SEMINAR NR. 12, REZOLVĂRI
Matematici Speciale, AIA

10.3. Ecuaţii diferenţiale liniare în distribuţii, având coeficienţi constanţi

Forma generală: $\boxed{a_0T^{(n)}+a_1T^{(n-1)}+...+a_nT=S}$ (5)
unde $a_0,...,a_n\in\mathbb{R}$ sunt numere date, $a_0\neq 0$,(coeficienţi constanţi), $S\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ este o distribuţie dată (termen liber), iar $T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ este distribuţia necunoscută, căutată.
Rezolvare.
Etapa 1 : Se determină o soluţie fundamentală a operatorului liniar

$L(T)=a_0T^{(n)}+a_1T^{(n-1)}+...+a_nT,$

adică o distribuţie $E=?$ care satisface ecuaţia diferenţială

$L(E)=\delta.$

Pasul 1 : Se determină soluţia generală a ecuaţiei omogene cu soluţii funcţii ataşate, adică a ecuaţiei:

$\boxed{(*_{EO})\, a_0x^{(n)}(t)+a_1x^{(n-1)}(t)+...+a_nx(t)=0, t\in\mathbb{R}.}$

•Se ataşează ecuaţiei diferenţiale EO ecuaţia ei caracteristică EC:

$(*_{EC})\, a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+...+a_{n-1}\lambda+a_n=0.$

Este o ecuaţie algebrică polinomială de grad n având coeficienţii reali $a_i\in\mathbb{R}$, $i\in\{0,1,...,n\}$, în necunoscuta λ, care admite exact n rădăcini complexe. Se determină, precizând şi multiplicitatea lor.
•Pentru fiecare rădăcină a EC se găsesc corespunzător soluţii particulare liniar independente ale EO, după algoritmul:
Cazul 1 : $\lambda_1\in\mathbb{R}$ cu $m(\lambda_1)=1 \rightsquigarrow x_1(t)=e^{\lambda_1 t}$.

Cazul 2 : $\lambda_1\in\mathbb{R}$ cu $m(\lambda_1)=m \rightsquigarrow \begin{cases} x_1(t)=e^{\lambda_1 t},\\ x_2(t)=te^{\lambda_1 t},\\ ...\\ x_m(t)=t^{m-1}e^{\lambda_1 t}.\end{cases}$

Cazul 3 : $\lambda_{1,2}\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, $\lambda_{1,2}=\alpha_1\pm i\beta_1$ cu $m(\lambda_{1,2})=1 \rightsquigarrow$

$\left\{\ x_1(t)=e^{\alpha_1 t}\cos(\beta_1 t);\quad x_2(t)=e^{\alpha_1 t}\sin(\beta_1 t).\right.$

Cazul 4 : $\lambda_{1,2}\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, $\lambda_{1,2}=\alpha_1\pm i\beta_1$ cu $m(\lambda_{1,2})=m \rightsquigarrow$

$$\begin{cases} x_1(t)=e^{\alpha_1 t}\cos(\beta_1 t), & x_2(t)=e^{\alpha_1 t}\sin(\beta_1 t),\\ x_3(t)=te^{\alpha_1 t}\cos(\beta_1 t), & x_4(t)=te^{\alpha_1 t}\sin(\beta_1 t),\\ ... & ...\\ x_{2m-1}(t)=t^{m-1}e^{\alpha_1 t}\cos(\beta_1 t), & x_{2m}(t)=t^{m-1}e^{\alpha_1 t}\sin(\beta_1 t).\end{cases}$$

Din algoritm se găseşte $B=(x_1,...,x_n)$, adică exact n soluţii particulare ale EO, liniar independente. Sistemul de funcţii $(x_1,...,x_n)$ este sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia omogenă EO (bază).
•Soluţia generală a EO este o combinaţie liniară de cele exact n soluţii particulare liniar independente determinate

$x_o(t;c_1,...,c_n)=c_1x_1(t)+...+c_nx_n(t), \forall t\in\mathbb{R}$ şi $c_1,...,c_n\in\mathbb{R}.$

Pasul 2 : Se determină $x(t)$, soluţia problemei Cauchy:

$$\boxed{\begin{cases} (*_{EO})\, a_0x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+...+a_nx=0, \forall t\in\mathbb{R}\\ CI: x(0)=x'(0)=...=x^{(n-2)}(0)=0,\ x^{(n-1)}(0)=\dfrac{1}{a_0},\end{cases}} \quad (4)$$

Pasul 3 : O soluţie fundamentală a operatorului L este distribuţia generată de funcţia ηx

$\boxed{E = \{\eta(t)\, x(t)\},}$ unde $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \eta(t) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } t \geq 0 \\ 0, & \text{dacă } t < 0 \end{cases}$ este funcţia Heaviside.

Etapa 2 : Soluţia ecuaţiei (5) este

$$\boxed{T = S * E.} \tag{7}$$

(dacă $S \in D'(\mathbb{R})$ este o distribuţie dată şi E o soluţie fundamentală a operatorului L şi dacă $S * E$ are sens, atunci soluţia ecuaţiei (5) există şi este unică).

Exerciţiul 1. Să se rezolve ecuaţia diferenţială în distribuţii

$$T'' + 2T' + T = 2\delta + \delta'.$$

Rezolvare. Este ecuaţie diferenţială în distribuţii, de ordin $n = 2$, liniară, cu $1, 2, 1$ coeficienţi constanţi, cu $S = 2\delta + \delta'$ distribuţie dată şi $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ distribuţia necunoscută.

Etapa 1 : Se determină o soluţie fundamentală a operatorului liniar

$$L(T) = T'' + 2T' + T,$$

adică o distribuţie $E =?$ care satisface ecuaţia diferenţială

$$L(E) = \delta.$$

Pasul 1 : Se determină soluţia generală a ecuaţiei omogene cu soluţii funcţii ataşate, adică a ecuaţiei:

$$(*_{EO})\, x'' + 2x' + x = 0, t \in \mathbb{R}.$$

•Se ataşează ecuaţiei diferenţiale $(*_{EO})$ ecuaţia ei caracteristică şi se rezolvă:

$$(*_{EC})\ \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 1)^2 = 0 \Rightarrow \{\lambda_1 = -1 \text{ cu } m(\lambda_1) = 2.$$

•Pentru fiecare rădăcină a ecuaţiei caracteristice se găsesc corespunzător soluţii particulare liniar independente ale ecuaţiei omogene $(*_{EO})$, după algoritmul dat la EDCO:

$$\lambda_1 = -1 \text{ cu } m(\lambda_1) = 2 \rightsquigarrow \begin{cases} x_1(t) = e^{-1t}, \\ x_2(t) = te^{-1t}. \end{cases}$$

•$B = (x_1, x_2)$ este un sistem fundamental de soluţii pentru $(*_{EO})$ (sunt exact 2 soluţii particulare pentru $(*_{EO})$ şi funcţii liniar independente). Soluţia generală a ecuaţiei $(*_{EO})$ este

$$x_o(t; c_1, c_2) = c_1 e^{-1t} + c_2 t e^{-1t}, \forall t \in \mathbb{R} \text{ şi } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Pasul 2 : Se determină soluţia problemei Cauchy

$$\begin{cases} (*_{EO})\, x'' + 2x' + x = 0, t \in \mathbb{R}. \\ CI : x(0) = 0,\ x'(0) = \dfrac{1}{1} \end{cases}$$

Se impun condiţiile iniţiale asupra soluţiei x găsite

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} \\ x'(t) = c_1\left(-e^{-t}\right) + c_2(-t+1)e^{-t} \end{cases} \overset{CI}{\underset{\begin{cases} x(0) = 0 \\ x'(0) = 1 \end{cases}}{\Rightarrow}} \begin{cases} c_1 1 + c_2 0 = 0 \\ c_1(-1) + c_2 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 1 \end{cases}$$

Atunci $x(t) = te^{-t}, \forall t \in \mathbb{R}$, este unica soluţie a ecuaţiei $(*_{EO})$ ce verifică CI date.

Pasul 3 : O soluţie fundamentală a operatorului L este $E = \{\eta(t)\, x(t)\} = \left\{\eta(t)\, te^{-t}\right\}$.

Etapa 2 : Soluţia ecuaţiei date este

$$T = S * E = \left(2\delta + \delta'\right) * \{\eta(t)\, x(t)\}.$$

Conform liniarităţii,

$$T \overset{\text{liniaritate}}{=} \underbrace{2\delta * \{\eta(t)\, x(t)\}}_{T_1} + \underbrace{\delta' * \{\eta(t)\, x(t)\}}_{T_2}$$

$$T_1 = 2\delta * \{\eta(t)\, x(t)\} \overset{\delta \text{ element neutru}}{=} 2\{\eta(t)\, x(t)\}$$

$$T_2 = \delta' * \{\eta(t)\, x(t)\} \overset{\text{Propoziţia 10.2.8}}{=} \delta * \{\eta(t)\, x(t)\}' \overset{\delta \text{ element neutru}}{=} \{\eta(t)\, x(t)\}'$$

Conform Teoremei de derivare a distribuţiilor regulare,

$\{\eta(t)\, x(t)\}' = \left\{(\eta(t)\, x(t))'\right\} + \sigma_0(0)\,\delta$, unde $\sigma_0(0)$ este saltul funcţiei $\eta(t)\, x(t)$ în $a = 0$.

$\eta(t)\,x(t)=\begin{cases} te^{-t}, & \text{dacă } t\geq 0\\ 0, & \text{dacă } t<0\end{cases} \Rightarrow \sigma_0(0)=l_d(0)-l_s(0)=0.$

$(\eta(t)\,x(t))'=\begin{cases} e^{-t}-te^{-t}, & \text{dacă } t>0\\ \nexists, & \text{dacă } t=0\\ 0, & \text{dacă } t<0\end{cases}.$

Atunci, folosind identificarea distribuţiilor de tip funcţie pentru funcţii egale a.p.t.,

$T_2=\left\{\eta(t)\left(e^{-t}-te^{-t}\right)\right\}+0\cdot\delta.$

În concluzie,

$T=T_1+T_2=2\left\{\eta(t)\,te^{-t}\right\}+\left\{\eta(t)\left(e^{-t}-te^{-t}\right)\right\}+0\cdot\delta \overset{\text{liniaritate}}{=} \left\{\eta(t)(t+1)\,e^{-t}\right\}.$

Exerciţiul 2. Să se rezolve ecuaţia diferenţială în distribuţii

$T''+T=\{\eta(t)\sin t\}+\delta''.$

Rezolvare. Este ecuaţie diferenţială în distribuţii, de ordin $n=2$, liniară, cu $1,0,1$ coeficienţi constanţi, cu $S=\{\eta(t)\sin t\}+\delta''$ distribuţie dată şi $T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ distribuţia necunoscută.

Etapa 1 : Se determină o soluţie fundamentală a operatorului liniar

$L(T)=T''+T,$

adică o distribuţie $E=?$ care satisface ecuaţia diferenţială

$L(E)=\delta.$

Pasul 1 : Se determină soluţia generală a ecuaţiei omogene cu soluţii funcţii ataşate, adică a ecuaţiei:

$(*_{EO})\; x''+x=0, t\in\mathbb{R}.$

•Ataşăm ecuaţiei diferenţiale $(*_{EO})$ ecuaţia ei caracteristică şi o rezolvăm:

$(*_{EC})\;\lambda^2+1=0\Leftrightarrow(\lambda+1)^2=0\Rightarrow\{\lambda_{1,2}=0\pm \mathrm{j}\text{ cu } m(\lambda_{1,2})=1.$

•Pentru fiecare rădăcină a ecuaţiei caracteristice găsim corespunzător soluţii particulare liniar independente ale ecuaţiei omogene $(*_{EO})$, după algoritmul dat la EDCO:

$\lambda_{1,2}=0\pm \mathrm{j}\text{ cu } m(\lambda_{1,2})=1 \rightsquigarrow \begin{cases} x_1(t)=e^{0t}\cos(1t),\\ x_2(t)=e^{0t}\sin(1t).\end{cases}$

•$B=(x_1,x_2)$ este un sistem fundamental de soluţii pentru $(*_{EO})$ (sunt exact 2 soluţii particulare pentru $(*_{EO})$ şi funcţii liniar independente). Soluţia generală a ecuaţiei $(*_{EO})$ este

$x_o(t;c_1,c_2)=c_1\cos t+c_2\sin t,\forall t\in\mathbb{R}$ şi $c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}.$

Pasul 2 : Se determină soluţia problemei Cauchy

$\begin{cases}(*_{EO})\; x''+x=0, t\in\mathbb{R}.\\ CI: x(0)=0,\ x'(0)=\dfrac{1}{1}\end{cases}$

Impunem asupra soluţiei găsite x condiţiile iniţiale

$\begin{cases} x(t)=c_1\cos t+c_2\sin t\\ x'(t)=c_1(-\sin t)+c_2\cos t\end{cases} \underset{\begin{cases}x(0)=0\\ x'(0)=1\end{cases}}{\overset{CI}{\Rightarrow}} \begin{cases} c_1 1+c_2 0=0\\ c_1 0+c_2 1=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1=0\\ c_2=1\end{cases}$

Atunci $x(t)=\sin t,\forall t\in\mathbb{R}$, este unica soluţie a ecuaţiei $(*_{EO})$ ce verifică CI date.

Pasul 3 : O soluţie fundamentală a operatorului L este

$E=\{\eta(t)\,x(t)\}=\{\eta(t)\sin t\}.$

Etapa 2 : Soluţia ecuaţiei date este

$T=S*E=\left(\{\eta(t)\sin t\}+\delta''\right)*\{\eta(t)\sin t\} \overset{\text{liniaritate}}{=} \underbrace{\{\eta(t)\sin t\}*\{\eta(t)\sin t\}}_{T_1}+\underbrace{\delta''*\{\eta(t)\sin t\}}_{T_2}.$

$T_1=\{\eta(t)\sin t\}*\{\eta(t)\sin t\}=\{f\}*\{g\} \overset{\text{Propoziţia 10.2.6}}{=} \{f*g\}$,unde

$f(t)=\eta(t)\sin t=\begin{cases}\sin t, & \text{dacă } t\geq 0\\ 0, & \text{dacă } t<0\end{cases}$ şi $g(t)=\eta(t)\sin t=\begin{cases}\sin t, & \text{dacă } t\geq 0\\ 0, & \text{dacă } t<0\end{cases}.$

Se calculează convoluţia celor două funcţii $(f * g)(t) =?$

$(f * g)(t) \overset{\text{Obs. } 10.2.6.,d)}{=} \eta(t) \int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau = \eta(t) \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau.$

Pentru $t < 0 \Rightarrow (\eta(t) \sin t) * (\eta(t) \sin t) = 0.$

Pentru $t \geq 0 \Rightarrow (\eta(t) \sin t) * (\eta(t) \sin t) = 1 \cdot \int_0^t \sin\tau \sin(t-\tau) d\tau =$

$$= \int_0^t \frac{\cos(\tau - t + \tau) - \cos(\tau + t - \tau)}{2} d\tau = \tfrac{1}{2} \int_0^t (\cos(2\tau - t) - \cos t) d\tau =$$

$$= \tfrac{1}{2} \left(\frac{\sin(2\tau - t)}{2} \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} - (\tau \cos t)\big|_{\tau=0}^{\tau=t} - \right) = \tfrac{1}{2} \left(\frac{\sin t - \sin(-t)}{2} - (t\cos t - 0) \right) = \tfrac{1}{2} (\sin t - t \cos t).$$

$T_1 = \left\{ \eta(t) \tfrac{1}{2} (\sin t - t \cos t) \right\}.$

$T_2 = \delta'' * \{\eta(t) \sin t\} \overset{\text{Propoziţia } 10.2.8}{=} \delta * \{\eta(t) \sin t\}'' = \{(\eta(t) \sin t)\}''$

Conform Teoremei de derivare a distribuţiilor regulare,

$\{\eta(t) \sin t\}'' = \left\{ (\eta(t) \sin t)'' \right\} + \sigma_1(0) \delta + \sigma_0(0) \delta',$

unde $\sigma_0(0)$ este saltul funcţiei $\eta(t) \sin t$ în $a = 0, \sigma_1(0)$ este saltul funcţiei $(\eta(t) \sin t)'$ în $a = 0.$

$$\eta(t) \sin t = \begin{cases} \sin t, & \text{dacă } t \geq 0 \\ 0, & \text{dacă } t < 0 \end{cases} \Rightarrow \sigma_0(0) = l_d(0) - l_s(0) = 0.$$

$$(\eta(t) \sin t)' = \begin{cases} \cos t, & \text{dacă } t > 0 \\ \nexists, & \text{dacă } t = 0 \\ 0, & \text{dacă } t < 0 \end{cases} \Rightarrow \sigma_1(0) = f'_d(0) - f'_s(0) = 1.$$

$$(\eta(t) \sin t)'' = \begin{cases} -\sin t, & \text{dacă } t > 0 \\ \nexists, & \text{dacă } t = 0 \\ 0, & \text{dacă } t < 0 \end{cases}$$

Atunci, folosind identificarea distribuţiilor de tip funcţie pentru funcţii egale a.p.t.,

$T_2 = \{\eta(t)(-\sin t)\} + 1\delta + 0\delta'$

În concluzie,

$$T = T_1 + T_2 = \left\{ \eta(t) \tfrac{-1}{2} (t \cos t - \sin t) \right\} + \{\eta(t)(-\sin t)\} + 1\delta + 0\delta' \overset{\text{liniaritate}}{=}$$
$$= \left\{ \eta(t) \tfrac{-1}{2} (t \cos t + 3 \sin t) \right\} + \delta.$$

Exerciţiul 3. Să se rezolve ecuaţia diferenţială în distribuţii

$T'' - 4T' + 3T = \left\{ \eta(t) e^{2t} \right\} + \delta'.$

Rezolvare. Este ecuaţie diferenţială în distribuţii, de ordin $n = 3$, liniară, cu $1, -4, 3$ coeficienţi constanţi, cu $S = \left\{ \eta(t) e^{2t} \right\} + \delta'$ distribuţie dată şi $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ este distribuţia necunoscută.

Etapa 1 : Se determină o soluţie fundamentală a operatorului liniar

$L(T) = T'' - 4T' + 3T,$

adică o distribuţie $E =?$ care satisface ecuaţia diferenţială

$L(E) = \delta.$

Pasul 1 : Se determină soluţia generală a ecuaţiei omogene cu soluţii funcţii ataşate, adică a ecuaţiei:

$(*_{EO})\ x'' - 4x' + 3x = 0, t \in \mathbb{R}.$

•Se ataşează ecuaţiei diferenţiale $(*_{EO})$ ecuaţia ei caracteristică şi se rezolvă:

$$(*_{EC})\ \lambda^2 - 4\lambda^1 + 3\lambda^0 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \text{ cu } m(\lambda_1) = 1, \\ \lambda_2 = 3 \text{ cu } m(\lambda_2) = 1. \end{cases}$$

•Pentru fiecare rădăcină a ecuaţiei caracteristice găsim corespunzător soluţii particulare liniar independente ale ecuaţiei omogene $(*_{EO})$, după algoritmul dat la EDCO:

$\lambda_1 = 1$ cu $m(\lambda_1) = 1 \rightsquigarrow \left\{ x_1(t) = e^{1t}. \right.$

$\lambda_2 = 3$ cu $m(\lambda_2) = 1 \rightsquigarrow \{x_2(t) = e^{3t}$.

$\bullet B = (x_1, x_2)$ este un sistem fundamental de soluţii pentru $(*_{EO})$ (sunt exact 2 soluţii particulare pentru $(*_{EO})$ şi funcţii liniar independente). Soluţia generală a ecuaţiei $(*_{EO})$ este

$x_o(t; c_1, c_2) = c_1 e^t + c_2 e^{3t}, \forall t \in \mathbb{R}$ şi $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

<u>Pasul 2 :</u> Se determină soluţia problemei Cauchy

$$\begin{cases} (*_{EO})\, x'' - 4x' + 3x = 0, t \in \mathbb{R}. \\ CI : x(0) = 0,\, x'(0) = \dfrac{1}{1} \end{cases}$$

Se impun condiţiile iniţiale asupra soluţiei x găsite

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{3t} \\ x'(t) = c_1 e^t + 3c_2 e^{3t} \end{cases} \underset{\begin{cases} x(0) = 0 \\ x'(0) = 1 \end{cases}}{\overset{CI}{\Rightarrow}} \begin{cases} c_1 1 + c_2 1 = 0 \\ c_1 1 + c_2 3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{-1}{2} \\ c_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Atunci $x(t) = \frac{-1}{2} e^t + \frac{1}{2} e^{3t}, \forall t \in \mathbb{R}$, este unica soluţie a ecuaţiei $(*_{EO})$ ce verifică CI date.

<u>Pasul 3 :</u> O soluţie fundamentală a operatorului L este

$E = \{\eta(t)\, x(t)\} = \left\{\eta(t) \left(\frac{-1}{2} e^t + \frac{1}{2} e^{3t}\right)\right\}.$

<u>Etapa 2 :</u> Soluţia ecuaţiei date este

$$T = S * E = \left(\left\{\eta(t)\, e^{2t}\right\} + \delta'\right) * \left\{\eta(t) \left(\tfrac{-1}{2} e^t + \tfrac{1}{2} e^{3t}\right)\right\} \overset{\text{liniaritate}}{=}$$
$$= \underbrace{\left\{\eta(t)\, e^{2t}\right\} * \left\{\eta(t) \left(\frac{-1}{2} e^t + \frac{1}{2} e^{3t}\right)\right\}}_{T_1} + \underbrace{\delta' * \left\{\eta(t) \left(\frac{-1}{2} e^t + \frac{1}{2} e^{3t}\right)\right\}}_{T_2}.$$

$T_1 = \left\{\eta(t)\, e^{2t}\right\} * \left\{\eta(t) \left(\frac{-1}{2} e^t + \frac{1}{2} e^{3t}\right)\right\} = \{f\} * \{g\} \overset{\text{Propoziţia 10.2.6}}{=} \{f * g\}$,unde

$$f(t) = \eta(t)\, e^{2t} = \begin{cases} e^{2t}, & \text{dacă } t \geq 0 \\ 0, & \text{dacă } t < 0 \end{cases} \text{ şi } g(t) = \eta(t) \tfrac{-1}{2} e^t + \tfrac{1}{2} e^{3t} = \begin{cases} \frac{-1}{2} e^t + \frac{1}{2} e^{3t}, & \text{dacă } t \geq 0 \\ 0, & \text{dacă } t < 0 \end{cases}.$$

Se calculează convoluţia celor două funcţii $(f * g)(t) =?$

$$(f * g)(t) \overset{\text{Obs. 10.2.6.,}d)}{=} \eta(t) \int_0^t f(t - \tau)\, g(\tau)\, d\tau = \eta(t) \int_0^t f(\tau)\, g(t - \tau)\, d\tau.$$

Pentru $t < 0 \Rightarrow \left(\eta(t)\, e^{2t}\right) * \left(\eta(t) \left(\frac{-1}{2} e^t + \frac{1}{2} e^{3t}\right)\right) = 0.$

$$\text{Pentru } t \geq 0 \Rightarrow \left(\eta(t)\, e^{2t}\right) * \left(\eta(t) \left(\tfrac{-1}{2} e^t + \tfrac{1}{2} e^{3t}\right)\right) = 1 \cdot \int_0^t e^{2\tau} \left(\tfrac{-1}{2} e^{t-\tau} + \tfrac{1}{2} e^{3(t-\tau)}\right) d\tau =$$
$$= \int_0^t \frac{-e^{t+\tau} + e^{3t-\tau}}{2} d\tau = \frac{1}{2} \left(\left(-\frac{e^{t+\tau}}{1} + \frac{e^{3t-\tau}}{-1} \right) \Bigg|_{\tau=0}^{\tau=t} \right) = \frac{1}{2} \left(-\frac{e^{2t}}{1} + \frac{e^{2t}}{-1} + \frac{e^t}{1} - \frac{e^{3t}}{-1} \right) =$$
$$= \tfrac{1}{2} \left(e^t - 2e^{2t} + e^{3t}\right).$$

$T_1 = \left\{\eta(t) \frac{1}{2} \left(e^t - 2e^{2t} + e^{3t}\right)\right\}.$

$T_2 = \delta'' * \{\eta(t) \sin t\} \overset{\text{Propoziţia 10.2.8}}{=} \delta * \{\eta(t) \sin t\}'' = \{(\eta(t) \sin t)\}''$

Conform Teoremei de derivare a distribuţiilor regulare,

$\left\{\eta(t) \left(\frac{-1}{2} e^t + \frac{1}{2} e^{3t}\right)\right\}' = \left\{\left(\eta(t) \left(\frac{-1}{2} e^t + \frac{1}{2} e^{3t}\right)\right)'\right\} + \sigma_0(0)\, \delta,$

unde $\sigma_0(0)$ este saltul funcţiei $\eta(t) \left(\frac{-1}{2} e^t + \frac{1}{2} e^{3t}\right)$ în $a = 0$.

$$\eta(t) \left(\tfrac{-1}{2} e^t + \tfrac{1}{2} e^{3t}\right) = \begin{cases} \frac{-1}{2} e^t + \frac{1}{2} e^{3t}, & \text{dacă } t \geq 0 \\ 0, & \text{dacă } t < 0 \end{cases} \Rightarrow \sigma_0(0) = l_d(0) - l_s(0) = 0.$$

$$\left(\eta(t) \left(\tfrac{-1}{2} e^t + \tfrac{1}{2} e^{3t}\right)\right)' = \begin{cases} \frac{-1}{2} e^t + \frac{3}{2} e^{3t}, & \text{dacă } t > 0 \\ \nexists, & \text{dacă } t = 0 \\ 0, & \text{dacă } t < 0 \end{cases}$$

Atunci, folosind identificarea distribuţiilor de tip funcţie pentru funcţii egale a.p.t.,

$T_2 = \left\{\eta(t)\left(\frac{-1}{2}e^t + \frac{3}{2}e^{3t}\right)\right\} + 0\delta.$

În concluzie,

$T = T_1 + T_2 = \left\{\eta(t)\frac{1}{2}\left(e^t - 2e^{2t} + e^{3t}\right)\right\} + \left\{\eta(t)\left(\frac{-1}{2}e^t + \frac{3}{2}e^{3t}\right)\right\} + 0\delta \overset{\text{liniaritate}}{=}$
$= \left\{\eta(t)\left(2e^{3t} - e^{2t}\right)\right\}.$

Exerciţiul 4. Să se rezolve ecuaţiile diferenţiale în distribuţii
a) $4T'' + T = \{\eta(t)\sin t\} + \delta''$; **b)** $T'' - 4T' + 4T = \delta$;
c) $T'' - 3T' + 2T = \left\{\eta(t)e^{-t}\right\}$; **d)** $T'' + 2T' + 2T = \{\eta(t)\} + \delta$.