SEMINAR NR. 6, REZOLVĂRI
Matematici Speciale, AIA

3.3. Puncte ordinare şi puncte singulare la distanţă finită, respectiv infinită

Definiţii pentru noţiunile de *punct ordinar*, *punct singular*, *zero*, *pol*, *punct singular esenţial*, *punct singular removabil* sau *eliminabil* sau *aparent pentru* f la distanţă finită, respectiv infinită-vezi curs; cu "interpretări grafice" $4D$ ($3D$ şi culoare).

Exerciţiul 1. Să se determine punctele ordinare, zerourile şi punctele singulare la distanţă finită (cu desen, ca în Curs) şi natura lor pentru:

a) $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = z^2 + 1$

Rezolvare. f este bine definită, $\forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow A = \mathbb{C}$.

•Se observă că, $\forall z_0 \in \mathbb{C}, \exists \rho > 0$ a.î. $f \in \mathcal{H}(\Delta(z_0;\rho)) \Rightarrow$
$\Rightarrow \forall z_0 \in \mathbb{C}$ este punct ordinar pentru $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

•Zerourile lui f sunt: j(de ordin 1) şi $-\mathrm{j}$(de ordin 1).

•f nu are puncte singulare pe $\mathbb{C}$ (la distanţă finită).

b) $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = \dfrac{z^2+1}{z^2+4}$

Rezolvare. f este bine definită, $\forall z \in \mathbb{C}\setminus\{2\mathrm{j}, -2\mathrm{j}\} \Rightarrow A = \mathbb{C}\setminus\{2\mathrm{j}, -2\mathrm{j}\}$.

•Se observă că, $\forall z_0 \in \mathbb{C}\setminus\{2\mathrm{j}, -2\mathrm{j}\}, \exists \rho > 0$ a.î. $f \in \mathcal{H}(\Delta(z_0;\rho)) \Rightarrow$
$\Rightarrow \forall z_0 \in \mathbb{C}\setminus\{2\mathrm{j}, -2\mathrm{j}\}$ este punct ordinar pentru $f : \mathbb{C}\setminus\{2\mathrm{j}, -2\mathrm{j}\} \to \mathbb{C}$.

•Zerourile lui f sunt: j(de ordin 1) şi $-\mathrm{j}$(de ordin 1).

•f are puncte singulare pe $\mathbb{C}$ (la distanţă finită) :

$\boxed{a = 2\mathrm{j}}$ este punct singular; mai mult, este pol de ordin 1, deoarece:

-se scrie $f(z) = \dfrac{\frac{z^2+1}{z+2\mathrm{j}}}{z-2\mathrm{j}} = \dfrac{\varphi_1(z)}{(z-2\mathrm{j})^1}$;

-se observă că $\varphi_1(z) = \dfrac{z^2+1}{z+2\mathrm{j}}, \forall z \in A \cup \{2\mathrm{j}\}$;

φ_1 este olomorfă pe o vecinătate a lui $2\mathrm{j}$; $\varphi_1(2\mathrm{j}) = \dfrac{(2\mathrm{j})^2+1}{2\mathrm{j}+2\mathrm{j}} \neq 0$.

$\boxed{a = -2\mathrm{j}}$ este punct singular; mai mult, este pol de ordin 1, deoarece:

-se scrie $f(z) = \dfrac{\frac{z^2+1}{z-2\mathrm{j}}}{z+2\mathrm{j}} = \dfrac{\varphi_2(z)}{(z+2\mathrm{j})^1}$;

-se observă că $\varphi_2(z) = \dfrac{z^2+1}{z-2\mathrm{j}}, \forall z \in A \cup \{-2\mathrm{j}\}$;

φ_2 este olomorfă pe o vecinătate a lui $-2\mathrm{j}$; $\varphi_2(-2\mathrm{j}) = \dfrac{(-2\mathrm{j})^2+1}{-2\mathrm{j}-2\mathrm{j}} \neq 0$.

c) $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = \dfrac{z^2+1}{(z^2+9)^2}$

Rezolvare. f este bine definită, $\forall z \in \mathbb{C}\setminus\{3\mathrm{j}, -3\mathrm{j}\} \Rightarrow A = \mathbb{C}\setminus\{3\mathrm{j}, -3\mathrm{j}\}$.

•Se observă că, $\forall z_0 \in \mathbb{C}\setminus\{3\mathrm{j}, -3\mathrm{j}\}, \exists \rho > 0$ a.î. $f \in \mathcal{H}(\Delta(z_0;\rho)) \Rightarrow$
$\Rightarrow \forall z_0 \in \mathbb{C}\setminus\{3\mathrm{j}, -3\mathrm{j}\}$ este punct ordinar pentru $f : \mathbb{C}\setminus\{3\mathrm{j}, -3\mathrm{j}\} \to \mathbb{C}$

•Zerourile lui f sunt: j(de ordin 1) şi $-\mathrm{j}$(de ordin 1).

•f are puncte singulare pe $\mathbb{C}$ (la distanţă finită) :

$\boxed{a = 3\,\mathrm{j}}$ este punct singular; mai mult, este pol de ordin 2, deoarece:

-se scrie $f(z) = \dfrac{\frac{z^2+1}{(z+3\,\mathrm{j})^2}}{(z-3\,\mathrm{j})^2} = \dfrac{\varphi_1(z)}{(z-3\,\mathrm{j})^2}$;

-se observă că $\varphi_1(z) = \dfrac{z^2+1}{(z+3\,\mathrm{j})^2}, \forall z \in A \cup \{3\,\mathrm{j}\}$;

φ_1 este olomorfă pe o vecinătate a lui $3\,\mathrm{j}$; $\varphi_1(3\,\mathrm{j}) = \dfrac{(3\,\mathrm{j})^2+1}{(3\,\mathrm{j}+3\,\mathrm{j})^2} \neq 0.$

$\boxed{a = -3\,\mathrm{j}}$ este punct singular; mai mult, este pol de ordin 2, deoarece:

-se scrie $f(z) = \dfrac{\frac{z^2+1}{(z-3\,\mathrm{j})^2}}{(z+3\,\mathrm{j})^2} = \dfrac{\varphi_2(z)}{(z+3\,\mathrm{j})^2}$;

-se observă că $\varphi_2(z) = \dfrac{z^2+1}{(z-3\,\mathrm{j})^2}, \forall z \in A \cup \{-3\,\mathrm{j}\}$;

φ_2 este olomorfă pe o vecinătate a lui $-3\,\mathrm{j}$; $\varphi_2(-3\,\mathrm{j}) = \dfrac{(-3\,\mathrm{j})^2+1}{-3\,\mathrm{j}-3\,\mathrm{j}} \neq 0.$

d) $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = \dfrac{z^2+\mathrm{j}}{z^2(z^2+16)^3}$

Rezolvare. f este bine definită, $\forall z \in \mathbb{C}\setminus\{0, 4\,\mathrm{j}, -4\,\mathrm{j}\} \Rightarrow A = \mathbb{C}\setminus\{0, 4\,\mathrm{j}, -4\,\mathrm{j}\}$.

•Se observă că, $\forall z_0 \in \mathbb{C}\setminus\{0, 4\,\mathrm{j}, -4\,\mathrm{j}\}, \exists \rho > 0$ a.î. $f \in \mathcal{H}(\Delta(z_0;\rho)) \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall z_0 \in \mathbb{C}\setminus\{0, 4\,\mathrm{j}, -4\,\mathrm{j}\}$ este punct ordinar pentru $f : \mathbb{C}\setminus\{0, 4\,\mathrm{j}, -4\,\mathrm{j}\} \to \mathbb{C}$

•Zerourile lui f sunt: $\frac{-\sqrt{2}}{2} + \mathrm{j}\,\frac{\sqrt{2}}{2}$(de ordin 1) şi $\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{j}\,\frac{-\sqrt{2}}{2}$(de ordin 1), deoarece

$-\mathrm{j} = 1\left(\cos\frac{3\pi}{2} + \mathrm{j}\sin\frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow$

$\left(\sqrt[2]{-\mathrm{j}}\right)_{\mathbb{C}} = \left\{Z_k = \sqrt[1]{1}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{2} + \mathrm{j}\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{2}\right); k \in \{0,1\}\right\} =$

$= \left\{Z_0 = \sqrt[1]{1}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + \mathrm{j}\sin\frac{3\pi}{4}\right), Z_1 = \sqrt[1]{1}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + \mathrm{j}\sin\frac{7\pi}{4}\right)\right\} =$

$= \left\{Z_0 = \frac{-\sqrt{2}}{2} + \mathrm{j}\,\frac{\sqrt{2}}{2}, Z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{j}\,\frac{-\sqrt{2}}{2}\right\}$

•f are puncte singulare pe $\mathbb{C}$ (la distanţă finită) :

$a = 0$ este punct singular; mai mult, este pol de ordin 2;

$a = 4\,\mathrm{j}$ este punct singular; mai mult, este pol de ordin 3;

$a = -4\,\mathrm{j}$ este punct singular; mai mult, este pol de ordin 3.

Exerciţiul 2. Să se determine punctele singulare, la distanţă finită şi apoi la infinit, şi natura lor pentru:

a) $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = 2 - z + z^3$; **b)** $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = \dfrac{z^7 - 3z^2}{z^2 - 6z + 9}$

Rezolvare. A se vedea Curs.

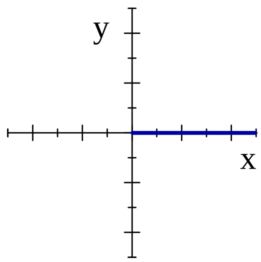
3.4. Funcţii elementare complexe de o variabilă complexă

Definiţii şi teoreme de olomorfie, exemple şi "grafice" $4D$ ($3D$ şi culoare) pentru funcţiile elementare polinomiale, raţionale, radical complex, exponenţială, logaritmică, trigonometrice şi hiperbolice, inversele funcţiilor trigonometrice şi hiperbolice -A se vedea Curs.

A se revedea Exerciţiile $2, 3, 7, 10$ din Seminar 4.

Exerciţiul 1. Să se calculeze $\left(\sqrt[5]{-2+2\,\mathrm{j}}\right)_{\mathbb{C}}$, luând pentru multifuncţia $f(z) = (\sqrt[5]{z})_{\mathbb{C}}$ ramura care satisface $f_k(-1) = -1$ şi tăietura $T = Ox_+$.

Rezolvare. Se reprezintă tăietura



$T = Ox_+ = \{z = x + \mathrm{j}\,y \in \mathbb{C}; y = 0, x \geq 0\} \Rightarrow$se alege $t^* \in [0, 2\pi[$.

Multifuncţia radical de ordin 5 din $z - 0$,

$f : \mathbb{C} \to \mathcal{P}(\mathbb{C}),\ f(z) = \left(\sqrt[5]{z-0}\right)_{\mathbb{C}}$

este o funcţie multivocă cu exact 5 ramuri, iar în ipoteza că se alege tăietura $T = Ox_+$ şi $t^* \in [0, 2\pi[$), aceste ramuri sunt date de

$$f_k : \mathbb{C} \setminus T \to \mathbb{C}, f_k(z) = \sqrt[5]{r}\left(\cos\frac{t^* + 2k\pi}{5} + \mathrm{j}\sin\frac{t^* + 2k\pi}{5}\right), k \in \{0, 1, 2, 3, 4\},$$

unde $z - 0 = r(\cos t^* + \mathrm{j}\sin t^*) \in \mathbb{C}$, cu $r = |z - 0|, t^* = \arg(z - 0) \in [0, 2\pi[$.

<u>etapa 1.</u> Se determină acea ramură (acel $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$) pentru care $f_k(-1) = -1$.

$$\left.\begin{array}{l} f_k(-1 + \mathrm{j}\cdot 0) = f_k\left(\underbrace{1(\cos\pi + \mathrm{j}\sin\pi)}_{=-1, M\in Ox_-}\right) = \sqrt[5]{1}\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{5} + \mathrm{j}\sin\frac{\pi + 2k\pi}{5}\right), k \in \{0, 1, 2, 3, 4\} \\ -1 = 1(\cos\pi + \mathrm{j}\sin\pi) \end{array}\right\}$$

$$\overset{f_k(-1)=-1}{\Rightarrow} \left\{\begin{array}{l} \sqrt[5]{1} = 1 \\ \dfrac{\pi + 2k\pi}{5} \overset{\text{periodicitate}}{=} \pi + 2p\pi, p \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Se alege acel $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ a.î.

$$\frac{\pi + 2k\pi}{5} = \pi + 2p\pi, p \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 1 + 2k = 5 + 10p, p \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow k = 2 + 5p, p \in \mathbb{Z}$$

$k = 0 \Rightarrow -2 = 5p-$ contradicţie cu $p \in \mathbb{Z}$

$k = 1 \Rightarrow -1 = 5p-$ contradicţie cu $p \in \mathbb{Z}$

$k = 2 \Rightarrow 0 = 5p \Rightarrow p = 0 \in \mathbb{Z}$

$k = 3 \Rightarrow 1 = 5p-$ contradicţie cu $p \in \mathbb{Z}$

$k = 4 \Rightarrow 2 = 5p-$ contradicţie cu $p \in \mathbb{Z}$

Deci $k = 2 \Rightarrow$

$$f_2 : \mathbb{C} \setminus T \to \mathbb{C}, f_2(z) = \sqrt[5]{r}\left(\cos\frac{t^* + 4\pi}{5} + \mathrm{j}\sin\frac{t^* + 4\pi}{5}\right).$$

<u>etapa 2.</u> Se determină $\left(\sqrt[5]{-2+2\,\mathrm{j}}\right)_{k=2} = f_2(-2 + 2\,\mathrm{j})$.

Pentru $z=-2+2\,\mathrm{j}=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+\mathrm{j}\sin\frac{3\pi}{4}\right)\ (M\in CII)\Rightarrow$

$$f_2(z)=f_2(-2+2\,\mathrm{j})=\sqrt[5]{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{4}+4\pi}{5}+\mathrm{j}\sin\frac{\frac{3\pi}{4}+4\pi}{5}\right)=\sqrt[10]{8}\left(\cos\frac{19\pi}{20}+\mathrm{j}\sin\frac{19\pi}{20}\right).$$

○**Exerciţiul 2**. Se dă "funcţia" multivocă $f:\mathbb{C}\to\mathcal{P}(\mathbb{C}),\ f(z)=\left(\sqrt[2]{z^2+1}\right)_{\mathbb{C}}$.

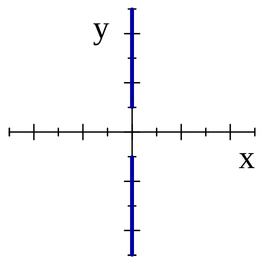
Să se scrie ramurile funcţiei când tăietura este:

a) $T=T_1\cup T_2, T_1=\{z=x+\mathrm{j}\,y\in\mathbb{C}; x=0, y\geq 1\}, T_2=\{z=x+\mathrm{j}\,y\in\mathbb{C}; x=0, y\leq -1\}.$

b) $T_3=\{z=x+\mathrm{j}\,y\in\mathbb{C}; x=0, y\geq -1\}.$

Rezolvare. Se scrie $f(z)=\left(\sqrt[2]{z-\mathrm{j}}\right)_{\mathbb{C}}\cdot\left(\sqrt[2]{z+\mathrm{j}}\right)_{\mathbb{C}}$

a) Se reprezintă tăietura.



Pentru $z\in\mathbb{C}$ a.î. $z-\mathrm{j}\in\mathbb{C}\setminus T_1$ şi $z+\mathrm{j}\in\mathbb{C}\setminus T_2$ se scrie

$z-\mathrm{j}=r_1(\cos t_1^*+\mathrm{j}\sin t_1^*)\in\mathbb{C}$, cu $r_1=|z-\mathrm{j}|, t_1^*=\arg(z-\mathrm{j})$.

$z+\mathrm{j}=r_2(\cos t_2^*+\mathrm{j}\sin t_2^*)\in\mathbb{C}$, cu $r_2=|z+\mathrm{j}|, t_2^*=\arg(z+\mathrm{j})$.

De precizat că

-atunci când $z-\mathrm{j}\in\mathbb{C}\setminus T_1\Rightarrow t_1^*\in\left[-\frac{3\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

-atunci când $z+\mathrm{j}\in\mathbb{C}\setminus T_2\Rightarrow t_2^*\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[$

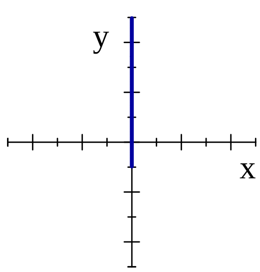
Atunci ramurile uniforme pentru f sunt

$f_k:\mathbb{C}\setminus T\to\mathbb{C}, f_k(z)=$

$$=\sqrt{r_1}\left(\cos\frac{t_1^*+2k_1\pi}{2}+\mathrm{j}\sin\frac{t_1^*+2k_1\pi}{2}\right)\cdot\sqrt{r_2}\left(\cos\frac{t_2^*+2k_2\pi}{2}+\mathrm{j}\sin\frac{t_2^*+2k_2\pi}{2}\right)=$$

$$=\sqrt{r_1\cdot r_2}\left(\cos\frac{(t_1^*+t_2^*)+2(k_1+k_2)\pi}{2}+\mathrm{j}\sin\frac{(t_1^*+t_2^*)+2(k_1+k_2)\pi}{2}\right), k\in\{0,1\}.$$

b) Se reprezintă tăietura.



Pentru $z\in\mathbb{C}$ a.î. $z-\mathrm{j}\in\mathbb{C}\setminus T_3$ şi $z+\mathrm{j}\in\mathbb{C}\setminus T_3$ se scrie

$z-\mathrm{j}=r_1(\cos t_1^*+\mathrm{j}\sin t_1^*)\in\mathbb{C}$, cu $r_1=|z-\mathrm{j}|, t_1^*=\arg(z-\mathrm{j})$.

$z+\mathrm{j}=r_2(\cos t_2^*+\mathrm{j}\sin t_2^*)\in\mathbb{C}$, cu $r_2=|z+\mathrm{j}|, t_2^*=\arg(z+\mathrm{j})$.

De precizat că

-atunci când $z-\mathrm{j}\in\mathbb{C}\setminus T_3\Rightarrow t_1^*\in\left[-\frac{3\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

-atunci când $z+\mathrm{j}\in\mathbb{C}\setminus T_3 \Rightarrow t_2^*\in\left[-\frac{3\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.
Atunci ramurile uniforme pentru f sunt

$f_k:\mathbb{C}\setminus T\to\mathbb{C}, f_k(z)=$

$$=\sqrt{r_1}\left(\cos\frac{t_1^*+2k_1\pi}{2}+\mathrm{j}\sin\frac{t_1^*+2k_1\pi}{2}\right)\cdot\sqrt{r_2}\left(\cos\frac{t_2^*+2k_2\pi}{2}+\mathrm{j}\sin\frac{t_2^*+2k_2\pi}{2}\right)=$$

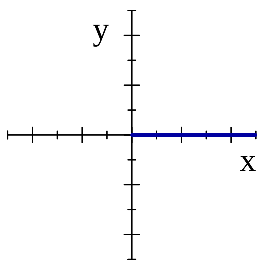
$$=\sqrt{r_1\cdot r_2}\left(\cos\frac{(t_1^*+t_2^*)+2(k_1+k_2)\pi}{2}+\mathrm{j}\sin\frac{(t_1^*+t_2^*)+2(k_1+k_2)\pi}{2}\right), k\in\{0,1\}.$$

$\bigcirc$**Exercițiul 3**. Se dă "funcția" multivocă $f:\mathbb{C}\to\mathcal{P}(\mathbb{C})$, $f(z)=\dfrac{z^4+3}{(z^2+1)\left(\sqrt[3]{z}\right)_{\mathbb{C}}}$.

a) Să se scrie ramurile funcției când tăietura este $T=Ox_+=\{z=x+\mathrm{j}\,y\in\mathbb{C}; y=0, x\geq 0\}$.
b) Să se determine ramura pentru care $f_k(-1)=-2$;
c) Pe ramura determinată la b), să se calculeze $f(2\mathrm{j}), f(-2\mathrm{j})$.

Rezolvare. Se scrie $f(z)=\dfrac{z^4+3}{(z^2+1)\left(\sqrt[3]{z-0}\right)_{\mathbb{C}}}$;

a) Se reprezintă tăietura



$T=Ox_+=\{z=x+\mathrm{j}\,y\in\mathbb{C}; y=0, x\geq 0\}\Rightarrow$se alege $t^*\in[0,2\pi[$

Multifuncția radical de ordin 3 din $z-0$,

$g:\mathbb{C}\to\mathcal{P}(\mathbb{C})$, $g(z)=\left(\sqrt[3]{z-0}\right)_{\mathbb{C}}$

este o funcție multivocă cu exact 3 ramuri, în ipoteza că se alege tăietura T, date de

$$g_k:\mathbb{C}\setminus T\to\mathbb{C}, g_k(z)=\sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{t^*+2k\pi}{3}+\mathrm{j}\sin\frac{t^*+2k\pi}{3}\right), k\in\{0,1,2\},$$

unde $z=r(\cos t^*+\mathrm{j}\sin t^*)\in\mathbb{C}\setminus T$, cu $r=|z|, t^*=\arg z$.

Atunci f este o funcție multivocă cu 3 ramuri

$f_k:\mathbb{C}\setminus(T\cup\{0,-\mathrm{j},\mathrm{j}\})\to\mathbb{C}$,

$$f_k(z)=\frac{z^4+3}{(z^2+1)\sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{t^*+2k\pi}{3}+\mathrm{j}\sin\frac{t^*+2k\pi}{3}\right)}, k\in\{0,1,2\}$$

unde $z=r(\cos t^*+\mathrm{j}\sin t^*)\in\mathbb{C}\setminus(T\cup\{0,-\mathrm{j},\mathrm{j}\})$, cu $r=|z|, t^*=\arg z$.

Se alege acea ramură (se alege acel k) pentru care $f_k(-1)=-2$.

$$\left.\begin{array}{l}
f_k(-1)=f_k\left(\underbrace{1(\cos\pi+\mathrm{j}\sin\pi)}_{=-1}\right)= \\
\quad=\dfrac{(-1)^4+3}{\left((-1)^2+1\right)\sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{3}+\mathrm{j}\sin\frac{\pi+2k\pi}{3}\right)}= \\
\quad=2\left(\cos\left(-\frac{\pi+2k\pi}{3}\right)+\mathrm{j}\sin\left(-\frac{\pi+2k\pi}{3}\right)\right), k\in\{0,1,2\} \\
-2=2(\cos\pi+\mathrm{j}\sin\pi)
\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow$se alege acel $k \in \{0,1,2\}$ a.î.

$-\dfrac{\pi+2k\pi}{3} = \pi + 2p\pi, p \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow -1-2k = 3+6p, p \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow k = -2-3p, p \in \mathbb{Z}$

$k = 0 \Rightarrow 2 = -3p-$ contradicţie cu $p \in \mathbb{Z}$

$k = 1 \Rightarrow 3 = -3p \Rightarrow p = -1 \in \mathbb{Z}$

$k = 2 \Rightarrow 4 = -3p-$ contradicţie cu $p \in \mathbb{Z}$

Deci $k = 1$. Deci ramura pentru care $f_k(-1) = -2$ este

$$f_1 : \mathbb{C} \setminus (T \cup \{0,-\mathrm{j},\mathrm{j}\}) \to \mathbb{C}, f_1(z) = \frac{z^4+3}{(z^2+1)\sqrt[3]{r}\left(\cos\dfrac{t^*+2\pi}{3} + \mathrm{j}\sin\dfrac{t^*+2\pi}{3}\right)},$$

unde $z = r(\cos t^* + \mathrm{j}\sin t^*) \in \mathbb{C} \setminus (T \cup \{0,-\mathrm{j},\mathrm{j}\})$, cu $t^* = \arg z, r = |z|$.

c) Pentru

$\bullet z = 2\mathrm{j} = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{j}\sin\frac{\pi}{2}\right) (M \in Oy_+) \Rightarrow$

$$f_1(z) = f_1(2\mathrm{j}) = \frac{(2\mathrm{j})^4+3}{\left((2\mathrm{j})^2+1\right)\sqrt[3]{2}\left(\cos\dfrac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3} + \mathrm{j}\sin\dfrac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3}\right)} =$$

$$= \frac{16+3}{(-4+1)\sqrt[3]{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{6} + \mathrm{j}\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)} = \frac{19}{-3\sqrt[3]{2}}\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + \mathrm{j}\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right) =$$

$$= \frac{19}{3\sqrt[3]{2}}(\cos\pi + \mathrm{j}\sin\pi)\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + \mathrm{j}\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)$$

$$= \frac{19}{3\sqrt[3]{2}}\left(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{j}\sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{19}{3\sqrt[3]{2}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{j}\,\frac{1}{2}\right).$$

$\bullet z = -2\mathrm{j} = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + \mathrm{j}\sin\frac{3\pi}{2}\right) (M \in Oy_-) \Rightarrow$

$$f_1(z) = f_1(-2\mathrm{j}) = \frac{(-2\mathrm{j})^4+3}{\left((-2\mathrm{j})^2+1\right)\sqrt[3]{2}\left(\cos\dfrac{\frac{3\pi}{2}+2\pi}{3} + \mathrm{j}\sin\dfrac{\frac{3\pi}{2}+2\pi}{3}\right)} =$$

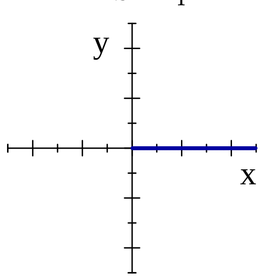
$$= \frac{16+3}{(-4+1)\sqrt[3]{2}\left(\cos\dfrac{7\pi}{6} + \mathrm{j}\sin\dfrac{7\pi}{6}\right)} = \frac{19}{-3\sqrt[3]{2}}\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right) + \mathrm{j}\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right)\right) =$$

$$= \frac{19}{3\sqrt[3]{2}}(\cos\pi + \mathrm{j}\sin\pi)\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right) + \mathrm{j}\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right)\right) = \frac{19}{3\sqrt[3]{2}}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \mathrm{j}\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) =$$

$$= \frac{19}{3\sqrt[3]{2}}\left(\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) + \mathrm{j}\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)\right).$$

Exerciţiul 4. Să se calculeze $(\mathrm{Log}(1+\mathrm{j}))_{\mathbb{C}}$, luând pentru multifuncţia $f(z) = (\mathrm{Log}\, z)_{\mathbb{C}}$ ramura care satisface $f_k(-3) = \ln 3 + 7\pi\,\mathrm{j}$ şi tăietura $T = Ox_+$.

Rezolvare. Se reprezintă tăietura



$T = Ox_+ = \{z = x + \mathrm{j}\, y \in \mathbb{C}; y = 0, x \geq 0\}$ $\Rightarrow$se alege $t^* \in [0, 2\pi[$.

Multifuncţia logaritm în planul complex,

$f : \mathbb{C} \to \mathcal{P}(\mathbb{C}),\ f(z) = (\mathrm{Log}\, z)_{\mathbb{C}}$

este o funcţie multivocă cu $k \in \mathbb{Z}$ ramuri, iar în ipoteza că se alege tăietura $T = Ox_+$ şi $t^* \in [0, 2\pi[$), aceste ramuri sunt date de

$f_k : \mathbb{C} \setminus T \to \mathbb{C}, f_k(z) = \ln|z| + \mathrm{j}(t^* + 2k\pi); k \in \mathbb{Z}$,

unde $z = r(\cos t^* + \mathrm{j} \sin t^*) \in \mathbb{C}$, cu $r = |z|, t^* = \arg z$.

<u>etapa 1.</u> Se determină acea ramură (acel $k \in \mathbb{Z}$) pentru care $f_k(-3) = \ln 3 + 7\pi\,\mathrm{j}$.

$$\left.\begin{array}{l} f_k(-3) = f_k\left(\underbrace{3(\cos\pi + \mathrm{j}\sin\pi)}_{=-3}\right) = \ln 3 + \mathrm{j}(\pi + 2k\pi); k \in \mathbb{Z} \\ f_k(-3) = \ln 3 + 7\pi\,\mathrm{j} \end{array}\right\}$$

$$\overset{f_k(-3)=\ln 3+7\pi\,\mathrm{j}}{\Rightarrow} \begin{cases} \ln 3 = \ln 3 \\ \pi + 2k\pi = 7\pi. \end{cases}$$

$\Rightarrow$se alege acel $k \in \mathbb{Z}$ a.î. $\pi + 2k\pi = 7\pi \Leftrightarrow 1 + 2k = 5 + 10p \Rightarrow k = 3$.

Deci $k = 3 \Rightarrow$

$f_3 : \mathbb{C} \setminus T \to \mathbb{C}, f_3(z) = \ln|z| + \mathrm{j}(t^* + 6\pi)$

<u>etapa 2.</u> Se determină $(\mathrm{Log}(1 + \mathrm{j}))_{k=3} = f_3(1 + \mathrm{j})$.

Pentru $z = 1 + \mathrm{j} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{j}\sin\frac{\pi}{4}\right)$ $(M \in CI)\Rightarrow$

$f_3(z) = f_3(1 + \mathrm{j}) = \ln\sqrt{2} + \mathrm{j}\left(\frac{\pi}{4} + 6\pi\right)$.

○**Exerciţiul 5**. Se consideră "funcţia" multivocă

$f : \mathbb{C}^* \to \mathcal{P}(\mathbb{C}),\ f(z) = \dfrac{1}{z}(\mathrm{Log}\, z)_{\mathbb{C}}$.

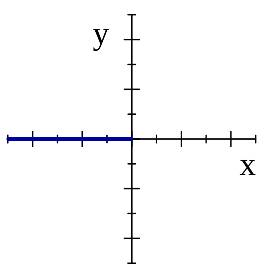
a) Să se dea un procedeu de uniformizare folosind tăietura

$T = Ox_- = \{z = x + \mathrm{j}\, y \in \mathbb{C}; x \leq 0, y = 0\}$.

b) Să se determine ramura care ia valori reale pentru $z = x > 0$.

Rezolvare. a) Fie $z = r(\cos t^* + \mathrm{j}\sin t^*) = re^{\mathrm{j}\, t^*} \in \mathbb{C}$, cu $r = |z|, t^* = \arg z$.

În calculul lui $f_k(z)$, t^* se alege într-un interval de lungime 2π de forma $[\alpha, \alpha + 2\pi[$, măsurat în sens direct şi fără a trece peste tăietură.



$T = Ox_- = \{z = x + \mathrm{j}\, y \in \mathbb{C}; x \leq 0, y = 0\}$ $\Rightarrow$se alege $t^* \in [-\pi, \pi[$.

Multifuncţia logaritm în planul complex,

$g : \mathbb{C} \to \mathcal{P}(\mathbb{C}),\ f(z) = (\mathrm{Log}\, z)_{\mathbb{C}}$

este o funcţie multivocă cu $k \in \mathbb{Z}$ ramuri date, în ipoteza că se alege tăietura T, de

$g_k : \mathbb{C} \setminus T \to \mathbb{C}, f_k(z) = \ln r + \mathrm{j}(t^* + 2k\pi); k \in \mathbb{Z}$,

unde $z = r(\cos t^* + \mathrm{j}\sin t^*) \in \mathbb{C}$, cu $r = |z|, t^* = \arg z$.

Atunci ramurile "funcţiei" f sunt

$f_k : \mathbb{C}^* \setminus T \to \mathbb{C}, f_k(z) = \dfrac{1}{z}(\ln r + \mathrm{j}(t^* + 2k\pi)); k \in \mathbb{Z}$.

b) Se determină acea ramură (acel k) pentru care
$f_k(z) \in \mathbb{R}$ pentru $z = x > 0$.

$$\left.\begin{array}{l} f_k(x + 0 \cdot \mathrm{j}) = f_k\left(\underbrace{x(\cos 0 + \mathrm{j}\sin 0)}_{=x}\right) = \dfrac{1}{x}\left(\ln x + \mathrm{j}\left(0 + 2k\pi\right)\right); k \in \mathbb{Z} \\ f_k(x) \in \mathbb{R} \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow$se alege acel $k \in \mathbb{Z}$ a.î. $0 + 2k\pi = 0 \Leftrightarrow k = 0$.
Deci ramura pentru care $f_k(z) \in \mathbb{R}$ pentru $z = x > 0$ este
$f_0 : \mathbb{C}^* \setminus T \to \mathbb{C}, f_0(z) = \ln r + \mathrm{j}\, t^*$.

Exerciţiul 6. Să se calculeze

$$E = \mathrm{sh}(2\mathrm{j}) + \cos(1 - \mathrm{j}) + \mathrm{tg}(1 - 2\mathrm{j}) + \left(\mathrm{Log}\,\frac{1 - \mathrm{j}}{\sqrt{3} + \mathrm{j}}\right)_{k=0} + \left(\left(1 + \mathrm{j}\sqrt{3}\right)^{\mathrm{j}}\right)_{k=0} + e^{\left(\sqrt{\mathrm{j}}\right)_{k=0}}$$

unde, pentru funcţiile multivoce, se consideră ramura principală, $k = 0$, şi tăietura $T = Ox_+$.
Rezolvare. Se calculează separat:

$\bullet\ \mathrm{sh}(2\mathrm{j}) = \dfrac{e^{2\mathrm{j}} - e^{-2\mathrm{j}}}{2} = \dfrac{1}{2}\left(\left(\cos 2 + \mathrm{j}\sin 2\right) - \left(\cos(-2) + \mathrm{j}\sin(-2)\right)\right) = \mathrm{j}\sin 2$

sau, direct, $\mathrm{sh}(2\mathrm{j}) = \mathrm{j}\sin 2$;

$\bullet\ \cos(1 - \mathrm{j}) = \dfrac{e^{\mathrm{j}(1-\mathrm{j})} + e^{-\mathrm{j}(1-\mathrm{j})}}{2} = \dfrac{e^{1+\mathrm{j}} + e^{-1-\mathrm{j}}}{2} =$

$= \dfrac{1}{2}\left(e\left(\cos 1 + \mathrm{j}\sin 1\right) + e^{-1}\left(\cos(-1) + \mathrm{j}\sin(-1)\right)\right) =$

$= (\cos 1)\dfrac{e + e^{-1}}{2} + \mathrm{j}(\sin 1)\dfrac{e - e^{-1}}{2} = \cos 1\,\mathrm{ch}\,1 + \mathrm{j}\sin 1\,\mathrm{sh}\,1$

sau, direct, $\cos(1 - \mathrm{j}) = \cos 1\cos\mathrm{j} + \sin 1\sin\mathrm{j} = \cos 1\,\mathrm{ch}\,1 + \mathrm{j}\sin 1\,\mathrm{sh}\,1$;

$\bullet\ \mathrm{tg}(1 - 2\mathrm{j}) = \dfrac{\sin(1 - 2\mathrm{j})}{\cos(1 - 2\mathrm{j})} = \dfrac{\sin 1\cos(-2\mathrm{j}) + \cos 1\sin(-2\mathrm{j})}{\cos 1\cos(-2\mathrm{j}) - \sin 1\sin(-2\mathrm{j})} = \dfrac{\sin 1\,\mathrm{ch}\,2 - \cos 1\,\mathrm{sh}\,2}{\cos 1\,\mathrm{ch}\,2 + \sin 1\,\mathrm{sh}\,2}$;

$\bullet\bullet$Se alege tăietura $T = Ox_+ = \{z = x + \mathrm{j}\,y \in \mathbb{C}; x \geq 0, y = 0\}$ şi atunci $t^* \in [0, 2\pi[\ \Rightarrow$

$\bullet$ Deoarece$\dfrac{1 - \mathrm{j}}{\sqrt{3} + \mathrm{j}} = \dfrac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + \mathrm{j}\cos\frac{7\pi}{4}\right)}{2\left(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{j}\sin\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) + \mathrm{j}\sin\left(\frac{7\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)\right) =$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12} + \mathrm{j}\sin\frac{19\pi}{12}\right) \Rightarrow$

$\left(\mathrm{Log}\,\dfrac{1 - \mathrm{j}}{\sqrt{3} + \mathrm{j}}\right)_{k=0} = \ln\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{j}\left(\frac{19\pi}{12} + 2 \cdot 0 \cdot \pi\right)$

$\bullet$ Deoarece $1 + \mathrm{j}\sqrt{3} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{j}\sin\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow$

$\left(\left(1 + \mathrm{j}\sqrt{3}\right)^{\mathrm{j}}\right)_{k=0} = e^{\mathrm{j}\left(\mathrm{Log}\left(1 + \mathrm{j}\sqrt{3}\right)\right)_{k=0}} = e^{\mathrm{j}\left(\ln\frac{1}{2} + \mathrm{j}\left(\frac{\pi}{3} + 2 \cdot 0 \cdot \pi\right)\right)} = e^{-\frac{\pi}{3} + \mathrm{j}\ln 2} = e^{-\frac{\pi}{3}}\left(\cos(\ln 2) + \mathrm{j}\sin(\ln 2)\right)$

$\bullet$ Deoarece $\mathrm{j} = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{j}\sin\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$

$\left(\sqrt{\mathrm{j}}\right)_{k=0} = \sqrt{1}\left(\cos\dfrac{\frac{\pi}{2} + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{2} + \mathrm{j}\sin\dfrac{\frac{\pi}{2} + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{j}\sin\frac{\pi}{4}$.

$e^{\left(\sqrt{\mathrm{j}}\right)_{k=0}} = e^{\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{j}\frac{\sqrt{2}}{2}} = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\cos\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{j}\sin\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Atunci

$$E = \mathrm{j}\sin 2 + \cos 1\,\mathrm{sh}\,1 + \mathrm{j}\sin 1\,\mathrm{ch}\,1 + \frac{\sin 1\,\mathrm{ch}\,2 - \cos 1\,\mathrm{sh}\,2}{\cos 1\,\mathrm{ch}\,2 + \sin 1\,\mathrm{sh}\,2} +$$
$$+ \ln\tfrac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{j}\,\tfrac{19\pi}{12} + e^{-\frac{\pi}{3}}\left(\cos(\ln 2) + \mathrm{j}\sin(\ln 2)\right) + e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\cos\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{j}\sin\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Exerciţiul 8. Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuaţia $\mathrm{th}\, z = 2$.
Rezolvare. Se caută $z \in \mathbb{C}$ a.î.

$$\begin{cases} \dfrac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} = 2 \\ z \neq \left(\pm\frac{\pi}{2} + 2\widetilde{k}\pi\right)\mathrm{j}, \widetilde{k} \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = 2 \\ z \neq \left(\pm\frac{\pi}{2} + 2\widetilde{k}\pi\right)\mathrm{j}, \widetilde{k} \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^z + 3e^{-z} = 0 \\ z \neq \left(\pm\frac{\pi}{2} + 2\widetilde{k}\pi\right)\mathrm{j}, \widetilde{k} \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^{2z} = -3 \\ z \neq \left(\pm\frac{\pi}{2} + 2\widetilde{k}\pi\right)\mathrm{j}, \widetilde{k} \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2z \in (\operatorname{Log}(-3))_{\mathbb{C}} \\ z \neq \left(\pm\frac{\pi}{2} + 2\widetilde{k}\pi\right)\mathrm{j}, \widetilde{k} \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

În calculul lui $(\operatorname{Log} z)_{\mathbb{C}}$, t^* se alege într-un interval de lungime 2π de forma $[\alpha, \alpha + 2\pi[$, măsurat în sens direct şi fără a trece peste tăietură. Se alege tăietura

$T = Ox_+ = \{z = x + \mathrm{j}\, y \in \mathbb{C}; x \geq 0, y = 0\}$,

şi atunci $t^* \in [0, 2\pi[\Rightarrow -3 = 3(\cos\pi + \mathrm{j}\sin\pi)$.

Atunci soluţiile ecuaţiei sunt

$$\begin{cases} z \in \frac{1}{2}(\operatorname{Log}(-3))_{\mathbb{C}} = \left\{\frac{1}{2}(\ln 3 + \mathrm{j}(\pi + 2k\pi)), k \in \mathbb{Z}\right\} \\ z \neq \left(\pm\frac{\pi}{2} + 2\widetilde{k}\pi\right)\mathrm{j}, \widetilde{k} \in \mathbb{Z} \end{cases}$$