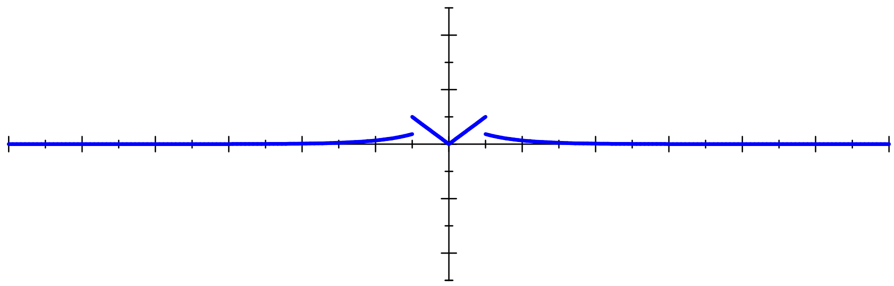
$A(\omega) = |G(\omega)| = \sqrt{\left(\frac{1}{\omega}\sin(2\omega)\right)^2 + \left(\frac{-1}{\omega}\left(1 - \cos(2\omega)\right)\right)^2} = 2\left|\frac{\sin\omega}{\omega}\right|$ cu reprezentarea:



d) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(t) = \begin{cases} |t|, & \text{dacă } |t| \le 1 \\ e^{-|t|}, & \text{dacă } |t| > 1 \end{cases}$

Rezolvare. Fie

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(t) = \begin{cases} |t|, & \text{dacă } t \in [-1, 1] \\ e^{-|t|}, & \text{dacă } t \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[\end{cases} = \begin{cases} e^{t}, & \text{dacă } t \in]-\infty, -1[\\ -t, & \text{dacă } t \in [-1, 0] \\ t, & \text{dacă } t \in]0, 1] \\ e^{-t}, & \text{dacă } t \in]1, +\infty[\end{cases}$$



•Se observă că $g \in L^1(\mathbb{R})$, deoarece

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|\, dt \overset{(C)}{=} \int_{-\infty}^{-1} \left|e^{t}\right| dt + \int_{-1}^{0} |-t|\, dt + \int_{0}^{1} |t|\, dt + \int_{1}^{+\infty} \left|e^{-t}\right| dt = 2e^{-1} + 1 < +\infty.$$

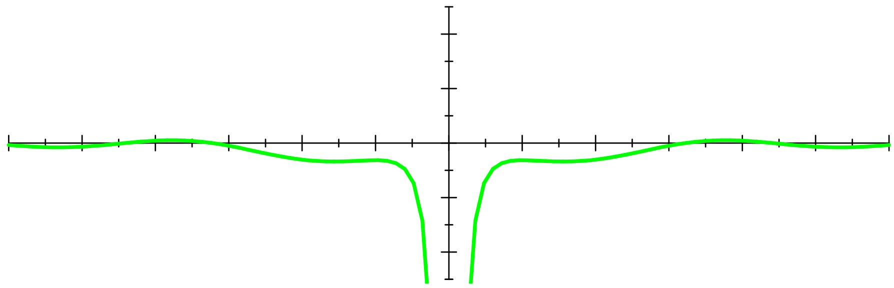
•Se calculează

$$G(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, e^{-\mathrm{j}\,\omega t}dt=$$
$$=\int_{-\infty}^{-1} e^{t}\cdot e^{-\mathrm{j}\,\omega t}dt+\int_{-1}^{0}(-t)\, e^{-\mathrm{j}\,\omega t}dt+\int_{0}^{1} t e^{-\mathrm{j}\,\omega t}dt+\int_{1}^{+\infty} e^{-t}\cdot e^{-\mathrm{j}\,\omega t}dt \underset{\text{de integrare, derivare}}{\overset{t\text{ este variabilă}}{=}}$$
$$=\int_{-\infty}^{-1} e^{(1-\mathrm{j}\,\omega)t}dt+\int_{-1}^{0}(-t)\left(\frac{e^{-\mathrm{j}\,\omega t}}{-\mathrm{j}\,\omega}\right)'dt+\int_{0}^{1} t\left(\frac{e^{-\mathrm{j}\,\omega t}}{-\mathrm{j}\,\omega}\right)'dt+\int_{1}^{+\infty} e^{(-1-\mathrm{j}\,\omega)t}dt \underset{\text{de integrare}}{\overset{t\text{ este variabilă}}{=}}$$
$$=\left.\frac{e^{(1-\mathrm{j}\,\omega)t}}{1-\mathrm{j}\,\omega}\right|_{t\to-\infty}^{t=-1}+\left.(-t)\,\frac{e^{-\mathrm{j}\,\omega t}}{-\mathrm{j}\,\omega}\right|_{t=-1}^{t=0}-\int_{-1}^{0}(-1)\,\frac{e^{-\mathrm{j}\,\omega t}}{-\mathrm{j}\,\omega}dt+\left.t\frac{e^{-\mathrm{j}\,\omega t}}{-\mathrm{j}\,\omega}\right|_{t=0}^{t=1}-\int_{0}^{1}\frac{e^{-\mathrm{j}\,\omega t}}{-\mathrm{j}\,\omega}dt+\left.\frac{e^{(-1-\mathrm{j}\,\omega)t}}{-1-\mathrm{j}\,\omega}\right|_{t=1}^{t=+\infty}=$$
$$=\frac{e^{(1-\mathrm{j}\,\omega)(-1)}}{1-\mathrm{j}\,\omega}-0+0-(+1)\,\frac{e^{-\mathrm{j}\,\omega(-1)}}{-\mathrm{j}\,\omega}+\left.\frac{e^{-\mathrm{j}\,\omega t}}{(-\mathrm{j}\,\omega)(-\mathrm{j}\,\omega)}\right|_{t=-1}^{t=0}+1\frac{e^{-\mathrm{j}\,\omega 1}}{-\mathrm{j}\,\omega}-0-$$
$$-\left.\frac{e^{-\mathrm{j}\,\omega t}}{(-\mathrm{j}\,\omega)(-\mathrm{j}\,\omega)}\right|_{t=0}^{t=1}+0-\frac{e^{(-1-\mathrm{j}\,\omega)1}}{-1-\mathrm{j}\,\omega}=$$
$$=\frac{e^{-1+\mathrm{j}\,\omega}}{1-\mathrm{j}\,\omega}-\frac{e^{-1-\mathrm{j}\,\omega}}{-1-\mathrm{j}\,\omega}-\frac{e^{\mathrm{j}\,\omega}}{-\mathrm{j}\,\omega}+\frac{e^{-\mathrm{j}\,\omega 1}}{-\mathrm{j}\,\omega}+\frac{1}{(-\mathrm{j}\,\omega)(-\mathrm{j}\,\omega)}-\frac{e^{-\mathrm{j}\,\omega(-1)}}{(-\mathrm{j}\,\omega)(-\mathrm{j}\,\omega)}-$$
$$-\frac{e^{-\mathrm{j}\,\omega 1}}{(-\mathrm{j}\,\omega)(-\mathrm{j}\,\omega)}+\frac{1}{(-\mathrm{j}\,\omega)(-\mathrm{j}\,\omega)}=$$
$$=\frac{e^{-1+\mathrm{j}\,\omega}}{1-\mathrm{j}\,\omega}+\frac{e^{-1-\mathrm{j}\,\omega}}{1+\mathrm{j}\,\omega}+\frac{e^{\mathrm{j}\,\omega}}{\mathrm{j}\,\omega}-\frac{e^{-\mathrm{j}\,\omega}}{\mathrm{j}\,\omega}-\frac{2}{\omega^2}-\frac{e^{\mathrm{j}\,\omega}}{(\mathrm{j}\,\omega)^2}-\frac{e^{-\mathrm{j}\,\omega}}{(\mathrm{j}\,\omega)^2}=$$
$$=\frac{e^{-1+\mathrm{j}\,\omega}(1+\mathrm{j}\,\omega)+e^{-1-\mathrm{j}\,\omega}(1-\mathrm{j}\,\omega)}{1+\omega^2}+\frac{2}{\omega}\frac{e^{\mathrm{j}\,\omega}-e^{-\mathrm{j}\,\omega}}{2\mathrm{j}}-\frac{2}{\omega^2}+\frac{2}{\omega^2}\frac{e^{\mathrm{j}\,\omega}+e^{-\mathrm{j}\,\omega}}{2}=$$
$$=\frac{2e^{-1}}{1+\omega^2}\left(\frac{e^{\mathrm{j}\,\omega}+e^{-\mathrm{j}\,\omega}}{2}-\omega\frac{e^{\mathrm{j}\,\omega}-e^{-\mathrm{j}\,\omega}}{2\mathrm{j}}\right)+\frac{2}{\omega}\frac{e^{\mathrm{j}\,\omega}-e^{-\mathrm{j}\,\omega}}{2\mathrm{j}}-\frac{2}{\omega^2}+\frac{2}{\omega^2}\frac{e^{\mathrm{j}\,\omega}+e^{-\mathrm{j}\,\omega}}{2}=$$
$$=\frac{2e^{-1}}{1+\omega^2}(\cos\omega-\omega\sin\omega)+\frac{2}{\omega}\sin\omega-\frac{2}{\omega^2}+\frac{2}{\omega^2}\cos\omega.$$

Deci $G:\mathbb{R}\to\mathbb{C}, G(\omega)=\dfrac{2e^{-1}}{1+\omega^2}(\cos\omega-\omega\sin\omega)+\dfrac{2}{\omega^2}(\cos\omega+\omega\sin\omega-2)$ sau

$$\mathcal{F}\{g(t)\}(\omega)=\frac{2e^{-1}}{1+\omega^2}(\cos\omega-\omega\sin\omega)+\frac{2}{\omega^2}(\cos\omega+\omega\sin\omega-2)+\mathrm{j}\cdot 0.$$

Deoarece $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g\in L^1(\mathbb{R})$ este un semnal real şi par, atunci spectrul G este real şi par.



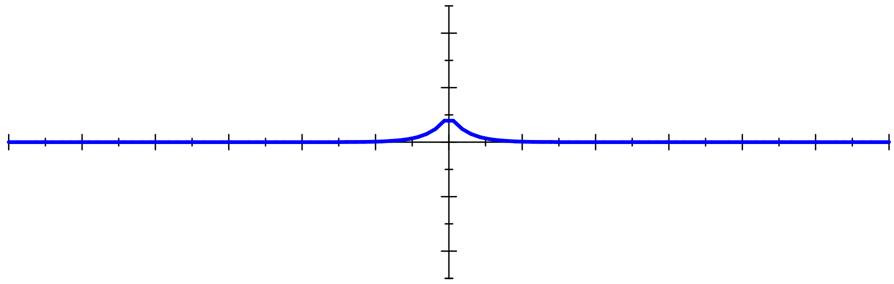
De menţionat o teoremă de la calculul de integrale reale cu reziduuri, rescrisă:

T 1. Fie $\mathcal{I}=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(t)}{Q(t)}e^{-\mathrm{j}\,\omega t}dt$, $a=-\omega>0$, unde
$P,Q\in\mathbb{R}[t]$, $\operatorname{grad}Q\geq\operatorname{grad}P+1, Q(t)\neq 0, \forall t\in\mathbb{R}$. Atunci:

$$\mathcal{I}=2\pi\,\mathrm{j}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{rez} f(z_k),\ \text{ unde } f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}e^{-\mathrm{j}\,\omega z},\text{ iar } z_k \text{ sunt acei poli cu } \operatorname{Im} z_k>0.$$

Exercițiul 2. Să se determine transformata Fourier pentru:
a) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(t)=e^{-a|t|}$, unde $a>0$ (*semnalul simetric exponențial căzător,* cu $a=\omega_0$);

Rezolvare. Fie $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(t)=\begin{cases} e^{at}, & \text{dacă } t<0,\\ 1, & \text{dacă } t=0,\\ e^{-at}, & \text{dacă } t>0.\end{cases}$



•Se observă că $g\in L^1(\mathbb{R})$, deoarece

$$\int_{-\infty}^{\infty}|g(t)|\,dt \overset{(C)}{=} \int_{-\infty}^{0}\left|e^{at}\right|dt+\int_{0}^{+\infty}\left|e^{-at}\right|dt \underset{\text{de integrare}}{\overset{t \text{ este variabilă}}{=}} \left.\frac{e^{at}}{a}\right|_{t\to-\infty}^{t=0}+\left.\frac{e^{-at}}{-a}\right|_{t=0}^{t\to+\infty}=$$

$$=\frac{e^{a\cdot 0}}{a}-\lim_{t\to-\infty}\frac{e^{at}}{a}+\lim_{t\to+\infty}\frac{e^{-at}}{-a}-\frac{e^{-a\cdot 0}}{-a}=\frac{1}{a}-0+0-\frac{1}{-a}=\frac{2}{a}<+\infty$$

SAU

$$\int_{-\infty}^{\infty}|g(t)|\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a|t|}dt \underset{\text{pară pe interval simetric}}{\overset{(C)}{=}} 2\int_{0}^{+\infty}e^{-at}dt \underset{\text{de integrare}}{\overset{t \text{ este variabilă}}{=}} 2\left.\frac{e^{-at}}{-a}\right|_{t=0}^{t\to+\infty}=$$

$$=2\left(\lim_{t\to+\infty}\frac{e^{-at}}{-a}-\frac{e^{-a\cdot 0}}{-a}\right)\overset{a>0}{=}2\left(0-\frac{1}{-a}\right)=\frac{2}{a}<+\infty.$$

•Se calculează

$$G(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}g(t)\,e^{-\mathrm{j}\,\omega t}dt=\int_{-\infty}^{0}e^{-a(-t)}e^{-\mathrm{j}\,\omega t}dt+\int_{0}^{+\infty}e^{-at}e^{-\mathrm{j}\,\omega t}dt=$$

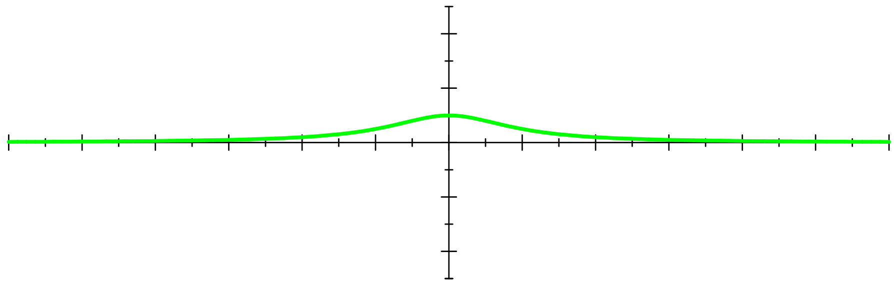
$$=\int_{-\infty}^{0}e^{(a-\mathrm{j}\,\omega)t}dt+\int_{0}^{+\infty}e^{(-a-\mathrm{j}\,\omega)t}dt \underset{\text{de integrare}}{\overset{t \text{ este variabilă}}{=}} \left.\frac{e^{(a-\mathrm{j}\,\omega)t}}{(a-\mathrm{j}\,\omega)}\right|_{t\to-\infty}^{t=0}+\left.\frac{e^{(-a-\mathrm{j}\,\omega)t}}{(-a-\mathrm{j}\,\omega)}\right|_{t=0}^{t\to+\infty}=$$

$$=\left.\frac{e^{at}\left(\cos(\omega t)+\mathrm{j}\sin(\omega t)\right)}{(a-\mathrm{j}\,\omega)}\right|_{t\to-\infty}^{t=0}+\left.\frac{e^{-at}\left(\cos(-\omega t)+\mathrm{j}\sin(-\omega t)\right)}{(-a-\mathrm{j}\,\omega)}\right|_{t=0}^{t\to+\infty}=$$

$$=\frac{e^{(a-\mathrm{j}\,\omega)0}}{(a-\mathrm{j}\,\omega)}-\lim_{t\to-\infty}\frac{e^{at}\left(\cos(\omega t)+\mathrm{j}\sin(\omega t)\right)}{(a-\mathrm{j}\,\omega)}+\lim_{t\to+\infty}\frac{e^{-at}\left(\cos(-\omega t)+\mathrm{j}\sin(-\omega t)\right)}{(-a-\mathrm{j}\,\omega)}-\frac{e^{(-a-\mathrm{j}\,\omega)0}}{(-a-\mathrm{j}\,\omega)}=$$

$$=\frac{1}{(a-\mathrm{j}\,\omega)}-0+0-\frac{1}{(-a-\mathrm{j}\,\omega)}=\frac{a+\mathrm{j}\,\omega+a-\mathrm{j}\,\omega}{(a-\mathrm{j}\,\omega)(a+\mathrm{j}\,\omega)}=\frac{2a}{a^2+\omega^2}.$$

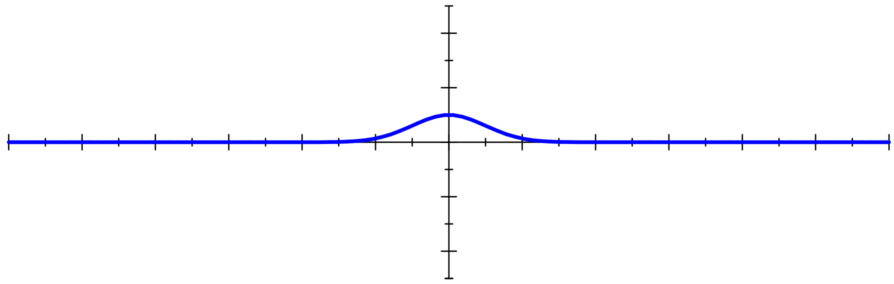
Deci $G:\mathbb{R}\to\mathbb{C}, G(\omega)=\dfrac{2a}{a^2+\omega^2}$ sau $\boxed{\mathcal{F}\{g(t)\}(\omega)=\mathcal{F}\left\{e^{-a|t|}\right\}(\omega)=\dfrac{2a}{a^2+\omega^2}.}$



Deoarece $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g\in L^1(\mathbb{R})$ este un semnal real şi par, atunci spectrul G este real şi par şi $G_c(\omega)=\mathrm{Re}\,(G(\omega))$.

b) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(t)=e^{-a^2t^2}$, unde $a>0$ (*semnalul Gaussian*).

Rezolvare.



•Se studiază dacă $g\in L^1(\mathbb{R})$, adică

$$\int_{-\infty}^{\infty}|g(t)|\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a^2t^2}dt<+\infty?$$

Se foloseşte $\boxed{\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$ (*integrala Euler-Poisson-Laplace*)

În $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a^2t^2}dt$ (este integrală improprie (C), folosind criterii de integrare), se face schimbarea de variabilă de integrare:

$$\begin{cases} at=s \big|\ \text{se diferenţiază} \\ adt=ds \\ \text{capete pentru } a>0\text{:} \quad \begin{cases} t\to-\infty\Rightarrow s\to-\infty \\ t\to+\infty\Rightarrow s\to+\infty \end{cases}\end{cases}$$

Se obţine

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a^2t^2}dt\overset{(C)}{=}\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-s^2}ds=\frac{1}{a}\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\frac{\sqrt{\pi}}{a}<+\infty.$$

•Se calculează

$$G(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(t)\,e^{-\mathrm{j}\,\omega t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a^2t^2}e^{-\mathrm{j}\,\omega t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a^2\left(t^2+2t\cdot\frac{\mathrm{j}\,\omega}{2a^2}+\left(\frac{\mathrm{j}\,\omega}{2a^2}\right)^2\right)}\cdot e^{-a^2\cdot\left(\frac{\mathrm{j}\,\omega}{2a^2}\right)^2}dt=$$

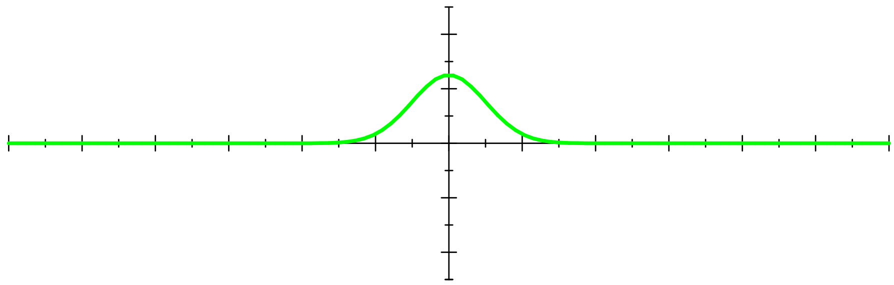
$$\underset{\text{de integrare}}{\overset{t \text{ este variabilă}}{=}} e^{-a^2\cdot\left(\frac{\mathrm{j}\,\omega}{2a^2}\right)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a^2\left(t+\frac{\mathrm{j}\,\omega}{2a^2}\right)^2}dt\overset{(C)}{=}?$$

Se face formal schimbarea de variabilă de integrare (este integrală improprie convergentă, ca transformată Fourier)

$$\begin{cases} t+\frac{\mathrm{j}\,\omega}{2a^2}=u \Big|\ \text{se diferenţiază} \\ dt=du \\ \text{capete:} \quad \begin{cases} t\to-\infty\Rightarrow u\to-\infty \\ t\to+\infty\Rightarrow u\to+\infty \end{cases}\end{cases}$$

$$G(\omega)=e^{-a^2\cdot\left(\frac{\mathrm{j}\,\omega}{2a^2}\right)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a^2u^2}du\overset{\text{integrala calculată}}{=}e^{\frac{-\omega^2}{4a^2}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{a}.$$

Deci $G:\mathbb{R}\to\mathbb{C}, G(\omega)=\frac{\sqrt{\pi}}{a}\cdot e^{\frac{-\omega^2}{4a^2}}$ sau $\boxed{\mathcal{F}\{g(t)\}(\omega)=\mathcal{F}\left\{e^{-a^2t^2}\right\}(\omega)=\frac{\sqrt{\pi}}{a}\cdot e^{\frac{-\omega^2}{4a^2}}.}$

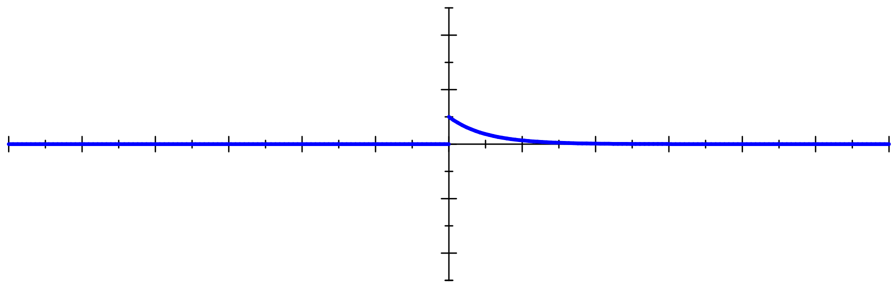


Deoarece $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g\in L^1(\mathbb{R})$ este un semnal real şi par, atunci spectrul G este real şi par şi $G_c(\omega)=\operatorname{Re}(G(\omega))$.

Comentariu: Spectrul unui semnal gaussian este tot gaussian. De menţionat că, pentru $a=\frac{1}{\sqrt{2}}$, semnalul $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(t)=e^{-\frac{1}{2}t^2}$ este un vector propriu pentru operatorul F, deoarece $\mathcal{F}\{g(t)\}(\omega)=\mathcal{F}\left\{e^{-\frac{1}{2}t^2}\right\}(\omega)=\sqrt{2\pi}\cdot e^{\frac{-\omega^2}{2}}$.

c) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(t)=\begin{cases}0, & \text{dacă } t<0\\ e^{-t}, & \text{dacă } t\geq 0,\end{cases}$;

Rezolvare.



•Se observă că $g\in L^1(\mathbb{R})$, deoarece

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|g(t)|\,dt \overset{(C)}{=} \int_{-\infty}^{0}|0|\,dt+\int_{0}^{+\infty}\left|e^{-t}\right|dt=0+\left.\frac{e^{-t}}{-1}\right|_{t=0}^{t\to+\infty}=\lim_{t\to+\infty}\frac{e^{-t}}{-1}-\frac{e^{-0}}{-1}=0+1=1<+\infty.$$

•Se calculează

$$G(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(t)\,e^{-\mathrm{j}\,\omega t}dt \overset{(C)}{=} \int_{-\infty}^{0}0dt+\int_{0}^{+\infty}e^{-t}e^{-\mathrm{j}\,\omega t}dt=0+\int_{0}^{+\infty}e^{(-1-\mathrm{j}\,\omega)t}dt \underset{\text{de integrare}}{\overset{t \text{ este variabilă}}{=}}$$

$$=\left.\frac{e^{(-1-\mathrm{j}\,\omega)t}}{(-1-\mathrm{j}\,\omega)}\right|_{t=0}^{t\to+\infty}=\left.\frac{e^{-t}\left(\cos(-\omega t)+\mathrm{j}\sin(-\omega t)\right)}{(-1-\mathrm{j}\,\omega)}\right|_{t=0}^{t\to+\infty}=$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{e^{-t}\left(\cos(-\omega t)+\mathrm{j}\sin(-\omega t)\right)}{(-1-\mathrm{j}\,\omega)}-\frac{e^{(-1-\mathrm{j}\,\omega)0}}{(-1-\mathrm{j}\,\omega)}=0-\frac{1}{(-1-\mathrm{j}\,\omega)}=\frac{1}{\mathrm{j}\,\omega+1}=\frac{1-\mathrm{j}\,\omega}{1^2+\omega^2}.$$

Deci $G:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, $G(\omega)=\underbrace{\dfrac{1}{1^2+\omega^2}}_{\operatorname{Re}G(\omega),\text{ pară}}+\mathrm{j}\underbrace{\dfrac{-\omega}{1^2+\omega^2}}_{\operatorname{Im}G(\omega),\text{ impară}}$ sau $\mathcal{F}\{g(t)\}(\omega)==\dfrac{1-\mathrm{j}\,\omega}{1^2+\omega^2}$.

Se observă că partea reală şi modulul spectrului G sunt funcţii pare, iar partea imaginară şi faza spectrului sunt funcţii impare.

Comentariu: Se observă că $g(t)=e^{-t}\cdot\eta(t)$ şi că este şi original Laplace. Mai mult, se observă şi corespondenţa dintre

$$\mathcal{L}\left\{e^{-t}\cdot\eta(t)\right\}(s)=\frac{1}{s+1},\operatorname{Re}s>-1 \text{ şi } \mathcal{F}\{g(t)\}(\omega)=\frac{1}{\mathrm{j}\,\omega+1}.$$

d) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(t)=\begin{cases} 0, & \text{dacă } t<0 \\ e^{-3t}, & \text{dacă } t\geq 0, \end{cases}$

şi, în general, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(t)=\begin{cases} 0, & \text{dacă } t<0 \\ e^{-at}, & \text{dacă } t\geq 0, \end{cases}$ unde $a>0$ (interpretat ca produs între exponenţială şi treapta unitate, *semnalul exponenţial căzător,* cu $a=\omega_0$).

Rezolvare. Analog cu c), se obţine că

$$G:\mathbb{R}\to\mathbb{C}, G(\omega)=\frac{3-\mathrm{j}\,\omega}{3^2+\omega^2} \text{ sau } \mathcal{F}\{g(t)\}(\omega)=\frac{3-\mathrm{j}\,\omega}{3^2+\omega^2}..$$

Analog cu c), se obţine că

$$G:\mathbb{R}\to\mathbb{C}, G(\omega)=\underbrace{\frac{a}{a^2+\omega^2}}_{\operatorname{Re}G(\omega),\ \text{pară}}+\mathrm{j}\underbrace{\frac{-\omega}{a^2+\omega^2}}_{\operatorname{Im}G(\omega),\ \text{impară}} \text{ sau } \boxed{\mathcal{F}\{g(t)\}(\omega)=\frac{a-\mathrm{j}\,\omega}{a^2+\omega^2}.}.$$

Se observă că partea reală şi modulul spectrului sunt funcţii pare, iar partea imaginară şi faza spectrului sunt funcţii impare.

e) şi transformata Fourier prin cos pentru:

$$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(t)=\frac{1}{(t^2+1)^2}.$$

Rezolvare. A se vedea Curs.

Teoremele de liniaritate, a spectrului semnalului conjugat, a spectrului semnalului simetric, a scalării variabilei timp, a întârzierii în timp, a întârzierii în frecvenţă -A se vedea Curs.

Teoremele de continuitate a operatorului Fourier, a spectrului semnalului derivat, de derivare a spectrului unui semnal, a spectrului semnalului integrat, de integrare a spectrului unui semnal -A se vedea Curs.

Definiţia 4. Fie $g,h\in L^1(\mathbb{R})$. Se numeşte *produs de convoluţie a funcţiilor din* $L^1(\mathbb{R})$ g *şi* h, funcţia $g*h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (sau $g*h:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$), definită prin

$$\boxed{(g*h)(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau}$$

Teoremele spectrului de convoluţie a două semnale, a autocorelaţiei unui semnal-A se vedea Curs.

Exerciţiul 3. Utilizând Teorema de derivare a spectrului, să se determine $\mathcal{F}\left\{-\mathrm{j}\,t\cdot e^{-a|t|}\right\}(\omega)$, unde $a>0$.

Rezolvare. Fie funcţia $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(t)=e^{-a|t|}$, unde $a>0$;

•În exerciţiul 2 s-a arătat că $g\in L^1(\mathbb{R})$. Analog se arată că $tg\in L^1(\mathbb{R})$, deoarece

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|tg(t)|\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}|t|\,e^{-a|t|}dt=2\int_0^{+\infty}te^{-at}dt \overset{t \text{ este variabilă}}{\underset{\text{de integrare}}{=}} 2\left(-\frac{te^{-at}}{a}-\frac{e^{-at}}{a^2}\right)\Bigg|_{t=0}^{t\to+\infty}=$$

$$=2\left(\lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{te^{-at}}{a}-\frac{e^{-at}}{a^2}\right)-\left(-0-\frac{1}{a^2}\right)\right)\overset{a\geq 0}{=}2\left(0+\frac{1}{a^2}\right)=\frac{2}{a^2}<+\infty.$$

•În exerciţiul 2 s-a arătat că

$$\mathcal{F}\{g(t)\}(\omega)=\mathcal{F}\left\{e^{-a|t|}\right\}(\omega)=\frac{2a}{a^2+\omega^2}.$$

•Conform Teoremei de derivare⇒

$$\mathcal{F}\{-\mathrm{j}\,t\cdot g(t)\}(\omega)=\mathcal{F}\left\{-\mathrm{j}\,t\cdot e^{-a|t|}\right\}(\omega)=\frac{d}{d\omega}\mathcal{F}\{g(t)\}(\omega)=\frac{d}{d\omega}\left(\frac{2a}{a^2+\omega^2}\right)=\frac{-2a\cdot 2\omega}{(a^2+\omega^2)^2}.$$

$$\boxed{\mathcal{F}\left\{-\mathrm{j}\,t\cdot e^{-a|t|}\right\}(\omega)=\frac{-4a\cdot\omega}{(a^2+\omega^2)^2}.}$$

Comentariu: De menţionat că determinarea transformatei precedente se putea face şi direct, cu definiţia.

○**Observaţia 7**. Rezolvarea Exerciţiului $2, b)$ se putea face folosind Teoremele de liniaritate şi de derivare.

Se observă că funcţia $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(t)=e^{-a^2t^2}, a\neq 0$, verifică ecuaţia diferenţială

$(*)\, g'(t)+2a^2t\cdot g(t)=0, \forall t\in\mathbb{R}$ (deoarece $-2a^2t\cdot e^{-a^2t^2}+2a^2t\cdot e^{-a^2t^2}=0, \forall t\in\mathbb{R}$).

Deoarece $g\in L^1(\mathbb{R})$ şi $tg\in L^1(\mathbb{R})$ se poate aplica ecuaţiei $(*)$ transformata Fourier şi se obţine

$\mathcal{F}\left\{g'(t)+2a^2t\cdot g(t)\right\}(\omega)=\mathcal{F}\{0\}(\omega), \forall\omega\in\mathbb{R}.$

Se aplică Teorema de liniaritate$\Rightarrow$

$\mathcal{F}\{g'(t)\}(\omega)+2a^2\cdot\mathcal{F}\{tg(t)\}(\omega)=\mathcal{F}\{0\}(\omega), \forall\omega\in\mathbb{R}\Rightarrow$

$\mathrm{j}\,\omega\cdot\mathcal{F}\{g(t)\}(\omega)+2a^2\cdot\dfrac{1}{-\mathrm{j}}\dfrac{d}{d\omega}\mathcal{F}\{g(t)\}(\omega)=0, \forall\omega\in\mathbb{R}.$

Se notează $G(\omega)=\mathcal{F}\{g(t)\}(\omega)$ şi $G'(\omega)=\dfrac{d}{d\omega}\mathcal{F}\{g(t)\}(\omega)$ şi se obţine că:

$\mathrm{j}\,\omega\cdot G(\omega)+2a^2\cdot\dfrac{1}{-\mathrm{j}}G'(\omega)=0, \forall\omega\in\mathbb{R}\Rightarrow$

$G=0$ soluţie singulară şi $\dfrac{G'(\omega)}{G(\omega)}=\dfrac{-\omega}{2a^2}, \forall\omega\in\mathbb{R}\Big|\int(\cdot)\,d\omega\Rightarrow\int\dfrac{G'(\omega)}{G(\omega)}d\omega=\int\dfrac{-\omega}{2a^2}d\omega$

Atunci toate soluţiile sunt $G(\omega)=c\cdot e^{\frac{-\omega^2}{4a^2}}, \forall\omega\in\mathbb{R}.$

Cum $G(0)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}g(t)\underbrace{e^{-\mathrm{j}\,t0}}_{1}dt\overset{\text{Ex. 2,c)}}{=}\frac{\sqrt{\pi}}{a}\Rightarrow c\cdot e^{\frac{-0^2}{4a^2}}=\frac{\sqrt{\pi}}{a}\Rightarrow c=\frac{\sqrt{\pi}}{a}.$

Deci $G(\omega)=\dfrac{\sqrt{\pi}}{a}\cdot e^{\frac{-\omega^2}{4a^2}}, \forall\omega\in\mathbb{R}$ sau $\boxed{\mathcal{F}\{g(t)\}(\omega)=\mathcal{F}\left\{e^{-a^2t^2}\right\}(\omega)=\dfrac{\sqrt{\pi}}{a}\cdot e^{\frac{-\omega^2}{4a^2}}.}$

Exerciţiul 5. Utilizând Teorema spectrului produsului de convoluíe, să se determine $\mathcal{F}\{g*h\}(\omega)$, unde

$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(t)=\begin{cases}0, & \text{dacă } t<0\\ e^{-t}, & \text{dacă } t\geq 0,\end{cases}$ şi $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, h(t)=e^{-t^2}.$

Rezolvare. A se vedea Curs.

Teorema 15 (**inversarea transformatei Fourier**). Fie $g\in L^1(\mathbb{R})$ a.î. $G\in L^1(\mathbb{R})$. Atunci are loc *formula de inversare a transformatei Fourier*:

$$\boxed{g(t)=\mathcal{F}^{-1}\{G(\omega)\}(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}G(\omega)\cdot e^{\mathrm{j}\,t\omega}d\omega, \forall t\in\mathbb{R}}$$

Comentariu. Dacă $\mathcal{F}\{g(t)\}(\omega)=\mathcal{F}\{h(t)\}(\omega)$, atunci

$g(t)=h(t)$, a.p.t. $t\in\mathbb{R}$.

Egalitatea "aproape peste tot" înseamnă că are loc cu excepţia unei mulţimi de măsură Lebesgue nulă.

Exerciţiul 6. Să se rezolve ecuaţia integrală

$(*) \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega)\, e^{\mathrm{j}\, t\omega} d\omega = e^{-a|t|}, t \in \mathbb{R}$, unde $a > 0$ este dat.

Rezolvare. Se înmulţeşte $(*)$ cu $\frac{1}{2\pi} \Rightarrow \frac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega)\, e^{\mathrm{j}\, t\omega} d\omega = \underbrace{\frac{1}{2\pi} e^{-a|t|}}_{g(t)}, t \in \mathbb{R}$.

Atunci $f = G$ va fi, din Teorema de inversare, transformata Fourier corespunzătoare pentru g.

•Se observă că $g \in L^1(\mathbb{R})$, deoarece

$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \tfrac{1}{2\pi} e^{-a|t|} dt \overset{\text{ex. 2}}{=} \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2}{a} < +\infty.$

•Se calculează

$G(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, e^{-\mathrm{j}\,\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \tfrac{1}{2\pi} e^{-a|t|} e^{-\mathrm{j}\,\omega t} dt \overset{\text{ex. 2}}{=} \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2a}{a^2 + \omega^2}.$

•Se observă că $G \in L^1(\mathbb{R})$, deoarece

$\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |G(\omega)|\, d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2a}{a^2+\omega^2} \right| d\omega \underset{\text{de integrare, } (C)}{\overset{\omega \text{ este variabilă}}{=}} \frac{1}{2\pi} \cdot 2a \cdot \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{\omega}{a} \Bigg|_{\omega\to-\infty}^{\omega\to+\infty} =$

$\overset{a>0}{=} 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2}\right) = 2\pi < +\infty.$

•Conform Teoremei de inversare $\overset{\text{a.p.t.}}{\Rightarrow} f = G$.

Deci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(\omega) = \dfrac{1}{2\pi} \cdot \dfrac{2a}{a^2+\omega^2}$.

De menţionat o teoremă de la calculul de integrale reale cu reziduuri, rescrisă:

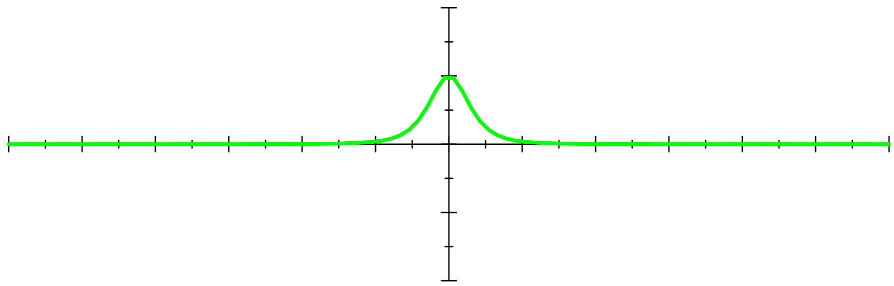
T 1′. Fie $\mathcal{I} = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(\omega)}{Q(\omega)} e^{\mathrm{j}\, t\omega} d\omega$, $a = t > 0$, unde

$P, Q \in \mathbb{R}[\omega]$, grad $Q \geq$ grad $P + 1$, $Q(\omega) \neq 0, \forall \omega \in \mathbb{R}$. Atunci:

$\mathcal{I} = 2\pi\, \mathrm{j} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \operatorname{rez} f(z_k)$, unde $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)} e^{\mathrm{j}\, tz}$, iar z_k sunt acei poli cu $\operatorname{Im} z_k > 0$.

Exerciţiul 7. Fie $G : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, G(\omega) = \dfrac{1}{(1+\omega^2)^2}$. Să se determine, dacă există, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ corespunzătoare, ca inversă prin transformata Fourier.

Rezolvare. Fie $G : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, G(\omega) = \dfrac{1}{(1+\omega^2)^2}$



•Se observă că $G \in L^1(\mathbb{R})$, deoarece

<u>modul 1.</u> Calcul direct:

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |G(\omega)|\, d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\omega^2+1)^2} d\omega = ?$

$$\int \frac{1}{(\omega^2+1)^2}d\omega = \int \frac{1+\omega^2-\omega^2}{(\omega^2+1)^2}d\omega = \int \frac{1}{\omega^2+1}d\omega - \int \frac{\omega^2}{(\omega^2+1)^2}d\omega =$$
$$= \int \frac{1}{\omega^2+1}d\omega + \tfrac{1}{2}\int \omega\cdot\frac{-2\omega}{(\omega^2+1)^2}d\omega =$$
$$= \int \frac{1}{\omega^2+1}d\omega + \tfrac{1}{2}\int \omega\cdot\left(\frac{1}{\omega^2+1}\right)'d\omega = \int \frac{1}{\omega^2+1}d\omega + \tfrac{1}{2}\left(\omega\cdot\frac{1}{\omega^2+1} - \int 1\cdot\frac{1}{\omega^2+1}d\omega\right) =$$
$$= \tfrac{1}{2}\int \frac{1}{\omega^2+1}d\omega + \tfrac{1}{2}\frac{\omega}{\omega^2+1} = \tfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\omega + \tfrac{1}{2}\frac{\omega}{\omega^2+1}$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\omega^2+1)^2}d\omega \overset{(C)}{=} \left(\tfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\omega + \tfrac{1}{2}\frac{\omega}{\omega^2+1}\right)\Bigg|_{\omega\to-\infty}^{\omega\to\infty} = \tfrac{\pi}{2} < +\infty.$$
$$\int_{\mathbb{R}} |G(\omega)|\, d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{1}{(1+\omega^2)^2}\right| d\omega = \left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\omega + \frac{\omega}{1+\omega^2}\right)\Bigg|_{\omega\to-\infty}^{\omega\to\infty} = \tfrac{\pi}{2} < +\infty.$$

<u>modul 2.</u> Criteriul comparaţiei cu inegalităţi pentru (C) :

$$\left.\begin{array}{l} 0 \le |G(\omega)| = \dfrac{1}{\omega^2+1}\cdot\dfrac{1}{\omega^2+1} \le \dfrac{1}{\omega^2+1}, \forall\omega\in\mathbb{R} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\omega^2+1}d\omega \overset{(C)}{=} (\operatorname{arctg}\omega)\big|_{\omega\to-\infty}^{\omega\to\infty} = \pi - (C) \end{array}\right\} \overset{\text{Criteriul comparaţiei}}{\Rightarrow} \int_{-\infty}^{+\infty}|G(\omega)|\, dt - (C).$$

•Se observă, conform Teoremei de inversare:

$$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(1+\omega^2)^2}e^{\mathrm{j}\,t\omega}d\omega \underset{\text{de integrare}}{\overset{\omega \text{ este variabilă}}{=}} ?.$$

Nu se poate calcula elementar, cu primitive.

••Se poate calcula, folosind $T1'$, doar pentru $a = t > 0$,

$$g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(1+\omega^2)^2}e^{\mathrm{j}\,t\omega}d\omega = \mathcal{I}.$$

Aici, $P(\omega) = 1; Q(\omega) = \left(1+\omega^2\right)^2; \operatorname{grad} Q \ge \operatorname{grad} P + 1, Q(\omega) \ne 0, \forall\omega\in\mathbb{R}$.

Fie $f(z) = \dfrac{1}{(1+z^2)^2}e^{\mathrm{j}\,tz}$.

$\left(1+z^2\right)^2 = 0 \Rightarrow z = \pm\mathrm{j}$ sunt poli de ordin 2 pentru f, cu $\operatorname{Im}(+\mathrm{j}) > 0$.

Atunci, pentru $t > 0$,

$$g(t) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{I} \overset{T1'}{=} \frac{1}{2\pi}2\pi\,\mathrm{j}\operatorname{rez} f(\mathrm{j}) \underset{\text{conform 2.}}{\overset{0+\mathrm{j}\text{ e pol de ordin 2}}{=}}$$
$$= \frac{1}{2\pi}2\pi\,\mathrm{j}\,\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 0+\mathrm{j}}\left(\left((z-\mathrm{j})^2\frac{1}{(z-\mathrm{j})^2(z+\mathrm{j})^2}e^{\mathrm{j}\,tz}\right)^{(2-1)_z}\right) = \mathrm{j}\lim_{z\to 0+\mathrm{j}}\left(\left(\frac{e^{\mathrm{j}\,tz}}{(z+\mathrm{j})^2}\right)^{\prime_z}\right) =$$
$$= \mathrm{j}\lim_{z\to 0+\mathrm{j}}\frac{e^{\mathrm{j}\,tz}\cdot\mathrm{j}\,t(z+\mathrm{j})^2 - e^{\mathrm{j}\,tz}\cdot 2(z+\mathrm{j})}{(z+\mathrm{j})^4} = \mathrm{j}\lim_{z\to 0+\mathrm{j}}\frac{e^{\mathrm{j}\,tz}\cdot(\mathrm{j}\,t(z+\mathrm{j})-2)}{(z+\mathrm{j})^3} =$$
$$= \mathrm{j}\,\frac{e^{\mathrm{j}\,t\,\mathrm{j}}\cdot(\mathrm{j}\,t(\mathrm{j}+\mathrm{j})-2)}{(\mathrm{j}+\mathrm{j})^3} = \mathrm{j}\,\frac{e^{-t}\cdot(-2t-2)}{2\,\mathrm{j}\cdot(-4)} = \frac{e^{-t}\cdot(t+1)}{4}, t > 0.$$

•• Deoarece G este spectru real şi par, din grafic (grafic simetric faţă de axa verticală) sau din

$$G(-\omega) = \frac{1}{\left((-\omega)^2+1\right)^2} = G(\omega), \forall\omega\in\mathbb{R},$$

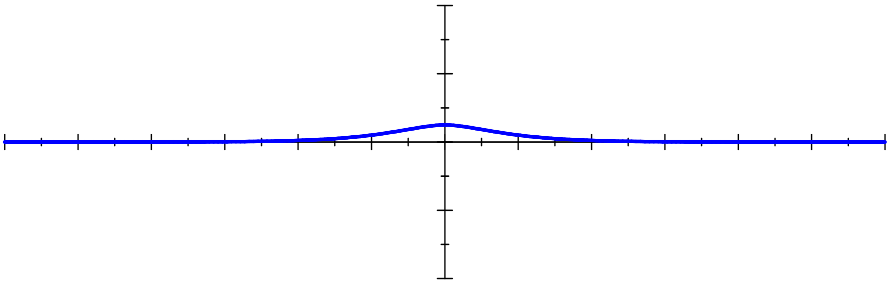
conform Observaţiei 9.1.5, rezultă că semnalul g este real şi par.

Atunci, pentru $t < 0$,

$$g(t) \underset{G \text{ pară şi reală}}{\overset{\text{Obs. 9.1.5}}{=}} g(-t) \overset{t\le 0}{=} \frac{e^{t}\cdot(-t+1)}{4}, t < 0.$$

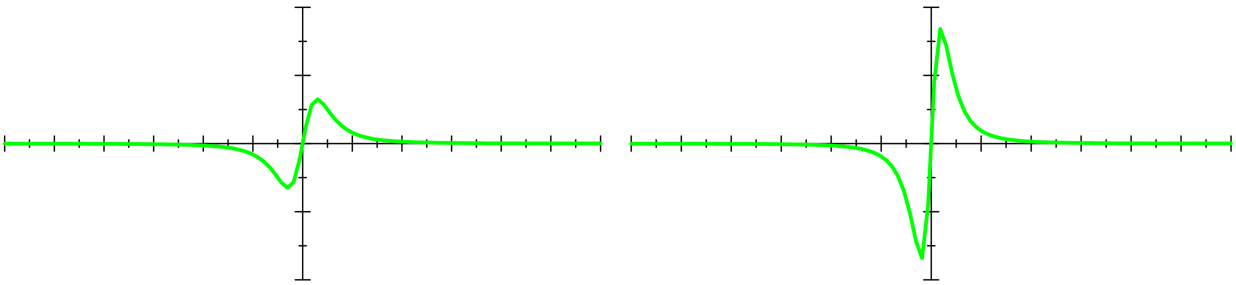
•• În plus, $g(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+\omega^2)^2} d\omega = \frac{1}{4}$.

Deci $g(t) = \begin{cases} \dfrac{e^t \cdot (-t+1)}{4}, & t < 0 \\ \frac{1}{4}, & t = 0 \\ \dfrac{e^{-t} \cdot (t+1)}{4}, & t > 0 \end{cases}$



Exerciţiul 8. Să se rezolve ecuaţia integrală
$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, e^{-\mathrm{j}\,\omega t} dt = \frac{\mathrm{j}\,\omega}{(1+\omega^2)^2}, \omega \in \mathbb{R}.$
Rezolvare. A se vedea Curs.

Exerciţiul 9. Să se rezolve ecuaţia integrală
$(*) \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, e^{-\mathrm{j}\,\omega t} dt = \frac{\omega}{\mathrm{j}\,(\omega^2+a^2)(\omega^2+b^2)}, \omega \in \mathbb{R}$, unde $a > 0$ şi $b > 0$ sunt date.
Caz particular: $(*) \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, e^{-\mathrm{j}\,yt} dt = \frac{y}{\mathrm{j}\,(y^2+1)(y^2+4)}, y \in \mathbb{R}$-temă.
Rezolvare. Se determină $g =?$ funcţia necunoscută.
Se notează $G : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, G(\omega) = \frac{\omega}{\mathrm{j}\,(\omega^2+a^2)(\omega^2+b^2)} = \mathrm{j}\, \frac{-\omega}{(\omega^2+a^2)(\omega^2+b^2)}$,
cu reprezentare pentru $a = b$, respectiv $a \neq b$ a $-\operatorname{Im} G$.



•Se observă că $G \in L^1(\mathbb{R})$, deoarece, prin calcul direct (sau cu un crit. de comp.)

$$\int_{\mathbb{R}} |G(\omega)|\, d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\omega}{\mathrm{j}\,(\omega^2+a^2)(\omega^2+b^2)} \right| d\omega \overset{\omega \text{ este variabilă}}{\underset{\text{de integrare, } (C)}{=}} 2\int_0^{+\infty} \frac{\omega}{(\omega^2+a^2)(\omega^2+b^2)} d\omega =?$$

<u>dacă $a = b, a > 0, b > 0$:</u>

$$= 2\int_0^{+\infty} \frac{\omega}{(\omega^2+a^2)^2} d\omega = 2\, \frac{1}{-2}\, \frac{1}{\omega^2+a^2}\Big|_{\omega=0}^{\omega\to+\infty} = \frac{1}{a^2} < +\infty.$$

dacă $a \neq b, a > 0, b > 0$:

$$= \frac{1}{b^2 - a^2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{2\omega}{\omega^2 + a^2} - \frac{2\omega}{\omega^2 + b^2}\right)d\omega = \frac{1}{b^2 - a^2}\left(\ln\left(\omega^2 + a^2\right) - \ln\left(\omega^2 + b^2\right)\right)\Big|_{t=0}^{t\to+\infty} =$$

$$= \frac{1}{b^2 - a^2}\left(\ln\frac{\omega^2 + a^2}{\omega^2 + b^2}\right)\Bigg|_{t=0}^{t\to+\infty} = 0 - \frac{1}{b^2 - a^2}\ln\frac{a^2}{b^2} < +\infty.$$

•Se observă, conform Teoremei de liniaritate şi Teoremei de inversare,

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, g(t) = \frac{1}{\mathrm{j}\cdot 2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\omega}{(\omega^2 + a^2)(\omega^2 + b^2)}e^{\mathrm{j}\,t\omega}d\omega.$$

Se calculează, pentru $t > 0, g(t) == \frac{1}{\mathrm{j}\cdot 2\pi}\mathcal{I} \overset{T1'}{=} ?$

Aici $P(\omega) = \omega; Q(\omega) = \left(\omega^2 + a^2\right)\left(\omega^2 + b^2\right); \mathrm{grad}\, Q \geq \mathrm{grad}\, P + 1, Q(\omega) \neq 0, \forall\omega \in \mathbb{R}.$

Fie $f(z) = \frac{z}{(z^2 + a^2)(z^2 + b^2)}e^{\mathrm{j}\,tz}.$

$\left(z^2 + a^2\right)\left(z^2 + b^2\right) = 0 \Rightarrow z = \pm a\,\mathrm{j}, z = \pm b\,\mathrm{j}$ sunt poli

de ordin 2 pentru f, cu $\mathrm{Im}(+a\,\mathrm{j}) > 0$, dacă $a = b, a > 0, b > 0$.

de ordin 1 pentru f, cu $\mathrm{Im}(+a\,\mathrm{j}) > 0, \mathrm{Im}(+b\,\mathrm{j}) > 0$ dacă $a \neq b, a > 0, b > 0$.

dacă $a = b, a > 0, b > 0$: $g(t) = \frac{1}{\mathrm{j}\cdot 2\pi}\mathcal{I} \overset{T1'}{=} \frac{1}{\mathrm{j}\cdot 2\pi}2\pi\,\mathrm{j}\,\mathrm{rez}\, f(a\,\mathrm{j}) \underset{\text{conform 2}}{\overset{0+a\,\mathrm{j}\text{ e pol de ordin 2}}{=}}$

$$= \frac{1}{\mathrm{j}\cdot 2\pi}2\pi\,\mathrm{j}\,\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 0+a\,\mathrm{j}}\left(\left((z - a\,\mathrm{j})^2\frac{z}{(z - a\,\mathrm{j})^2(z + a\,\mathrm{j})^2}e^{\mathrm{j}\,tz}\right)^{(2-1)_z}\right) =$$

$$= \lim_{z\to 0+a\,\mathrm{j}}\left(\left(\frac{ze^{\mathrm{j}\,tz}}{(z + a\,\mathrm{j})^2}\right)^{\prime_z}\right) = \lim_{z\to 0+a\,\mathrm{j}}\frac{\left(e^{\mathrm{j}\,tz} + ze^{\mathrm{j}\,tz}\cdot\mathrm{j}\,t\right)(z + a\,\mathrm{j})^2 - ze^{\mathrm{j}\,tz}\cdot 2(z + a\,\mathrm{j})}{(z + a\,\mathrm{j})^4} =$$

$$= \lim_{z\to 0+a\,\mathrm{j}}\frac{e^{\mathrm{j}\,tz}\cdot((1 + z\,\mathrm{j}\,t)(z + a\,\mathrm{j}) - 2z)}{(z + a\,\mathrm{j})^3} = \frac{e^{\mathrm{j}\,ta\,\mathrm{j}}\cdot((1 + a\,\mathrm{j}\cdot\mathrm{j}\,t)(a\,\mathrm{j} + a\,\mathrm{j}) - 2a\,\mathrm{j})}{(a\,\mathrm{j} + a\,\mathrm{j})^3} =$$

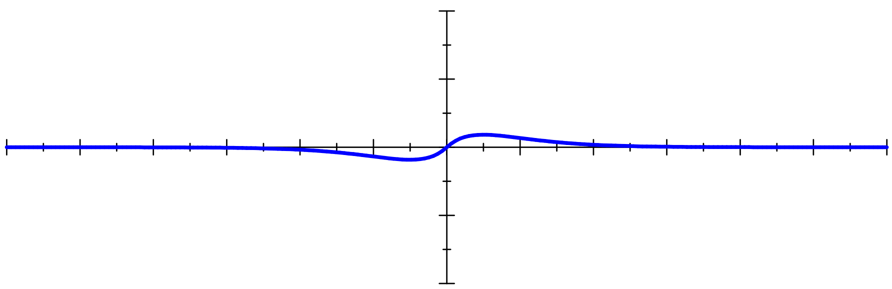
$$= \frac{e^{-at}\cdot(-at)\,2a\,\mathrm{j}}{2a\,\mathrm{j}\cdot(-4a^2)} = \frac{e^{-at}\cdot t}{4a}, \; t > 0.$$

Conform Observaţiei 9.1.5, pentru $t < 0$,

$$g(t) \underset{G\text{ impară şi pur imaginară}}{\overset{\text{Observaţia 9.1.5}}{=}} -g(-t) \overset{t\leq 0}{=} -\frac{e^{at}\cdot(-t)}{4a}, t < 0.$$

În plus, $g(0) = \frac{\mathrm{j}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\omega}{(\omega^2 + a^2)(\omega^2 + a^2)}d\omega = 0.$

$$\text{Deci } g(t) = \begin{cases} -\dfrac{e^{at}\cdot(-t)}{4a}, & t < 0 \\ 0, & t = 0 \\ \dfrac{e^{-at}\cdot t}{4a}, & t > 0 \end{cases}$$



dacă $a \neq b, a > 0, b > 0$:

Se calculează, pentru $t > 0$,

$$g(t) = \frac{1}{\mathrm{j}\cdot 2\pi}\mathcal{I} \overset{T1'}{=} \frac{1}{\mathrm{j}\cdot 2\pi} 2\pi\mathrm{j}\left(\operatorname{rez} f(a\mathrm{j}) + \operatorname{rez} f(b\mathrm{j})\right) \underset{\text{conform } 2\cdot}{\overset{0+a\mathrm{j},0+b\mathrm{j}\ \text{sunt poli de ordin 1}}{=}}$$

$$= \frac{1}{\mathrm{j}\cdot 2\pi} 2\pi\mathrm{j}\left(\lim_{z\to 0+a\mathrm{j}}(z-a\mathrm{j})\frac{ze^{\mathrm{j}tz}}{(z-a\mathrm{j})(z+a\mathrm{j})(z^2+b^2)} + \right.$$

$$\left. + \lim_{z\to 0+b\mathrm{j}}(z-b\mathrm{j})\frac{ze^{\mathrm{j}tz}}{(z-b\mathrm{j})(z+b\mathrm{j})(z^2+a^2)}\right) =$$

$$= \frac{a\mathrm{j}}{(a\mathrm{j}+a\mathrm{j})\left((a\mathrm{j})^2+b^2\right)}e^{\mathrm{j}ta\mathrm{j}} + \frac{b\mathrm{j}}{(b\mathrm{j}+b\mathrm{j})\left((b\mathrm{j})^2+a^2\right)}e^{\mathrm{j}tb\mathrm{j}} =$$

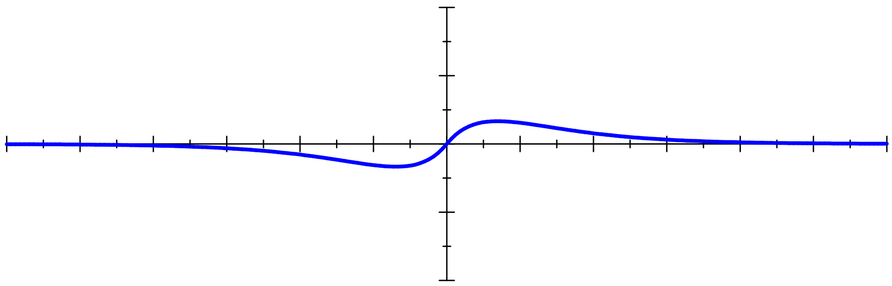
$$= \frac{1}{2(-a^2+b^2)}e^{-ta} + \frac{1}{2(-b^2+a^2)}e^{-tb} = \frac{1}{2(b^2-a^2)}\left(e^{-ta}-e^{-tb}\right),\ t > 0.$$

Conform Observaţiei 9.1.5, pentru $t < 0$,

$$g(t) \underset{G \text{ impară şi pur imaginară}}{\overset{\text{Observaţia 9.1.5}}{=}} -g(-t) \overset{t\leq 0}{=} -\frac{1}{2(b^2-a^2)}\left(e^{at}-e^{bt}\right), t < 0.$$

În plus, $g(0) = \dfrac{\mathrm{j}}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\omega}{(\omega^2+a^2)(\omega^2+b^2)}d\omega = 0.$

$$\text{Deci } g(t) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2(b^2-a^2)}\left(e^{at}-e^{bt}\right), & t < 0 \\ 0, & t = 0 \\ \dfrac{1}{2(b^2-a^2)}\left(e^{-at}-e^{-bt}\right), & t > 0 \end{cases}$$



Exerciţiul 10. Să se rezolve ecuaţiile integrale:

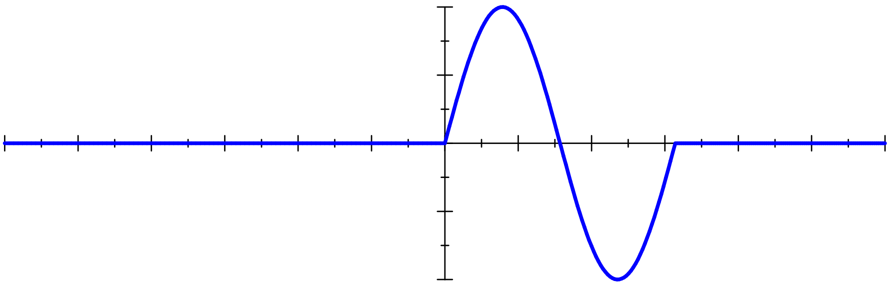
a) $(*)\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} G(y)\, e^{\mathrm{j}ty}dy = f(t), t \in \mathbb{R}$, unde $f(t) = \begin{cases} 2\pi\sin t, & \text{dacă } 0 < t < 2\pi \\ \dfrac{\pi}{4}, & \text{dacă } t = 0, t = 2\pi \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$.

Rezolvare. Se determină $g =?$ funcţia necunoscută.

Se înmulţeşte $(*)$ cu $\frac{1}{2\pi} \Rightarrow \frac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} G(y)\, e^{\mathrm{j}ty}dy = \underbrace{\frac{1}{2\pi}f(t)}_{g(t)}, t \in \mathbb{R}$

Atunci G va fi, din Teorema de inversare, transformata Fourier corespunzătoare pentru $\frac{1}{2\pi}f = g$.

Fie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(t) = \frac{1}{2\pi}f(t) = \begin{cases} \sin t, & \text{dacă } 0 < t < 2\pi \\ \dfrac{1}{8}, & \text{dacă } t = 0, t = 2\pi \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$



•Se observă că $g \in L^1(\mathbb{R})$, deoarece
$\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |g(t)|\,dt \overset{(C)}{=} 0 + \int_0^{\pi} \sin t dt + \int_{\pi}^{2\pi} (-\sin t)\,dt + 0 \underset{\text{de integrare}}{\overset{t \text{ este variabilă}}{=}} (-\cos t)|_{t=0}^{t=\pi} + (\cos t)|_{t=\pi}^{t=2\pi} = 4 < +\infty.$

•Se calculează

$$G(y) = \int_{\mathbb{R}} h(t)\,e^{-\mathrm{j}\,yt}dt = 0 + \int_0^{2\pi} (\sin t)\cdot e^{-\mathrm{j}\,yt}dt + 0 \overset{(C)}{=} \int_0^{2\pi} (\sin t)\cdot e^{-\mathrm{j}\,yt}dt \underset{\text{de integrare}}{\overset{t \text{ este variabilă}}{=}}$$
$$= \int_0^{2\pi} e^{-\mathrm{j}\,yt}\cdot \frac{d}{dt}(-\cos t)\,dt = e^{-\mathrm{j}\,yt}\cdot(-\cos t)\Big|_{t=0}^{t=2\pi} - \int_0^{2\pi} e^{-\mathrm{j}\,yt}\cdot(-\mathrm{j}\,y)\cdot(-\cos t)\,dt =$$
$$= e^{-\mathrm{j}\,y2\pi}\cdot(-\cos 2\pi) - e^{-\mathrm{j}\,y0}\cdot(-\cos 0) - \mathrm{j}\,y\int_0^{2\pi} e^{-\mathrm{j}\,yt}\cdot\cos t dt =$$
$$= e^{-\mathrm{j}\,y2\pi}\cdot(-1) - 1\cdot(-1) - \mathrm{j}\,y\int_0^{2\pi} e^{-\mathrm{j}\,yt}\cdot\frac{d}{dt}(\sin t)\,dt =$$
$$= 1 - e^{-\mathrm{j}\,y2\pi} - \mathrm{j}\,y\left(e^{-\mathrm{j}\,yt}\cdot(\sin t)\Big|_{t=0}^{t=2\pi} - \int_0^{2\pi} e^{-\mathrm{j}\,yt}\cdot(-\mathrm{j}\,y)\cdot(\sin t)\,dt\right) =$$
$$= 1 - e^{-\mathrm{j}\,y2\pi} - \mathrm{j}\,y\left(0 - 0 - (-\mathrm{j}\,y)\int_0^{2\pi} e^{-\mathrm{j}\,yt}\cdot\sin t dt\right) =$$
$$= 1 - e^{-\mathrm{j}\,y2\pi} + y^2G(y) \Rightarrow$$

$(**)\; G(y) - y^2G(y) = 1 - e^{-\mathrm{j}\,y2\pi}.$

Pentru $y \neq \pm 1 \overset{(**)}{\Rightarrow} G(y) = \dfrac{1 - e^{-\mathrm{j}\,y2\pi}}{1-y^2}.$

Pentru $y = \pm 1 \overset{(**)}{\Rightarrow} 0 = 1 - e^{-j(\pm 1)2\pi}$- adevărat.

•Se poate arăta că $G \in L^1(\mathbb{R})$.

•Conform Teoremei de inversare $\overset{\text{a.p.t.}}{\Rightarrow}$

$$G:\mathbb{R}\to\mathbb{C}, G(y) = \begin{cases} \dfrac{1 - e^{-\mathrm{j}\,y2\pi}}{1-y^2}, & \text{dacă } y \neq \pm 1 \\ \text{un număr complex}, & \text{dacă } y = 1 \\ \text{un număr complex}, & \text{dacă } y = -1 \end{cases}.$$

b) $(*)\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} G(y)\,e^{\mathrm{j}\,ty}dy = e^{1-|t|}, t \in \mathbb{R}$.-temă