

SEMINAR NR. 2, REZOLVĂRI  
Matematici Speciale, AIA

2.1. Câmp vectorial: linii de câmp, suprafețe de câmp

**Definiția 1.**

a) Se numește *câmp vectorial* o funcție  $\vec{v} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{V}_3$ , unde  $D$  este un domeniu,  $\mathbb{V}_3$  este mulțimea vectorilor tridimensionali și

$$\vec{v}(x, y, z) = v_1(x, y, z) \vec{i} + v_2(x, y, z) \vec{j} + v_3(x, y, z) \vec{k}.$$

Funcțiile componente  $v_1, v_2, v_3$  sunt câmpuri scalare.

b) Se numește *linie de câmp* a câmpului vectorial  $\vec{v} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{V}_3$  orice curbă din domeniul  $D$  care este tangentă în fiecare punct al său la câmpul vectorial  $\vec{v}$ .

c) Se numește *suprafață de câmp* a câmpului vectorial  $\vec{v} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{V}_3$  orice suprafață generată de liniile de câmp.

**Comentariul 1.** Se notează cu  $P$  punctul din  $D \subseteq \mathbb{R}^3$  de coordonate  $(x, y, z)$  și se scrie  $\vec{v}(P)$  în loc de  $\vec{v}(x, y, z)$ , mai ales la punerea în evidență a unor interpretări fizice, în care dependența este legată de punct și mai puțin de coordonatele sale.

**Teorema 1.** (ecuațiile liniilor de câmp). Fie  $\vec{v} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{V}_3$ ,

$$\vec{v}(P) = \vec{v}(x, y, z) = v_1(x, y, z) \vec{i} + v_2(x, y, z) \vec{j} + v_3(x, y, z) \vec{k}.$$

a) Ecuațiile liniilor de câmp ale câmpului vectorial  $\vec{v}$  sunt soluțiile sistemului de ecuații diferențiale:

$$\frac{dx}{v_1(x, y, z)} = \frac{dy}{v_2(x, y, z)} = \frac{dz}{v_3(x, y, z)}. \quad (1)$$

(2 ecuații diferențiale  $\Rightarrow$  2 integrale prime).

b) Ecuația  $F(x, y, z) = 0$  reprezintă o suprafață de câmp a câmpului vectorial  $\vec{v}$  dacă și numai dacă  $F$  este soluție a ecuației cu derivate parțiale:

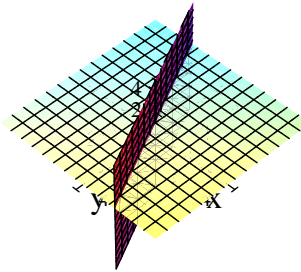
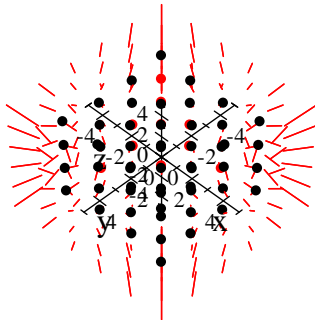
$$v_1(x, y, z) \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) + v_2(x, y, z) \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) + v_3(x, y, z) \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = 0. \quad (2)$$

**Observația 2.** Suprafața de câmp a câmpului vectorial  $\vec{v} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{V}_3$  care trece printr-o anumită curbă  $(\gamma)$  se obține formând un sistem algebric alcătuit din ecuațiile integralelor prime ale sistemului (1) și ecuațiile curbei  $(\gamma)$ .

**Exercițiul 1.** Fie:

$$\text{câmpul vectorial } \vec{v}(P) = xy^2 \vec{i} + x^2y \vec{j} + z(x^2 + y^2) \vec{k};$$

$$\text{curba } (\gamma) : \begin{cases} x = 2y \\ z = a \end{cases} \text{ plan} \cap \text{plan} = \text{dreaptă}.$$



a) Să se determine liniile de câmp ale câmpului vectorial;

b) Să se scrie ecuația suprafeței de câmp ce conține  $(\gamma)$ .

**Rezolvare.** a) Conform (1)  $\Rightarrow$  ecuațiile liniilor de câmp ale câmpului vectorial  $\vec{V}$  sunt soluțiile sistemului de ecuații diferențiale::

$$\frac{dx}{xy^2} = \frac{dy}{x^2y} = \frac{dz}{z(x^2 + y^2)}$$

$$\bullet \frac{dx}{xy^2} = \frac{dy}{x^2y} \Rightarrow xdx = ydy \mid \int_{EVS} \Rightarrow \frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{2} + k_1 \Rightarrow$$

$$\boxed{x^2 - y^2 = c_1, c_1 \in \mathbb{R}} \text{ -o integrală primă.}$$

$$\bullet \frac{dx}{xy^2} = \frac{dy}{x^2y} = \frac{dz}{z(x^2 + y^2)} \stackrel{\text{formal}}{=} \frac{\frac{1}{x}dx + \frac{1}{y}dy - \frac{1}{z}dz}{\frac{1}{x}xy^2 + \frac{1}{y}x^2y - \frac{1}{z}z(x^2 + y^2)} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{x}dx + \frac{1}{y}dy - \frac{1}{z}dz = 0 \stackrel{\text{formal}}{\Rightarrow} d(\ln|x| + \ln|y| + \ln|z|) = 0 \Rightarrow$$

$$\ln|x| + \ln|y| + \ln|z| = k'_1 \Rightarrow \ln\left|\frac{xy}{z}\right| = \ln k'_2 \stackrel{\text{formal}}{\Rightarrow}$$

$$\boxed{\frac{xy}{z} = c_2, c_2 \in \mathbb{R}} \text{ -o integrală primă.}$$

Ecuațiile liniilor de câmp sunt date de integralele prime funcțional independente:

$$(*) \begin{cases} x^2 - y^2 = c_1, c_1 \in \mathbb{R} \\ \frac{xy}{z} = c_2, c_2 \in \mathbb{R} \end{cases} \text{ suprafață} \cap \text{suprafață} = \text{curbă. (o infinitate dublă).}$$

b) Suprafețele de câmp sunt alcătuite din linii de câmp. Ele sunt de forma:

$$F\left(x^2 - y^2, \frac{xy}{z}\right) = 0, F \in C^1(\mathbb{D}) \text{ arbitrară.}$$

Ecuația suprafeței de câmp ce conține  $(\gamma)$  este soluția pentru sistemul algebric alcătuit din ecuațiile integralelor prime și ecuațiile curbei (o relație între  $x, y, z$  fără  $c_1, c_2$ ):

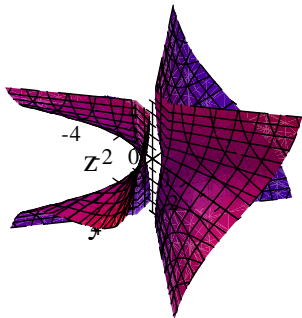
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = c_1 \\ \frac{xy}{z} = c_2 \\ x = 2y \\ z = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = a \\ xy = ac_2 \\ x^2 = 2ac_2 \\ 2ac_2 - \frac{2ac_2}{4} = c_1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$3ac_2 - 2c_1 = 0 \text{ -relația de condiție (doar între } c_1, c_2). \text{ Folosind } (*) \Rightarrow$$

$$3a \frac{xy}{z} - 2(x^2 - y^2) = 0 \text{ -ecuația suprafeței de câmp cerute.}$$

$$\text{(cu } F(u, v) = 3av - 2u)$$

$$\text{Pentru } a = 2 \Rightarrow$$

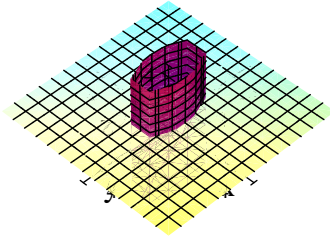


**Exercițiul 2.** Fie:

$$\text{câmpul vectorial } \vec{V}(P) = \text{grad}(\vec{c} \cdot \text{grad } f(P)), \text{ unde } \vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k},$$

$$f(P) = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3(y+z)}{6} + \frac{x^2yz}{2} + \varphi(y-z, z-x), \text{ cu } \varphi \text{ funcție arbitrară, derivabilă,}$$

curba  $(\gamma) : \begin{cases} x^2 + 4y^2 = 1 \\ z = 1 \end{cases}$  cilindru eliptic  $\cap$  plan = elipsă.

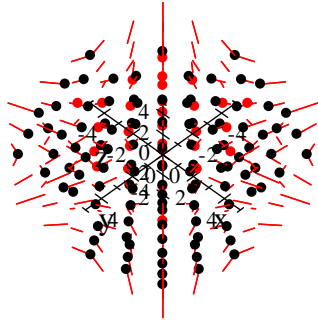


- a) Să se determine liniile de câmp ale câmpului vectorial;  
 b) Să se scrie ecuația suprafeței de câmp ce conține  $(\gamma)$ .

**Rezolvare.**  $f(P) = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3(y+z)}{6} + \frac{x^2yz}{2} + \varphi \left( \underbrace{y-z}_{u(x,y,z)}, \underbrace{z-x}_{v(x,y,z)} \right)$

$$\left. \begin{aligned} \text{grad } f(P) &= \nabla f(P) = \frac{\partial f}{\partial x}(P) \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(P) \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}(P) \vec{k} \\ \vec{c} &= \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \vec{c} \cdot \text{grad } f(P) &= 1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(P) + 1 \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(P) + 1 \cdot \frac{\partial f}{\partial z}(P) = \\ &= \frac{4x^3}{12} - \frac{3x^2(y+z)}{6} + \frac{2xyz}{2} + \\ &+ \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u(x,y,z), v(x,y,z)) \frac{\partial u}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u(x,y,z), v(x,y,z)) \frac{\partial v}{\partial x}(x,y,z) + \\ &+ 0 - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2z}{2} + \\ &+ \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u(x,y,z), v(x,y,z)) \frac{\partial u}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u(x,y,z), v(x,y,z)) \frac{\partial v}{\partial y}(x,y,z) + \\ &+ 0 - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2y}{2} + \\ &+ \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u(x,y,z), v(x,y,z)) \frac{\partial u}{\partial z}(x,y,z) + \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u(x,y,z), v(x,y,z)) \frac{\partial v}{\partial z}(x,y,z) = \\ &= \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2(y+z)}{6} + \frac{2xyz}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2(y+z)}{2} \\ &+ \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u(x,y,z), v(x,y,z)) \cdot 0 + \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u(x,y,z), v(x,y,z)) (-1) + \\ &+ \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u(x,y,z), v(x,y,z)) \cdot 1 + \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u(x,y,z), v(x,y,z)) \cdot 0 + \\ &+ \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u(x,y,z), v(x,y,z)) \cdot (-1) + \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u(x,y,z), v(x,y,z)) \cdot 1 = xyz \Rightarrow \\ \text{grad}(\vec{c} \cdot \text{grad } f(P)) &= \frac{\partial}{\partial x}(xyz) \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}(xyz) \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}(xyz) \vec{k} \Rightarrow \\ \vec{v}(P) &= yz \vec{i} + xz \vec{j} + xy \vec{k}. \end{aligned}$$



a) Conform (1)  $\Rightarrow$  ecuațiile liniilor de câmp ale câmpului vectorial  $\vec{v}$  sunt soluțiile sistemului de ecuații diferențiale::

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{xy}$$

$$\bullet \frac{dx}{yz} = \frac{dy}{xz} \Rightarrow xdx = ydy | \int_{EVS} \Rightarrow \frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{2} + k_1 \Rightarrow$$

$$\boxed{x^2 - y^2 = c_1, c_1 \in \mathbb{R}} \text{ -o integrală primă.}$$

$$\bullet \frac{dx}{yz} = \frac{dz}{xy} \Rightarrow xdx = zdz | \int_{EVS} \Rightarrow \frac{x^2}{2} = \frac{z^2}{2} + k'_1 \Rightarrow$$

$$\boxed{x^2 - z^2 = c_2, c_2 \in \mathbb{R}} \text{ -o integrală primă.}$$

Ecuațiile liniilor de câmp sunt date de integralele prime funcțional independente:

$$(*) \begin{cases} x^2 - y^2 = c_1, c_1 \in \mathbb{R} \\ x^2 - z^2 = c_2, c_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

b) Suprafețele de câmp sunt alcătuite din linii de câmp. Ele sunt de forma:

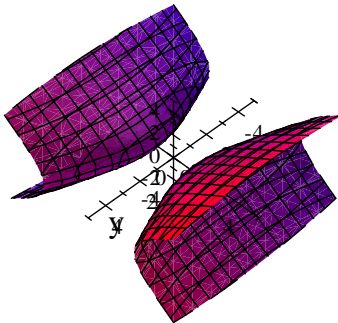
$$F(x^2 - y^2, x^2 - z^2) = 0, F \in C^1(\mathbb{D}) \text{ arbitrară.}$$

Ecuația suprafeței de câmp ce conține  $(\gamma)$  este soluția pentru sistemul algebric alcătuit din ecuațiile integralelor prime și ecuațiile curbei (o relație între  $x, y, z$  fără  $c_1, c_2$ ):

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = c_1 \\ x^2 - z^2 = c_2 \\ x^2 + 4y^2 = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 \\ x^2 = c_2 + 1 \\ y^2 = c_2 + 1 - c_1 \\ (c_2 + 1) + 4(c_2 + 1 - c_1) = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$5c_2 - 4c_1 + 4 = 0 \text{ -relația de condiție (doar între } c_1, c_2\text{). Folosind } (*) \Rightarrow$$

$$5(x^2 - z^2) - 4(x^2 - y^2) + 4 = 0 \text{ -ecuația suprafeței de câmp cerute.}$$



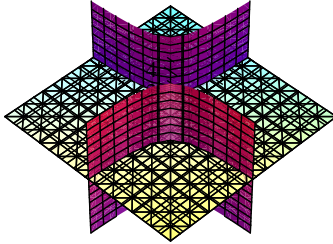
**Exercițiul 3.** Fie:

$$\text{câmpul vectorial } \vec{v}(P) = \text{grad } f(P) \times \text{grad } g(P), \text{ unde}$$

$$f(P) = x + y + z,$$

$$g(P) = xy + yz + zx.$$

$$\text{curba } (\gamma) : \begin{cases} xy = 1 \\ z = 0 \end{cases} \text{ cilindru hiperbolic} \cap \text{planul } xOy = \text{hiperbolă echilaterală.}$$



a) Să se determine liniile de câmp ale câmpului vectorial;

b) Să se scrie ecuația suprafeței de câmp ce conține  $(\gamma)$ .

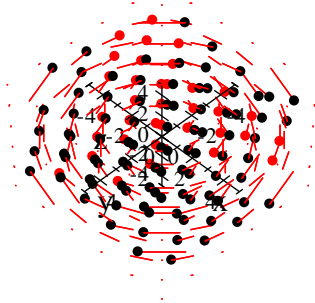
**Rezolvare.**

$$\text{grad } f(P) = \nabla f(P) = \frac{\partial f}{\partial x}(P) \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(P) \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}(P) \vec{k} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}.$$

$$\text{grad } g(P) = \nabla g(P) = \frac{\partial g}{\partial x}(P) \vec{i} + \frac{\partial g}{\partial y}(P) \vec{j} + \frac{\partial g}{\partial z}(P) \vec{k} = (y+z) \vec{i} + (x+z) \vec{j} + (y+x) \vec{k}.$$

$$\text{grad } f(P) \times \text{grad } g(P) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ y+z & x+z & y+x \end{vmatrix} = (y-z) \vec{i} - (x-z) \vec{j} + (x-y) \vec{k} \Rightarrow$$

$$\vec{v}(P) = (y-z) \vec{i} + (z-x) \vec{j} + (x-y) \vec{k}$$



a) Conform (1)  $\Rightarrow$  ecuațiile liniilor de câmp ale câmpului vectorial  $\vec{v}$  sunt soluțiile sistemului de ecuații diferențiale:

$$\frac{dx}{y-z} = \frac{dy}{z-x} = \frac{dz}{x-y}.$$

Nu se pot grupa încât să fie folosite EVS. Se folosesc șiruri de rapoarte egale.

$$\bullet \frac{dx}{y-z} = \frac{dy}{z-x} = \frac{dz}{x-y} \stackrel{\text{formal}}{=} \frac{1 \cdot dx + 1 \cdot dy + 1 \cdot dz}{1 \cdot (y-z) + 1 \cdot (z-x) + 1 \cdot (x-y)}$$

$$\Rightarrow 1 \cdot dx + 1 \cdot dy + 1 \cdot dz = 0 \Rightarrow$$

$x + y + z = c_1, c_1 \in \mathbb{R}.$  o integrală primă.

$$\bullet \frac{dx}{y-z} = \frac{dy}{z-x} = \frac{dz}{x-y} \stackrel{\text{formal}}{=} \frac{x \cdot dx + y \cdot dy + z \cdot dz}{x \cdot (y-z) + y \cdot (z-x) + z \cdot (x-y)}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} = k'_2 \Rightarrow$$

$x^2 + y^2 + z^2 = c_2, c_2 \in \mathbb{R}$ . -o integrală primă.

Ecuțiile liniilor de câmp sunt date de integralele prime funcțional independente:

$$(*) \begin{cases} x + y + z = c_1, c_1 \in \mathbb{R} \\ x^2 + y^2 + z^2 = c_2, c_2 \in \mathbb{R} \end{cases} .$$

b) Suprafețele de câmp sunt alcătuite din linii de câmp. Ele sunt de forma:

$$F(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2) = 0, F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{D}) \text{ arbitrară.}$$

Ecuția suprafeței de câmp ce conține  $(\gamma)$  este soluția pentru sistemul algebric alcătuit din ecuațiile integralelor prime și ecuațiile curbei (o relație între  $x, y, z$  fără  $c_1, c_2$ ):

$$\begin{cases} x + y + z = c_1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = c_2 \\ xy = 1 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x + y = c_1 \\ x^2 + y^2 = c_2 \\ (x + y)^2 - 2 \cdot 1 = c_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$c_1^2 - c_2 - 2 = 0$ -relația de condiție (doar între  $c_1, c_2$ ). Folosind  $(*) \Rightarrow$

$(x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) - 2 = 0 \Rightarrow xy + yz + zx + 1 = 0$ -ecuația suprafeței de câmp cerute.

