SEMINAR NR. 11, REZOLVĂRI
Matematici Speciale, AIA

10. DISTRIBUŢII
10.1.Spaţiul funcţiilor test. Distribuţii: definiţie, tipuri, exemple.

Motivaţii pentru introducerea noţiunii-A se vedea Curs.
$\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}) = \{\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}); \operatorname{supp}\varphi \text{ compact}\} -$ spaţiul funcţiilor test.
$\mathcal{D}(\mathbb{R}) = (\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}), \text{topologie dată de o convergenţă})$.
Definiţia 10.1.7. Se numeşte *distribuţie* sau *funcţie generalizată* orice funcţională $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ liniară şi continuă pe $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Se notează:
$T(\varphi) \overset{\text{not.}}{\equiv} \langle T, \varphi\rangle \underset{t \text{ este variabila funcţiei test } \varphi}{\overset{\text{uneori, chiar dacă}}{\equiv}} \langle T(t), \varphi(t)\rangle, \forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$
Mulţimea distribuţiilor se notează $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
$\mathcal{D}'(\mathbb{R}) = \{T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}; T \text{ liniară şi continuă}\}$.
Observaţia 10.1.3. Mulţimea distribuţiilor se descompune ca partiţie a două mulţimi disjuncte:
$\mathcal{D}'(\mathbb{R}) = \mathcal{D}'_r(\mathbb{R}) \cup \mathcal{D}'_s(\mathbb{R})$,
unde $\mathcal{D}'_r(\mathbb{R})$ este *mulţimea distribuţiilor regulare* (*sau mulţimea distribuţiilor de tip funcţie* definite cu ajutorul funcţiilor local integrabile prin (6) ulterior) şi $\mathcal{D}'_s(\mathbb{R})$ este *mulţimea distribuţiilor singulare* (conţine distribuţiile care nu se pot scrie sub forma (6), cu ajutorul unei funcţii local integrabile, ca de exemplu distribuţia Dirac).
Propoziţia 10.1.3. Orice funcţie $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ defineşte o distribuţie, notată $\{f\}$, prin relaţia
$$\langle\{f\}, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t)\,dt, \forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \tag{6}$$
numită *distribuţie (de tip funcţie) generată de* f.
Propoziţia 10.1.4. Funcţionala $\delta : D(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$, definită prin
$$\langle\delta, \varphi\rangle = \varphi(0), \ \varphi \in D(\mathbb{R}) \tag{7}$$
este o distribuţie, numită *distribuţia Dirac.*
Propoziţia 10.1.6. Funcţionala $\delta_a : D(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$, definită prin
$$< \delta_a, \varphi >= \varphi(a), \forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \tag{8}$$
este o distribuţie, numită *distribuţia Dirac generalizată.*

10.2.Operaţii cu distribuţii (ale algebrei şi ale analizei matematice)

<u>**Operaţii ale algebrei**</u>: **suma distribuţiilor $T_1 + T_2$, produsul unei distribuţii cu un scalar λT, produsul unei distribuţii cu o funcţie din $C^\infty(\mathbb{R}), \alpha T$, schimbarea de variabilă liniară (sunt distribuţii)**- A se vedea Curs.
<u>**Operaţii ale analizei matematice**</u>: **trecerea la limită în $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ a unui şir de distribuţi**i, **derivata unei distribuţii $T^{(n)}$ (este distribuţie), convoluţia a două distribuţii $T * S$ (nu este mereu distribuţie). Proprietăţi.** -A se vedea Curs
Definiţia 10.2.6. Se numeşte *derivata de ordin $n \in \mathbb{N}$ a distribuţiei $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$* aplicaţia $T^{(n)}$: $D(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ definită prin
$$\boxed{\left\langle T^{(n)}, \varphi\right\rangle = (-1)^n \left\langle T, \varphi^{(n)}\right\rangle, \forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).} \tag{11}$$
Este distribuţie.
Exemplul 10.2.2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{\left\langle \delta^{(n)}, \varphi\right\rangle = (-1)^n \varphi^{(n)}(0), \forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).}$ (12)

Exemplul 10.2.3. $\boxed{\{\eta\}' = \delta.}$ (13)

Teorema 10.2.1. În ipotezele din Curs,

$$\boxed{\{f\}^{(n)} = \left\{f^{(n)}\right\} + \sigma_{n-1}(0)\,\delta + \sigma_{n-2}(0)\,\delta' + ... + \sigma_0(0)\,\delta^{(n-1)},} \tag{14}$$

unde $\sigma_k(0) = f^{(k)}(0+0) - f^{(k)}(0-0) = f_d^{(k)}(0) - f_s^{(k)}(0)\,, k = \overline{0, n-1}$ este saltul funcţiei $f^{(k)}$ în 0.

Exerciţiul 1. Să se calculeze derivata de ordin $n \in \mathbb{N}$ a distribuţiei de tip funcţie generate de

$f(t) = \eta(t)\cos(t)\,,$

unde η este funcţia Heaviside, $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \eta(t) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } t \geq 0 \\ 0, & \text{dacă } t < 0 \end{cases}$.

Rezolvare. A se vedea Curs.

Definiţia 10.2.8. Fie $f, g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$. Se numeşte *produs de convoluţie a funcţiilor f şi g din* $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ funcţia $f * g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (sau $f * g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$), definită prin

$$\boxed{h(t) = (f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau)\,g(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau,}$$

dacă integralele ce apar sunt convergente. În caz de convergenţă f şi g se numesc *convolutabile.*

Observaţia 10.2.6. d) Fie $f, g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ cu $f(t) = 0, \forall t < 0$ şi $g(t) = 0, \forall t < 0$. Atunci

$$\boxed{(f * g)(t) = \eta(t)\int_0^t f(t-\tau)\,g(\tau)\,d\tau = \eta(t)\int_0^t f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau,}$$

unde $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \eta(t) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } t \geq 0 \\ 0, & \text{dacă } t < 0 \end{cases}$.

Propoziţia 10.2.5.d) Fie $f, g, h \in L^1(\mathbb{R})$. Atunci $\exists f * g \in L^1(\mathbb{R})\,, \exists f * (g * h) \in L^1(\mathbb{R})\,, \exists f * (g + h) \in L^1(\mathbb{R})$ şi

$f * g = g * f$ (comutativitate);

$f * (g * h) = (f * g) * h$ (asociativitate)

$f * (g + h) = f * g + f * h$ (distributivitate în raport cu adunarea)

Operaţia $*$ nu are element neutru în $L^1(\mathbb{R})$. În $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, δ va fi element neutru.

Definiţia 10.2.10. Se numeşte *produs de convoluţie a distribuţiilor* $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ şi $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ aplicaţia $T * S$ definită prin

$$\langle T * S, \varphi\rangle = \langle S(\tau)\,, \langle T(t)\,, \varphi(t+\tau)\rangle\rangle\,, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\,, \tag{18}$$

în ipoteza că funcţionala din membrul drept defineşte o distribuţie, adică funcţia $\psi(\tau) = \langle T(t)\,, \varphi(t+\tau)\rangle$ este din $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ şi $T * S$ este liniară şi continuă. Dacă există $T * S$, distribuţiile T şi S se numesc *convolutabile*.

Propoziţia 10.2.6. (clase de distribuţii convolutabile)

a) Fie $T, S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ distribuţii regulare generate de funcţii $T = \{f\}\,, S = \{g\}\,,$ cu $f, g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ pentru care $\exists f * g$. Atunci $\exists T * S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ şi

$$\boxed{\{f\} * \{g\} = \{f * g\}\,.} \tag{19}$$

Propoziţia 10.2.8. a) $\forall T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})\,, \exists T * \delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ şi

$$\boxed{T * \delta = \delta * T = T,}$$

adică δ *este element neutru în* $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ la operaţia $*$.

b) Fie $T, S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ distribuţii a.î. $\exists T * S$. Atunci $\exists T * S^{(k)}$, $\exists T^{(k)} * S$ şi

$$\boxed{(T * S)^{(k)} = T^{(k)} * S = T * S^{(k)} = S * T^{(k)} = S^{(k)} * T, \forall k \in \mathbb{N}.}$$

În particular,

$$\boxed{T * \delta^{(k)} = \delta^{(k)} * T = T^{(k)}, \forall k \in \mathbb{N}.}$$

Exerciţiul 2. Să se calculeze convoluţia distribuţiilor de tip funcţie generate de
$f(t) = \eta(t)\, t^2$ şi $g(t) = \eta(t) \sin t$,

unde η este funcţia Heaviside $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \eta(t) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } t \geq 0 \\ 0, & \text{dacă } t < 0 \end{cases}$.

Rezolvare. A se vedea Curs.