SEMINAR NR. 7, REZOLVĂRI
Matematici Speciale, AIA

3.5. Integrala curbilinie dintr-o funcţie complexă de o variabilă complexă
Definiţie, formulă de calcul
Teoremele fundamentale Cauchy pe domenii simplu / multiplu conexe
Formulele integrale Cauchy pe domenii simplu / multiplu conexe

Observaţie. Definiţia integralei în $\mathbb{C}$, proprietăţile corespunzătoare şi teorema de reducere la integrale Riemann- A se vedea Curs.

Teorema 2.(**Teorema fundamentală Cauchy pe domenii simplu conexe**) Fie γ o curbă în $\mathbb{C}$. Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu cu $\operatorname{Im}\gamma \subset D$ şi funcţia $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Dacă

-D este domeniu simplu conex;

-γ este curbă netedă (sau netedă pe porţiuni) şi închisă;

-f este funcţie olomorfă pe D $(f \in \mathcal{H}(D))$, cu f' continuă $\left(f' \in \mathcal{C}^0(D)\right)$

atunci $\boxed{\int_\gamma f(z)\,dz = 0.}$ Reciproc-nu.

Corolar 1. Fie $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{C}$ şi $\gamma_2 : [c,d] \to \mathbb{C}$ două curbe parametrizate în $\mathbb{C}$. Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu cu $\operatorname{Im}\gamma_1 \subset D, \operatorname{Im}\gamma_2 \subset D$ şi funcţia $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Dacă

-D este domeniu simplu conex;

-γ_1, γ_2 sunt curbe netede (sau netede pe porţiuni),

cu aceleaşi extremităţi în sensul că $\operatorname{Im}\gamma_1 = \overset{\frown}{ALB}$ şi $\operatorname{Im}\gamma_2 = \overset{\frown}{AL'B}$;

-f este funcţie olomorfă pe D $(f \in \mathcal{H}(D))$, cu f' continuă $\left(f' \in \mathcal{C}^0(D)\right)$

atunci $\boxed{\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz}$ (integrala de la A la B nu depinde de drumul/curba γ alese astfel încât $\operatorname{Im}\gamma$ să unească A cu B, ci numai de extremităţi; se mai notează $\int_A^B f(z)\,dz$; considerând afixele punctelor A, B se notează $\int_{z_A}^{z_B} f(z)\,dz$).

Teorema 3.(**Teorema fundamentală Cauchy pe domenii multiplu conexe**) Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu multiplu conex cu ordinul de conexitate $p+1$ şi $\Delta \subset D$ un domeniu multiplu conex de acelaşi ordin de conexitate, mărginit de curba γ_0-exterioară şi $\gamma_1, ..., \gamma_p-$interioare. Fie $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ a.î. $f \in \mathcal{H}(D)$ şi $f' \in \mathcal{C}(D)$. Atunci

$$\boxed{\int_{\gamma_0} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + ... + \int_{\gamma_p} f(z)\,dz.}$$

Teorema 4.(**Formula integrală Cauchy pe domenii simplu conexe**) Fie γ o curbă în $\mathbb{C}$. Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu cu $\operatorname{Im}\gamma \subset D$ şi funcţia $g : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Dacă

-D este domeniu simplu conex;

-γ este curbă simplă şi închisă care delimitează un domeniu mărginit Δ;

-g este funcţie olomorfă pe D $(g \in \mathcal{H}(D))$

atunci, $\boxed{\forall a \in \Delta, g(a) = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{j}}\int_\gamma \frac{g(z)}{z-a}dz.}$

Observaţia 3. În ipotezele din Curs,

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathcal{I}(a) = \displaystyle\int_\gamma \frac{g(z)}{z-a}dz = \\ \quad \begin{cases} 2\pi\,\mathrm{j}\cdot g(a), & \text{dacă } a \in \Delta \text{(formula integrală Cauchy)} \\ (\pi-\delta)\,\mathrm{j}\cdot g(a), & \text{dacă } a \in \gamma \text{(valoarea principală)} \\ 0, & \text{dacă } a \notin \Delta \cup \gamma \text{(teorema fundamentală Cauchy)} \end{cases} \end{array}}$$

unde $\pi-\delta$ este unghiul format de cele două semitangente în $a\in\gamma$ la curba γ (dacă a este punct regulat, atunci $\pi-\delta=\pi$).

Teorema 6.(**Formula integrală Cauchy pe domenii multiplu conexe**) ÎFie $D\subseteq\mathbb{C}$ un domeniu multiplu conex cu ordinul de conexitate $p+1$ şi $\Delta\subset D$ un domeniu multiplu conex de acelaşi ordin de conexitate, mărginit de curba γ_0-exterioară şi $\gamma_1,...,\gamma_p-$interioare. Fie $g:D\subseteq\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ a.î. $g\in\mathcal{H}(D)$. Atunci

$$\boxed{\forall a\in\Delta, g(a)=\frac{1}{2\pi\,\mathrm{j}}\left(\int_{\gamma_0}\frac{g(z)}{z-a}dz-\left(\int_{\gamma_1}\frac{g(z)}{z-a}dz+...+\int_{\gamma_p}\frac{g(z)}{z-a}dz\right)\right).}$$

Teorema 7. (**derivata de ordin n a unei funcţii olomorfe**) O funcţie $g:D\subseteq\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ olomorfă pe domeniul D admite derivate de orice ordin. Mai mult, derivata de ordin $n\in\mathbb{N}^*$ se poate scrie

$$\boxed{g^{(n)}(a)=\frac{n!}{2\pi\,\mathrm{j}}\int_\gamma\frac{g(z)}{(z-a)^{n+1}}dz, \forall a\in\operatorname{Int}\gamma,}$$

unde γ este o curbă simplă, închisă, netedă, inclusă în D, ce "înconjoară" (are în interior) punctul a.

Exerciţiul 1. Să se calculeze

$\int_\gamma\left(x^2+\mathrm{j}\,y\right)dz$, între punctele 0 şi $1+\mathrm{j}$, de-a lungul curbelor γ date prin:

a) $y=x$; **b)** $y=x^2$; **c)** $y=x^3$.

Rezolvare. A se vedea Curs.

Exerciţiul 2. Să se calculeze

$\int_\gamma z^2dz$, între punctele 0 şi $1+\mathrm{j}$, de-a lungul curbelor γ date prin:

a) $y=x$; **b)** $y=x^2$; **c)** $y=x^3$.

Rezolvare. etapa 1. Aceeaşi cu cea de la exerciţiul 1.

etapa 2. Se studiază integrantul, $f:D\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $f(z)=\underbrace{\left(x^2-y^2\right)}_{u(x,y)}+\mathrm{j}\cdot\underbrace{2xy}_{v(x,y)}$.

$D=\mathbb{C}$ este domeniu; $\operatorname{Im}\gamma_{1,2,3}\subset D$;

f este continuă pe D ($\Leftrightarrow u,v$ sunt continue pe D).

etapa 3. Calcul.

$\bullet\mathcal{I}_1=\int_{\gamma_1}z^2dz=\int_{\gamma_1}\left(\left(x^2-y^2\right)+\mathrm{j}\cdot 2xy\right)dz.$

modul 1. $\mathcal{I}_1\overset{\text{formal}}{=}\int_{\gamma_1}\left(\left(x^2-y^2\right)+\mathrm{j}\,(2xy)\right)(dx+\mathrm{j}\,dy)\overset{\text{def.}}{=}$

$=\int_{\gamma_1}\left(\left(x^2-y^2\right)dx-(2xy)\,dy\right)+\mathrm{j}\int_{\gamma_1}\left((2xy)\,dx+\left(x^2-y^2\right)dy\right).$

$\operatorname{Im}\gamma_1:\begin{cases}x(t)=t\\ y(t)=t\end{cases}, t\in[0,1]\Rightarrow\begin{cases}dx(t)=1dt\\ dy(t)=1dt\end{cases}, t\in[0,1].$

$\mathcal{I}_1=\int_0^1\left(t^2-t^2-2t^2\right)dt+\mathrm{j}\int_0^1\left(2t^2+t^2-t^2\right)dt=-2\cdot\left.\frac{t^3}{3}\right|_{t=0}^{t=1}+\mathrm{j}\cdot 2\cdot\left.\frac{t^3}{3}\right|_{t=0}^{t=1}=\frac{-2}{3}+\mathrm{j}\,\frac{2}{3}.$

modul 1′. $\mathcal{I}_1=\int_{\gamma_1}z^2dz\overset{z=\gamma_1\text{ de pe curbă}}{=}\int_0^1(\gamma_1(t))^2\gamma_1'(t)\,dt=\int_0^1(t+\mathrm{j}\,t)^2(1+\mathrm{j}\cdot 1)\,dt=$

$=(1+\mathrm{j})^3\int_0^1t^2dt=(1+\mathrm{j})^3\left.\frac{t^3}{3}\right|_{t=0}^{t=1}=\frac{-2}{3}+\mathrm{j}\,\frac{2}{3}.$

$\bullet\mathcal{I}_2=\int_{\gamma_2}z^2dz=\int_{\gamma_1}\left(\left(x^2-y^2\right)+\mathrm{j}\cdot 2xy\right)dz.$

modul 1′. $\mathcal{I}_2=\int_{\gamma_1}z^2dz\overset{z=\gamma_2\text{ de pe curbă}}{=}\int_0^1(\gamma_2(t))^2\gamma_2'(t)\,dt=\int_0^1\left(t+\mathrm{j}\,t^2\right)^2(1+\mathrm{j}\cdot 1)\,dt=$

$=\int_0^1\left(\left(t^2-t^4\right)\cdot 1-2t^3\cdot 2t\right)dt+\mathrm{j}\int_0^1\left(2t^3\cdot 1+\left(t^2-t^4\right)\cdot 2t\right)dt=$

$$= \left(\frac{t^3}{3} - 5\frac{t^5}{5}\right)\Big|_{t=0}^{t=1} + \mathrm{j}\left(4\frac{t^4}{4} - 2\frac{t^6}{6}\right)\Big|_{t=0}^{t=1} = \frac{-2}{3} + \mathrm{j}\cdot\frac{2}{3}.$$

$\bullet \mathcal{I}_3 = \int_{\gamma_3} z^2 dz \overset{\text{analog cu } I_1}{=} \frac{-2}{3} + \mathrm{j}\cdot\frac{2}{3}.$

Comentariu. Prin calcul, se observă că $\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_2 = \mathcal{I}_3$.

Cele trei curbe au aceleaşi extremităţi $O\,(0 + \mathrm{j}\cdot 0)$ şi $A\,(1 + \mathrm{j}\cdot 1)$ şi acelaşi sens de parcurgere, de la O la A. Se observă că f este olomorfă pe $D = \mathbb{C}$, ca funcţie elementară sau deoarece verifică Teorema Cauchy-Riemann pe D. Atunci se poate aplica Corolarul 1.

modul 2. Conform Corolarului 1, se calculează doar $\mathcal{I}_1$ cu modul 1 sau modul $1'$ şi apoi

$\mathcal{I}_2 \underset{\text{indep. de drum}}{\overset{f \text{ olomorfă}}{=}} \mathcal{I}_1; \mathcal{I}_3 \underset{\text{indep. de drum}}{\overset{f \text{ olomorfă}}{=}} \mathcal{I}_1.$

modul 3. Deoarece f este olomorfă pe D, conform Corolarului 1 $\Rightarrow$

$$\mathcal{I} \underset{\text{indep. de drum}}{=} \int_{\gamma_{1,2,3}} z^2 dz \overset{\text{not.}}{=} \int_0^{1+\mathrm{j}} z^2 dz \underset{\text{adm. prim}}{=} \frac{z^3}{3}\Big|_{z=0}^{z=1+\mathrm{j}} = \frac{(1+\mathrm{j})^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{-2}{3} + \mathrm{j}\cdot\frac{2}{3},$$

independent de curba ce uneşte 0 cu $1 + \mathrm{j}$.

Exerciţiul 3. Să se calculeze

$\int_\gamma e^z dz$, între punctele 0 şi $1 + \mathrm{j}$, de-a lungul curbelor γ date prin:

a) $y = x$; **b)** $y = x^2$; **c)** $y = x^3$.

Rezolvare. etapa 1. Aceeaşi cu cea de la exerciţiul 1.

etapa 2. Se studiază integrantul, $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \underbrace{e^x \cos y}_{u(x,y)} + \mathrm{j}\cdot\underbrace{e^x \sin y}_{v(x,y)}$.

$D = \mathbb{C}$ este domeniu; $\mathrm{Im}\,\gamma_{1,2,3} \subset D$;

f este continuă pe D ($\Leftrightarrow u, v$ sunt continue pe D).

etapa 3. Calcul.

$\bullet \mathcal{I}_1 = \int_{\gamma_1} e^z dz = \int_{\gamma_1} (e^x \cos y + \mathrm{j}\cdot e^x \sin y)\, dz.$

modul 1. $\mathcal{I}_1 \overset{\text{formal}}{=} \int_{\gamma_1} (e^x \cos y + \mathrm{j}\cdot e^x \sin y)(dx + \mathrm{j}\, dy) \overset{\text{def.}}{=}$

$= \int_{\gamma_1} (e^x \cos y dx - e^x \sin y dy) + \mathrm{j}\int_{\gamma_1} (e^x \sin y dx + e^x \cos y dy).$

$\mathrm{Im}\gamma_1 : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t \end{cases}, t \in [0,1] \Rightarrow \begin{cases} dx(t) = 1dt \\ dy(t) = 1dt \end{cases}, t \in [0,1].$

$\mathcal{I}_1 = \int_0^1 \left(e^t \cos t - e^t \sin t\right) dt + \mathrm{j}\int_0^1 \left(e^t \sin t + e^t \cos t\right) dt =$

$= \left(\frac{1}{2}e^t(\cos t + \sin t) - \frac{1}{2}e^t(-\cos t + \sin t)\right)\Big|_{t=0}^{t=1} + \mathrm{j}\left(\frac{1}{2}e^t(-\cos t + \sin t) + \frac{1}{2}e^t(\cos t + \sin t)\right)\Big|_{t=0}^{t=1} =$

$= e^1 \cos 1 - 1 + \mathrm{j}\cdot e^1 \sin 1.$

modul $1'$. $\mathcal{I}_1 = \int_{\gamma_1} e^z dz \overset{z=\gamma_1 \text{ de pe curbă}}{=} \int_0^1 e^{\gamma_1(t)}\gamma_1'(t)\, dt = \int_0^1 e^{t+\mathrm{j}\cdot t}(1 + \mathrm{j}\cdot 1)\, dt =$

$= (1 + \mathrm{j})\int_0^1 e^t(\cos t + \mathrm{j}\sin t)\, dt =$

$= (1 + \mathrm{j})\left(\frac{1}{2}e^t(\cos t + \sin t) + \mathrm{j}\,\frac{1}{2}e^t(-\cos t + \sin t)\right)\Big|_{t=0}^{t=1} =$

$= ... = e^1 \cos 1 - 1 + \mathrm{j}\, e^1 \sin 1 - 1.$

$\bullet \mathcal{I}_2 = \int_{\gamma_2} e^z dz = \int_{\gamma_2} (e^x \cos y + \mathrm{j}\cdot e^x \sin y)\, dz.$

modul $1, 1'$. $\mathcal{I}_2 \overset{\text{formal}}{=} \int_{\gamma_2} (e^x \cos y + \mathrm{j}\cdot e^x \sin y)(dx + \mathrm{j}\, dy) \overset{\text{def.}}{=}$

$= \int_{\gamma_2} (e^x \cos y dx - e^x \sin y dy) + \mathrm{j}\int_{\gamma_2} (e^x \sin y dx + e^x \cos y dy).$

$\mathrm{Im}\gamma_2 : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \end{cases}, t \in [0,1] \Rightarrow \begin{cases} dx(t) = 1dt \\ dy(t) = 2tdt \end{cases}, t \in [0,1].$

$\mathcal{I}_2 = \int_0^1 \left(e^t \cos t^2 - e^t \sin t^2 \cdot 2t\right) dt + \mathrm{j}\int_0^1 \left(e^t \sin t^2 + e^t \cos t^2 \cdot 2t\right) dt =$

=imposibil de calculat cu metode elementare.

•$\mathcal{I}_3 = \int_{\gamma_3} e^z dz = \int_{\gamma_3} (e^x \cos y + \mathrm{j} \cdot e^x \sin y)\, dz.$

<u>modul 1, 1′.</u> $\mathcal{I}_3 \overset{\text{formal}}{=}$ ... =imposibil de calculat cu metode elementare.

<u>Comentariu.</u> Prin calcul cu modul 1 sau modul 1′ se poate determina doar $\mathcal{I}_1$.

Cele trei curbe au aceleaşi extremităţi $O(0+\mathrm{j}\cdot 0)$ şi $A(1+\mathrm{j}\cdot 1)$ şi acelaşi sens de parcurgere, de la O la A. Se observă că f este olomorfă pe $D=\mathbb{C}$, ca funcţie elementară sau deoarece verifică Teorema Cauchy-Riemann pe D. Atunci se poate aplica Corolarul 1.

<u>modul 2.</u> Conform Corolarului 1, se calculează doar $\mathcal{I}_1$ cu modul 1 sau modul 1′ şi apoi

$\mathcal{I}_2 \underset{\text{indep. de drum}}{\overset{f \text{ olomorfă}}{=}} \mathcal{I}_1; \mathcal{I}_3 \underset{\text{indep. de drum}}{\overset{f \text{ olomorfă}}{=}} \mathcal{I}_1.$

<u>modul 3.</u> Deoarece f este olomorfă pe D, conform Corolarului 1 $\Rightarrow$

$\mathcal{I} \underset{\text{indep. de drum}}{=} \int_{\gamma_{1,2,3}} e^z dz \overset{\text{not.}}{=} \int_0^{1+\mathrm{j}} e^z dz \underset{\text{adm. prim}}{=} e^z\big|_{z=0}^{z=1+\mathrm{j}} = e^{1+\mathrm{j}} - e^0 = e^1(\cos 1 + \mathrm{j}\sin 1) - 1,$

independent de curba ce uneşte 0 cu $1+\mathrm{j}$.

Exerciţiul 4. Să se calculeze

$\mathcal{I}_1 = \int_\gamma dz$ şi $\mathcal{I}_2 = \int_\gamma z dz$, între punctele $x_0 + \mathrm{j}\, y_0$ şi $x_1 + \mathrm{j}\, y_1$, de-a lungul curbei netede γ date prin ecuaţiile parametrice

$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in [0,1]$ pentru care se cunosc $\begin{cases} x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ şi $\begin{cases} x(1) = x_1 \\ y(1) = y_1 \end{cases}$.

Rezolvare. <u>etapa 1.</u> Se studiază curba-

$\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}, \gamma(t) = x(t) + \mathrm{j}\, y(t)$ este cu proprietăţile cerute.

<u>etapa 2.</u> Se studiază integrantul $f_{1,2}$

$f_1 : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f_1(z) = \underbrace{1}_{u(x,y)} + \mathrm{j} \underbrace{0}_{v(x,y)}; f_2 : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f_2(z) = \underbrace{x}_{u(x,y)} + \mathrm{j} \underbrace{y}_{v(x,y)}$

$D = \mathbb{C}$ este domeniu; $\operatorname{Im}\gamma \subset D$;

$f_{1,2}$ este continuă pe D ($\Leftrightarrow u_{1,2}, v_{1,2}$ sunt continue pe D).

<u>etapa 3.</u> Calcul $\mathcal{I}_{1,2} = \int_\gamma f_{1,2}(z)\, dz$.

<u>modul 1′.</u> $\mathcal{I}_1 = \int_\gamma 1 dz = \int_0^1 1 \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_0^1 (x'(t) + \mathrm{j} \cdot y'(t))\, dt =$

$= (x(t) + \mathrm{j}\, y(t))\big|_{t=0}^{t=1} = (x(1) + \mathrm{j}\, y(1)) - (x(0) + \mathrm{j}\, y(0)) = \gamma(1) - \gamma(0).$

$\mathcal{I}_2 = \int_\gamma z dz = \int_0^1 z(t) \cdot z'(t)\, dt = \int_0^1 (x(t) + \mathrm{j} \cdot y(t))(x'(t) + \mathrm{j} \cdot y'(t))\, dt =$

$= \int_0^1 [(x(t)x'(t) - y(t)y'(t)) + \mathrm{j}(x'(t)y(t) + x(t)y'(t))]\, dt =$

$$= \left(\frac{x^2(t)}{2} - \frac{y^2(t)}{2} + \mathrm{j}\, x(t)\, y(t)\right)\Bigg|_{t=0}^{t=1} = \left(\frac{x^2(1)}{2} - \frac{y^2(1)}{2} + \mathrm{j}\, x(1)\, y(1)\right) -$$

$$- \left(\frac{x^2(0)}{2} - \frac{y^2(0)}{2} + \mathrm{j}\, x(0)\, y(0)\right) = \frac{\gamma^2(1)}{2} - \frac{\gamma^2(0)}{2}.$$

<u>modul 3.</u> Se observă că $f_{1,2}$ este olomorfă pe $\mathbb{C}$, deoarece

$f_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f_1(z) = 1; f_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f_2(z) = z$

sunt funcţii polinomiale şi

$\mathcal{I}_1 = \int_\gamma 1 dz = z\big|_{z=x_0+\mathrm{j}\, y_0}^{z=x_1+\mathrm{j}\, y_1} = \gamma(1) - \gamma(0);$

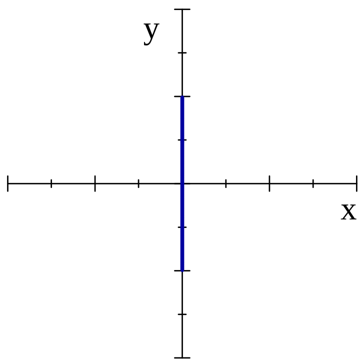
$$\mathcal{I}_2 = \int_\gamma z dz = \frac{z^2}{2}\Bigg|_{z=x_0+\mathrm{j}\, y_0}^{z=x_1+\mathrm{j}\, y_1} = \frac{\gamma^2(1)}{2} - \frac{\gamma^2(0)}{2}.$$

Exerciţiul 5. Să se calculeze

$\int_\gamma \overline{z} dz$, unde γ este

a) segmentul din planul complex $[-\mathrm{j}, \mathrm{j}]$ parcurs de la $-\mathrm{j}$ la j;**b)** $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}, \gamma(t) = e^{\mathrm{j}\, \frac{\pi}{2}(2t-1)}$;

c) cercul cu centru 0 şi rază $r > 0$ parcurs parcurs complet o singură data de la r în sens trigonometric;
d) pătratul de vârfuri $1+\mathrm{j}, -1+\mathrm{j}, -1-\mathrm{j}, 1-\mathrm{j}$ parcurs complet o singură dată de la $1+\mathrm{j}$ în sens trigonometric.
Rezolvare. a) etapa 1. Se studiază curba



•Se parametrizează un reprezentant al curbei, deoarece nu este dată parametric

$$\mathrm{Im}\gamma = \left[\overrightarrow{AB}\right] : \begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = t \end{cases}, t \in [-1,1],\ \gamma : [-1,1] \to \mathbb{C}, \gamma(t) = \underbrace{0}_{x(t)} + \mathrm{j}\underbrace{t}_{y(t)}.$$

$$\bullet\gamma \text{ este curbă netedă:} \begin{cases} \exists\gamma' : [-1,1] \to \mathbb{C}, \gamma'(t) = \underbrace{0}_{x'(t)} + \mathrm{j}\cdot\underbrace{1}_{y'(t)}. \\ \gamma'\text{- este continuă pe } [-1,1] \end{cases}$$

etapa 2. Se studiază integrantul, $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) = \underbrace{x}_{u(x,y)} + \mathrm{j}\underbrace{(-y)}_{v(x,y)}.$

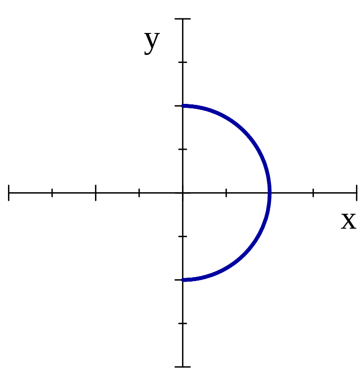
$D = \mathbb{C}$ este domeniu; $\mathrm{Im}\,\gamma \subset D$;
f este continuă pe D ($\Leftrightarrow u, v$ sunt continue pe D).

etapa 3. Calcul.

modul 1′. $\mathcal{I} = \int_\gamma (x - \mathrm{j}\,y)\,dz = \int_{-1}^{1} (x(t) - \mathrm{j}\,y(t))\,\gamma'(t)\,dt =$

$$= \int_{-1}^{1} (0 - \mathrm{j}\cdot t)(0 + \mathrm{j}\cdot 1)\,dt = \left(\frac{t^2}{2}\right)\Big|_{t=-1}^{t=1} = 0.$$

b) etapa 1. Se studiază curba



•Se rescrie parametrizarea:

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}, \gamma(t) = e^{\mathrm{j}\,\frac{\pi}{2}(2t-1)} = \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}(2t-1)\right)}_{x(t)} + \mathrm{j}\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}(2t-1)\right)}_{y(t)}$$

$\text{Im}\gamma = \left[\overset{\frown}{AB}\right] : \begin{cases} x(t) = \cos\left(\frac{\pi}{2}(2t-1)\right) \\ y(t) = \sin\left(\frac{\pi}{2}(2t-1)\right) \end{cases}, t \in [0,1],$

$-$este arcul din cercul $x^2 + y^2 = 1$, cu capetele $A(-\mathrm{j})$ şi $B(\mathrm{j})$ parcurs de la A la B, deoarece

$\gamma(0) = \cos\left(\frac{\pi}{2}(2\cdot 0-1)\right) + \mathrm{j}\sin\left(\frac{\pi}{2}(2\cdot 0-1)\right) = 0 + \mathrm{j}(-1) \leftrightsquigarrow A(-\mathrm{j})$

$\gamma(0) = \cos\left(\frac{\pi}{2}(2\cdot 1-1)\right) + \mathrm{j}\sin\left(\frac{\pi}{2}(2\cdot 1-1)\right) = 0 + \mathrm{j}(1) \leftrightsquigarrow B(\mathrm{j})$

•γ este curbă netedă:

$$\begin{cases} \exists\gamma' : [0,1] \to \mathbb{C}, \gamma'(t) = \underbrace{-\pi\sin\left(\frac{\pi}{2}(2t-1)\right)}_{x'(t)} + \mathrm{j}\cdot\underbrace{\pi\cos\left(\frac{\pi}{2}(2t-1)\right)}_{y'(t)}. \\ \gamma'\text{- este continuă pe } [0,1] \end{cases}$$

etapa 2. Aceeaşi cu de la **a)**.

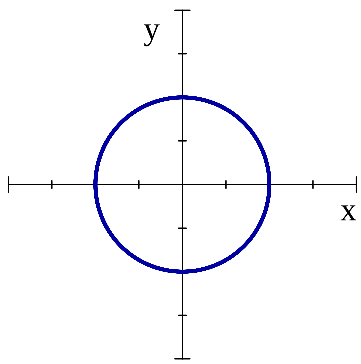
etapa 3. Calcul.

modul 1′. $\mathcal{I} = \int_\gamma (x - \mathrm{j}\,y)\,dz = \int_0^1 (x(t) - \mathrm{j}\,y(t))\,\gamma'(t)\,dt =$

$= \int_0^1 \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}(2t-1)\right) - \mathrm{j}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}(2t-1)\right)\right)\left(-\pi\sin\left(\frac{\pi}{2}(2t-1)\right) + \mathrm{j}\cdot\pi\cos\left(\frac{\pi}{2}(2t-1)\right)\right)dt =$

$= \pi\,\mathrm{j}\int_0^1 \left(\cos^2\left(\frac{\pi}{2}(2t-1)\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2}(2t-1)\right)\right)dt = \pi\,\mathrm{j}\int_0^1 1dt = \pi\,\mathrm{j}\,(t)\big|_{t=0}^{t=1} = \pi\,\mathrm{j}\,.$

c) etapa 1. Se studiază curba



•Se parametrizează un reprezentant al curbei, deoarece nu este dată parametric

$\text{Im}\gamma : \begin{cases} x(t) = 0 + r\cos t \\ y(t) = 0 + r\sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi],\ \gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{C}, \gamma(t) = \underbrace{r\cos t}_{x(t)} + \mathrm{j}\underbrace{r\sin t}_{y(t)} = re^{\mathrm{j}\,t}.$

•γ este curbă netedă: $\begin{cases} \exists\gamma' : [0,2\pi] \to \mathbb{C}, \gamma'(t) = \underbrace{-r\sin t}_{x'(t)} + \mathrm{j}\cdot\underbrace{r\cos t}_{y'(t)} = re^{\mathrm{j}\,t}\,\mathrm{j}\,. \\ \gamma'\text{- este continuă pe } [0,2\pi] \end{cases}$

etapa 2. Aceeaşi ca la **a)**.

etapa 3. Calcul.

modul 1′. $\mathcal{I} = \int_\gamma (x - \mathrm{j}\,y)\,dz = \int_0^{2\pi} (x(t) - \mathrm{j}\,y(t))\,\gamma'(t)\,dt =$

$= \int_0^{2\pi} (r\cos t - \mathrm{j}\cdot r\sin t)(-r\sin t + \mathrm{j}\cdot r\cos t)\,dt = \left(r^2\,\mathrm{j}\right)\cdot t\big|_{t=0}^{t=1} = \left(r^2\,\mathrm{j}\right)2\pi = 2\pi r^2\,\mathrm{j}\,.$

Comentariu: Se observă că $\mathcal{I} \neq 0$, chiar dacă γ este curbă închisă. Se observă că f nu este olomorfă pe $D = \mathbb{C}$, deoarece nu se verifică relaţiile Cauchy-Riemann

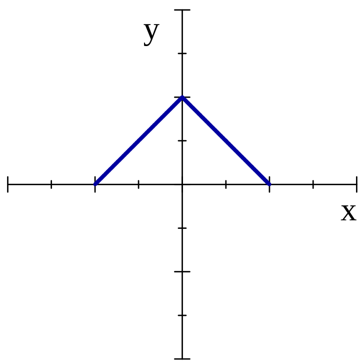
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = -1 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \text{fals, } \forall (x,y).$$

Deci nu se poate aplica Teorema fundamentală Cauchy pe domenii simplu conexe.

d) A se vedea Curs.

Exercişiul 6. Să se calculeze $\int_\gamma \overline{z}dz$, unde γ este pătratul de colţuri $2, -2\,\mathrm{j}, -2, 2\,\mathrm{j}$.

Exerciţiul 7. Să se calculeze $\int_\gamma xdz$, unde γ este:
a) reuniunea de segmente din planul complex $[-1, \mathrm{j}] \cup [\mathrm{j}, 1]$;
b) $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}, \gamma(t) = e^{\mathrm{j}\,\frac{\pi}{2}(t-1)}$;
Rezolvare.
a) etapa 1. Se studiază curba



Se observă că γ este o curbă netedă pe 2 porţiuni şi că se obţine prin juxtapunerea $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$,cu respectarea sensului de parcurgere.
•Se parametrizează un reprezentant al curbei, deoarece nu este dată parametric. Se consideră $A(-1)\,; B(\mathrm{j})\,; C(1)$.

$$\bullet \mathrm{Im}\gamma_1 = \left[\overrightarrow{AB}\right] : \begin{cases} x(t) = -1 + t(0 - (-1)) \\ y(t) = 0 + t(1 - 0) \end{cases}, t \in [0, 1]\,,\ \gamma_1 : [0, 1] \to \mathbb{C}, \gamma_1(t) = \underbrace{(-1 + t)}_{x(t)} + \mathrm{j}\underbrace{t}_{y(t)}.$$

$$\bullet \gamma_1 \text{ este curbă netedă:} \begin{cases} \exists \gamma_1' : [0, 1] \to \mathbb{C}, \gamma_1'(t) = \underbrace{1}_{x'(t)} + \mathrm{j}\cdot \underbrace{1}_{y'(t)}. \\ \gamma_1'\text{- este continuă pe } [0, 1] \end{cases}$$

$$\bullet \mathrm{Im}\gamma_2 = \left[\overrightarrow{BC}\right] : \begin{cases} x(t) = 0 + t(1 - 0) \\ y(t) = 1 + t(0 - 1) \end{cases}, t \in [0, 1]\,,\ \gamma_2 : [0, 1] \to \mathbb{C}, \gamma_2(t) = \underbrace{t}_{x(t)} + \mathrm{j}\underbrace{(1 - t)}_{y(t)}.$$

$$\bullet \gamma_2 \text{ este curbă netedă:} \begin{cases} \exists \gamma_2' : [0, 1] \to \mathbb{C}, \gamma_2'(t) = \underbrace{1}_{x'(t)} + \mathrm{j}\cdot \underbrace{(-1)}_{y'(t)}. \\ \gamma_2'\text{- este continuă pe } [0, 1] \end{cases}$$

etapa 2. Se studiază integrantul, $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) = \underbrace{x}_{u(x,y)} + \mathrm{j}\cdot \underbrace{(0)}_{v(x,y)}$.

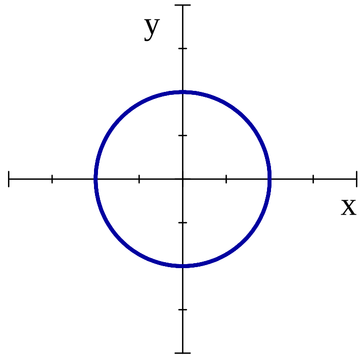
$D = \mathbb{C}$ este domeniu, $\mathrm{Im}\,\gamma \subset D; f$ este continuă pe $\mathbb{C}$.
etapa 3. $\mathcal{I} = \int_\gamma xdz = \int_{\left[\overrightarrow{AB}\right]} xdz + \int_{\left[\overrightarrow{BC}\right]} xdz = \int_0^1 x(t) \cdot z'(t)\, dt + \int_0^1 x(t) \cdot z'(t)\, dt =$

$$= \int_0^1 (-1 + t)(1 + \mathrm{j}\cdot 1)\, dt + \int_0^1 t(1 + \mathrm{j}\cdot (-1))\, dt =$$
$$= \int_{-1}^1 (t + \mathrm{j})\, dt + \int_{-1}^1 (t + \mathrm{j})\, dt + \int_{-1}^1 (t + \mathrm{j})\, dt + \int_{-1}^1 (t + \mathrm{j})\, dt =$$
$$= \left(2\frac{t^2}{2} + (-1 - \mathrm{j})\, t\right)\Bigg|_{t=0}^{t=1} = 1 + (-1 - \mathrm{j}) = -\,\mathrm{j}.$$

Exerciţiul 8. Să se calculeze
a) $\int_\gamma zdz$; **b)** $\int_\gamma (\sqrt[2]{z})_{\mathbb{C}}\, dz$,

unde γ este cercul unitate parcurs o singură dată în sens trigonometric. Pentru funcţia radical se alege o ramură uniformă particulară şi tăietura Ox_+.

Rezolvare. a) etapa 1. Se studiază curba



•Se parametrizează un reprezentant al curbei, deoarece nu este dată parametric.

$$\mathrm{Im}\gamma : \begin{cases} x(t) = 0 + 1\cos t \\ y(t) = 0 + 1\sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi], \ \gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \gamma(t) = \underbrace{\cos t}_{x(t)} + \mathrm{j} \cdot \underbrace{\sin t}_{y(t)} = e^{\mathrm{j}\,t}$$

$$\bullet\gamma \text{ este curbă netedă:} \begin{cases} \exists \gamma' : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \gamma'(t) = \underbrace{-\sin t}_{x'(t)} + \mathrm{j} \cdot \underbrace{\cos t}_{y'(t)} = \mathrm{j}\, e^{\mathrm{j}\,t} \\ \gamma'\text{- este continuă pe } [0, 2\pi] \end{cases}$$

etapa 2. Se studiază integrantul, $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \underbrace{x}_{u(x,y)} + \mathrm{j} \cdot \underbrace{y}_{v(x,y)}$.

$D = \mathbb{C}$ este domeniu, $\mathrm{Im}\,\gamma \subset D$; f este continuă pe $\mathbb{C}$.

etapa 3. Se determină $\mathcal{I} = \int_\gamma z dz$.

modul 1′. $\mathcal{I} = \int_\gamma z dz = \int_0^{2\pi} z(t)\, z'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} e^{\mathrm{j}\,t} \left(e^{\mathrm{j}\,t}\right)' dt = \left.\frac{\left(e^{\mathrm{j}\,t}\right)^2}{2}\right|_{t=0}^{t=2\pi} = 0.$

modul 3. Deoarece f este olomorfă pe D, conform Corolarului 1 $\Rightarrow$

$$\int_\gamma z dz \underset{\text{indep. de drum}}{=} \left.\frac{z^2}{2}\right|_{z=\gamma(0)=1}^{z=\gamma(2\pi)=1} = \frac{1^2}{2} - \frac{1^2}{2} = 0.$$

modul 4/Etapa 4. f este olomorfă pe $D = \mathbb{C}$ ca şi funcţie polinomială şi γ este curbă închisă; se aplică Teorema 2, Teorema fundamentală Cauchy pe domenii simplu conexe $\Rightarrow$

$\mathcal{I} = \int_{\gamma-\text{închisă}} z dz = 0.$

b) etapa 1. ca la a)

etapa 2. Se studiază integrantul f. "Funcţia" radical de ordin 2 din z este funcţia multivocă

$$f : \mathbb{C} \to \mathcal{P}(\mathbb{C}),\ f(z) = (\sqrt[2]{z})_{\mathbb{C}} = \left\{ w_k = \sqrt[2]{r} \left(\cos \frac{t^* + 2k\pi}{2} + \mathrm{j} \sin \frac{t^* + 2k\pi}{2} \right); k \in \{0, 1\} \right\}$$

unde $z = r(\cos t^* + \mathrm{j} \sin t^*) \in \mathbb{C}^*$, cu $r = |z|$, $t^* = \arg z$; $\left(\sqrt[2]{0}\right)_{\mathbb{C}} = 0$

Mai mult, este o funcţie multivocă cu exact 2 ramuri date de

$$f_k(z) = \sqrt[2]{r} \left(\cos \frac{t^* + 2k\pi}{2} + \mathrm{j} \sin \frac{t^* + 2k\pi}{2} \right), k \in \{0, 1\}.$$

Domeniul de olomorfie al unei ramuri se obţine scoţând din planul complex (π) punctele unei semidrepte ce uneşte 0 cu $\infty_{\mathbb{C}}$.

Dacă se alege tăietura $T = Ox_+ \Rightarrow t^* \in [0, 2\pi[$ şi

$$f_0 : \mathbb{C} \setminus T \to \mathbb{C},\ f_0(z) = \sqrt[2]{r} \left(\cos \frac{t^*}{2} + \mathrm{j} \sin \frac{t^*}{2} \right) = \sqrt[2]{r} \cdot e^{\mathrm{j}\,\frac{t^*}{2}}$$

$$f_1 : \mathbb{C} \setminus T \to \mathbb{C},\ f_1(z) = \sqrt[2]{r}\left(\cos\frac{t^* + 2\pi}{2} + \mathrm{j}\sin\frac{t^* + 2\pi}{2}\right) = \sqrt[2]{r}\cdot e^{\mathrm{j}\,\frac{t^*+2\pi}{2}}$$

$D = \mathbb{C} \setminus T$ este domeniu, $\operatorname{Im}\gamma \subset D$, dar $\gamma(0) = 1 \notin \mathbb{C} \setminus T$; f_k este continuă pe $\mathbb{C} \setminus T$.

etapa 3. Se determină $\mathcal{I}$

modul 1′. $\mathcal{I}_0 = \int_\gamma \left(\sqrt[2]{z}\right)_{k=0} dz = \int_0^{2\pi} \left(\sqrt[2]{z(t)}\right)_{k=0} z'(t)\,dt \overset{r=1}{=}$

$$= \int_0^{2\pi} e^{\frac{\mathrm{j}\,t}{2}} \left(e^{\mathrm{j}\,t}\right)' dt = \int_0^{2\pi} e^{\frac{\mathrm{j}\,t}{2}}\,\mathrm{j}\,e^{\mathrm{j}\,t} dt = \mathrm{j}\int_0^{2\pi} e^{\frac{3\,\mathrm{j}\,t}{2}} dt =$$

$$= \mathrm{j}\left.\frac{e^{\frac{3\,\mathrm{j}\,t}{2}}}{\frac{3\,\mathrm{j}}{2}}\right|_{t=0}^{t=2\pi} = \frac{2}{3}\left(e^{\frac{3\,\mathrm{j}\cdot 2\pi}{2}} - e^{\frac{3\,\mathrm{j}\cdot 0}{2}}\right) = \frac{2}{3}\left(\cos 3\pi + \mathrm{j}\sin 3\pi\right) = -\frac{2}{3}.$$

$$\mathcal{I}_1 = \int_\gamma \left(\sqrt[2]{z}\right)_{k=1} dz = \int_0^{2\pi} \left(\sqrt[2]{z(t)}\right)_{k=1} z'(t)\,dt \underset{D=\mathbb{C}\setminus T}{\overset{r=1}{=}}$$

$$= \int_0^{2\pi} e^{\frac{\mathrm{j}(t+2\pi)}{2}} \left(e^{\mathrm{j}\,t}\right)' dt = \int_0^{2\pi} e^{\frac{\mathrm{j}(t+2\pi)}{2}}\,\mathrm{j}\,e^{\mathrm{j}\,t} dt = \mathrm{j}\int_0^{2\pi} e^{\frac{\mathrm{j}(3t+2\pi)}{2}} dt = \mathrm{j}\left.\frac{e^{\frac{\mathrm{j}(3t+2\pi)}{2}}}{\frac{3\,\mathrm{j}}{2}}\right|_{t=0}^{t=2\pi} =$$

$$= \frac{2}{3}\left(e^{\frac{\mathrm{j}\cdot(3\cdot 2\pi+2\pi)}{2}} - e^{\frac{\mathrm{j}\cdot(3\cdot 0+2\pi)}{2}}\right) = \frac{2}{3}\left(\cos 4\pi + \mathrm{j}\sin 4\pi - \cos\pi - \mathrm{j}\sin\pi\right) = \frac{4}{3}.$$

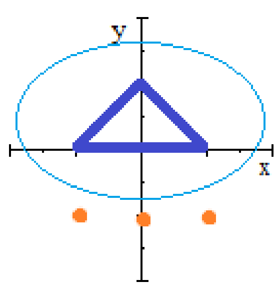
modul 3, 4. f este olomorfă pe $\mathbb{C}\setminus T$ pe fiecare ramură şi γ este curbă închisă; dar $\gamma(0) = 1 \notin \mathbb{C}\setminus T$. Nu se poate aplica Teorema cu primitive, nu se poate aplica Teorema 2, Teorema fundamentală Cauchy pe domenii simplu conexe.

Exerciţiul 9. Să se calculeze $\int_{|z-a|=r} \dfrac{1}{z-a} dz$.

Exerciţiul 10. Să se calculeze integrala

$\mathcal{I} = \displaystyle\int_\gamma \frac{\sin z}{(z+\mathrm{j})\left(z^2 + 2\,\mathrm{j}\,z - 2\right)} dz$, unde γ este triunghiul cu vârfurile $-1, 1, \mathrm{j}$ parcurs complet o singură dată de la -1 în sens trigonometric.

Rezolvare. a) etapa 1. Se studiază curba:



γ este curbă netedă pe 3 porţiuni, simplă, închisă. Nu este necesar la acest exerciţiu să se reprezinte parametric.

etapa 2. Se studiază integrantul f

$$f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) = \frac{\sin z}{(z+\mathrm{j})\left(z^2 + 2\,\mathrm{j}\,z - 2\right)}.$$

D se va alege ca domeniu, $\operatorname{Im}\gamma \subset D$; f este continuă pe D.

etapa 3. Calcul cu definiţia sau Teorema 1 de reducere-imposibil, deoarece este greu de exprimat

$f(z) = u(x,y) + \mathrm{j}\cdot v(x,y)$ ..

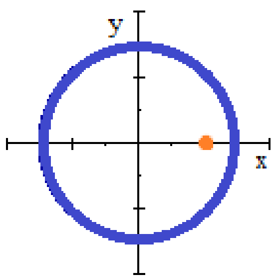
etapa 4. Direct, Calcul cu Teoremele 2, 3, 4, 5, 6, 7.

- Se desenează curba.
- Se determină punctele singulare izolate pentru

$$f(z) = \frac{\sin z}{(z+\mathrm{j})\left(z^2 + 2\,\mathrm{j}\,z - 2\right)}$$

$z_1 = -\mathrm{j}$- pol de ordin 1 pt. f şi $z_1 \notin \gamma, z_1 \notin \operatorname{Int}\gamma$.
$z_2 = 1-\mathrm{j}$- pol de ordin 1 pt. f şi $z_2 \notin \gamma, z_2 \notin \operatorname{Int}\gamma$.
$z_3 = -1-\mathrm{j}$- pol de ordin 1 pt. f şi $z_3 \notin \gamma, z_3 \notin \operatorname{Int}\gamma$.
•Se notează cu D un domeniu simplu conex a.î. $\operatorname{Im}\gamma \subset D$ şi $-\mathrm{j}, 1-\mathrm{j}, -1-\mathrm{j} \notin D$.
$f-$olomorfă pe $D \underset{\text{T. fundam. Cauchy}}{\overset{\gamma \text{ simplă, închisă}}{\Rightarrow}} \mathcal{I} = \int_\gamma f(z)\,dz = 0.$

Exerciţiul 11. Să se calculeze
$\int_\gamma \frac{(2z^2 - z - 2)\,e^z}{z-2} dz$,unde γ este cercul $|z| = 3$.
Rezolvare. etapa 1. Se studiază curba

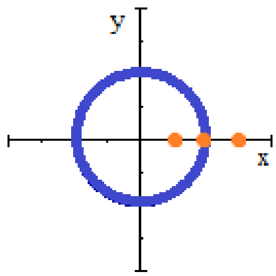


La acest exerciţiu nu este necesar să se reprezinte parametric curba, din cauza formei f.
•Se poate parametriza un reprezentant al curbei.
$\operatorname{Im}\gamma : \begin{cases} x(t) = 0 + 3\cos t \\ y(t) = 0 + 3\sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi],\ \gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \gamma(t) = \underbrace{3\cos t}_{x(t)} + \mathrm{j}\cdot \underbrace{3\sin t}_{y(t)} = 3e^{it}.$

•γ este curbă netedă: $\begin{cases} \exists \gamma' : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \gamma'(t) = \underbrace{-3\sin t}_{x'(t)} + \mathrm{j}\cdot \underbrace{3\cos t}_{y'(t)} = 3e^{it} i. \\ \gamma'\text{- este continuă pe } [0, 2\pi] \end{cases}$

etapa 2. Se studiază integrantul, $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) = \dfrac{(2z^2 - z - 2)\,e^z}{z-2}.$
D se va alege ca domeniu, $\operatorname{Im}\gamma \subset D$; f este continuă pe D.
etapa 3. Calcul cu definiţia sau Teorema 1 de reducere-imposibil, deoarece este greu de exprimat
$f(z) = u(x, y) + \mathrm{j}\cdot v(x, y)$ ..
etapa 4. Direct, Calcul cu Teoremele $2, 3, 4, 5, 6, 7$.
• Se desenează curba.
• Se determină punctele singulare izolate pentru
$z_1 = 2$ - pol de ordin 1 pentru f şi $z_1 \in \operatorname{Int}\gamma$.
•Se scrie $f(z) = \dfrac{(2z^2 - z - 2)\,e^z}{z-2}$ - nu este olomorfă pe un D care conţine 2.
Fie $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, g(z) = (2z^2 - z - 2)\,e^z-$olomorfă pe $\mathbb{C} \underset{\text{pe dom. d. conexe pentru } g}{\overset{\text{form. Cauchy}}{\Rightarrow}}$
$\mathcal{I} = \int_{|z|=3} \frac{g(z)}{z-2} dz \overset{\text{obs.}}{=} 2\pi\,\mathrm{j}\cdot g(2) = 2\pi\,\mathrm{j}\cdot (2\cdot 2^2 - 2 - 2)\,e^2 = 8\pi\,\mathrm{j}\,e^2.$

Exerciţiul 12. Să se calculeze, pentru $R > 0$, integrala $\int_{|z|=R} \frac{z\cdot e^{\mathrm{j}\frac{\pi z}{2}}}{z-1} dz.$
Rezolvare. etapa 1. Se studiază curba



La acest exerciţiu nu este necesar să se reprezinte parametric curba, din cauza formei f.
•Se poate parametriza un reprezentant al curbei:

$$\mathrm{Im}\gamma : \begin{cases} x(t) = 0 + R\cos t \\ y(t) = 0 + R\sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi], \ \gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \gamma(t) = \underbrace{R\cos t}_{x(t)} + \mathrm{j} \cdot \underbrace{R\sin t}_{y(t)}.$$

•γ este curbă netedă: $\begin{cases} \exists \gamma' : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \gamma'(t) = \underbrace{-R\sin t}_{x'(t)} + \mathrm{j} \cdot \underbrace{R\cos t}_{y'(t)}. \\ \gamma' \text{- este continuă pe } [0, 2\pi] \end{cases}$

etapa 2. Se studiază integrantul, $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \dfrac{z \cdot e^{\mathrm{j}\frac{\pi z}{2}}}{z-1}$.

D se va alege ca domeniu, $\mathrm{Im}\,\gamma \subset D$; f este continuă pe D.

etapa 3. Calcul cu definiţia sau Teorema 1 de reducere-imposibil, deoarece este greu de exprimat $f(z) = u(x, y) + \mathrm{j} \cdot v(x, y)$.

etapa 4. Calcul cu Teoremele $2, 3, 4, 5, 6, 7$.

• Se desenează curba.

• Se determină punctele singulare izolate pentru f

$z_1 = 1$ - pol de ordin 1.

•caz $R \in \left]0, 1\right[$ $\Rightarrow z_1 = 1$ este pol pentru f, $z_1 = 1 \notin \mathrm{Int}\,\gamma \cup \gamma$.

Se alege D chiar simplu conex a.î. $\mathrm{Im}\,\gamma \subset D$ şi $1 \notin D \Rightarrow f \in \mathcal{H}(D) \underset{\text{pe dom. s. conexe}}{\overset{\text{teor. fund. Cauchy}}{\Rightarrow}}$

$$\mathcal{I}(1) = \int_{|z|=R} f(z)\, dz = 0.$$

caz $R = 1 \Rightarrow z_1 = 1$ este pol pentru f, $z_1 \in \gamma$-este punct regulat

Fie $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, g(z) = z \cdot e^{\mathrm{j}\frac{\pi z}{2}}$ $-$olomorfă pe $\mathbb{C} \overset{\text{val. princ. Cauchy}}{\Rightarrow}$

$$\mathcal{I}(1) = \text{v.p.} \int_{|z|=R} \frac{z \cdot e^{\mathrm{j}\frac{\pi z}{2}}}{z-1} dz = \pi\,\mathrm{j} \cdot g(1) = \pi\,\mathrm{j} \cdot e^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}} = \pi\,\mathrm{j}\left(\cos\tfrac{\pi}{2} + \mathrm{j}\sin\tfrac{\pi}{2}\right) = -\pi.$$

caz $R > 1 \Rightarrow z_1 = 1$ este pol pentru f, $z_1 \in \mathrm{Int}\,\gamma$.

Fie $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, g(z) = z \cdot e^{\mathrm{j}\frac{\pi z}{2}}$ $-$olomorfă pe $\mathbb{C} \underset{\text{pe dom. d. s. conexe}}{\overset{\text{form. Cauchy}}{\Rightarrow}}$

$$\mathcal{I}(1) = \int_{|z|=R} \frac{z \cdot e^{\mathrm{j}\frac{\pi z}{2}}}{z-1} dz = 2\pi\,\mathrm{j} \cdot g(1) = 2\pi\,\mathrm{j} \cdot e^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}} = 2\pi\,\mathrm{j}\left(\cos\tfrac{\pi}{2} + \mathrm{j}\sin\tfrac{\pi}{2}\right) = -2\pi.$$

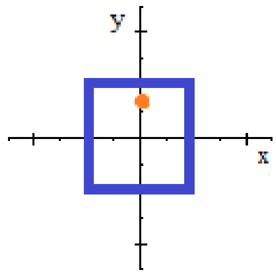
Exerciţiul 13. Să se calculeze integrala $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^{\mathrm{j}\,z}}{z^2 - \pi^2} dz$ pe următoarele curbe:

a) $|z| = R$, cu $R < \pi$ dat; **b)** $|z| = R$, cu $R = \pi$ dat; **c)** $|z| = R$, cu $R > \pi$ dat; **d)** $|z - \pi| = \frac{\pi}{2}$;
Rezolvare. A se vedea Curs.

Exerciţiul 14. Fie γ curba închisă determinată de dreptele
$(d_1) : x = 2; (d_2) : x = -2; (d_3) : y = 2; (d_4) : y = -2.$

Să se calculeze: **a)** $\mathcal{I}=\int_\gamma \frac{e^{-z}}{2z-\pi\,\mathrm{j}}dz$,**b)** $\mathcal{I}=\int_\gamma \frac{\cos z}{z\left(z^2+8\right)}dz$.

Rezolvare. a) etapa 1. Se studiază curba



Grafic, se observă că γ este o curbă netedă pe 4 porţiuni şi că este curbă închisă.

etapa 2. Se studiază integrantul, $f:D\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C},\ f(z)=\frac{e^{-z}}{2z-\pi\,\mathrm{j}}$.

D se va alege ca domeniu, $\operatorname{Im}\gamma\subset D$; f este continuă pe D.

etapa 3. Calcul cu definiţia sau Teorema 1 de reducere-imposibil.

etapa 4. Calcul cu Teoremele $2,3,4,5,6,7$.

• Se desenează curba.

• Se determină punctele singulare izolate pentru

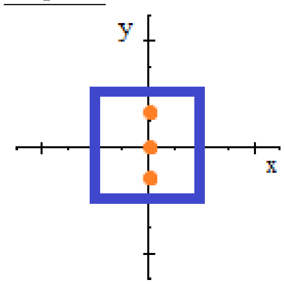
$z_1=\frac{\pi\,\mathrm{j}}{2}\in\operatorname{Int}\gamma$- pol de ordin 1 pt. f

•Se scrie $f(z)=\frac{\frac{e^{-z}}{2}}{z-\frac{\pi\,\mathrm{j}}{2}}$.

$g:\mathbb{C}\to\mathbb{C}, g(z)=\frac{e^{-z}}{2}$–olomorfă pe $\mathbb{C}$ $\underset{\text{pe dom. d. s. conexe}}{\overset{\text{form. Cauchy}}{\Longrightarrow}}$

$$\mathcal{I}=\int_\gamma \frac{g(z)}{z-\frac{\pi\,\mathrm{j}}{2}}dz=2\pi\,\mathrm{j}\cdot g\left(\frac{\pi\,\mathrm{j}}{2}\right)=2\pi\,\mathrm{j}\cdot\frac{e^{-\frac{\pi\,\mathrm{j}}{2}}}{2}=\pi\,\mathrm{j}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\mathrm{j}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\pi.$$

b) etapa 1. Se studiază curba



Grafic, se observă că γ este o curbă netedă pe 4 porţiuni şi că este curbă închisă.

etapa 2. Se studiază integrantul, $f:D\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C},\ f(z)=\frac{\cos z}{z\left(z^2+8\right)}$.

D se va alege ca domeniu, $\operatorname{Im}\gamma\subset D$; f este continuă pe D.

etapa 3. Calcul cu definiţia sau Teorema 1 de reducere-imposibil.

etapa 4. Calcul cu Teoremele $2,3,4,5,6$.

• Se desenează curba.

• Se determină punctele singulare izolate pentru f

$z_1=0$- pol de ordin 1 pt. f şi $z_1\in\operatorname{Int}\gamma$

$z_2=2\sqrt{2}\,\mathrm{j}$- pol de ordin 1 pt. f şi $z_2\in\operatorname{Ext}\gamma$

$z_3=-2\sqrt{2}\,\mathrm{j}$- pol de ordin 1 pt. f şi $z_3\in\operatorname{Ext}\gamma$

•Se scrie $f(z)=\dfrac{\frac{\cos z}{z^2+8}}{z-0}$.

Se notează cu D_g un domeniu simplu conex a.î. $\operatorname{Im}\gamma\subset D_g$ şi $2\sqrt{2}\,\mathrm{j},-2\sqrt{2}\,\mathrm{j}\notin D_g$.

$g:D_g\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}, g(z)=\dfrac{\cos z}{z^2+8}$ −olomorfă pe $D_g \overset{\text{form. Cauchy}}{\underset{\text{pe dom. d. s. conexe}}{\Rightarrow}}$

$\mathcal{I}=\displaystyle\int_\gamma \frac{g(z)}{z-0}dz=2\pi\,\mathrm{j}\cdot g(0)=2\pi\,\mathrm{j}\cdot\frac{\cos 0}{0^2+8}=\frac{\pi\,\mathrm{j}}{4}$.

Exerciţiul 15. Să se calculeze integrala

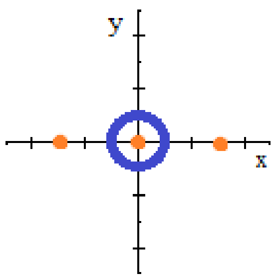
$\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{e^z}{z^2(z^2-9)}dz.$

Rezolvare. etapa 1. Se studiază curba-este cercul de centru 0 şi raza 1.
Se poate parametriza un reprezentant al curbei-nu este necesar. Este netedă şi închisă.
etapa 2. Se studiază integrantul, $f:D\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C},\ f(z)=\dfrac{e^z}{z^2(z^2-9)}$.

Este greu de exprimat $f(z)=u(x,y)+\mathrm{j}\cdot v(x,y)$.

D se va alege ca domeniu, $\operatorname{Im}\gamma\subset D$; f este continuă pe D.

etapa 3. Calcul cu definiţia sau Teorema 1 de reducere-imposibil.
etapa 4. Calcul cu Teoremele $2,3,4,5,6,7$.



• Se desenează curba.
• Se determină punctele singulare izolate pentru
$z_1=0$- pol de ordin 2 pt. f şi $z_1\in\operatorname{Int}\gamma$
$z_2=3$- pol de ordin 1 pt. f şi $z_2\in\operatorname{Ext}\gamma$
$z_2=-3$- pol de ordin 1 pt. f şi $z_2\in\operatorname{Ext}\gamma$

•Se scrie $f(z)=\dfrac{e^z}{z^2(z^2-9)}=\dfrac{\frac{e^z}{z^2-9}}{(z-0)^2}$.

Se notează cu D_g un domeniu simplu conex a.î. $\operatorname{Im}\gamma\subset D_g$ şi $3,-3\notin D_g$.

$g:D_g\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}, g(z)=\dfrac{e^z}{z^2-9}$ −olomorfă pe D_g, cu

$g'(z)=\dfrac{e^z(z^2-9)-e^z\cdot 2z}{(z^2-9)^2}=\dfrac{e^z(z^2-2z-9)}{(z^2-9)^2}$.

Atunci, din

$g^{(n)}(a)=\dfrac{n!}{2\pi\,\mathrm{j}}\displaystyle\int_\gamma\frac{g(z)}{(z-a)^{n+1}}dz, \forall z\in\operatorname{Int}\gamma \overset{\text{Teorema 6,}}{\underset{\text{de derivare a f. olomorfe}}{\Rightarrow}}$

$\mathcal{I}=\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{\frac{e^z}{z^2-9}}{(z-0)^2}dz=\frac{2\pi\,\mathrm{j}}{1!}\cdot g'(0)=2\pi\,\mathrm{j}\cdot\frac{e^0(-9)}{(-9)^2}=\frac{2\pi\,\mathrm{j}}{-9}$.

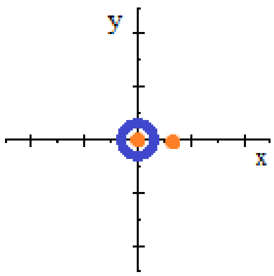
Exerciţiul 16. Să se calculeze integrala

$\mathcal{I}_k=\displaystyle\int_{\gamma_k}\frac{e^z}{z(1-z)^3}dz$, unde **a)** $\gamma_1:|z|=\frac{1}{2}$; **b)** $\gamma_2:|z-1|=\frac{1}{2}$; **c)** $\gamma_3:|z|=\frac{3}{2}$;

Rezolvare. a) etapa 1. Se studiază curba- este cercul cu centrul 0 şi raza $\frac{1}{2}$.
γ_1 este curbă netedă, închisă.
etapa 2. Se studiază integrantul, $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \dfrac{e^z}{z(1-z)^3}$.

Este greu de exprimat $f(z) = u(x,y) + \mathrm{j} \cdot v(x,y)$.

D se va alege ca domeniu, $\operatorname{Im}\gamma \subset D$; f este continuă pe D.
etapa 3. Calcul cu definiţia sau Teorema 1 de reducere-imposibil.
etapa 4. Calcul cu Teoremele $2, 3, 4, 5, 6$.



- Se desenează curba.
- Se determină punctele singulare izolate pentru f

$z_1 = 0$- pol de ordin 1 pt. f şi $z_1 \in \operatorname{Int}\gamma$
$z_2 = 1$- pol de ordin 3 pt. f şi $z_2 \in \operatorname{Ext}\gamma$

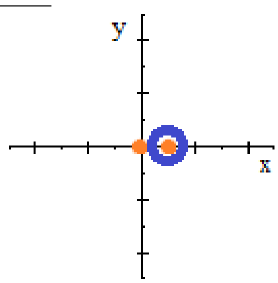
•Se scrie $f(z) = \dfrac{e^z}{z(1-z)^3} = \dfrac{\frac{-e^z}{(z-1)^3}}{z-0}$.

Se notează cu D_g un domeniu simplu conex a.î. $\operatorname{Im}\gamma \subset D_g$ şi $1 \notin D_g$.

$g : D_g \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}, g(z) = \frac{-e^z}{(z-1)^3}$−olomorfă pe $D_g \overset{\text{form. Cauchy}}{\underset{\text{pe dom. d. s. conexe}}{\Rightarrow}}$

$\mathcal{I}_1 = \displaystyle\int_{\gamma_1} \frac{g(z)}{z-0} dz = 2\pi \mathrm{j} \cdot g(0) = 2\pi \mathrm{j} \cdot \frac{-e^z}{(z-1)^3} = 2\pi \mathrm{j}$.

b) etapa 1. Se studiază curba- este cercul cu centrul 1 şi raza $\frac{1}{2}$.
γ_2 este curbă netedă, închisă.
etapa 2. ca la a)
etapa 3. Calcul cu definiţia sau Teorema 1 de reducere-imposibil.
etapa 4. Calcul cu Teoremele $2, 3, 4, 5, 6, 7$.



- Se desenează curba.
- Se determină punctele singulare izolate pentru f.

$z_1 = 0$- pol de ordin 1 pt. f şi $z_1 \in \operatorname{Ext}\gamma$
$z_2 = 1$- pol de ordin 3 pt. f şi $z_2 \in \operatorname{Int}\gamma$

•Se scrie $f(z) = \dfrac{e^z}{z(1-z)^3} = \dfrac{\frac{-e^z}{z}}{(z-1)^3}$.

Se notează cu D_g un domeniu simplu conex a.î. $\operatorname{Im}\gamma \subset D_g$ şi $0 \notin D_g$.

$g : D_g \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}, g(z) = \dfrac{-e^z}{z}$ −olomorfă pe D_g, cu

$g'(z) = \dfrac{-e^z z + e^z \cdot 1}{z^2} = \dfrac{e^z(-z+1)}{z^2}$,

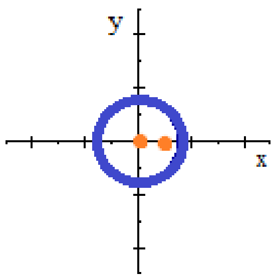
$g''(z) = \dfrac{\left(e^z(-z+1) + e^z(-1)\right)z^2 + e^z(-z+1)\cdot 2z}{z^4} = \dfrac{e^z\left(-z^2-2z+2\right)}{z^3}$

Atunci, din

$g^{(n)}(a) = \dfrac{n!}{2\pi \mathrm{j}}\displaystyle\int_\gamma \dfrac{g(z)}{(z-a)^{n+1}}dz, \forall z \in \operatorname{Int}\gamma \underset{\text{de derivare a f. olomorfe}}{\overset{\text{Teorema 6,}}{\Rightarrow}}$

$\mathcal{I}_2 = \displaystyle\int_{\gamma_2} \dfrac{\frac{-e^z}{z}}{(z-1)^3}dz = \dfrac{2\pi \mathrm{j}}{2!}\cdot g''(1) = \dfrac{2\pi \mathrm{j}}{2}\cdot\dfrac{e^1\left(-1^2-2+2\right)}{1^3} = -\pi \mathrm{j}\, e.$

c) <u>etapa 1.</u> Se studiază curba- este cercul cu centrul 0 şi raza $\frac{3}{2}$.
γ_3 este curbă netedă, închisă.
<u>etapa 2.</u> ca la a)
<u>etapa 3.</u> Calcul cu definiţia sau Teorema 1 de reducere-imposibil.
<u>etapa 4.</u> Calcul cu Teoremele $2, 3, 4, 5, 6, 7$.



• Se desenează curba.
• Se determină punctele singulare izolate pentru f.

$z_1 = 0$- pol de ordin 1 pt. f şi $z_1 \in \operatorname{Int}\gamma$

$z_2 = 1$- pol de ordin 3 pt. f şi $z_2 \in \operatorname{Int}\gamma$

<u>modul 1.</u> Se scrie $f(z) = \dfrac{e^z}{z(1-z)^3} = \dfrac{e^z}{z-0} - \dfrac{e^z}{z-1} + \dfrac{e^z}{(z-1)^2} - \dfrac{e^z}{(z-1)^3}$.

Se notează cu $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, g(z) = e^z$−olomorfă pe $\mathbb{C}$, cu

$g'(z) = e^z, g''(z) = e^z$.

Atunci, din $g^{(n)}(a) = \dfrac{n!}{2\pi \mathrm{j}}\displaystyle\int_\gamma \dfrac{g(z)}{(z-a)^{n+1}}dz, \forall z \in \operatorname{Int}\gamma \underset{\text{de derivare a f. olomorfe}}{\overset{\text{Teorema 6,}}{\Rightarrow}}$

$$\mathcal{I}_3 = \int_{\gamma_3}\left(\frac{e^z}{z-0} - \frac{e^z}{z-1} + \frac{e^z}{(z-1)^2} - \frac{e^z}{(z-1)^3}\right)dz =$$
$$= 2\pi \mathrm{j}\cdot g(0) - 2\pi \mathrm{j}\cdot g(1) + \frac{2\pi \mathrm{j}}{1!}\cdot g'(1) - \frac{2\pi \mathrm{j}}{2!}\cdot g''(1) =$$
$$= 2\pi \mathrm{j}\cdot e^0 - 2\pi \mathrm{j}\cdot e^1 + \frac{2\pi \mathrm{j}}{1!}\cdot e^1 - \frac{2\pi \mathrm{j}}{2!}\cdot e^1 = 2\pi \mathrm{j} - \pi \mathrm{j}\, e.$$

<u>modul 2.</u> Se construiesc două cercuri, de rază suficient de mică, unul centrat în 0, unul centrat în 1, a.î. cercurile să nu se intersecteze şi să fie în $\operatorname{Int}\gamma_3$. Atunci, conform Teoremei Fundamentale Cauchy pe domenii multiplu conexe$\Rightarrow$

$$\mathcal{I}_3 = \int_{\gamma_3} f(z)\,dz = \int_{\gamma_3^1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_3^2} f(z)\,dz = \int_{\gamma_3^1}\frac{\frac{-e^z}{(z-1)^3}}{z-0}dz + \int_{\gamma_3^2}\frac{\frac{-e^z}{z}}{(z-1)^3}dz =$$

$$= 2\pi\,\mathrm{j} \cdot \left.\frac{-e^z}{(z-1)^3}\right|_{z=0} + \frac{2\pi\,\mathrm{j}}{2!} \cdot \left.\left(\frac{-e^z}{z}\right)''\right|_{z=1} = 2\pi\,\mathrm{j} - \pi\,\mathrm{j}\,e.$$

Exerciţiul 17. Să se calculeze integrala $\mathcal{I} = \int_\gamma \frac{1}{z\left(z^2-1\right)} dz$, unde γ este o curbă simplă închisă, ce conţine în interiorul său punctele $-1, 0, 1$.

Rezolvare. a) etapa 1. γ este o curbă simplă închisă, ce conţine în interiorul său punctele $-1, 0, 1$.

etapa 2. Se studiază integrantul, $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{z\left(z^2-1\right)}$.

Este greu de exprimat $f(z) = u(x,y) + \mathrm{j} \cdot v(x,y)$.

D se va alege ca domeniu, $\operatorname{Im} \gamma \subset D$; f este continuă pe D.

etapa 3. Calcul cu definiţia sau Teorema 1 de reducere-imposibil.

etapa 4. Calcul cu Teoremele $2, 3, 4, 5, 6$.

$z_1 = -1$- pol de ordin 1 pt. f şi $z_1 \in \operatorname{Int} \gamma$

$z_2 = 0$- pol de ordin 1 pt. f şi $z_2 \in \operatorname{Int} \gamma$

$z_3 = 1$- pol de ordin 1 pt. f şi $z_3 \in \operatorname{Int} \gamma$

modul 1. Se scrie $f(z) = \frac{1}{z\left(z^2-1\right)} = \frac{-1}{z} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1}\right)$.

Se notează cu $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, g(z) = 1-$olomorfă pe $\mathbb{C}$. Atunci $\underset{\text{pe dom. d. s. conexe}}{\overset{\text{form. Cauchy}}{\Rightarrow}}$

$$\mathcal{I} = \int_\gamma \left(\frac{-1}{z-0} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1}\right)\right) dz = -2\pi\,\mathrm{j} \cdot g(0) + \tfrac{1}{2} \cdot \left(2\pi\,\mathrm{j} \cdot g(1) + 2\pi\,\mathrm{j} \cdot g(-1)\right) =$$
$$= -2\pi\,\mathrm{j} \cdot 1 + \tfrac{1}{2} \cdot \left(2\pi\,\mathrm{j} \cdot 1 + 2\pi\,\mathrm{j} \cdot 1\right) = 0.$$

modul 2. Se construiesc trei cercuri, de rază suficient de mică, unul centrat în -1, unul centrat în 0, unul centrat în 1, a.î. cercurile să nu se intersecteze şi să fie în $\operatorname{Int} \gamma$. Atunci, conform teoremei fundamentale Cauchy pe domenii multiplu conexe$\Rightarrow$

$$\mathcal{I} = \int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma^1} f(z)\,dz + \int_{\gamma^2} f(z)\,dz + \int_{\gamma^3} f(z)\,dz =$$
$$= \int_{\gamma^1} \frac{\frac{1}{z(z-1)}}{z+1} dz + \int_{\gamma^2} \frac{\frac{1}{(z+1)(z-1)}}{z} dz + \int_{\gamma^3} \frac{\frac{1}{z(z+1)}}{z-1} dz =$$
$$= 2\pi\,\mathrm{j} \cdot \left.\frac{1}{z(z-1)}\right|_{z=-1} + 2\pi\,\mathrm{j} \cdot \left.\frac{1}{z^2-1}\right|_{z=0} + 2\pi\,\mathrm{j} \cdot \left.\frac{1}{z(z+1)}\right|_{z=1} =$$
$$= 2\pi\,\mathrm{j}\left(\tfrac{1}{2} - 1 + \tfrac{1}{2}\right) = 0.$$