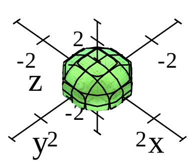
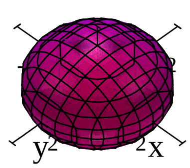
SEMINAR NR. 1, REZOLVĂRI
Matematici Speciale, AIA

ELEMENTE DE TEORIA CÂMPURILOR

1. Câmp scalar: suprafeţe de nivel, derivată după direcţie, gradient

Definiţia 1. Se numeşte *câmp scalar* o funcţie $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, unde D este un domeniu din $\mathbb{R}^3$.
a) Se numeşte *mulţime de nivel / suprafaţă de nivel / suprafaţă echipotenţială* a câmpului scalar φ locul geometric al punctelor $(x, y, z) \in D$ care prin φ sunt duse într-o valoare constantă $c_0 \in \mathbb{R}$.
b) *Ecuaţia suprafeţei de nivel* este
$\varphi(x, y, z) = c_0, (x, y, z) \in D.$
c) *Ecuaţia suprafeţei de nivel care trece prin punctul* (x_0, y_0, z_0) este
$\varphi(x, y, z) = \varphi(x_0, y_0, z_0), (x, y, z) \in D.$
Comentariul 1. Se notează cu P punctul din $D \subseteq \mathbb{R}^3$ de coordonate (x, y, z) şi se scrie $\varphi(P)$ în loc de $\varphi(x, y, z)$, mai ales la punerea în evidenţă a unor interpretări fizice, în care dependenţa este legată de punct şi mai puţin de coordonatele sale. Ecuaţia suprafeţei de nivel devine
$\varphi(P) = c_0, P \in D$ sau, dacă suprafaţa trece prin $P_0, \varphi(P) = \varphi(P_0), P \in D.$
Exemplul 1. Fie $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\varphi(P) = \varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ un câmp scalar.
Suprafeţele de nivel sunt de ecuaţie $x^2 + y^2 + z^2 = c, c \in \mathbb{R}, c \geq 0.$
Pentru $c = 1$ şi $c = 4$, suprafeţele $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ şi $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ sunt sfere:





Pentru $c = 0$ suprafaţa $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ este originea, punctul dublu $(0, 0, 0)$.
Definiţia 2. În ipotezele din curs, se numeşte *derivata câmpului scalar φ după direcţia versorului $\overrightarrow{\mathbf{s}}$ în punctul* P_0, numărul

$$\lim_{\Delta_s \to 0} \frac{\varphi(P) - \varphi(P_0)}{\Delta_s} \overset{\text{not.}}{=} \frac{d\varphi}{d\overrightarrow{\mathbf{s}}}(P_0), \qquad (1)$$

ori de câte ori această limită există şi este finită.
Observaţia 2.
a) Dacă $\frac{d\varphi}{d\overrightarrow{\mathbf{s}}}(P_0) > 0$, atunci câmpul scalar φ <u>creşte</u> într-o vecinătate a lui P_0 după direcţia şi sensul lui $\overrightarrow{\mathbf{s}}$.
b) Dacă $\frac{d\varphi}{d\overrightarrow{\mathbf{s}}}(P_0) < 0$, atunci câmpul scalar φ <u>descreşte</u> într-o vecinătate a lui P_0 după direcţia şi sensul lui $\overrightarrow{\mathbf{s}}$.
Teorema 1. (expresia derivatei după o direcţie în coordonate carteziene).
Fie $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{C}^1(D)$. Atunci φ admite derivate după orice direcţie $\overrightarrow{\mathbf{s}}$ în orice $P_0 \in D$. În plus, dacă $\overrightarrow{\mathbf{s}} = \alpha \overrightarrow{\mathbf{i}} + \beta \overrightarrow{\mathbf{j}} + \gamma \overrightarrow{\mathbf{k}}$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ este versor, atunci

$$\boxed{\frac{d\varphi}{d\overrightarrow{\mathbf{s}}}\left(P_0\right)=\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial x}\left(P_0\right)+\beta\frac{\partial\varphi}{\partial y}\left(P_0\right)+\gamma\frac{\partial\varphi}{\partial z}\left(P_0\right).} \tag{2}$$

Teorema 2. (expresie a derivatei după o direcţie).

Fie $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{C}^1(D)$ şi $P_0 \in D$. Fie $\overrightarrow{\mathbf{n}}$ versorul normalei la suprafaţa de nivel S în punctul P_0. Atunci, pentru orice $\overrightarrow{\mathbf{s}}$-un alt versor cu originea în P_0, cu $\theta = \left(\widehat{\overrightarrow{\mathbf{n}}, \overrightarrow{\mathbf{s}}}\right)$,

$$\boxed{\frac{d\varphi}{d\overrightarrow{\mathbf{s}}}\left(P_0\right)=\frac{d\varphi}{d\overrightarrow{\mathbf{n}}}\left(P_0\right)\cos\theta} \tag{3}$$

Observaţia 4.c) Dintre toate direcţiile cu originea în P_0, **direcţia în raport cu care derivata lui φ este maximă este direcţia normalei**.

Exerciţiul 1. Fie:

a) $\varphi(P) = 2x^2 - 4y + z, P_0(0,1,2)$, $\overrightarrow{\mathbf{l}} = \overrightarrow{\mathbf{i}} - 2\overrightarrow{\mathbf{j}} + 3\overrightarrow{\mathbf{k}}$, $\overrightarrow{\mathbf{s}}$ este versorul lui $\overrightarrow{\mathbf{l}}$;

b) $\varphi(P) = xyz, P_0(-1,1,2)$, $\overrightarrow{\mathbf{l}} = \overrightarrow{\mathbf{i}} + 2\overrightarrow{\mathbf{j}} + 4\overrightarrow{\mathbf{k}}$, $\overrightarrow{\mathbf{s}}$ este versorul lui $\overrightarrow{\mathbf{l}}$.

Să se determine derivata câmpului scalar φ în P_0 după direcţia vectorului versor al lui $\overrightarrow{\mathbf{l}}$, $\frac{d\varphi}{d\overrightarrow{\mathbf{s}}}(P_0)$.

Să se studieze dacă într-o vecinătate a punctului P_0, câmpul scalar φ creşte sau descreşte după direcţia lui $\overrightarrow{\mathbf{s}}$.

Să se scrie ecuaţia suprafeţei de nivel pe care se află P_0.

Rezolvare.

a) $\left\|\overrightarrow{\mathbf{l}}\right\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14} \Rightarrow \overrightarrow{\mathbf{s}} = \frac{1}{\sqrt{14}}\overrightarrow{\mathbf{i}} - \frac{2}{\sqrt{14}}\overrightarrow{\mathbf{j}} + \frac{3}{\sqrt{14}}\overrightarrow{\mathbf{k}}$.

$\varphi \in \mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^3\right)$, cu $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(P) = 4x$; $\frac{\partial\varphi}{\partial y}(P) = -4$; $\frac{\partial\varphi}{\partial z}(P) = 1$;

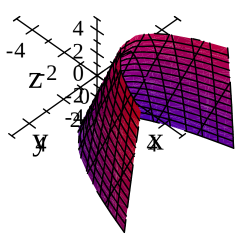
Conform (2) $\Rightarrow$

$$\frac{d\varphi}{d\overrightarrow{\mathbf{s}}}(P_0) = \frac{1}{\sqrt{14}}\frac{\partial\varphi}{\partial x}(0,1,2) - \frac{2}{\sqrt{14}}\frac{\partial\varphi}{\partial y}(0,1,2) + \frac{3}{\sqrt{14}}\frac{\partial\varphi}{\partial z}(0,1,2) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{14}}(4\cdot 0) - \frac{2}{\sqrt{14}}(-4) + \frac{3}{\sqrt{14}}(1) = \frac{11}{\sqrt{14}}.$$

Deoarece $\frac{d\varphi}{d\overrightarrow{\mathbf{s}}}(P_0) = \frac{11}{\sqrt{14}} > 0 \Rightarrow$ câmpul scalar creşte într-o vecinătate a P_0 după direcţia şi sensul lui $\overrightarrow{\mathbf{s}}$.

Ecuaţia suprafeţei de nivel pe care se află P_0 este

$2x^2 - 4y + z = 2\cdot 0^2 - 4\cdot 1 + 2.$



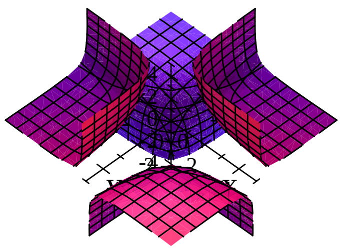
b) $\left\|\overrightarrow{\mathbf{l}}\right\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{21} \Rightarrow \overrightarrow{\mathbf{s}} = \frac{1}{\sqrt{21}}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{2}{\sqrt{21}}\overrightarrow{\mathbf{j}} + \frac{4}{\sqrt{21}}\overrightarrow{\mathbf{k}}$.

$\varphi \in \mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^3\right)$, cu $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(P) = yz$; $\frac{\partial\varphi}{\partial y}(P) = xz$; $\frac{\partial\varphi}{\partial z}(P) = xy$;

Conform (2) $\Rightarrow$
$\dfrac{d\varphi}{d\overrightarrow{\mathbf{s}}}(P_0) = \dfrac{1}{\sqrt{21}}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(-1,1,2) + \dfrac{2}{\sqrt{21}}\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(-1,1,2) + \dfrac{4}{\sqrt{21}}\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}(-1,1,2) =$
$= \dfrac{1}{\sqrt{21}}(1\cdot 2) + \dfrac{2}{\sqrt{21}}((-1)\cdot 2) + \dfrac{4}{\sqrt{21}}((-1)\cdot 1) = \dfrac{-6}{\sqrt{21}}.$

Deoarece $\dfrac{d\varphi}{d\overrightarrow{\mathbf{s}}}(P_0) = \dfrac{-6}{\sqrt{21}} < 0 \Rightarrow$ câmpul scalar descreşte într-o vecinătate a P_0 după direcţia şi sensul lui $\overrightarrow{\mathbf{s}}$.

Ecuaţia suprafeţei de nivel pe care se află P_0 este
$xyz = (-1)\cdot 1\cdot 2.$



Exerciţiul 2. Fie
$\overrightarrow{\mathbf{r}}(P) = x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\overrightarrow{\mathbf{k}}$ vectorul de poziţie a unui punct $P(x,y,z)$;
$\overrightarrow{\mathbf{c}} = c_1\overrightarrow{\mathbf{i}} + c_2\overrightarrow{\mathbf{j}} + c_3\overrightarrow{\mathbf{k}}$ un vector constant unitar;
$\varphi(P) = \overrightarrow{\mathbf{c}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{r}}(P)$ un câmp scalar.
Să se verifice că derivata după o direcţie arbitrară unitară $\overrightarrow{\mathbf{s}} = s_1\overrightarrow{\mathbf{i}} + s_2\overrightarrow{\mathbf{j}} + s_3\overrightarrow{\mathbf{k}}$ a câmpului scalar φ nu depinde de punctul $P(x,y,z)$, ci doar de $\overrightarrow{\mathbf{s}}$.
Să se calculeze derivata lui $\varphi(P)$ după direcţia $\overrightarrow{\mathbf{c}}$.

Rezolvare. $\varphi(P) = \left(c_1\overrightarrow{\mathbf{i}} + c_2\overrightarrow{\mathbf{j}} + c_3\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)\cdot\left(x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\overrightarrow{\mathbf{k}}\right) = c_1x + c_2y + c_3z;$
$\varphi \in \mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^3\right)$, cu $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(P) = c_1$; $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(P) = c_2$; $\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}(P) = c_3$.
Conform (2) $\Rightarrow$
$\dfrac{d\varphi}{d\overrightarrow{\mathbf{s}}}(P) = s_1\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(P) + s_2\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(P) + s_2\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}(P) = s_1c_1 + s_2c_2 + s_3c_3 = \overrightarrow{\mathbf{c}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{s}}$-nu depinde de P.

$$\boxed{\dfrac{d\left(\overrightarrow{\mathbf{c}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{r}}\right)}{d\overrightarrow{\mathbf{s}}}(P) = \overrightarrow{\mathbf{c}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{s}}.}$$

$\overrightarrow{\mathbf{s}} = \overrightarrow{\mathbf{c}} \Rightarrow \dfrac{d\varphi}{d\overrightarrow{\mathbf{c}}}(P) = c_1c_1 + c_2c_2 + c_3c_3 = \overrightarrow{\mathbf{c}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{c}} = \left\|\overrightarrow{\mathbf{c}}\right\|^2.$

Mai mult, deoarece $\dfrac{d\varphi}{d\overrightarrow{\mathbf{c}}}(P) > 0 \Rightarrow$ câmpul scalar creşte într-o vecinătate a unui P după direcţia şi sensul lui $\overrightarrow{\mathbf{c}} \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$.

Definiţia 3. Fie $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{C}^1(D)$. Se numeşte *gradientul câmpului scalar* φ *în* $P_0 \in D$ vectorul din $\mathbb{V}_3$:

$$\boxed{\operatorname{grad}\varphi(P_0) = \dfrac{d\varphi}{d\overrightarrow{\mathbf{n}}}(P_0)\,\overrightarrow{\mathbf{n}},} \tag{4}$$

unde $\overrightarrow{\mathbf{n}}$ este versorul normalei la suprafaţa de nivel S_0 în punctul P_0.

Observaţia 5. a) (gradientul ca vector normal) Gradientul lui φ într-un punct **este ortogonal pe suprafaţa de nivel a lui φ în acel punct**, putând fi folosit la a construi un vector normal la o suprafaţă. În ipoteza că $\operatorname{grad}\varphi(P_0) \neq 0$, un versor normal la suprafaţa de nivel în P_0 este

$$\boxed{\overrightarrow{\mathbf{n}} = \frac{1}{\|\operatorname{grad}\varphi(P_0)\|} \operatorname{grad}\varphi(P_0).}$$

b) (gradientul proiectat pe un versor) Deoarece

$$\frac{d\varphi}{d\overrightarrow{\mathbf{s}}}(P_0) = \operatorname{grad}\varphi(P_0) \cdot \overrightarrow{\mathbf{s}} = \operatorname{pr}_{\overrightarrow{\mathbf{s}}} \operatorname{grad}\varphi(P_0),$$

rezultă că **derivata după direcţia unui versor într-un punct este proiecţia scalară a gradientului pe acel versor**.

c) (gradientul şi direcţia celei mai rapide variaţii) Deoarece

$$\boxed{\frac{d\varphi}{d\overrightarrow{\mathbf{s}}}(P_0) = \operatorname{grad}\varphi(P_0) \cdot \overrightarrow{\mathbf{s}},}$$

calculând derivata după direcţia versorului gradientului, $\overrightarrow{\mathbf{n}} = \dfrac{1}{\|\operatorname{grad}\varphi(P_0)\|} \operatorname{grad}\varphi(P_0)$, se obţine

$$\frac{d\varphi}{d\overrightarrow{\mathbf{n}}}(P_0) = \operatorname{grad}\varphi(P_0) \cdot \left(\frac{1}{\|\operatorname{grad}\varphi(P_0)\|} \operatorname{grad}\varphi(P_0)\right) = \frac{\|\operatorname{grad}\varphi(P_0)\|^2}{\|\operatorname{grad}\varphi(P_0)\|} = \|\operatorname{grad}\varphi(P_0)\| > 0.$$

Se deduce că **direcţia gradient este o direcţie de creştere a câmpului scalar $\boldsymbol{\varphi}$**, iar direcţia opusă este una de descreştere. Mai mult este **direcţia celei mai rapide creşteri/ descreşteri**, conform Teoremei 2 şi a Observaţiei 4*c*).

d) Deşi gradientul poate fi dat în termeni de coordonate (vezi Teorema 3), el este **invariant în raport cu transformările ortogonale**.

Teorema 3. (expresia gradientului unui câmp scalar în coordonate carteziene).

Fie $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \varphi \in \mathcal{C}^1(D)$. Atunci φ admite gradient în orice punct $P_0 \in D$ şi

$$\boxed{\operatorname{grad}\varphi(P_0) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(P_0)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}(P_0)\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}(P_0)\,\overrightarrow{\mathbf{k}}} \tag{5}$$

Notând cu ∇ *operatorul Hamilton de derivare parţială*

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y}\overrightarrow{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z}\overrightarrow{\mathbf{k}},$$

se poate scrie formal

$$\boxed{\operatorname{grad}\varphi(P) = \nabla\varphi(P), \forall P \in D.}$$

Exerciţiul 3. Fie câmpurile scalare

a) $\varphi(P) = x^3 + 3x^2 + 4xy + y^2 + xz - z^2$; **b)** $\varphi(P) = xyze^{x+y+z}$;

c) $\varphi(P) = f(x, xy, xyz), f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})$.

Să se calculeze gradienţii câmpurilor scalare într-un punct arbitrar P; apoi, pentru a), b), în $P_0(1,1,1)$. Să se scrie ecuaţia suprafeţei de nivel în P_0 şi să se determine un versor normal la suprafaţă în P_0.

Rezolvare. a) $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$, cu

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(P) = 3x^2 + 6x + 4y + 0 + z - 0;$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}(P) = 0 + 0 + 4x + 2y + 0 - 0;$$

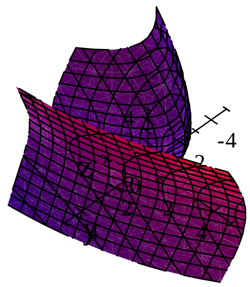
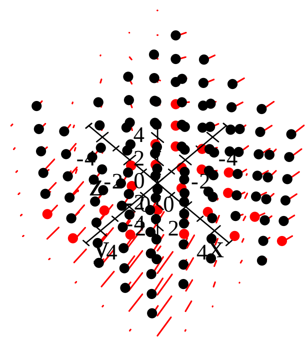
$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}(P) = 0 + 0 + 0 + 0 + x - 2z;$$

Conform (5) $\Rightarrow \operatorname{grad}\varphi(P) = \nabla\varphi(P) = \left(3x^2 + 6x + 4y + z\right)\overrightarrow{\mathbf{i}} + (4x + 2y)\overrightarrow{\mathbf{j}} + (x - 2z)\overrightarrow{\mathbf{k}}$.

Mai mult $\operatorname{grad}\varphi(P_0) = \nabla\varphi(P_0) = 14\overrightarrow{\mathbf{i}} + 6\overrightarrow{\mathbf{j}} - \overrightarrow{\mathbf{k}}$.

Suprafaţa de nivel ce trece prin $P_0(1,1,1)$, determinată de acest câmp are ecuaţia:
$\varphi(P) = \varphi(P_0) \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 4xy + y^2 + xz - z^2 = 9$.

Suprafaţa de nivel (în $P_0(1,1,1)$) şi câmpul de gradienţi (în general) au reprezentarea:

Un versor normal la suprafaţa de nivel în P_0 este versorul vectorului $\operatorname{grad}\varphi(P_0)$,
$\overrightarrow{\mathbf{n}}(P_0) = \dfrac{1}{\|\operatorname{grad}\varphi(P_0)\|}\operatorname{grad}\varphi(P_0)$.

Aici $\overrightarrow{\mathbf{n}}(P_0) = \dfrac{1}{\sqrt{14^2 + 6^2 + (-1)^2}}\left(14\overrightarrow{\mathbf{i}} + 6\overrightarrow{\mathbf{j}} - \overrightarrow{\mathbf{k}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{233}}\left(14\overrightarrow{\mathbf{i}} + 6\overrightarrow{\mathbf{j}} - \overrightarrow{\mathbf{k}}\right)$ este versor normal la suprafaţa de nivel în P_0. Direcţia lui (aceeaşi cu a gradientului) este una după care câmpul scalar creşte într-o vecinătate a lui P_0, chiar este direcţia celei mai rapide creşteri.

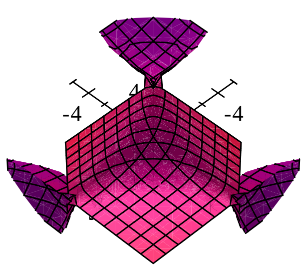
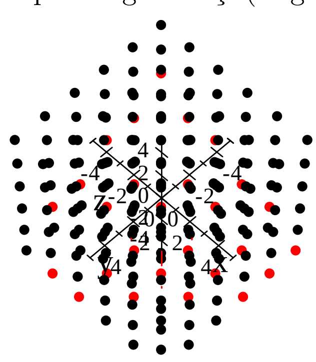
b) $\varphi \in \mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^3\right)$, cu
$\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(P) = yze^{x+y+z} + xyze^{x+y+z}$; $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(P) = xze^{x+y+z} + xyze^{x+y+z}$; $\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}(P) = xye^{x+y+z} + xyze^{x+y+z}$;

Conform (5) $\Rightarrow \operatorname{grad}\varphi(P) = \nabla\varphi(P) = e^{x+y+z}\left(yz(1+x)\overrightarrow{\mathbf{i}} + xz(1+y)\overrightarrow{\mathbf{j}} + xy(1+z)\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)$.

Mai mult $\operatorname{grad}\varphi(P_0) = \nabla\varphi(P_0) = e^3\left(2\overrightarrow{\mathbf{i}} + 2\overrightarrow{\mathbf{j}} + 2\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)$.

Suprafaţa de nivel ce trece prin $P_0(1,1,1)$, determinată de acest câmp are ecuaţia:
$\varphi(P) = \varphi(P_0) \Leftrightarrow xyze^{x+y+z} = e^3$.

Suprafaţa de nivel (în $P_0(1,1,1)$) şi câmpul de gradienţi (în general) au reprezentarea:

Un versor normal la suprafaţa de nivel în P_0 este versorul vectorului $\operatorname{grad}\varphi(P_0)$,
$\overrightarrow{\mathbf{n}}(P_0) = \dfrac{1}{\|\operatorname{grad}\varphi(P_0)\|}\operatorname{grad}\varphi(P_0)$.

Aici $\overrightarrow{\mathbf{n}}(P_0) = \dfrac{1}{\sqrt{(2e^3)^2 + (2e^3)^2 + (2e^3)^2}} e^3 \left(2\overrightarrow{\mathbf{i}} + 2\overrightarrow{\mathbf{j}} + 2\overrightarrow{\mathbf{k}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\overrightarrow{\mathbf{i}} + \overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}\right)$ este versor normal la suprafaţa de nivel în P_0. Direcţia lui (aceeaşi cu a gradientului) este una după care câmpul scalar creşte într-o vecinătate a lui P_0, chiar este direcţia celei mai rapide creşteri.

c) Se notează:

$u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, u(P) = x; v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, v(P) = xy; w : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, w(P) = xyz.$

Sunt funcţii din $\mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}\right)$; atunci $\varphi \in \mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}\right)$, cu

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(P) =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial u}(u(P), v(P), w(P)) \frac{\partial u}{\partial x}(P) + \frac{\partial f}{\partial v}(u(P), v(P), w(P)) \frac{\partial v}{\partial x}(P) + \frac{\partial f}{\partial w}(u(P), v(P), w(P)) \frac{\partial w}{\partial x}(P) =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial u}(u(P), v(P), w(P)) \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial v}(u(P), v(P), w(P)) \cdot y + \frac{\partial f}{\partial w}(u(P), v(P), w(P)) \cdot yz.$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(P) =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial u}(u(P), v(P), w(P)) \frac{\partial u}{\partial y}(P) + \frac{\partial f}{\partial v}(u(P), v(P), w(P)) \frac{\partial v}{\partial y}(P) + \frac{\partial f}{\partial w}(u(P), v(P), w(P)) \frac{\partial w}{\partial y}(P) =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial u}(u(P), v(P), w(P)) \cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial v}(u(P), v(P), w(P)) \cdot y + \frac{\partial f}{\partial w}(u(P), v(P), w(P)) \cdot xz.$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial z}(P) =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial u}(u(P), v(P), w(P)) \cdot \frac{\partial u}{\partial z}(P) + \frac{\partial f}{\partial v}(u(P), v(P), w(P)) \cdot \frac{\partial v}{\partial z}(P) + \frac{\partial f}{\partial w}(u(P), v(P), w(P)) \cdot \frac{\partial w}{\partial z}(P) =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial u}(u(P), v(P), w(P)) \cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial v}(u(P), v(P), w(P)) \cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial w}(u(P), v(P), w(P)) \cdot xy.$$

Conform (5) $\Rightarrow$

$\operatorname{grad} \varphi(P) = \nabla \varphi(P) =$

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u(P), v(P), w(P)) \left(1\overrightarrow{\mathbf{i}} + 0\overrightarrow{\mathbf{j}} + 0\overrightarrow{\mathbf{k}}\right) + \frac{\partial f}{\partial v}(u(P), v(P), w(P)) \left(y\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + 0\overrightarrow{\mathbf{k}}\right) +$$
$$+ \frac{\partial f}{\partial w}(u(P), v(P), w(P)) \left(yz\overrightarrow{\mathbf{i}} + xz\overrightarrow{\mathbf{j}} + xy\overrightarrow{\mathbf{k}}\right).$$

Exerciţiul 4. Să se calculeze gradienţii câmpurilor scalare:

a) $\operatorname{grad} r$;**b)** $\operatorname{grad}\left(\overrightarrow{\mathbf{c}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{r}}\right)$;**c)** $\operatorname{grad} f(r)$;

unde $\overrightarrow{\mathbf{r}}(P) = x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\overrightarrow{\mathbf{k}} \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$ vectorul de poziţie a unui punct $P(x, y, z)$; $r = \left\|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right\|$,

$\overrightarrow{\mathbf{c}} = c_1\overrightarrow{\mathbf{i}} + c_2\overrightarrow{\mathbf{j}} + c_3\overrightarrow{\mathbf{k}}$ este un vector constant, iar

$f \in \mathcal{C}^1(]0, \infty[; \mathbb{R})$;

d) Să se determine $f \in \mathcal{C}^1(]0, \infty[; \mathbb{R})$ astfel încât

$\overrightarrow{\mathbf{r}} \cdot \operatorname{grad} f(r) = r^2, \forall \overrightarrow{\mathbf{r}} = x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\overrightarrow{\mathbf{k}} \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$, unde $r = \left\|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right\|$

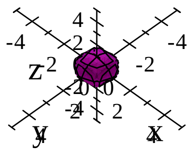
Rezolvare. a) $\varphi(P) = r(P) = r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{D})$, cu

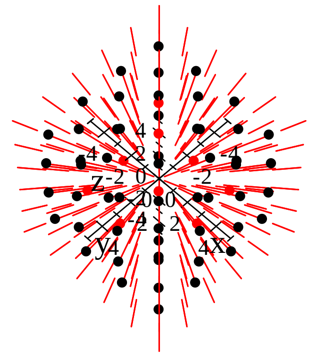
$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(P) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \frac{\partial \varphi}{\partial y}(P) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \frac{\partial \varphi}{\partial z}(P) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}};$$

Conform (5) $\Rightarrow \operatorname{grad} \varphi(P) = \nabla \varphi(P) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\left(x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\overrightarrow{\mathbf{k}}\right) = \dfrac{1}{\left\|\overrightarrow{\mathbf{r}}(P)\right\|}\overrightarrow{\mathbf{r}}(P).$

Deci $\boxed{\operatorname{grad} r = \dfrac{1}{\left\|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right\|}\overrightarrow{\mathbf{r}}}$

Suprafaţa de nivel (în $P_0\,(1,1,1)$) şi câmpul de gradienţi (în general) au reprezentarea:





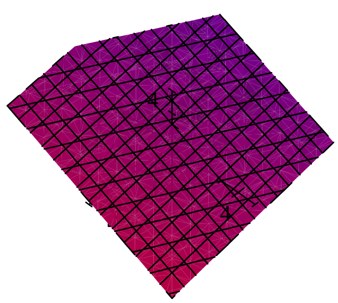
b) $\varphi\,(P) = \overrightarrow{\mathbf{c}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{r}}\,(P) = c_1 x + c_2 y + c_3 z, \varphi \in \mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^3\right)$, cu

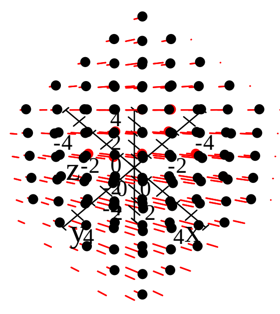
$\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}\,(P) = c_1;\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\,(P) = c_2;\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial z}\,(P) = c_3;$

Conform (5) $\Rightarrow \operatorname{grad}\varphi\,(P) = \nabla\varphi\,(P) = c_1\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + c_2\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + c_3\,\overrightarrow{\mathbf{k}} = \overrightarrow{\mathbf{c}}$.

Deci $\boxed{\operatorname{grad}\left(\overrightarrow{\mathbf{c}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{r}}\right) = \overrightarrow{\mathbf{c}}}$

Suprafaţa de nivel (în $P_0\,(1,1,1)$) şi câmpul de gradienţi (în general) au reprezentarea:





c) $\varphi\,(P) = f\,(r\,(P));\ r \in \mathcal{C}^1\,(\mathbb{D})$; atunci $\varphi \in \mathcal{C}^1\,(\mathbb{D})$, cu

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\,(P) = \frac{df}{dr}\,(r\,(P)) \cdot \frac{\partial r}{\partial x}\,(P) = f'\,(r\,(P))\,\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}\,(P) = \frac{df}{dr}\,(r\,(P)) \cdot \frac{\partial r}{\partial y}\,(P) = f'\,(r\,(P))\,\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z}\,(P) = \frac{df}{dr}\,(r\,(P)) \cdot \frac{\partial r}{\partial z}\,(P) = f'\,(r\,(P))\,\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Conform (5) $\Rightarrow \operatorname{grad}\varphi\,(P) = \nabla\varphi\,(P) = \dfrac{df}{dr}\,(r\,(P))\,\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\left(x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\,\overrightarrow{\mathbf{k}}\right) = f'\,(r\,(P))\,\dfrac{1}{r\,(P)}\,\overrightarrow{\mathbf{r}}\,(P)$.

Deci $\boxed{\operatorname{grad}\,(f\,(r)) = f'\,(r)\left(\dfrac{1}{r}\,\overrightarrow{\mathbf{r}}\right).}$

d) Conform a) şi c) $\Rightarrow$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}} \cdot \operatorname{grad} f\,(r) = r^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathbf{r}} \cdot \left(f'\,(r)\,\frac{1}{r}\,\overrightarrow{\mathbf{r}}\right) = r^2 \Leftrightarrow f'\,(r)\,\frac{1}{r}\,\overrightarrow{\mathbf{r}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{r}} = r^2 \overset{\overrightarrow{\mathbf{r}} \neq \overrightarrow{\mathbf{0}} \Leftrightarrow r \neq 0}{\Leftrightarrow} f'\,(r) = r.$$

Se obţine: $f\,(r) = \dfrac{r^2}{2} + c, r \in\,]0,\infty[\,, c \in \mathbb{R}$.

Exerciţiul 5. Se dă câmpul scalar $\varphi(P) = x^2y + y^2z + z^2x$.
a) Să se găsească suprafaţa de nivel ce trece prin $P_0(2,1,-1)$, determinată de acest câmp.
b) Să se determine versorul normalei în punctul P_0 la suprafaţa de nivel găsită.
Rezolvare. A se vedea Curs.
Exerciţiul 6. Se dă câmpul scalar $\varphi(P) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$. În ce puncte ale spaţiului direcţia vectorului $\operatorname{grad}\varphi$ este paralelă cu axa Oz?
Rezolvare. A se vedea Curs.

○**Exerciţiul 7**. Se dă câmpul scalar $\varphi(P) = \ln\left(\dfrac{1}{r(P)}\right)$, unde $r(P) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} \neq 0$. În ce puncte ale spaţiului are loc egalitatea

$$\|\operatorname{grad}\varphi(P)\| = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}?$$

Rezolvare. $\varphi(P) = f(r(P))$, unde $f(r) = \ln\left(\dfrac{1}{r}\right) = -\ln r; r \in \mathcal{C}^1(\mathbb{D})$; atunci $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{D})$, cu

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(P) = \frac{-1}{r(P)} \cdot \frac{\partial r}{\partial x}(P) = \frac{-1}{r(P)} \cdot \frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}.$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}(P) = \frac{-1}{r(P)} \cdot \frac{\partial r}{\partial y}(P) = \frac{-1}{r(P)} \cdot \frac{y-b}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}.$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}(P) = \frac{-1}{r(P)} \cdot \frac{\partial r}{\partial z}(P) = \frac{-1}{r(P)} \cdot \frac{z-c}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}.$$

Conform (5) $\Rightarrow \operatorname{grad}\varphi(P) = \nabla\varphi(P) =$

$$= \frac{-1}{r(P)} \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}} \left((x-a)\overrightarrow{\mathbf{i}} + (y-b)\overrightarrow{\mathbf{j}} + (z-c)\overrightarrow{\mathbf{k}}\right) =$$

$$= \frac{-1}{r(P)} \frac{1}{r(P)} \cdot \left((x-a)\overrightarrow{\mathbf{i}} + (y-b)\overrightarrow{\mathbf{j}} + (z-c)\overrightarrow{\mathbf{k}}\right).$$

$$\|\operatorname{grad}\varphi(P)\| = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \Leftrightarrow \frac{1}{r^4} \cdot r^2 = \frac{1}{a^2+b^2+c^2} \Leftrightarrow r^2 = a^2+b^2+c^2 \Leftrightarrow$$

$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = a^2+b^2+c^2$- o sferă în spaţiu, centrată în (a,b,c) şi rază $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. O reprezentare pentru $(a,b,c) = (1,-1,2)$ este: