SEMINAR NR. 5, REZOLVĂRI
Matematici Speciale, AIA

3. Funcţii complexe de o variabilă complexă $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

3.1. Funcţii complexe de o variabilă complexă. Definiţii, limită, continuitate.

Definiţia 1 Se numeşte *funcţie complexă de o variabilă complexă* orice funcţie
$f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = u(x, y) + \mathrm{j}\, v(x, y)$,
unde, pentru $\forall z = x + \mathrm{j}\, y, u : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ şi $v : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sunt funcţii reale de o variabilă pereche de numere reale. Se notează cu $\mathrm{Re}(f) = u$ şi $\mathrm{Im}(f) = v$ respectiv partea reală a funcţiei f şi coeficientul părţii imaginare a funcţiei f.
Teorema 1. Fie funcţia
$f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) = u(x, y) + \mathrm{j}\, v(x, y)$.
a) Funcţia f admite limită în $z_0 = x_0 + \mathrm{j}\, y_0 \in A'$ dacă şi numai dacă funcţiile $u : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ şi $v : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ admit limită în (x_0, y_0). În acest caz,
$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x, y) + \mathrm{j} \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x, y);$$
b) Funcţia f este continuă în $z_0 = x_0 + \mathrm{j}\, y_0 \in A$ (respectiv pe A) dacă şi numai dacă funcţiile $u : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $v : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sunt continue în (x_0, y_0) (respectiv pe A).

3.2. Funcţii complexe de o variabilă complexă. Funcţii monogene, funcţii olomorfe, funcţii întregi. Teorema Cauchy-Riemann

De precizat că, dacă $A \subseteq \mathbb{C}$ este deschisă atunci $A \cap A' = A$ şi că $A = D \subseteq \mathbb{C}$ este domeniu dacă este mulţime deschisă şi conexă.
Definiţia 1. a) Fie $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ şi $z_0 \in A \cap A'$. f *are derivată în* z_0 dacă
$$\exists \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \overset{\text{not.}}{=} f'(z_0) \in \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty_{\mathbb{C}}\}$$
Dacă limita anterioară există şi este în $\mathbb{C}$, f este *derivabilă* sau *monogenă în* z_0.
b) Fie $A \subseteq \mathbb{C}$ o mulţime deschisă şi $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. f este *derivabilă* sau *olomorfă pe* A dacă este derivabilă în $\forall z_0 \in A$. Se notează cu $\mathcal{H}(A)$ mulţimea tuturor funcţiilor olomorfe pe A.
c) $f : A = \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ este *întreagă* dacă este olomorfă pe $A = \mathbb{C}$.
Teorema 4. (**Cauchy-Riemann, CNS de monogeneitate**) Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu şi $z_0 \in D$. Fie funcţia
$f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) = u(x, y) + \mathrm{j}\, v(x, y), z = x + \mathrm{j}\, y$.
Funcţia f este monogenă în $z_0 = x_0 + \mathrm{j}\, y_0$ dacă şi numai dacă
(i) funcţiile $u : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $v : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sunt diferenţiabile în (x_0, y_0);
(ii) au loc *condiţiile Cauchy-Riemann* $\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \end{cases}}$

În caz de monogeneitate,
$$\boxed{f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + \mathrm{j}\, \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)} = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) - \mathrm{j}\, \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) =$$
$$= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - \mathrm{j}\, \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) + \mathrm{j}\, \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Observaţii, teoreme şi exemple ataşate - A se vedea Curs.
Corolar 1.Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu şi $z_0 = x_0 + \mathrm{j}\, y_0 \in D$. Fie funcţia
$f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) = u(x,y) + \mathrm{j}\, v(x,y), z = x + \mathrm{j}\, y.$
Dacă
(i) funcţiile $u : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $v : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ admit derivate parţiale într-o vecinătate V a punctului $(x_0, y_0) \in D$,
(i)' funcţiile $\dfrac{\partial u}{\partial x} : V \subseteq D \to \mathbb{R}, \dfrac{\partial u}{\partial y} : V \subseteq D \to \mathbb{R}, \dfrac{\partial v}{\partial x} : V \subseteq D \to \mathbb{R}, \dfrac{\partial v}{\partial y} : V \subseteq D \to \mathbb{R}$ sunt continue în punctul $(x_0, y_0) \in D$,
(ii) au loc condiţiile Cauchy-Riemann în z_0,
atunci f este monogenă în z_0.
○**Observaţia 2**. Există funcţii f pentru care u şi v admit derivate parţiale şi verifică condiţiile Cauchy-Riemann şi care nu sunt monogene în z_0. De exemplu, a se vedea Curs cu $z_0 = 0 + 0\,\mathrm{j}$ şi

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = \begin{cases} \dfrac{z^2 - (\overline{z})^2}{\overline{z}}, & \text{dacă } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ 0, & \text{dacă } z = 0 \end{cases}$$

○**Exerciţiul 1**. Funcţia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = |z|$ nu este derivabilă în niciun punct din $\mathbb{C}$.
Rezolvare. A se vedea Curs.

Exerciţiul 2. Să se determine punctele $z_0 \in \mathbb{C}$ în care funcţia
$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = z^2 + z \cdot \overline{z} - 2(\overline{z})^2 - 2z - \overline{z}$
este monogenă şi să se calculeze în acele puncte derivata sa.
Rezolvare. Fie $z = x + \mathrm{j}\, y \in \mathbb{C} \Rightarrow \overline{z} = x - \mathrm{j}\, y$ şi

$$f(z) = \left(x^2 - y^2 + 2\mathrm{j}\, xy\right) + x^2 + y^2 - 2\left(x^2 - y^2 - 2\mathrm{j}\, xy\right) - 2(x + \mathrm{j}\, y) - (x - \mathrm{j}\, y) =$$
$$= \left(0x^2 + 2y^2 - 3x\right) + \mathrm{j}\,(6xy - y) \Rightarrow$$

$u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, u(x,y) = 2y^2 - 3x; v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, v(x,y) = 6xy - y.$
Se aplică Teorema Cauchy-Riemann: f este monogenă în $z_0 = x_0 + \mathrm{j}\, y_0 \in \mathbb{C} \Rightarrow$
(i) funcţiile u, v sunt diferenţiabile în (x_0, y_0) (sunt în $\forall (x_0, y_0)$, ca funcţii polonomiale)
(ii) au loc condiţiile Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3 = 6x_0 - 1 \\ 4y_0 = -(6y_0) \end{cases} \Rightarrow (x_0, y_0) = \left(-\tfrac{1}{3}, 0\right)$$

Deci punctul $z_0 = -\frac{1}{3} + \mathrm{j} \cdot 0$ este singurul punct de monogeneitate pentru f. Mai mult,

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}\left(-\tfrac{1}{3}, 0\right) + \mathrm{j}\,\frac{\partial v}{\partial x}\left(-\tfrac{1}{3}, 0\right) = (-3)|_{(x,y)=\left(-\frac{1}{3},0\right)} + \mathrm{j}\,(6y)|_{(x,y)=\left(-\frac{1}{3},0\right)} = -3.$$

Comentariu: a) Există funcţii f care au $0, 1, 2, ...,$ o infinitate de puncte de monogeneitate.
b) Funcţiile f care au legea de asociere depinzând de $\overline{z}$ pot avea $0, 1, 2, ...,$ o infinitate de puncte de monogeneitate dintr-o mulţime închisă (de exemplu punctele unei drepte); nu sunt olomorfe pe o mulţime deschisă.

Teorema 5. (**de tip Cauchy-Riemann, CS de olomorfie**) Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu şi funcţia
$f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) = u(x,y) + \mathrm{j}\, v(x,y), z = x + \mathrm{j}\, y.$
Dacă
(i) funcţiile $u : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $v : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ admit derivate parţiale pe D;

(ii) au loc *condiţiile Cauchy-Riemann pe* D, $\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) \end{cases}, \forall (x,y) \in D.}$

atunci funcţia f este olomorfă pe D.
În caz de olomorfie,

$$\boxed{f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \mathrm{j}\,\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)} = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - \mathrm{j}\,\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) =$$
$$= \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) - \mathrm{j}\,\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) + \mathrm{j}\,\frac{\partial v}{\partial x}(x,y), \forall z = x + \mathrm{j}\,y \in D.$$

Exerciţiul 3. Să se determine $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ astfel încât următoarele funcţii să fie funcţii olomorfe pe $\mathbb{C}$ (întregi). Să se determine legea de asociere a f în funcţie de z şi funcţia derivată f'.
a) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = x + ay + \mathrm{j}(bx + cy), z = x + \mathrm{j}\,y \in \mathbb{C}$
b) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = x^2 + axy + by^2 + \mathrm{j}\left(cx^2 + dxy + y^2\right), z = x + \mathrm{j}\,y \in \mathbb{C}$
c) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = (\operatorname{ch} y + a \operatorname{sh} y)\cos x + \mathrm{j}(\operatorname{ch} y + b \operatorname{sh} y)\sin x, z = x + \mathrm{j}\,y \in \mathbb{C}$
Rezolvare. a) A se vedea Curs.
b) Fie $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, u(x,y) = x^2 + axy + by^2; v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, v(x,y) = cx^2 + dxy + y^2$.
•Se determină $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, impunând ca funcţia f să fie olomorfă pe domeniul $D = \mathbb{C} \Rightarrow$
(i) funcţiile u, v să fie diferenţiabile pe $\mathbb{R}^2$- sunt, deoarece admit derivate parţiale pe $\mathbb{R}^2$ şi acestea sunt continue-independent de a, b, c, d.
(ii) să aibă loc condiţiile Cauchy-Riemann pe $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} 2x + ay = dx + 2y \\ ax + 2by = -(2cx + dy) \end{cases}, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow \begin{cases} 2 = d \text{ şi } a = 2 \\ a = -2c \text{ şi } 2b = -d \end{cases} \Leftrightarrow \{a = 2, b = -1, c = -1, d = 2$$

•Se scrie legea de asociere a f în funcţie de z.
$f(z) = x^2 + 2xy - y^2 + \mathrm{j}\left(-x^2 + 2xy + y^2\right)$.
<u>modul 1</u>. Grupând $z = x + \mathrm{j}\,y$ şi observând că $z^2 = (x + \mathrm{j}\,y)^2 = x^2 - y^2 + 2\,\mathrm{j}\,xy \Rightarrow$
$f(z) = x^2 - y^2 + 2\,\mathrm{j}\,xy - \mathrm{j}\left(x^2 - y^2 + 2\,\mathrm{j}\,xy\right) = (1 - \mathrm{j})\,z^2$.
<u>modul 2</u>. Folosind **regula**, pentru f olomorfă:

$$f(z) = \left(x^2 + 2xy - y^2\right)\Big|_{\begin{cases} x \text{ înlocuit cu } z \\ y \text{ înlocuit cu } 0 \end{cases}} + \mathrm{j}\left(-x^2 + 2xy + y^2\right)\Big|_{\begin{cases} x \text{ înlocuit cu } z \\ y \text{ înlocuit cu } 0 \end{cases}}$$
$$= z^2 + 2z \cdot 0 - z^2 + \mathrm{j}\left(-z^2 + 2z \cdot 0 + 0^2\right) = (1 - \mathrm{j})\,z^2.$$

•Se determină f' în funcţie de z.
<u>modul 1</u>. Din Teorema Cauchy-Riemann$\Rightarrow$
$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \mathrm{j}\,\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 2(1 - \mathrm{j})\,z.$$
<u>modul 2</u>. Deoarece f olomorfă pe $D \Rightarrow$
$$f'(z) = \frac{d}{dz}\left((1 - \mathrm{j})\,z^2\right) = 2(1 - \mathrm{j})\,z.$$
c) Se reaminteşte:

$$\boxed{\operatorname{ch} y = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \text{ şi } \operatorname{sh} y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}, \forall y \in \mathbb{R}.} \quad \boxed{\operatorname{ch}' y = \operatorname{sh} y \text{ şi } \operatorname{sh}' y = \operatorname{ch} y, \forall y \in \mathbb{R}.}$$

Fie $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, u(x,y) = (\operatorname{ch} y + a \operatorname{sh} y)\cos x; v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, v(x,y) = (\operatorname{ch} y + b \operatorname{sh} y)\sin x$.
•Se determină $a, b \in \mathbb{R}$, impunând ca funcţia f să fie olomorfă pe domeniul $D = \mathbb{C} \Rightarrow$
(i) funcţiile u, v să fie diferenţiabile pe $\mathbb{R}^2$- sunt, deoarece admit derivate parţiale pe $\mathbb{R}^2$ şi acestea sunt continue-independent de a, b.
(ii) să aibă loc condiţiile Cauchy-Riemann pe $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} -(\operatorname{ch} y + a \operatorname{sh} y)\sin x = (\operatorname{sh} y + b\operatorname{ch} y)\sin x \\ (\operatorname{sh} y + a\operatorname{ch} y)\cos x = -((\operatorname{ch} y + b\operatorname{sh} y)\cos x) \end{cases}, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -(\operatorname{ch} y + a\operatorname{sh} y) = \operatorname{sh} y + b\operatorname{ch} y \\ \operatorname{sh} y + a\operatorname{ch} y = -\operatorname{ch} y - b\operatorname{sh} y \end{cases}, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \overset{(\operatorname{ch} y, \operatorname{sh} y)\text{sunt liniar independente}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -1 = b \text{ şi } -a = 1 \\ a = -1 \text{ şi } 1 = -b \end{cases} \Rightarrow \{a = -1, b = -1$$

•Se scrie legea de asociere a f în funcţie de z.

$f(z) = (\operatorname{ch} y - \operatorname{sh} y)\cos x + \mathrm{j}(\operatorname{ch} y - \operatorname{sh} y)\sin x$.

modul 1. Grupând $z = x + \mathrm{j}\, y$ şi observând că $\operatorname{ch} y = \dfrac{e^y + e^{-y}}{2}$ şi $\operatorname{sh} y = \dfrac{e^y - e^{-y}}{2}, \forall y \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$f(z) = \left(\frac{e^y+e^{-y}}{2} - \frac{e^y-e^{-y}}{2}\right)(\cos x + \mathrm{j}\sin x) = e^{-y}(\cos x + \mathrm{j}\sin x) = e^{-y+\mathrm{j}\,x} = e^{\mathrm{j}(x+\mathrm{j}\,y)} = e^{\mathrm{j}\,z}$.

S-a folosit $\boxed{e^z = e^{x+\mathrm{j}\,y} = e^x \cdot e^{\mathrm{j}\,y} = e^x(\cos y + \mathrm{j}\sin y), \forall z = x + \mathrm{j}\,y \in \mathbb{C}}$

modul 2. Folosind **regula**, pentru f olomorfă:

$$f(z) = ((\operatorname{ch} y - \operatorname{sh} y)\cos x)\Big|_{\begin{cases} x \text{ înlocuit cu } z \\ y \text{ înlocuit cu } 0 \end{cases}} + \mathrm{j}\,((\operatorname{ch} y - \operatorname{sh} y)\sin x)\Big|_{\begin{cases} x \text{ înlocuit cu } z \\ y \text{ înlocuit cu } 0 \end{cases}}$$

$$= (\operatorname{ch} 0 - \operatorname{sh} 0)\cos z + \mathrm{j}(\operatorname{ch} 0 - \operatorname{sh} 0)\sin z = \cos z + \mathrm{j}\sin z = e^{\mathrm{j}\,z}.$$

De precizat că $\boxed{\cos z = \dfrac{e^{\mathrm{j}\,z} + e^{-\mathrm{j}\,z}}{2} \text{ şi } \sin z = \dfrac{e^{\mathrm{j}\,z} - e^{-\mathrm{j}\,z}}{2\,\mathrm{j}}, \forall z \in \mathbb{C}.}$

•Se determină f' în funcţie de z.

modul 1. Din Teorema Cauchy-Riemann$\Rightarrow$

$f'(z) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \mathrm{j}\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) = (\operatorname{ch} y - \operatorname{sh} y)(-\sin x) + \mathrm{j}(\operatorname{ch} y - \operatorname{sh} y)(\cos x) = \mathrm{j}\, e^{\mathrm{j}\,z}$.

modul 2. Deoarece f olomorfă pe $D \Rightarrow$

$f'(z) = \dfrac{d}{dz}\left(e^{\mathrm{j}\,z}\right) = \mathrm{j}\, e^{\mathrm{j}\,z}$.

Exerciţiul 4. Să se determine funcţia

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = u(x,y) + \mathrm{j}\, v(x,y), z = x + \mathrm{j}\, y \in \mathbb{C}$ astfel încât:

-f să fie funcţie olomorfă pe $\mathbb{C}$ (întreagă);

-funcţia $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, g(z) = v(x,y) + \mathrm{j}\, u(x,y)$ să fie olomorfă pe $\mathbb{C}$ (întreagă);

-$f(1 + \mathrm{j}) = 1 + \mathrm{j}$.

Rezolvare. Se impune ca f să fie funcţie olomorfă pe $\mathbb{C}$ (întreagă)$\Rightarrow$

(i) funcţiile u, v să fie diferenţiabile pe $\mathbb{R}^2$;

(ii) să aibă loc C-R pt. u $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) \end{cases}, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Se impune ca g să fie funcţie olomorfă pe $\mathbb{C}$ (întreagă)$\Rightarrow$

(i) funcţiile v, u să fie diferenţiabile pe $\mathbb{R}^2$;

(ii) să aibă loc C-R pt. v $\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) \end{cases}, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Din cele două seturi de condiţii Cauchy-Riemann se obţine:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases}, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow$$

$u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, u(x,y) = c_1$, unde $c_1 \in \mathbb{R}$ este o constantă.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases}, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow$$

$v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, v(x,y) = c_2$, unde $c_2 \in \mathbb{R}$ este o constantă.

Atunci toate funcţiile $f = u + \mathrm{j}\, v$ cu proprietatea că f este funcţie olomorfă pe $\mathbb{C}$ (întreagă) şi $g = v + \mathrm{j}\, u$ este olomorfă pe $\mathbb{C}$ (întreagă) sunt de forma

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = c_1 + \mathrm{j}\, c_2, \forall z \in \mathbb{C}$

unde $c_1 \in \mathbb{R}$ şi $c_2 \in \mathbb{R}$ sunt constante.

$f(1+\mathrm{j}) = 1 + \mathrm{j} \Rightarrow c_1 + \mathrm{j}\, c_2 = 1 + \mathrm{j} \Rightarrow c_1 = 1$ şi $c_2 = 1$.

Deci singura funcţie ce verifică cerinţele din enunţ este

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = 1 + \mathrm{j}, \forall z \in \mathbb{C}$.

Comentariu: Funcţiile olomorfe f pentru care funcţia g, cu u şi v interschimbate, este olomorfă sunt doar funcţia constantă de la exerciţiul precedent.

Definiţia 4. Fie A o mulţime deschisă şi $u : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. u este *funcţie armonică pe* A dacă

(i) funcţia u admite derivate parţiale de ordinul al doilea pe A.

(ii) se verifică $\underbrace{\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)}_{\Delta u(x,y)} = 0, \forall (x,y) \in A$.

Teorema 6. (**CN de olomorfie**) Fie $D \subseteq \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ un domeniu. Dacă $f = u + \mathrm{j}\, v \in \mathcal{H}(D)$ şi $u, v \in \mathcal{C}^2(D)$ atunci u şi v sunt funcţii armonice pe D.

Teorema 7. Fie $D \subseteq \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ un domeniu simplu conex. Dacă $u : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ este funcţie armonică pe D, atunci există o funcţie $v : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ astfel încât funcţia

$f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) = u(x,y) + \mathrm{j}\, v(x,y), z = x + \mathrm{j}\, y$

să fie olomorfă pe D (adică există $f \in \mathcal{H}(D)$ care să aibă funcţia u drept parte reală). Funcţia v se determină local sau prin rezolvarea unui sistem de ecuaţii cu derivate parţiale sau prin formulele

$$\boxed{v(x,y) = -\int_{x_0}^{x} \frac{\partial u}{\partial y}(x,y_0)\, dx + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\, dy} \text{ sau } \boxed{v(x,y) = -\int_{x_0}^{x} \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\, dx + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y)\, dy.}$$

Exerciţiul 5. Să se determine funcţia şi derivata funcţiei

$f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = u(x,y) + \mathrm{j}\, v(x,y), z = x + \mathrm{j}\, y \in D$

astfel încât f să fie olomorfă pe domeniul D şi

a) $D = \mathbb{C}; u(x,y) = e^{-2x}\cos 2y + 2x, \forall (x,y) \in D; f(0) = 1$.

Rezolvare. etapa 1 Se verifică o condiţie necesară (şi suficientă când D este simplu conex) pentru ca să existe o funcţie olomorfă f încât u să fie partea ei reală, şi anume u să fie armonică.

$D = \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ este mulţime deschisă.

•Funcţia u admite derivate parţiale de ordinul al doilea pe D.

$\exists \dfrac{\partial u}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(e^{-2x}\cos 2y + 2x\right) = -2e^{-2x}\cos 2y + 2.$

$\exists \dfrac{\partial u}{\partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(e^{-2x}\cos 2y + 2x\right) = -2e^{-2x}\sin 2y.$

$\exists \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(-2e^{-2x}\cos 2y + 2\right) = 4e^{-2x}\cos 2y.$

$\exists \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(-2e^{-2x}\sin 2y\right) = -4e^{-2x}\cos 2y.$

Analog există $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ şi $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$.

•Se verifică: $\Delta u(x,y) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0, \forall (x,y) \in D.$

etapa 2 Se determină $f = u + \mathrm{j}\, v \in \mathcal{H}(D)$, adică se determină v astfel încât f să fie olomorfă pe D.

$f = u + \mathrm{j}\, v \in \mathcal{H}(D) \Rightarrow f$ satisface condiţiile Cauchy-Riemann$\Rightarrow$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) \end{cases}, \forall (x,y) \in D \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) = -\left(-2e^{-2x}\sin 2y\right) \\ \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) = -2e^{-2x}\cos 2y + 2 \end{cases}, \forall (x,y) \in D$$

•Se determină coeficientul părţii imaginare v pentru f

modul 1. Se determină o funcţie $v : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a.î.

$$\begin{cases} (1.1)\ \dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 2e^{-2x}\sin 2y \\ (1.2)\ \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) = -2e^{-2x}\cos 2y \end{cases}, \forall (x,y) \in D.$$

modul 1.1 $(1.1) | \int (\cdot)\, dx \Rightarrow \int \dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y)\, dx = \int \left(2e^{-2x}\sin 2y\right) dx, \forall (x,y) \in D \Rightarrow$

$$v(x,y) \overset{x \text{ este var.}}{\underset{\text{de integrare}}{=}} 2(\sin 2y)\frac{e^{-2x}}{-2} + \underbrace{\varphi(y)}_{\substack{\text{constantă în raport} \\ \text{cu variabila de integr. } x}}, \forall (x,y) \in D | \frac{\partial}{\partial y}(\cdot) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \overset{y \text{ este var.}}{\underset{\text{de derivare}}{=}} 2\tfrac{e^{-2x}}{-2}(\cos 2y)\cdot 2 + \varphi'(y), \forall (x,y) \in D$$

Se înlocuieşte (1.2) $\Rightarrow$

$-2e^{-2x}\cos 2y + 2 = 2\tfrac{e^{-2x}}{-2}(\cos 2y)\cdot 2 + \varphi'(y), \forall (x,y) \in D \Rightarrow \varphi'(y) = 2, \forall (x,y) \in D | \int (\cdot)\, dy \Rightarrow$
$\varphi(y) = 2y + c_1, \forall (x,y) \in D, \forall c_1 \in \mathbb{R}.$

Deci $v(x,y) = -e^{-2x}\sin 2y + 2y + c_1, \forall (x,y) \in D, \forall c_1 \in \mathbb{R}$ sunt toate funcţiile v, mulţimea lor fiind indexată dupa constanta c_1.

modul 1.2 $(1.2) | \int (\cdot)\, dy \Rightarrow \int \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y)\, dy = \int \left(-2e^{-2x}\cos 2y + 2\right) dy, \forall (x,y) \in D \Rightarrow$

$$v(x,y) \overset{y \text{ este var.}}{\underset{\text{de integrare}}{=}} -2e^{-2x}\frac{\sin 2y}{2} + 2y + \underbrace{\psi(x)}_{\substack{\text{constantă în raport} \\ \text{cu variabila de integr. } y}}, \forall (x,y) \in D | \frac{\partial}{\partial x}(\cdot) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) \overset{x \text{ este var.}}{\underset{\text{de derivare}}{=}} -2e^{-2x}\tfrac{\sin 2y}{2}e^{-2x}\cdot(-2) + 0 + \psi'(x), \forall (x,y) \in D$$

Se înlocuieşte (1.1) $\Rightarrow$

$2e^{-2x}\sin 2y = -2e^{-2x}\tfrac{\sin 2y}{2}e^{-2x}\cdot(-2) + \psi'(x), \forall (x,y) \in D \Rightarrow \psi'(x) = 0, \forall (x,y) \in D | \int (\cdot)\, dx \Rightarrow$
$\psi(x) = 0 + c_2, \forall (x,y) \in D, \forall c_2 \in \mathbb{R}.$

Deci $v(x,y) = -e^{-2x}\sin 2y + 2y + c_2, \forall (x,y) \in D, \forall c_2 \in \mathbb{R}$ sunt toate funcţiile v, mulţimea lor fiind indexată dupa constanta c_2.

○modul 2. Se foloseşte $v(x,y) = \int_{x_0}^{x} \dfrac{\partial v}{\partial x}(t, y_0)\, dt + \int_{y_0}^{y} \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,t)\, dt, \forall (x,y) \in D \Rightarrow$

$$\boxed{v(x,y) = -\int_{x_0}^{x} \frac{\partial u}{\partial y}(t, y_0)\, dt + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\, dt, \forall (x,y) \in D} \Rightarrow$$

$v(x,y) = -\int_{x_0}^{x} \left(-2e^{-2t}\sin 2y_0\right) dt + \int_{y_0}^{y} \left(-2e^{-2x}\cos 2t + 2\right) dt =$

$= -\left(-2\frac{e^{-2t}}{-2}\sin 2y_0\right)\Big|_{t=x_0}^{t=x} + \left(-2e^{-2x}\frac{\sin 2t}{2} + 2t\right)\Big|_{t=y_0}^{t=y} =$
$= -e^{-2x}\sin 2y_0 + e^{-2x_0}\sin 2y_0 - e^{-2x}\sin 2y + e^{-2x}\sin 2y_0 + 2y - 2y_0 =$
$= -e^{-2x}\sin 2y + 2y + \underbrace{\left(e^{-2x_0}\sin 2y_0 - 2y_0\right)}_{=c\in\mathbb{R}}.$

•Indiferent de mod, s-au găsit toate funcţiile
$v(x,y) = -e^{-2x}\sin 2y + 2y + c, \forall (x,y) \in D, c \in \mathbb{R},$
pentru $f = u + \mathrm{j}\, v \in \mathcal{H}(D)$.

•Se scrie legea de asociere a f în funcţie de z.
$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = \left(e^{-2x}\cos 2y + 2x\right) + \mathrm{j}\left(-e^{-2x}\sin 2y + 2y + c\right), z = x + \mathrm{j}\, y \in D, c \in \mathbb{R}.$

modul 1. Grupând $z = x + \mathrm{j}\, y$ şi observând că
$f(z) = e^{-2x}(\cos(-2y) + \mathrm{j}\sin(-2y)) + 2(x + \mathrm{j}\, y) + \mathrm{j}\, c = e^{-2z} + 2z + \mathrm{j}\, c, z = x + \mathrm{j}\, y \in D, c \in \mathbb{R}.$

modul 2. Folosind **regula**, pentru f olomorfă:
$f(z) = \left(e^{-2x}\cos 2y + 2x\right)\Big|_{\begin{cases} x \text{ înlocuit cu } z \\ y \text{ înlocuit cu } 0\end{cases}} + \mathrm{j}\left(-e^{-2x}\sin 2y + 2y + c\right)\Big|_{\begin{cases} x \text{ înlocuit cu } z \\ y \text{ înlocuit cu } 0\end{cases}}$
$= \left(e^{-2z}\cos 0 + 2z\right) + \mathrm{j}\left(-e^{-2z}\sin 0 + 0 + c\right) = e^{-2z} + 2z + \mathrm{j}\, c.$

•Se determină f' în funcţie de z.

modul 1. Din Teorema Cauchy-Riemann$\Rightarrow$
$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \mathrm{j}\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = \left((\cos 2y)\, e^{-2x}(-2) + 2\right) + \mathrm{j}\left((-\sin 2y)\, e^{-2x}(-2) + 0 + 0\right) =$
$= e^{-2z}(-2) + 2.$

modul 2. Deoarece f olomorfă pe $D \Rightarrow$
$f'(z) = \frac{d}{dz}\left(e^{-2z} + 2z + \mathrm{j}\, c\right) = e^{-2z}(-2) + 2.$

•Se impune $f(0) = 1 \Rightarrow e^0 + 0 + \mathrm{j}\, c = 1 \Rightarrow c = 0.$

Deci funcţia $f = u + \mathrm{j}\, v \in \mathcal{H}(D)$ ce are $u = \operatorname{Re} f$ şi verifică $f(0) = 1$ este
$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = e^{-2z} + 2z.$

b) $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}; u(x,y) = \frac{1}{2}\ln\left(x^2 + y^2\right) + 2x - y, \forall (x,y) \in D.$

Rezolvare. etapa 1 Se verifică o condiţie necesară (şi suficientă când D este simplu conex) pentru ca să existe o funcţie olomorfă f încât u să fie partea ei reală, şi anume u să fie armonică.

$D = \mathbb{C} \setminus \{0\} \simeq \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ este mulţime deschisă.

•Funcţia u admite derivate parţiale de ordinul al doilea pe D.

$\exists \frac{\partial u}{\partial x} : D \to \mathbb{R}, \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}\ln\left(x^2 + y^2\right) + 2x - y\right) = \frac{x}{x^2 + y^2} + 2.$

$\exists \frac{\partial u}{\partial y} : D \to \mathbb{R}, \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}\ln\left(x^2 + y^2\right) + 2x - y\right) = \frac{y}{x^2 + y^2} - 1.$

$\exists \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} : D \to \mathbb{R}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2 + y^2} + 2\right) = \frac{1\left(x^2 + y^2\right) - x(2x + 0)}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = \frac{-x^2 + y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}.$

$\exists \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} : D \to \mathbb{R}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2 + y^2} - 1\right) = \frac{1\left(x^2 + y^2\right) - y(0 + 2y)}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = \frac{x^2 - y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}.$

Analog există $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ şi $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$.

•Se verifică $\Delta u(x,y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0, \forall (x,y) \in D.$

etapa 2 Se determină $f = u + \mathrm{j}\, v \in \mathcal{H}(D)$, adică se determină v astfel încât f să fie olomorfă pe D.

$f = u + \mathrm{j}\, v \in \mathcal{H}(D) \Rightarrow f$ satisface condiţiile Cauchy-Riemann$\Rightarrow$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) \end{cases}, \forall (x,y) \in D \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) = -\dfrac{y}{x^2+y^2} + 1 \\ \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2} + 2 \end{cases}, \forall (x,y) \in D$$

•Se determină coeficientul părţii imaginare v pentru f

<u>modul 1.</u> Se determină o funcţie $v : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a.î.

$$\begin{cases} (1.1)\ \dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) = -\dfrac{y}{x^2+y^2} + 1 \\ (1.2)\ \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2} + 2 \end{cases}, \forall (x,y) \in D.$$

<u>modul 1.1</u> $(1.1) | \int (\cdot)\, dx \Rightarrow \int \dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y)\, dx = \int \left(-\dfrac{y}{x^2+y^2} + 1\right) dx, \forall (x,y) \in D \Rightarrow$

$$v(x,y) \overset{x \text{ este var.}}{\underset{\text{de integrare}}{=}} -y\frac{1}{y}\operatorname{arctg}\frac{x}{y} + x + \underbrace{\varphi(y)}_{\substack{\text{constantă în raport}\\ \text{cu variabila de integr. } x}}, \forall (x,y) \in D | \frac{\partial}{\partial y}(\cdot) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \overset{y \text{ este var.}}{\underset{\text{de derivare}}{=}} -\frac{1}{1+\left(\dfrac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{-x}{y^2} + 0 + \varphi'(y), \forall (x,y) \in D$$

Se înlocuieşte (1.2) $\Rightarrow$

$\dfrac{x}{x^2+y^2} + 2 = \dfrac{x}{x^2+y^2} + \varphi'(y), \forall (x,y) \in D \Rightarrow \varphi'(y) = 2, \forall (x,y) \in D | \int (\cdot)\, dy \Rightarrow$

$\varphi(y) = 2y + c_1, \forall (x,y) \in D, \forall c_1 \in \mathbb{R}.$

Deci $v(x,y) = -\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y} + x + 2y + c_1, \forall (x,y) \in D, \forall c_1 \in \mathbb{R}$ sunt toate funcţiile v, mulţimea lor fiind indexată dupa constanta c_1.

<u>modul 1.2</u> $(1.2) | \int (\cdot)\, dy \Rightarrow \int \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y)\, dy = \int \left(\dfrac{x}{x^2+y^2} + 2\right) dy, \forall (x,y) \in D \Rightarrow$

$$v(x,y) \overset{y \text{ este var.}}{\underset{\text{de integrare}}{=}} x\frac{1}{x}\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + 2y + \underbrace{\psi(x)}_{\substack{\text{constantă în raport}\\ \text{cu variabila de integr. } y}}, \forall (x,y) \in D | \frac{\partial}{\partial x}(\cdot) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) \overset{x \text{ este var.}}{\underset{\text{de derivare}}{=}} \frac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{-y}{x^2} + \psi'(x), \forall (x,y) \in D.$$

Se înlocuieşte (1.1) $\Rightarrow$

$-\dfrac{y}{x^2+y^2} + 1 = \dfrac{-y}{x^2+y^2} + \psi'(x), \forall (x,y) \in D \Rightarrow \psi'(x) = 1, \forall (x,y) \in D | \int (\cdot)\, dx \Rightarrow$

$\psi(x) = x + c_2, \forall (x,y) \in D, \forall c_2 \in \mathbb{R}.$

Deci $v(x,y) = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + 2y + x + c_2, \forall (x,y) \in D, \forall c_2 \in \mathbb{R}$

sunt toate funcţiile v, mulţimea lor fiind indexată dupa constanta c_2.

<u>modul 2.</u> Se foloseşte $v(x,y) = \int_{x_0}^{x} \dfrac{\partial v}{\partial x}(t,y_0)\, dt + \int_{y_0}^{y} \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,t)\, dt, \forall (x,y) \in D \Rightarrow$

$$\boxed{v(x,y) = -\int_{x_0}^{x} \frac{\partial u}{\partial y}(t,y_0)\, dt + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\, dt, \forall (x,y) \in D} \Rightarrow$$

$$v(x,y) = \int_{x_0}^{x} \left(-\frac{y_0}{t^2+y_0^2} + 1\right) dt + \int_{y_0}^{y} \left(\frac{x}{x^2+t^2} + 2\right) dt =$$

$$= \left(-y_0 \frac{1}{y_0} \operatorname{arctg} \frac{t}{y_0} + t\right)\Bigg|_{t=x_0}^{t=x} + \left(x \frac{1}{x} \operatorname{arctg} \frac{t}{x} + 2t\right)\Bigg|_{t=y_0}^{t=y}$$
$$= -\operatorname{arctg} \frac{x}{y_0} + x + \operatorname{arctg} \frac{x_0}{y_0} - x_0 + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + 2y - \operatorname{arctg} \frac{y_0}{x} - 2y_0 =$$
$$= \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + x + 2y - \underbrace{\left(\operatorname{arctg} \frac{y_0}{x_0} + x_0 + 2y_0\right)}_{=-c\in\mathbb{R}}, \forall (x,y) \in D.$$

•Indiferent de mod, folosind $\boxed{\operatorname{arctg} \frac{x}{y} + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \frac{\pi}{2},}$ s-au determinat toate funcţiile

$v(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + x + 2y + c, \forall (x,y) \in D, c \in \mathbb{R},$

pentru $f = u + \mathrm{j}\, v \in \mathcal{H}(D)$.

•Se scrie legea de asociere a f în funcţie de z.

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = \left(\frac{1}{2} \ln\left(x^2+y^2\right) + 2x - y\right) + \mathrm{j}\left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x} + +x + 2y + c\right), z = x + \mathrm{j}\, y \in D, c \in \mathbb{R}.$

<u>modul 1</u>. Grupând $z = x + \mathrm{j}\, y$ şi observând că

$$f(z) = \left(\ln\sqrt{x^2+y^2} + \mathrm{j} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}\right) + 2(x + \mathrm{j}\, y) + \mathrm{j}(x + \mathrm{j}\, y) + c$$
$$= (\operatorname{Log}_k z)_{\mathbb{C}} + 2z + \mathrm{j}\, z + c, z = x + \mathrm{j}\, y \in D, c \in \mathbb{R},$$

unde $(\operatorname{Log}_k z)_{\mathbb{C}}$ cu ramura $k = 0$ va fi definit ulterior.

<u>modul 2</u>. Folosind **regula**, pentru f olomorfă:

$$f(z) = \left(\tfrac{1}{2} \ln\left(x^2+y^2\right) + 2x - y\right)\Big|_{\begin{cases} x \text{ înlocuit cu } z \\ y \text{ înlocuit cu } 0 \end{cases}} + \mathrm{j}\left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x} + +x + 2y + c\right)\Big|_{\begin{cases} x \text{ înlocuit cu } z \\ y \text{ înlocuit cu } 0 \end{cases}}$$
$$= (\operatorname{Log}_k z)_{\mathbb{C}} + 2z + \mathrm{j}\, z + c.$$

•Se determină f' în funcţie de z.

<u>modul 2</u>. Deoarece f_k olomorfă pe $D \Rightarrow$

$$f_k'(z) = \frac{d}{dz}\left((\operatorname{Log}_k z)_{\mathbb{C}} + 2z + \mathrm{j}\, z + c\right) = \frac{1}{z} + 2 + \mathrm{j}\,.$$

c) $D = \mathbb{C}; u(x,y) = e^x (x \cos y - y \sin y), \forall (x,y) \in D$ şi $f(0) = 0$.

Răspuns. $f(z) = ze^z$.

○**d)** $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}; u(x,y) = \varphi\left(x^2+y^2\right), \forall (x,y) \in D$, unde φ este o funcţie de două ori derivabilă, de o formă ce trebuie determinată.

Rezolvare. Se notează $r(x,y) = x^2 + y^2, \forall (x,y) \in D$ şi se observă că

$r(x,y) > 0, \forall (x,y) \in D; \exists \frac{\partial r}{\partial x}(x,y) = 2x, \exists \frac{\partial r}{\partial y}(x,y) = 2y.$

Se caută $u = \varphi(r)$, adică $u(x,y) = \varphi(r(x,y))$, notând:

$\varphi' = \frac{d\varphi}{dr}; \varphi'' = \frac{d\varphi'}{dr}.$

<u>etapa 1</u> Se verifică o condiţie necesară (şi suficientă când D este simplu conex) pentru ca să existe o funcţie olomorfă f încât u să fie partea ei reală, şi anume u să fie armonică. De fapt se determină φ astfel încât u să fie armonică.

•Funcţia u admite derivate parţiale de ordinul al doilea pe D.

$$\exists \frac{\partial u}{\partial x} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(\varphi(r(x,y))) = \frac{d\varphi}{dr}(r(x,y)) \cdot \frac{\partial r}{\partial x}(x,y) =$$
$$= \varphi'(r(x,y)) \cdot 2x, \forall (x,y) \in D.$$
$$\exists ? \frac{\partial u}{\partial y} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(\varphi(r(x,y))) = \frac{d\varphi}{dr}(r(x,y)) \cdot \frac{\partial r}{\partial y}(x,y) =$$
$$= \varphi'(r(x,y)) \cdot 2y, \forall (x,y) \in D.$$

$\exists ? \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\varphi'(r(x,y)) \cdot 2x\right) =$
$= \left(\dfrac{d\varphi'}{dr}(r(x,y)) \cdot \dfrac{\partial r}{\partial x}(x,y)\right) \cdot 2x + \varphi'(r(x,y)) \cdot 2 =$
$= \varphi''(r(x,y)) \cdot (2x)^2 + \varphi'(r(x,y)) \cdot 2, \forall (x,y) \in D.$
$\exists ? \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\varphi'(r(x,y)) \cdot 2y\right) =$
$= \left(\dfrac{d\varphi'}{dr}(r(x,y)) \cdot \dfrac{\partial r}{\partial y}(x,y)\right) \cdot 2y + \varphi'(r(x,y)) \cdot 2 =$
$= \varphi''(r(x,y)) \cdot (2y)^2 + \varphi'(r(x,y)) \cdot 2, \forall (x,y) \in D.$

Analog există $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ şi $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$.

•Se impune să se verifice $\Delta u(x,y) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0, \forall (x,y) \in D \Leftrightarrow$

$\varphi''(r(x,y)) \cdot \left((2x)^2 + (2y)^2\right) + \varphi'(r(x,y)) \cdot 4 = 0, \forall (x,y) \in D \Leftrightarrow$
$(*)\, \varphi''(r) \cdot r + \varphi'(r) = 0, \forall (x,y) \in D$

Este o ecuaţie diferenţială de ordinul 2, cu $r > 0$ variabilă independentă şi funcţia necunoscută φ.

$(*) \Leftrightarrow (\varphi'(r) \cdot r)' = 0, \forall r > 0 \Big| \int (\cdot)\, dr \Rightarrow \varphi'(r) \cdot r = 0 + c_1, \forall r > 0, c_1 \in \mathbb{R} \Rightarrow$
$\varphi'(r) = \dfrac{c_1}{r}, \forall r > 0, c_1 \in \mathbb{R} \Big| \int (\cdot)\, dr \Rightarrow \varphi(r) = c_1 \ln r + c_2, \forall r > 0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

•Deci toate funcţiile armonice de forma

$\boxed{u(x,y) = \varphi\left(x^2 + y^2\right), \forall (x,y) \in D}$ sunt

$\boxed{u(x,y) = c_1 \ln\left(x^2 + y^2\right) + c_2, \forall (x,y) \in D, c_1, c_2 \in \mathbb{R}}$

etapa 2 Se determină $f = u + \mathrm{j}\, v \in \mathcal{H}(D)$, adică se determină v astfel încât f să fie olomorfă pe D.

$f = u + \mathrm{j}\, v \in \mathcal{H}(D) \Rightarrow f$ satisface condiţiile Cauchy-Riemann$\Rightarrow$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) \end{cases}, \forall (x,y) \in D \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) = -c_1 \dfrac{2y}{x^2 + y^2} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) = c_1 \dfrac{2x}{x^2 + y^2} \end{cases}, \forall (x,y) \in D$$

•Se determină coeficientul părţii imaginare v pentru f

modul 1. Se determină o funcţie $v : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a.î.

$$\begin{cases} (1.1)\ \dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) = -c_1 \dfrac{2y}{x^2 + y^2} \\ (1.2)\ \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) = c_1 \dfrac{2x}{x^2 + y^2} \end{cases}, \forall (x,y) \in D.$$

modul 1.1 $(1.1) | \int (\cdot)\, dx \Rightarrow \int \dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y)\, dx = \int \left(-c_1 \dfrac{2y}{x^2 + y^2}\right) dx, \forall (x,y) \in D \Rightarrow$

$$v(x,y) \underset{\text{de integrare}}{\overset{x \text{ este var.}}{=}} -2c_1 \cdot y \frac{1}{y} \operatorname{arctg} \frac{x}{y} + \underbrace{\varphi(y)}_{\substack{\text{constantă în raport} \\ \text{cu variabila de integr. } x}}, \forall (x,y) \in D \Big| \frac{\partial}{\partial y}(\cdot) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \underset{\text{de derivare}}{\overset{y \text{ este var.}}{=}} -2c_1 \frac{1}{1 + \left(\dfrac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{-x}{y^2} + 0 + \varphi'(y), \forall (x,y) \in D$$

Se înlocuieşte $(1.2) \Rightarrow$

$c_1\dfrac{2x}{x^2+y^2}=2c_1\dfrac{x}{x^2+y^2}+\varphi'(y),\forall(x,y)\in D\Rightarrow$
$\varphi'(y)=0,\forall(x,y)\in D|\int(\cdot)\,dy\Rightarrow\varphi(y)=0+c_3,\forall(x,y)\in D,\forall c_3\in\mathbb{R}.$

Deci $v(x,y)=-2c_1\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}+c_3,\forall(x,y)\in D,\forall c_3\in\mathbb{R}$ sunt toate funcţiile v, mulţimea lor fiind indexată dupa constanta c_3.

<u>modul 1.2</u> $(1.2)|\int(\cdot)\,dy\Rightarrow\int\dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y)\,dy=\int c_1\dfrac{2x}{x^2+y^2}dy,\forall(x,y)\in D\Rightarrow$

$$v(x,y)\underset{\text{de integrare}}{\overset{y\text{ este var.}}{=}}2c_1\cdot x\frac{1}{x}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+\underbrace{\psi(x)}_{\substack{\text{constantă în raport}\\ \text{cu variabila de integr. } y}},\forall(x,y)\in D|\frac{\partial}{\partial x}(\cdot)\Rightarrow$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)\underset{\text{de derivare}}{\overset{x\text{ este var.}}{=}}2c_1\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{-y}{x^2}-0+\psi'(x),\forall(x,y)\in D.$$

Se înlocuieşte (1.1) $\Rightarrow$
$-c_1\dfrac{2y}{x^2+y^2}=2c_1\dfrac{-y}{x^2+y^2}+\psi'(x),\forall(x,y)\in D\Rightarrow$
$\psi'(x)=0,\forall(x,y)\in D|\int(\cdot)\,dx\Rightarrow\psi(x)=0+c_4,\forall(x,y)\in D,\forall c_4\in\mathbb{R}.$

Deci $v(x,y)=2c_1\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}+c_4,\forall(x,y)\in D,\forall c_4\in\mathbb{R}$ sunt toate funcţiile v, mulţimea lor fiind indexată dupa constanta c_4.

•Indiferent de mod, s-au găsit toate funcţiile
$v(x,y)=2c_1\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}+c_3,\forall(x,y)\in D,c_3\in\mathbb{R},$
pentru $f=u+\mathrm{j}\,v\in\mathcal{H}(D)$.

•Se scrie legea de asociere a f în funcţie de z.
$f:D\subseteq\mathbb{C}\to\mathbb{C},f(z)=\left(c_1\ln\left(x^2+y^2\right)+c_2\right)+\mathrm{j}\left(2c_1\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}+c_3\right),$
$z=x+\mathrm{j}\,y\in D,c_{1,2,3}\in\mathbb{R}.$

<u>modul 1</u>. Grupând $z=x+\mathrm{j}\,y$,
$f(z)=2c_1\left(\ln\sqrt{x^2+y^2}+\mathrm{j}\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}\right)+c_2+\mathrm{j}\,c_3=$
$=2c_1\left(\operatorname{Log}_k z\right)_{\mathbb{C}}+c_2+\mathrm{j}\,c_3,z=x+\mathrm{j}\,y\in D,c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R},$
unde $\left(\operatorname{Log}_k z\right)_{\mathbb{C}}$ cu ramura $k=0$ va fi definit ulterior.

<u>modul 2</u>. Folosind **regula**, pentru f olomorfă:

$$f(z)=\left(c_1\ln\left(x^2+y^2\right)+c_2\right)\Big|_{\begin{cases}x\text{ înlocuit cu }z\\ y\text{ înlocuit cu }0\end{cases}}+\mathrm{j}\left(2c_1\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+c_3\right)\Big|_{\begin{cases}x\text{ înlocuit cu }z\\ y\text{ înlocuit cu }0\end{cases}}=$$
$$=2c_1\left(\operatorname{Log}_k z\right)_{\mathbb{C}}+c_2+\mathrm{j}\,c_3.$$

•Se determină f' în funcţie de z.

<u>modul 2</u>. Deoarece f_k olomorfă pe $D\Rightarrow$
$f_k'(z)=\dfrac{d}{dz}\left(2c_1\left(\operatorname{Log}_k z\right)_{\mathbb{C}}+c_2+\mathrm{j}\,c_3\right)=2c_1\dfrac{1}{z}.$

Comentariu: Funcţiile olomorfe f care au $\operatorname{Re}f(x,y)=\varphi\left(x^2+y^2\right)$- o funcţie depinzând de variabilele legate prin $|z|^2$ sunt doar de forma celor de la exerciţiul precedent, ramuri de Log. (chiar dacă $z\to|z|$ este o funcţie care nu este monogenă în niciun punct).

Teorema 8. Fie $D\subseteq\mathbb{C}\simeq\mathbb{R}^2$ un domeniu simplu conex. Dacă $v:D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ este funcţie armonică pe D, atunci există o funcţie $u:D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ astfel încât funcţia
$f:D\subseteq\mathbb{C}\to\mathbb{C},\ f(z)=u(x,y)+\mathrm{j}\,v(x,y),z=x+\mathrm{j}\,y$

să fie olomorfă pe D (adică există $f \in \mathcal{H}(D)$ care să aibă funcţia v drept coeficientul părţii imaginare). Funcţia u se determină local sau prin rezolvarea unui sistem de ecuaţii cu derivate parţiale sau prin formulele

$$\boxed{u(x,y)=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial v}{\partial y}(x,y_0)\,dx-\int_{y_0}^{y}\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)\,dy} \text{ sau } \boxed{u(x,y)=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\,dx-\int_{y_0}^{y}\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y)\,dy.}$$

Exerciţiul 6. Să se determine funcţia şi derivata funcţiei

$f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = u(x,y) + \mathrm{j}\, v(x,y), z = x + \mathrm{j}\, y \in D,$

astfel încât f să fie olomorfă pe domeniul D şi

a) $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}; v(x,y) = e^{ax}\sin y - \dfrac{y}{x^2+y^2}, \forall (x,y) \in D; f(1) = e.$

$a > 0$ este un parametru real ce va fi determinat.

Rezolvare. etapa 1 Se verifică o condiţie necesară (şi suficientă când D este simplu conex) pentru ca să existe o funcţie olomorfă f încât v să fie coeficientul părţii ei imaginare, şi anume v să fie armonică.

$D = \mathbb{C} \setminus \{0\} \simeq \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ este mulţime deschisă.

•Funcţia v admite derivate parţiale de ordinul al doilea pe D.

$$\exists\frac{\partial v}{\partial x} : D \to \mathbb{R}, \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{ax}\sin y - \frac{y}{x^2+y^2}\right) =$$

$$= ae^{ax}\sin y - \frac{0\left(x^2+y^2\right) - y(2x+0)}{\left(x^2+y^2\right)^2} = ae^{ax}\sin y + \frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}, \forall (x,y) \in D.$$

$$\exists\frac{\partial v}{\partial y} : D \to \mathbb{R}, \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{ax}\sin y - \frac{y}{x^2+y^2}\right) =$$

$$= e^{ax}\cos y - \frac{1\left(x^2+y^2\right) - y(0+2y)}{\left(x^2+y^2\right)^2} = e^{ax}\cos y - \frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}, \forall (x,y) \in D.$$

$$\exists\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} : D \to \mathbb{R}, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(ae^{ax}\sin y + \frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right) =$$

$$= a^2e^{ax}\sin y + \frac{2y\left(x^2+y^2\right)^2 - 2xy\cdot 2\left(x^2+y^2\right)(2x+0)}{\left(x^2+y^2\right)^4} = a^2e^{ax}\sin y + \frac{2y^3-6x^2y}{\left(x^2+y^2\right)^3},$$

$\forall (x,y) \in D.$

$$\exists\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} : D \to \mathbb{R}, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{ax}\cos y - \frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right) =$$

$$= -e^{ax}\sin y - \frac{(-2y)\left(x^2+y^2\right)^2 - \left(x^2-y^2\right)\cdot 2\left(x^2+y^2\right)(0+2y)}{\left(x^2+y^2\right)^4} = -e^{ax}\sin y - \frac{2y^3-6x^2y}{\left(x^2+y^2\right)^3},$$

$\forall (x,y) \in D.$

Analog există $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$ şi $\dfrac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$.

•Se impune $\Delta v(x,y) = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x,y) = 0, \forall (x,y) \in D \Rightarrow$

$a^2 - 1 = 0 \overset{a>0}{\Rightarrow} a = 1.$

etapa 2 Se determină $f = u + \mathrm{j}\, v \in \mathcal{H}(D)$, adică se determină u astfel încât f să fie olomorfă pe D.

$f = u + \mathrm{j}\, v \in \mathcal{H}(D) \Rightarrow f$ satisface condiţiile Cauchy-Riemann$\Rightarrow$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) \end{cases}, \forall (x,y) \in D \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = e^x \cos y - \dfrac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\left(e^x \sin y + \dfrac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right) \end{cases}, \forall (x,y) \in D$$

•Se determină partea reală u pentru f

modul 1. Se determină o funcţie $u : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a.î.

$$\begin{cases} (1.1)\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = e^x \cos y - \dfrac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} \\ (1.2)\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\left(e^x \sin y + \dfrac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right) \end{cases}, \forall (x,y) \in D.$$

modul 1.1 (cu grad mai ridicat de dificultate)

$$(1.1)| \int (\cdot)\, dx \Rightarrow \int \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\, dx = \int \left(e^x \cos y - \frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right) dx, \forall (x,y) \in D.$$

Se calculează separat

$$\mathcal{I}(y) = \int \frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} dx = \int \frac{\left(x^2+y^2\right)-2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} dx = \int \frac{1}{x^2+y^2} dx - 2y^2 \int \frac{1}{\left(x^2+y^2\right)^2} dx$$

Se observă că $\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2\right) = 2x \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) = -\dfrac{2x}{\left(x^2+y^2\right)^2} \end{cases}$

$$\mathcal{I}_1(y) = \int \frac{1}{x^2+y^2} dx \overset{x \text{ este var.}}{\underset{\text{de integrare}}{=}} \frac{1}{y} \operatorname{arctg} \frac{x}{y} + \widetilde{c_1}$$

$$\mathcal{I}_2(y) = \int \frac{1}{\left(x^2+y^2\right)^2} dx \overset{x \text{ este var.}}{\underset{\text{de integrare}}{=}} \frac{1}{4y^2} \int \frac{4\left(x^2+y^2\right)-4x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} dx = \frac{1}{4y^2} 4\mathcal{I}_1(y) - \frac{1}{4y^2} \int \frac{4x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} dx =$$

$$= \frac{1}{y^2}\mathcal{I}_1(y) + \frac{1}{4y^2} \int 2x \frac{-2x}{\left(x^2+y^2\right)^2} dx = \frac{1}{y^2}\mathcal{I}_1(y) + \frac{1}{4y^2} \int 2x \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) dx \overset{\text{integrare prin părţi}}{\underset{\text{în raport cu } x}{=}}$$

$$= \frac{1}{y^2}\mathcal{I}_1(y) + \frac{1}{4y^2} \cdot \frac{2x}{x^2+y^2} - \frac{1}{4y^2} \int 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{x^2+y^2} dx = \frac{1}{2y^2}\mathcal{I}_1(y) + \frac{1}{2y^2} \cdot \frac{x}{x^2+y^2} + \widetilde{c_2}$$

Atunci

$$\mathcal{I}(y) = \mathcal{I}_1(y) - 2y^2\left(\frac{1}{2y^2}\mathcal{I}_1(y) + \frac{1}{2y^2} \cdot \frac{x}{x^2+y^2}\right) = -\frac{x}{x^2+y^2} + \widetilde{c_2} \Rightarrow$$

$$u(x,y) \overset{x \text{ este var.}}{\underset{\text{de integrare}}{=}} (\cos y) \cdot e^x + \frac{x}{x^2+y^2} + \underbrace{\varphi(y)}_{\substack{\text{constantă în raport} \\ \text{cu variabila de integr. } x}}, \forall (x,y) \in D| \frac{\partial}{\partial y}(\cdot) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \overset{y \text{ este var.}}{\underset{\text{de derivare}}{=}} e^x(-\sin y) + \frac{0 \cdot \left(x^2+y^2\right) - x(0+2y)}{\left(x^2+y^2\right)^2} + \varphi'(y), \forall (x,y) \in D$$

Se înlocuieşte (1.2) $\Rightarrow$

$$-\left(e^x \sin y + \frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right) = e^x(-\sin y) + \frac{-x(2y)}{\left(x^2+y^2\right)^2} + \varphi'(y), \forall (x,y) \in D \Rightarrow$$

$\varphi'(y) = 0, \forall (x,y) \in D| \int (\cdot)\, dy \Rightarrow \varphi(y) = 0 + c_1, \forall (x,y) \in D, \forall c_1 \in \mathbb{R}.$

Deci $u(x,y) = (\cos y) \cdot e^x + \dfrac{x}{x^2+y^2} + c_1, \forall (x,y) \in D, \forall c_1 \in \mathbb{R}$ sunt toate funcţiile u, mulţimea lor fiind indexată dupa constanta c_1.

modul 1.2 (cu grad de dificultate mediu)

$$(1.2)| \int (\cdot)\, dy \Rightarrow \int \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\, dy = -\int \left(e^x \sin y + \frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right) dy, \forall (x,y) \in D.$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial y}\left(x^2+y^2\right)=2y \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)=-\dfrac{2y}{\left(x^2+y^2\right)^2} \\ \int\left(-\dfrac{2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right)dy=\dfrac{1}{x^2+y^2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$u(x,y) \underset{\text{de integrare}}{\overset{y \text{ este var.}}{=}} e^x\cos y + x\cdot\frac{1}{x^2+y^2} + \underbrace{\psi(x)}_{\substack{\text{constantă în raport}\\ \text{cu variabila de integr. } y}}, \forall (x,y)\in D \,|\, \frac{\partial}{\partial x}(\cdot) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) \underset{\text{de derivare}}{\overset{x \text{ este var.}}{=}} e^x\cos y + \frac{1\left(x^2+y^2\right)-x\left(2x+0\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\psi'(x), \forall (x,y)\in D$$

Se înlocuieşte (1.1) $\Rightarrow$

$$e^x\cos y - \frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} = e^x\cos y + \frac{-x^2+y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\psi'(x), \forall (x,y)\in D \Rightarrow$$

$\psi'(x)=0, \forall (x,y)\in D \,|\, \int(\cdot)\,dx \Rightarrow \psi(x)=c_2, \forall (x,y)\in D, \forall c_2\in\mathbb{R}$.

Deci $u(x,y)=e^x\cos y+\dfrac{x}{x^2+y^2}+c_2, \forall (x,y)\in D, \forall c_2\in\mathbb{R}$ sunt toate funcţiile u, mulţimea lor fiind indexată dupa constanta c_2.

○<u>modul 2.</u> Se foloseşte $u(x,y)=\int_{x_0}^{x}\dfrac{\partial u}{\partial x}(t,y_0)\,dt+\int_{y_0}^{y}\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,t)\,dt, \forall (x,y)\in D \Rightarrow$

$$\boxed{u(x,y)=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial v}{\partial y}(t,y_0)\,dt-\int_{y_0}^{y}\frac{\partial v}{\partial x}(x,t)\,dt, \forall (x,y)\in D} \Rightarrow$$

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}\left(e^t\cos y_0-\frac{t^2-y_0^2}{\left(t^2+y_0^2\right)^2}\right)dt-\int_{y_0}^{y}\left(e^x\sin t+\frac{2xt}{\left(x^2+t^2\right)^2}\right)dt=$$

$$=\left(e^t\cos y_0+\frac{t}{t^2+y_0^2}\right)\Bigg|_{t=x_0}^{t=x}+\left(e^x\cos t+x\frac{1}{x^2+t^2}\right)\Bigg|_{t=y_0}^{t=y}=$$

$$=\left(e^x\cos y_0+\frac{x}{x^2+y_0^2}\right)-\left(e^{x_0}\cos y_0+\frac{x_0}{x_0^2+y_0^2}\right)+\left(e^x\cos y+x\frac{1}{x^2+y^2}\right)-\left(e^x\cos y_0+x\frac{1}{x^2+y_0^2}\right)=$$

$$=\left(e^x\cos y+\frac{x}{x^2+y^2}\right)-\underbrace{\left(e^{x_0}\cos y_0+\frac{x_0}{x_0^2+y_0^2}\right)}_{=-c\in\mathbb{R}}, \forall (x,y)\in D.$$

•Indiferent de mod, s-au găsit toate funcţiile

$$u(x,y)=e^x\cos y+\frac{x}{x^2+y^2}+c, \forall (x,y)\in D, c\in\mathbb{R},$$

pentru $f=u+\mathrm{j}\,v\in\mathcal{H}(D)$.

•Se scrie legea de asociere a f în funcţie de z.

$$f: D\subseteq\mathbb{C}\to\mathbb{C}, f(z)=\left(e^x\cos y+\frac{x}{x^2+y^2}+c\right)+\mathrm{j}\left(e^x\sin y-\frac{y}{x^2+y^2}\right), z=x+\mathrm{j}\,y\in D,$$

$c\in\mathbb{R}$.

•Se scrie legea de asociere a f în funcţie de z.

<u>modul 1</u>. Grupând $z=x+\mathrm{j}\,y$ şi observând că

$$f(z)=e^x(\cos y+\mathrm{j}\sin y)+\frac{x-\mathrm{j}\,y}{x^2+y^2}-1=e^z+\frac{1}{z}-1, z=x+\mathrm{j}\,y\in D.$$

<u>modul 2</u>. Folosind **regula**, pentru f olomorfă:

$$f(z) = \left(e^x \cos y + \frac{x}{x^2+y^2} - 1\right)\Bigg|_{\begin{cases} x \text{ înlocuit cu } z \\ y \text{ înlocuit cu } 0 \end{cases}} + \mathrm{j}\left(e^x \sin y - \frac{y}{x^2+y^2}\right)\Bigg|_{\begin{cases} x \text{ înlocuit cu } z \\ y \text{ înlocuit cu } 0 \end{cases}} =$$

$$= e^z + \frac{1}{z} - 1.$$

•Se determină f' în funcţie de z.

modul 2. Deoarece f olomorfă pe $D \Rightarrow$

$$f'(z) = \frac{d}{dz}\left(e^z + \frac{1}{z} - 1\right) = e^z - \frac{1}{z^2}.$$

•Se impune $f(1+\mathrm{j}\cdot 0) = e \Rightarrow \left(e^1 \cos 0 + \frac{1}{1^2+0^2} + c\right) + \mathrm{j}\left(e^1 \sin 0 - \frac{0}{1^2+0^2}\right) = e \Rightarrow$

$e + 1 + c = e \Rightarrow c = -1$

Deci unica funcţie $f = u + \mathrm{j}\, v \in \mathcal{H}(D)$ cu v dat şi cu $f(1+\mathrm{j}\cdot 0) = e$ este

$$f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = \left(e^x \cos y + \frac{x}{x^2+y^2} - 1\right) + \mathrm{j}\left(e^x \sin y - \frac{y}{x^2+y^2}\right).$$

b) $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}\,; v(x,y) = \ln\left(x^2+y^2\right) + x - 2y, \forall (x,y) \in D.$

Rezolvare. etapa 1 Se verifică o condiţie necesară (şi suficientă când D este simplu conex) pentru ca să existe o funcţie olomorfă f încât v să fie coeficientul părţii ei imaginare, şi anume v să fie armonică.

$D = \mathbb{C} \setminus \{0\} \simeq \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ este mulţime deschisă.

•Funcţia v admite derivate parţiale de ordinul al doilea pe D.

$$\exists \frac{\partial v}{\partial x} : D \to \mathbb{R}, \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\ln\left(x^2+y^2\right) + x - 2y\right) = \frac{2x}{x^2+y^2} + 1, \forall (x,y) \in D.$$

$$\exists \frac{\partial v}{\partial y} : D \to \mathbb{R}, \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\ln\left(x^2+y^2\right) + x - 2y\right) = \frac{2y}{x^2+y^2} - 2, \forall (x,y) \in D.$$

$$\exists \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} : D \to \mathbb{R}, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2x}{x^2+y^2} + 1\right) = \frac{2\left(x^2+y^2\right) - 2x(2x+0)}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{-2x^2+2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2},$$

$\forall (x,y) \in D.$

$$\exists ? \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} : D \to \mathbb{R}, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2y}{x^2+y^2} - 2\right) = \frac{2\left(x^2+y^2\right) - 2y(0+2y)}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{2x^2-2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2},$$

$\forall (x,y) \in D.$

Analog există $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$ şi $\dfrac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$.

•Se verifică $\Delta v(x,y) = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x,y) = 0, \forall (x,y) \in D.$

etapa 2 Se determină $f = u + \mathrm{j}\, v \in \mathcal{H}(D)$, adică se determină u astfel încât f să fie olomorfă pe D.

$f = u + \mathrm{j}\, v \in \mathcal{H}(D) \Rightarrow f$ satisface condiţiile Cauchy-Riemann$\Rightarrow$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) \end{cases}, \forall (x,y) \in D \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \dfrac{2y}{x^2+y^2} - 2 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\left(\dfrac{2x}{x^2+y^2} + 1\right) \end{cases}, \forall (x,y) \in D$$

•Se determină partea reală u pentru f

modul 1. Se determină o funcţie $u : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a.î.

$$\begin{cases} (1.1)\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \dfrac{2y}{x^2+y^2} - 2 \\ (1.2)\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\left(\dfrac{2x}{x^2+y^2} + 1\right) \end{cases}, \forall (x,y) \in D.$$

<u>modul 1.1</u> $(1.1)|\int(\cdot)\,dx \Rightarrow \int \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\,dx = \int\left(\frac{2y}{x^2+y^2}-2\right)dx, \forall(x,y)\in D \Rightarrow$

$$u(x,y) \underset{\text{de integrare}}{\overset{x \text{ este var.}}{=}} 2y\frac{1}{y}\operatorname{arctg}\frac{x}{y} - 2x + \underbrace{\varphi(y)}_{\substack{\text{constantă în raport}\\ \text{cu variabila de integr. } x}}, \forall(x,y)\in D|\frac{\partial}{\partial y}(\cdot) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \underset{\text{de derivare}}{\overset{y \text{ este var.}}{=}} 2\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\frac{-x}{y^2} + 0 + \varphi'(y), \forall(x,y)\in D$$

Se înlocuieşte (1.2) $\Rightarrow$

$$-\left(\frac{2x}{x^2+y^2}+1\right) = \frac{-2x}{x^2+y^2} + \varphi'(y), \forall(x,y)\in D \Rightarrow$$

$\varphi'(y) = -1, \forall(x,y)\in D|\int(\cdot)\,dy \Rightarrow \varphi(y) = -y + c_1, \forall(x,y)\in D, \forall c_1\in\mathbb{R}.$

Deci $u(x,y) = 2\operatorname{arctg}\frac{x}{y} - 2x - y + c_1, \forall(x,y)\in D, \forall c_1\in\mathbb{R}$ sunt toate funcţiile u, mulţimea lor fiind indexată dupa constanta c_1.

<u>modul 1.2</u> $(1.2)|\int(\cdot)\,dy \Rightarrow \int \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\,dy = -\int\left(\frac{2x}{x^2+y^2}+1\right)dy, \forall(x,y)\in D \Rightarrow$

$$u(x,y) \underset{\text{de integrare}}{\overset{y \text{ este var.}}{=}} -2x\frac{1}{x}\operatorname{arctg}\frac{y}{x} - y + \underbrace{\psi(x)}_{\substack{\text{constantă în raport}\\ \text{cu variabila de integr. } y}}, \forall(x,y)\in D|\frac{\partial}{\partial x}(\cdot) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) \underset{\text{de derivare}}{\overset{x \text{ este var.}}{=}} -2\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{-y}{x^2} - 0 + \psi'(x), \forall(x,y)\in D$$

Se înlocuieşte (1.1) $\Rightarrow$

$$\frac{2y}{x^2+y^2} - 2 = \frac{2y}{x^2+y^2} + \psi'(x), \forall(x,y)\in D \Rightarrow$$

$\psi'(x) = -2, \forall(x,y)\in D|\int(\cdot)\,dx \Rightarrow \psi(x) = -2x + c_2, \forall(x,y)\in D, \forall c_2\in\mathbb{R}.$

Deci $u(x,y) = -2\operatorname{arctg}\frac{y}{x} - y - 2x + c_2, \forall(x,y)\in D, \forall c_2\in\mathbb{R}$ sunt toate funcţiile u, mulţimea lor fiind indexată dupa constanta c_2.

<u>modul 2.</u> Folosim $u(x,y) = \int_{x_0}^{x}\frac{\partial u}{\partial x}(t,y_0)\,dt + \int_{y_0}^{y}\frac{\partial u}{\partial y}(x,t)\,dt, \forall(x,y)\in D \Rightarrow$

$$\boxed{u(x,y) = \int_{x_0}^{x}\frac{\partial v}{\partial y}(t,y_0)\,dt - \int_{y_0}^{y}\frac{\partial v}{\partial x}(x,t)\,dt, \forall(x,y)\in D.} \Rightarrow$$

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x}\left(\frac{2y_0}{t^2+y_0^2}-2\right)dt - \int_{y_0}^{y}\left(\frac{2x}{x^2+t^2}+1\right)dt =$$

$$= \left(2y_0\frac{1}{y_0}\operatorname{arctg}\frac{t}{y_0} - 2t\right)\Bigg|_{t=x_0}^{t=x} + \left(-2x\frac{1}{x}\operatorname{arctg}\frac{t}{x} - t\right)\Bigg|_{t=y_0}^{t=y}$$

$$= \left(2\operatorname{arctg}\frac{x}{y_0} - 2x\right) - \left(2\operatorname{arctg}\frac{x_0}{y_0} - 2x_0\right) + \left(-2\operatorname{arctg}\frac{y}{x} - y\right) - \left(-2\operatorname{arctg}\frac{y_0}{x} - y_0\right) =$$

$$= \left(-2\operatorname{arctg}\frac{y}{x} - y - 2x\right) - \underbrace{\left(-2\operatorname{arctg}\frac{y_0}{x_0} - y_0 - 2x_0\right)}_{=-c\in\mathbb{R}}, \forall(x,y)\in D.$$

•Indiferent de mod, folosind $\operatorname{arctg}\frac{x}{y} + \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \frac{\pi}{2}$, s-au găsit toate funcţiile

$u(x,y) = -2\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} - y - 2x + c, \forall (x,y) \in D, c \in \mathbb{R},$
pentru $f = u + \mathrm{j}\, v \in \mathcal{H}(D)$.
•Se scrie legea de asociere a f în funcţie de z.
$f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = \left(-2\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} - y - 2x + c\right) + \mathrm{j}\left(\ln\left(x^2+y^2\right) + x - 2y\right), z = x + \mathrm{j}\, y \in D, c \in \mathbb{R}.$
modul 1. Grupând $z = x + \mathrm{j}\, y$ şi observând că
$$f(z) = 2\mathrm{j}\left(\ln\sqrt{x^2+y^2} + \mathrm{j}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right) + \mathrm{j}(x + \mathrm{j}\, y) - 2(x + \mathrm{j}\, y) + c =$$
$$= 2\mathrm{j}\left(\operatorname{Log}_k z\right)_{\mathbb{C}} + (\mathrm{j} - 2) z + c, z = x + \mathrm{j}\, y \in D, c \in \mathbb{R}.$$
unde $\left(\operatorname{Log}_k z\right)_{\mathbb{C}}$ cu ramura $k = 0$ va fi definit ulterior.
modul 2. Folosind **regula**, pentru f olomorfă:
$$f(z) = \left(-2\operatorname{arctg}\frac{y}{x} - y - 2x + c\right)\Bigg|_{\begin{cases} x \text{ înlocuit cu } z \\ y \text{ înlocuit cu } 0\end{cases}} + \mathrm{j}\left(\ln\left(x^2+y^2\right) + x - 2y\right)\Bigg|_{\begin{cases} x \text{ înlocuit cu } z \\ y \text{ înlocuit cu } 0\end{cases}}$$
$$= 2\mathrm{j}\left(\operatorname{Log}_k z\right)_{\mathbb{C}} + (\mathrm{j} - 2) z + c.$$
•Se determină f' în funcţie de z.
modul 2. Deoarece f_k olomorfă pe $D \Rightarrow$
$$f_k'(z) = \frac{d}{dz}\left(2\mathrm{j}\left(\operatorname{Log}_k z\right)_{\mathbb{C}} + (\mathrm{j} - 2) z + c\right) = 2\frac{1}{z} + (\mathrm{j} - 2).$$

c) $D = \mathbb{C}; v(x,y) = 2xy, \forall (x,y) \in D$ şi $f(0) = 0$.
Răspuns. $f(z) = z^2$.

d) $D = \mathbb{C}; v(x,y) = x^2 - y^2 + xy, \forall (x,y) \in D$ şi $f(0) = 0$.
Răspuns. $f(z) = \dfrac{1-\mathrm{j}}{2} z^2$.

e) $D = \mathbb{C}\setminus\{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} z = 0, \operatorname{Im} z \leq 0\}; v(x,y) = 3 + x^2 - y^2 - \dfrac{1}{2}\dfrac{y}{x^2+y^2}, \forall (x,y) \in D$ şi $f(2) = 0$.
Răspuns. $f(z) = \mathrm{j}\, z^2 + \dfrac{1}{z} - \frac{1}{2}(1 + 8\mathrm{j})$.

○**Exerciţiul 7**. Să se determine funcţia
$f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = u(x,y) + \mathrm{j}\, v(x,y), z = x + \mathrm{j}\, y \in D$
astfel încât f să fie olomorfă pe D şi
a) $2xy \cdot u(x,y) + \left(y^2 - x^2\right) \cdot v(x,y) + 2xy\left(x^2+y^2\right)^2 = 0, \forall (x,y) \in D$.
Indicaţie. Se folosesc condiţiile Cauchy-Riemann şi derivări parţiale ale ecuaţiei.

○**Exerciţiul 8**. Să se determine funcţia
$f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = u(x,y) + \mathrm{j}\, v(x,y), z = x + \mathrm{j}\, y \in D$
astfel încât f să fie olomorfă pe D şi
a) $u(x,y) = \dfrac{\sin(2x)}{e^{2y} + e^{-2y} - 2\cos 2x}, \forall (x,y) \in D$.
Rezolvare. Metodele de la exerciţiile precedente sunt greoaie. Se foloseşte
$$\begin{cases} f(z) = u(x,y) + \mathrm{j}\, v(x,y) \\ \overline{f(z)} = u(x,y) - \mathrm{j}\, v(x,y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2u(x,y) = f(z) + \overline{f(z)} \\ 2\mathrm{j}\, v(x,y) = f(z) - \overline{f(z)} \end{cases}$$
$$2u(x,y) = 2u\left(\frac{z+\overline{z}}{2}, \frac{z-\overline{z}}{2\mathrm{j}}\right) = 2\frac{\sin(z+\overline{z})}{e^{-\mathrm{j}(z-\overline{z})} + e^{\mathrm{j}(z-\overline{z})} - 2\cos(z+\overline{z})} \overset{\text{reguli de calcul}}{=}$$

$$= 2\frac{\sin\left(z+\overline{z}\right)}{2\cos\left(z-\overline{z}\right)-2\cos\left(z+\overline{z}\right)} = \frac{\sin\left(z+\overline{z}\right)}{2\sin z \sin\overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{ctg} z + \operatorname{ctg}\overline{z}\right).$$

Atunci $\begin{cases} 2u\left(x,y\right) = f\left(z\right) + \overline{f\left(z\right)} \\ 2u\left(x,y\right) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{ctg} z + \operatorname{ctg}\overline{z}\right) \end{cases} \Rightarrow f\left(z\right) = \frac{1}{2}\operatorname{ctg} z + \alpha\,\mathrm{j}, \alpha \in \mathbb{R}.$