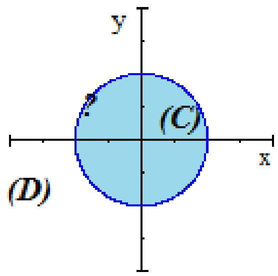
SEMINAR NR. 8, REZOLVĂRI
Matematici Speciale, AIA

○4. Şiruri de funcţii complexe cu valori complexe
○5. Serii de funcţii complexe cu valori complexe

○5.1. Serii de funcţii complexe cu valori complexe. Convergenţă. Teorema de transfer de mărginire, de existenţă a limitei, de continuitate, de derivabilitate, de integrabilitate asupra funcţiei sumă

5.2. Serii de puteri de numere complexe

Observaţie. Noţiunile de serie de puteri de numere complexe, Teorema Cauchy-Hadamard, operaţii cu serii de puteri, seria geometrică- A se vedea Curs. Se va utiliza, de la seria geometrică:



$$\boxed{(*)\, 1+z+z^2+...+z^n+...=\frac{1}{1-z}, \forall z\in\mathbb{C} \text{ cu } |z|<1}$$

În $(*)$, din $z \rightsquigarrow -z \Rightarrow$

$$\boxed{(*_1)\, 1-z+z^2+...+(-1)^n z^n+...=\frac{1}{1+z}, \forall z\in\mathbb{C} \text{ cu } |-z|<1, \text{ adică } |z|<1}$$

În $(*)$, din $z \rightsquigarrow -z^2 \Rightarrow$

$$\boxed{(*_2)\, 1-z^2+z^4+...+(-1)^n z^{2n}+...=\frac{1}{1+z^2}, \forall z\in\mathbb{C} \text{ cu } \left|-z^2\right|<1, \text{ adică } |z|<1}$$

5.3. Dezvoltarea în serie Taylor a unei funcţii complexe cu valori complexe

Teorema 5.3.1 (**Taylor**). Fie $D\subseteq\mathbb{C}$ un domeniu simplu conex şi $f:D\subseteq\mathbb{C}\to\mathbb{C}$. Dacă $\underline{f\in\mathcal{H}(D)}$ (deci $\forall n\in\mathbb{N}^*$, f este <u>derivabilă de ordin n</u> pe D), atunci, pentru orice cerc $\gamma=\mathcal{C}(a,r)\subset D$ şi pentru orice $z\in\Delta(a;r)=\{z\in\mathbb{C};|z-a|<r\}$, f este dezvoltabilă în serie Taylor pe o vecinătate a punctului a ("în jurul" lui a), adică

$$\boxed{f(z)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(z-a)+\frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2+...+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n+..., \forall z\in\Delta(a;r)} \quad (1)$$

$$\boxed{f(z)=f(a)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n, \forall z\in\Delta(a;r).} \quad (1')$$

De precizat că $a_n=\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}\left(=\dfrac{1}{2\pi\,\mathrm{j}}\displaystyle\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta\right)$ sunt coeficienţii dezvoltării lui f în **serie de puteri naturale** ale $z-a$.

Observaţie. Pentru dezvoltările ulterioare- A se vedea Curs:

$$\boxed{e^z = 1 + \frac{1}{1!}z + \frac{1}{2!}z^2 + ... + \frac{1}{n!}z^n + ..., \forall z \in \mathbb{C}} \text{ sau} \tag{2}$$

$$\boxed{e^z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}z^n, \forall z \in \mathbb{C}.} \tag{2'}$$

$$\boxed{\cos z = 1 - \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{4!}z^4 + ... + \frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n} + ..., \forall z \in \mathbb{C}} \text{ sau} \tag{3}$$

$$\boxed{\cos z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}, \forall z \in \mathbb{C}.} \tag{3'}$$

$$\boxed{\sin z = \frac{1}{1!}z - \frac{1}{3!}z^3 + ... + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1} + ..., \forall z \in \mathbb{C}} \text{ sau} \tag{4}$$

$$\boxed{\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}, \forall z \in \mathbb{C}.} \tag{4'}$$

$$\boxed{\operatorname{ch} z = 1 + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{4!}z^4 + ... + \frac{1}{(2n)!}z^{2n} + ..., \forall z \in \mathbb{C}} \text{ sau} \tag{5}$$

$$\boxed{\operatorname{ch} z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}z^{2n}, \forall z \in \mathbb{C}.} \tag{5'}$$

$$\boxed{\operatorname{sh} z = \frac{1}{1!}z + \frac{1}{3!}z^3 + ... + \frac{1}{(2n+1)!}z^{2n+1} + ..., \forall z \in \mathbb{C}} \text{ sau} \tag{6}$$

$$\boxed{\operatorname{sh} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}z^{2n+1}, \forall z \in \mathbb{C}.} \tag{6'}$$

$$\boxed{((1+z)^\alpha)_k = 1 + \frac{\alpha}{1!}z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-(n-1))}{n!}z^n + ..., \forall z \in \mathbb{C} \text{ cu } |z| < 1} \tag{8}$$

$$\boxed{((1+z)^\alpha)_k = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-(n-1))}{n!}z^n, \forall z \in \mathbb{C} \text{ cu } |z| < 1} \tag{8'}$$

$$\boxed{(\operatorname{Log}(1+z))_k = 2k\pi\,\mathrm{j} + \frac{1}{1}z + \frac{-1}{2}z^2 + ... + \frac{(-1)^{n-1}}{n}z^n + ..., \forall z \in \mathbb{C} \text{ cu } |z| < 1, k \in \mathbb{Z}} \text{ sau} \tag{13}$$

$$\boxed{(\operatorname{Log}(1+z))_k = 2k\pi\,\mathrm{j} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}z^n, \forall z \in \mathbb{C} \text{ cu } |z| < 1, k \in \mathbb{Z}} \tag{13'}$$

Exerciţiul 1. Să se dezvolte în serie Taylor după puterile lui z funcţia
$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = \sin^3 z.$

Rezolvare. Utilizarea directă a formulei (1) din teorema Taylor nu este posibilă, din cauza lipsei unei reguli imediate de scriere pentru $f^{(n)}(0)$.

Se ştie:

$(4), (4') \sin z = \dfrac{1}{1!}z - \dfrac{1}{3!}z^3 + ... + \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1} + ... = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}, \forall z \in \mathbb{C}$

Utilizarea în $f(z) = (\sin z)(\sin z)(\sin z)$ a formulei $(4), (4')$ nu este posibilă, din cauza dificultăţii de calcul pentru un produs de trei serii.

Se va folosi o combinaţie liniară de serii, provenind din folosirea formulei:

$\sin 3z = 3\sin z - 4\sin^3 z \Rightarrow f(z) = \sin^3 z = \dfrac{3}{4}\sin z + \dfrac{-1}{4}\sin 3z, \forall z \in \mathbb{C}.$

Conform $(4),(4')$, pe domeniul de PC/SC se schimbă variabila $z \rightsquigarrow 3z \Rightarrow$

$$\sin 3z = \frac{1}{1!}(3z) - \frac{1}{3!}(3z)^3 + \frac{1}{5!}(3z)^5 + ... + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(3z)^{2n+1} + ... =$$

$$= \frac{3}{1!}z - \frac{3^3}{3!}z^3 + ... + \frac{(-1)^n 3^{2n+1}}{(2n+1)!}z^{2n+1} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{2n+1}}{(2n+1)!}z^{2n+1},$$

$\forall z \in \mathbb{C}$ cu $3z \in \mathbb{C}$, deci $z \in \mathbb{C}$.

Pe domeniul comun de PC/SC se pot aduna termen cu termen două serii, se poate înmulţi o serie cu un scalar nenul$\Rightarrow$

$$f(z) = \frac{3}{4}\sin z + \frac{-1}{4}\sin 3z =$$

$$= \frac{3}{4}\left(\frac{1}{1!}z - \frac{1}{3!}z^3 + ... + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1} + ...\right) + \frac{-1}{4}\left(\frac{3}{1!}z - \frac{3^3}{3!}z^3 + ... + \frac{(-1)^n 3^{2n+1}}{(2n+1)!}z^{2n+1} + ...\right) =$$

$$= \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1} + \frac{-1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^{2n+1}}{(2n+1)!}z^{2n+1} =$$

$$= \frac{1}{1!}\left(\frac{3}{4} + \frac{-1}{4}3\right)z - \frac{1}{3!}\left(\frac{3}{4} + \frac{-1}{4}3^3\right)z^3 + ... + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{3}{4} + \frac{-1}{4}3^{2n+1}\right)z^{2n+1} + ... =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4} + \frac{-1}{4}3^{2n+1}\right)\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}, \forall z \in \mathbb{C}.$$

○**Exerciţiul** 2. Se dă funcţia multivocă

$f : \mathbb{C} \to \mathcal{P}(\mathbb{C}), f(z) = (\mathrm{Log}\, z)_{\mathbb{C}}$.

Să se dezvolte în serie Taylor în jurul lui $a = -\mathrm{j}$ ramura lui f pentru care $f_k(1+\mathrm{j}) = \frac{1}{2}\ln 2 - \mathrm{j}\,\frac{7\pi}{4}$, cu tăietura $T = Ox_+$.

Rezolvare. Se determină ramura pentru care $f_k(1+\mathrm{j}) = \frac{1}{2}\ln 2 - \mathrm{j}\,\frac{7\pi}{4}$. Deoarece

$$1 + \mathrm{j} \overset{t^* \in [0,2\pi[\text{ cu } T = Ox_+}{=} \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{j}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{j}\sin\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow$$

se determină $k \in \mathbb{Z}$ a.î.

$$\left.\begin{array}{l}(\mathrm{Log}\,(1+\mathrm{j}))_k = \ln\sqrt{2} + \mathrm{j}\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z} \\ (\mathrm{Log}\,(1+\mathrm{j}))_k = \frac{1}{2}\ln 2 - \mathrm{j}\,\frac{7\pi}{4}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\pi}{4} + 2k\pi = -\frac{7\pi}{4} \Rightarrow k = -1.$$

S-a obţinut $(\mathrm{Log}\, z)_{k=-1} = \ln|z| + \mathrm{j}(\arg z - 2\pi)$.

Direct, se observă că este o ramură olomorfă pe $\mathbb{C} \setminus T$ (deci $\forall n \in \mathbb{N}^*$, f este derivabilă de ordin n pe $\mathbb{C} \setminus T$), şi în particular în $a = -\mathrm{j}$. De menţionat că T este o tăietură ce uneşte punctele critice logaritmice 0 cu $\infty_{\mathbb{C}}$.

$$-\mathrm{j} = 1\left(\cos\frac{3\pi}{2} + \mathrm{j}\,\frac{3\pi}{2}\right); \frac{1}{-\mathrm{j}} = \mathrm{j}; \frac{1}{(-\mathrm{j})^2} = -1; \frac{1}{(-\mathrm{j})^3} = -\mathrm{j}; \frac{1}{(-\mathrm{j})^4} = 1; ...$$

$$\begin{array}{ll}
f_k(z) = (\mathrm{Log}\, z)_{k=-1} & f_k(-\mathrm{j}) = (\mathrm{Log}\,(-\mathrm{j}))_{k=-1} = \ln 1 + \mathrm{j}\left(\frac{3\pi}{2} - 2\pi\right) = -\frac{\pi}{2}\mathrm{j} \\
f_k'(z) = z^{-1} & f_k'(-\mathrm{j}) = \mathrm{j} \\
f_k''(z) = -1z^{-2} & f_k''(-\mathrm{j}) = -1 \cdot (-1) \\
f_k'''(z) = (-1)(-2)z^{-3} & f_k'''(-\mathrm{j}) = (-1)(-2) \cdot (-\mathrm{j}) \\
f_k^{(4)}(z) = (-1)(-2)(-3)z^{-4} & f_k^{(4)}(-\mathrm{j}) = (-1)(-2)(-3) \cdot (1) \\
... & ... \\
f_k^{(n)}(z) = (-1)^{n-1}(n-1)!z^{-n} & f_k^{(n)}(-\mathrm{j}) = (-1)^{n-1}(n-1)!\,\mathrm{j}^n \\
... & ...
\end{array}$$

Atunci f este dezvoltabilă în serie Taylor pe $\Delta(-\mathrm{j}, R)$ şi

$$f_{-1}(z) = -\frac{\pi}{2}\mathrm{j} + \frac{\mathrm{j}}{1!}(z+\mathrm{j}) + \frac{1}{2!}(z+\mathrm{j})^2 + \frac{-2\,\mathrm{j}}{3!}(z+\mathrm{j})^3 + ... + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!\,\mathrm{j}^n}{n!}(z+\mathrm{j})^n + ...,$$

$\forall z \in \Delta(-\mathrm{j}, R)$.

Se determină raza de convergenţă a seriei de puteri ale $z - 0$:

$$\rho=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^{n-1}\,\mathrm{j}^n}{n}\right|}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left|\frac{1}{n}\right|}=1\Rightarrow R=1;\ \exists\rho_1=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\dfrac{(-1)^{n-1}\,\mathrm{j}^{n+1}}{n}\right|}{\left|\dfrac{(-1)^{n}\,\mathrm{j}^{n}}{n+1}\right|}=\frac{n+1}{n}=1$$

$\Rightarrow R=1.$

Se aplică Teorema Cauchy-Hadamard.

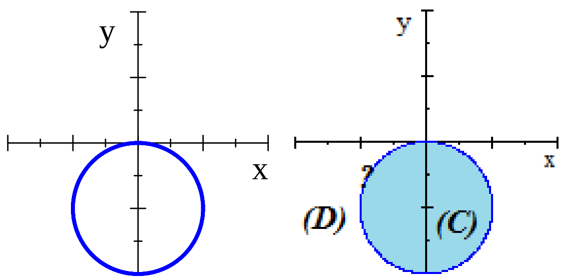
•Seria este absolut convergentă, pentru $\forall z\in\mathbb{C}$ cu $|z+\mathrm{j}|<1$.

•Seria deste divergentă, pentru $\forall z\in\mathbb{C}$ cu $|z+\mathrm{j}|>1$.

•Pentru $z\in\mathbb{C}$ cu $|z+\mathrm{j}|=1$ nu se poate preciza natura seriei, se face studiu separat; nu se va studia aici. Deci

$$\boxed{(\mathrm{Log}\,z)_{k=-1}=-\tfrac{\pi}{2}\,\mathrm{j}+\frac{\mathrm{j}}{1!}(z+\mathrm{j})+\frac{1}{2!}(z+\mathrm{j})^2+...+\frac{(-1)^{n-1}\,\mathrm{j}^n}{n}(z+\mathrm{j})^n+...,\forall z\in\mathbb{C}\text{ cu }|z+\mathrm{j}|<1,}$$

$$\boxed{(\mathrm{Log}\,z)_{k=-1}=-\tfrac{\pi}{2}\,\mathrm{j}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\,\mathrm{j}^n}{n}(z+\mathrm{j})^n,\forall z\in\mathbb{C}\text{ cu }|z+\mathrm{j}|<1.}$$



Exercițiul 3. Să se dezvolte în serie de puteri ale lui z funcțiile

a) $f:D\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C},f(z)=\dfrac{1}{z^5-1}$; **b)** $f:D\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C},f(z)=\dfrac{z+1}{z-1}$;

Rezolvare. Se folosește seria geometrică

$$(*)\ \frac{1}{1-z}=1+z+z^2+...+z^n+...,\forall z\in\mathbb{C}\text{ cu }|z|<1.$$

Pe domeniul de PC/SC se poate schimba variabila. Pe domeniul comun de PC/SC se pot aduna termen cu termen două serii și se poate înmulți o serie cu un scalar nenul.

a) $f(z)=\dfrac{1}{z^5-1}=\dfrac{-1}{1-z^5}\underset{\text{cu }z\rightsquigarrow z^5}{\overset{(*)}{=}}-1\left(1+z^5+\left(z^5\right)^2+\left(z^5\right)^3+...+\left(z^5\right)^n+...\right)=-1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)\,z^{5n}$,

$\forall z\in\mathbb{C}$ cu $\left|z^5\right|<1$, adică $|z|<1$.

b) $f(z)=\dfrac{z+1}{z-1}=\dfrac{z-1+2}{z-1}=1-2\dfrac{1}{1-z}\overset{(*)}{=}1-2\left(1+z+z^2+...+z^n+...\right)=-1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-2)\,z^n$,

$\forall z\in\mathbb{C}$ cu $|z|<1$.

Exercițiul 4. Să se dezvolte în serie de puteri ale lui $z-1$ funcțiile

a) $f:D\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C},f(z)=\dfrac{z}{z+2}$;**b)** $f:D\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C},f(z)=\dfrac{z}{z^2-2z+5}$;

Rezolvare. Se folosește seria geometrică

$$(*)\ \frac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3+...+z^n+...,\forall z\in\mathbb{C}\text{ cu }|z|<1.$$

Pe domeniul de PC/SC se poate schimba variabila. Pe domeniul comun de PC/SC se pot aduna termen cu termen două serii, și se poate înmulți o serie cu un scalar nenul.

A dezvolta $f(z)$ după puterile lui $z-1$ înseamnă a dezvolta $g(\omega)$ dată ulterior după puterile lui

$\omega = z - 1.$

a) $f(z) = \dfrac{(z-1)+1}{(z-1)+3} \Rightarrow g(\omega) = \dfrac{\omega+1}{\omega+3} = 1 - \dfrac{2}{\omega+3} = 1 - \frac{2}{3}\dfrac{1}{1-\left(-\frac{\omega}{3}\right)} \underset{\text{cu } z \rightsquigarrow -\frac{\omega}{3}}{\overset{(*)}{=}}$

$= 1 - \frac{2}{3}\left(1 + \left(-\frac{\omega}{3}\right) + \left(-\frac{\omega}{3}\right)^2 + ... + \left(-\frac{\omega}{3}\right)^n + ...\right) =$

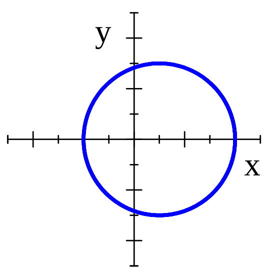
$= \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2}\omega + \frac{-2}{3^3}\omega^2 + ... + \frac{2(-1)^{n+1}}{3^{n+1}}\omega^n + ... = \frac{1}{3} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{3^{n+1}}\omega^n,$

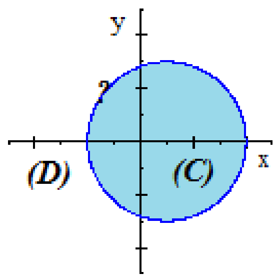
$\forall \omega \in \mathbb{C}$ cu $\left|\frac{-\omega}{3}\right| < 1$, adică $|\omega| < 3$.

Atunci

$f(z) = \dfrac{z}{z+2} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2}(z-1) + \frac{-2}{3^3}(z-1)^2 + ... + \frac{2(-1)^{n+1}}{3^{n+1}}(z-1)^n + ... =$

$= \frac{1}{3} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{3^{n+1}}(z-1)^n, \forall z \in \mathbb{C}$ cu $|z-1| < 3$.





b) $f(z) = \dfrac{z}{z^2 - 2z + 5} = \dfrac{(z-1)+1}{(z-1)^2+4} \Rightarrow g(\omega) = \dfrac{\omega+1}{\omega^2+4} = \omega\dfrac{1}{\omega^2+4} + \dfrac{1}{\omega^2+4} =$

$= \frac{\omega}{4}\dfrac{1}{1-\left(-\frac{\omega^2}{4}\right)} + \frac{1}{4}\dfrac{1}{1-\left(-\frac{\omega^2}{4}\right)} \underset{\text{cu } z \rightsquigarrow -\left(\frac{\omega}{2}\right)^2}{\overset{(*)}{=}}$

$= \frac{\omega}{4}\left(1 + \left(-\frac{\omega^2}{4}\right)^1 + \left(-\frac{\omega^2}{4}\right)^2 + ... + \left(-\frac{\omega^2}{4}\right)^n + ...\right) +$

$+ \frac{1}{4}\left(1 + \left(-\frac{\omega^2}{4}\right)^1 + \left(-\frac{\omega^2}{4}\right)^2 + ... + \left(-\frac{\omega^2}{4}\right)^n + ...\right) =$

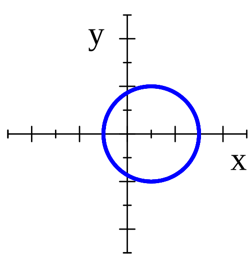
$= \left(\frac{1}{2^2}\omega + \frac{-1}{2^4}\omega^3 + \frac{1}{2^6}\omega^5 + ... + \frac{(-1)^n}{2^{2n+2}}\omega^{2n+1} + ...\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{-1}{2^4}\omega^2 + \frac{1}{2^6}\omega^4 + ... + \frac{(-1)^n}{2^{2n+2}}\omega^{2n} + ...\right) =$

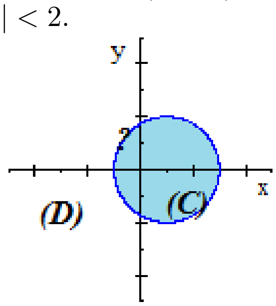
$= \left(\frac{1}{2^2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n+2}}\omega^{2n}\right) + \left(\frac{1}{2^2}\omega + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n+2}}\omega^{2n+1}\right), \forall \omega \in \mathbb{C}$ cu $\left|-\frac{\omega^2}{4}\right| < 1$, adică $|\omega| < 2$.

Atunci

$f(z) = \left(\frac{1}{2^2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n+2}}(z-1)^{2n}\right) + \left(\dfrac{1}{2^2}(z-1) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n+2}}(z-1)^{2n+1}\right),$

$\forall z \in \mathbb{C}$ cu $|z-1| < 2$.





5.4. Dezvoltarea în serie Laurent a unei funcţii complexe cu valori complexe

Teorema 1 (**Laurent**). Fie cercurile concentrice în a, $\gamma_1 = \mathcal{C}(a; r_1)$ şi $\gamma_2 = \mathcal{C}(a; r_2)$ cu $r_1 < r_2$ şi coroana circulară

$$\Delta(a; r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C}; r_1 < |z - a| < r_2\}.$$

Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu multiplu conex a.î. $\Delta(a; r_1, r_2) \cup \gamma_1 \cup \gamma_2 \subseteq D$ şi $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Dacă $f \in \mathcal{H}(D)$ atunci, pentru orice $\gamma = \mathcal{C}(a, r) \subset \Delta(a; r_1, r_2)$ şi pentru orice $z \in \Delta(a; r_1, r_2)$, f este dezvoltabilă în serie Laurent "în jurul" lui a, adică

$$\boxed{f(z) = ... + \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + ... + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + ... + c_n(z-a)^n + ..., \forall z \in \Delta(a; r_1, r_2)} \tag{15}$$

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n, \forall z \in \Delta(a; r_1, r_2),} \tag{15'}$$

unde

$$c_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta, \forall n \in \mathbb{Z},$$

sunt coeficienţii dezvoltării lui f în **serie de puteri întregi** ale $z - a$.

Observaţia 5.4.1 -Teoremele de caracterizare pentru pol de ordin p, punct singular esenţial, punct singular removabil cu serii Laurent- A se vedea Curs şi tabelul de la tablă.

Exerciţiul 1. **a)** Să se dezvolte

$$f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = e^{\frac{1}{z-1}}.$$

în serie de puteri întregi ale $(z - 1)$. Să se deducă şi din dezvoltare că f are $a = 1$ un punct singular esenţial.

b) Fie $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}, f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$.

Să se dezvolte f în serie de puteri întregi ale $z - 0 = z$. Să se deducă şi din dezvoltare că f are $a = 0$ un punct singular removabil.

Rezolvare. A se vedea Curs.

Exerciţiul 2. Să se dezvolte în serie Laurent funcţia

$$f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$$

a) "în jurul" lui $a = 0$ pe $0 < |z| < 1$;**b)** "în jurul" lui $a = 0$ pe $1 < |z| < 2$;
c) "în jurul" lui $a = 0$ pe $|z| > 2$;**d)** "în jurul" lui $a = 1$ pe $0 < |z - 1| < 1$.
Să se precizeze punctele singulare ale f şi natura lor.

Rezolvare. A se vedea Curs.

Exerciţiul 3. Fie funcţia

$$f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = \frac{1}{z^3 - 6z^2 + 11z - 6}.$$

Să se dezvolte f în serie de puteri întregi ale lui z în domeniile
a) $|z| < 1$;**b)** $1 < |z| < 2$;**c)** $2 < |z| < 3$;
Apoi să se dezvolte f în serie de puteri întregi ale lui $z - 1$ în domeniul
d) $0 < |z - 1| < 1$;
Să se precizeze punctele singulare ale f şi natura lor.

Rezolvare. Conform definiţiei punctelor singulare ale unei funcţii, respectiv a polului simplu, se

deduce că $a = 1, a = 2, a = 3$ sunt poli de ordin 1 pentru f.
Se descompune f în fracţii simple:

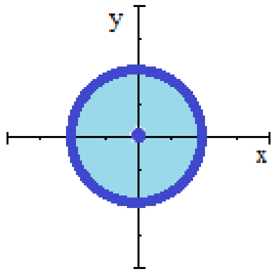
$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)(z-3)} = \frac{1}{2}\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2} + \frac{1}{2}\frac{1}{z-3}.$$

Folosind seria geometrică (10) $\Rightarrow$

$$(*)\ \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + ... + z^n + ..., \forall z \in \mathbb{C} \text{ cu } |z| < 1.$$

Pe domeniul de PC/SC se poate schimba variabila. Pe domeniul comun de PC/SC se pot aduna termen cu termen două serii şi se poate înmulţi o serie cu un scalar nenul.

a) "în jurul" lui $a = 0$ pe $|z - 0| < 1$; se dezvoltă f după puteri întregi ale $z - 0$.



$$\frac{1}{z-1} = \frac{-1}{1-z} \overset{(*)}{=} -\left(1 + z + z^2 + z^3 + ... + z^n + ...\right) = -1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)\, z^n, \forall z \in \mathbb{C} \text{ cu } |z| < 1$$

$$\frac{1}{z-2} = \frac{-1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} \underset{\text{cu } z \rightsquigarrow \frac{z}{2}}{\overset{(*)}{=}} \frac{-1}{2}\left(1 + \left(\tfrac{z}{2}\right) + \left(\tfrac{z}{2}\right)^2 + ... + \left(\tfrac{z}{2}\right)^n + ...\right) = \frac{-1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{2^{n+1}} z^n,$$

$\forall z \in \mathbb{C}$ cu $\left|\frac{z}{2}\right| < 1$, adică $|z| < 2$.

$$\frac{1}{z-3} = \frac{-1}{3}\frac{1}{1-\frac{z}{3}} \underset{\text{cu } z \rightsquigarrow \frac{z}{3}}{\overset{(*)}{=}} \frac{-1}{3}\left(1 + \left(\tfrac{z}{3}\right) + \left(\tfrac{z}{3}\right)^2 + ... + \left(\tfrac{z}{3}\right)^n + ...\right) = \frac{-1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{3^{n+1}} z^n,$$

$\forall z \in \mathbb{C}$ cu $\left|\frac{z}{3}\right| < 1$, adică $|z| < 3$.

Atunci, pe domeniul comun de convergenţă$\Rightarrow$

$$f(z) = \frac{1}{2}\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2} + \frac{1}{2}\frac{1}{z-3} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)\, z^n\right) - \left(\frac{-1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{2^{n+1}} z^n\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{3^{n+1}} z^n\right) =$$

$$= \frac{-1}{6} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{-1}{2}\frac{1}{3^{n+1}}\right) z^n =$$

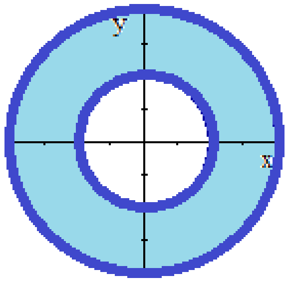
$$= \underbrace{0}_{\text{partea princ.}} + \underbrace{\frac{-1}{6} + ... + \left(\frac{-1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{-1}{2}\frac{1}{3^{n+1}}\right) z^n + ...}_{\text{partea tayloriană}},$$

$\forall z \in \mathbb{C}$ cu $|z| < 1$ şi $|z| < 2$ şi $|z| < 3$, adică, intersectând, cu $|z| < 1$.

$a = 1, a = 2, a = 3$ sunt poli de ordinul 1 pentru f din definiţia polului; nu se poate folosi partea principală a seriei Laurent anterioare, deoarece $|z| < 1$.

Din seria Laurent anterioară, ce are partea principală nulă, fiind chiar o serie Taylor deoarece este definită pe un întreg interior de cerc, se deduce că $z = 0$ este punct ordinar pentru f.

b) "în jurul" lui $a = 0$ pe $1 < |z - 0| < 2$; se dezvoltă f după puteri întregi ale $z - 0$.



$\frac{1}{z-1} \overset{\text{de la a)}}{=} -1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1) z^n, \forall z \in \mathbb{C}$ cu $\underline{|z| < 1}$-nu se poate folosi la intersectarea domeniilor de dezvoltare, încât să se obţină $\underline{|z| > 1}$.

Aici $\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} \underset{\text{cu } z \rightsquigarrow \frac{1}{z}}{\overset{(*)}{=}} \frac{1}{z}\left(1 + \left(\frac{1}{z}\right) + \left(\frac{1}{z}\right)^2 + ... + \left(\frac{1}{z}\right)^n + ...\right) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}$,

$\forall z \in \mathbb{C}$ cu $\underline{|z| > 1}$- se poate folosi la intersectarea domeniilor de dezvoltare, încât să se obţină $|z| > 1$.

$\frac{1}{z-2} \overset{\text{de la a)}}{=} \frac{-1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{2^{n+1}} z^n, \forall z \in \mathbb{C}$ cu $|z| < 2$.

$\frac{1}{z-3} \overset{\text{de la a)}}{=} \frac{-1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{3^{n+1}} z^n, \forall z \in \mathbb{C}$ cu $|z| < 3$.

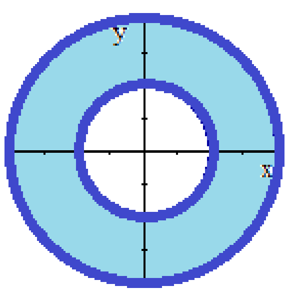
Atunci, pe domeniul comun de convergenţă$\Rightarrow$

$$f(z) = \frac{1}{2}\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2} + \frac{1}{2}\frac{1}{z-3} =$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n} - \left(\frac{-1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{2^{n+1}}z^n\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{3^{n+1}}z^n\right) =$$
$$= \underbrace{... + \frac{1}{2}\frac{1}{z^n} + ... + \frac{1}{2}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{z}}_{\text{partea principală}} + \underbrace{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{-1}{3}\right) + ... + \left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2}\frac{-1}{3^{n+1}}\right) z^n + ...}_{\text{partea tayloriană}},$$

$\forall z \in \mathbb{C}$ cu $|z| > 1$ şi $|z| < 2$ şi $|z| < 3$, adică, intersectând, cu $1 < |z| < 2$.

$a = 1, a = 2, a = 3$ sunt poli de ordinul 1 pentru f din definiţia polului; nu se poate folosi partea principală a seriei Laurent anterioare, deoarece $1 < |z| < 2$.

c) "în jurul" lui $a = 0$ pe $2 < |z| < 3$;



$\frac{1}{z-1} \overset{\text{de la b)}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}, \forall z \in \mathbb{C}$ cu $\underline{|z| > 1}$- se poate folosi la intersectarea domeniilor de dezvoltare, încât să se obţină $|z| > 2 > 1$.

$\frac{1}{z-2} \overset{\text{de la a),b)}}{=} \frac{-1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{2^{n+1}} z^n, \forall z \in \mathbb{C}$ cu $\underline{|z| < 2}$-nu se poate folosi la intersectarea domeniilor de dezvoltare, încât să se obţină $\underline{|z| > 2}$.

Aici $\dfrac{1}{z-2} = \dfrac{1}{z}\dfrac{1}{1-\frac{2}{z}} \underset{\text{cu } z\rightsquigarrow\frac{2}{z}}{\overset{(*)}{=}} \dfrac{1}{z}\left(1+\left(\frac{2}{z}\right)+\left(\frac{2}{z}\right)^2+...+\left(\frac{2}{z}\right)^n+...\right) = \dfrac{1}{z}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\frac{1}{z^{n+1}},$

$\forall z \in \mathbb{C}$ cu $\left|\frac{2}{z}\right| > 1$, adică $\underline{|z| > 2}$- se poate folosi la intersectarea domeniilor de dezvoltare, încât să se obţină $\underline{|z| > 2}$.

$\dfrac{1}{z-3} \overset{\text{de la a),b)}}{=} \frac{-1}{3} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{3^{n+1}}z^n, \forall z \in \mathbb{C}$ cu $|z| < 3$.

Atunci, pe domeniul comun de convergenţă$\Rightarrow$

$$f(z) = \frac{1}{2}\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2} + \frac{1}{2}\frac{1}{z-3} =$$

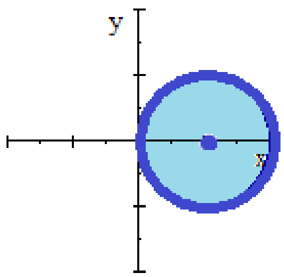
$$= \tfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n} - \left(\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}2^n\tfrac{1}{z^{n+1}}\right) + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{-1}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{-1}{3^{n+1}}z^n\right) =$$

$$= \underbrace{...+\left(\frac{1}{2}-2^n\right)\frac{1}{z^{n+1}}+\left(\frac{1}{2}-2^{n-1}\right)\frac{1}{z^n}+...+\left(\frac{1}{2}-2\right)\frac{1}{z^2}+\left(\frac{1}{2}-1\right)\frac{1}{z}}_{\text{partea principală}} + \underbrace{\frac{-1}{6}+...+\frac{-1}{2}\frac{1}{3^{n+1}}z^n+...}_{\text{partea tayloriană}},$$

$\forall z \in \mathbb{C}$ cu $|z| > 1$ şi $|z| > 2$ şi $|z| < 3$, adică, intersectând, $2 < |z| < 3$.

$a = 1, a = 2, a = 3$ sunt poli de ordinul 1 pentru f din definiţia polului; nu se poate folosi partea principală a seriei Laurent anterioare, deoarece $2 < |z| < 3$.

d) "în jurul" lui $a = 1$ pe $0 < |z-\underline{1}| < 1$; adică se dezvoltă f după puteri întregi ale $z-\underline{1}$.



$\dfrac{1}{z-1} = \dfrac{1}{z-1}, \forall z \in \mathbb{C}$ cu $0 < |z-1|$

$\dfrac{1}{z-2} = -1\cdot\dfrac{1}{1-(z-1)} \underset{\text{cu } z\rightsquigarrow(z-1)}{\overset{(*)}{=}} -\left(1+(z-1)+(z-1)^2+...+(z-1)^n+...\right) =$

$= -1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)(z-1)^n, \forall z \in \mathbb{C}$ cu $|z-1| < 1$.

$\dfrac{1}{z-3} = -1\cdot\dfrac{1}{2-(z-1)} = \frac{-1}{2}\dfrac{1}{1-\frac{z-1}{2}} \underset{\text{cu } z\rightsquigarrow\frac{z-1}{2}}{\overset{(*)}{=}} \frac{-1}{2}\left(1+\left(\frac{z-1}{2}\right)+\left(\frac{z-1}{2}\right)^2+...+\left(\frac{z-1}{2}\right)^n+...\right) =$

$= \frac{-1}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{2^{n+1}}(z-1)^n, \forall z \in \mathbb{C}$ cu $\left|\frac{z-1}{2}\right| < 1$, adică $|z-1| < 2$.

Atunci, pe domeniul comun de convergenţă$\Rightarrow$

$$f(z) = \frac{1}{2}\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2} + \frac{1}{2}\frac{1}{z-3} =$$

$$= \tfrac{1}{2}\frac{1}{z-1} + \left(1+\sum_{n=1}^{\infty}(z-1)^n\right) + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{-1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{-1}{2^{n+1}}(z-1)^n\right) =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\frac{1}{z-1}}_{\text{partea princ.}} + \underbrace{\left(1-\frac{1}{2^2}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{-1}{2^{n+2}}\right)(z-1)^n}_{\text{partea tayloriană}},$$

$\forall z \in \mathbb{C}$ cu $0 < |z-1| < 1$.

$a = 1$ este pol de ordin 1 pentru f şi din definiţia polului; şi deoarece partea principală a seriei Laurent anterioare are un singur termen.

$a=2$ este pol de ordin 1 pentru f din definiţia polului; nu se poate folosi partea principală a seriei Laurent anterioare, deoarece coroana circulară $0<|z-1|<1$ este centrată în 1.
$a=3$ este pol de ordin 1 pentru f din definiţia polului; nu se poate folosi partea principală a seriei Laurent anterioare, deoarece coroana circulară $0<|z-1|<1$ este centrată în 1;

Exerciţiul 4. Să se dezvolte în serie Laurent "în jurul" lui $a=1$ funcţia
$f: D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, f(z)=\sin \dfrac{z}{z-1}$.
Rezolvare. Se descompune f astfel încât să se scrie drept combinaţie liniară de serii de puteri ale $(z-1)$:

$$f(z)=\sin \frac{z-1+1}{z-1}=\sin \left(1+\frac{1}{z-1}\right)=\sin 1 \cos \frac{1}{z-1}+\cos 1 \sin \frac{1}{z-1}$$

Se folosesc seriile $(3),(4)$. Pe domeniul de PC/SC se poate schimba variabila. Pe domeniul comun de PC/SC se pot aduna termen cu termen două serii şi se poate înmulţi o serie cu un scalar nenul. Atunci

$$f(z)=\sin 1 \cos \left(\frac{1}{z-1}\right)+\cos 1 \sin \left(\frac{1}{z-1}\right) \underset{\text{cu } z \rightsquigarrow -\frac{1}{z-1}}{\overset{(3),(4)}{=}}$$

$$=\sin 1\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2 n)!}\left(\frac{1}{z-1}\right)^{2 n}\right)+\cos 1\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2 n+1)!}\left(\frac{1}{z-1}\right)^{2 n+1}\right)=$$

$$=\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin 1}{(2 n)!} \frac{1}{(z-1)^{2 n}}+\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos 1}{(2 n+1)!} \frac{1}{(z-1)^{2 n+1}}}_{\text{partea principală}},$$

$$\forall z \in \mathbb{C}, \text{ cu }\left|\frac{1}{z-1}\right|<+\infty, \text{ adică } 0<|z-1|<+\infty.$$

Deoarece dezvoltarea anterioară pe coroana circulară $0<|z-1|<+\infty$ are partea principală cu un număr infinit de termeni$\Rightarrow$ $a=1$ este punct singular esenţial pentru f.

Exerciţiul 5. Să se dezvolte în serie Laurent "în jurul" lui $a=0$, după puteri ale $z-0$, funcţia
a) $f: D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, f(z)=z^3 \sin \dfrac{1}{z}$.
Rezolvare. Se foloseşte seria (4). Pe domeniul de PC/SC se poate schimba variabila. Pe domeniul comun de PC/SC se pot aduna termen cu termen două serii şi se poate înmulţi o serie cu un scalar nenul. Atunci

$$f(z)=z^3 \sin \frac{1}{z} \underset{\text{cu } z \rightsquigarrow -\frac{1}{z}}{\overset{(4)}{=}} z^3\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2 n+1)!}\left(\frac{1}{z}\right)^{2 n+1}\right)=$$

$$=\underbrace{\ldots+\frac{(-1)^n}{(2 n+1)!} \frac{1}{z^{2 n-2}}+\ldots+\frac{1}{5!} \frac{1}{z^2}}_{\text{partea principală}}+\underbrace{\frac{-1}{3!}+z^2}_{\text{partea tayloriană}},$$

$$\forall z \in \mathbb{C}, \text{ cu }\left|\frac{1}{z}\right|<+\infty, \text{ adică } 0<|z|<+\infty.$$

Deoarece dezvoltarea anterioară pe coroana circulară $0<|z|<+\infty$ are parte principală cu o infinitate de termeni$\Rightarrow$ $a=0$ este punct singular esenţial pentru f.