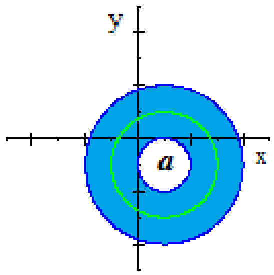
SEMINAR NR. 9, REZOLVĂRI
Matematici Speciale, AIA

6. Teoria reziduurilor

6.1. Reziduuri. Definiţie, teorema de calcul a reziduurilor, teorema reziduurilor

Definiţia 1 Fie cercurile concentrice în a, $\gamma_1 = \mathcal{C}(a;\varepsilon)$, cu $\varepsilon > 0$ suficient de mic, şi $\gamma_2 = \mathcal{C}(a;r_2)$ cu $r_2 > \varepsilon > 0$ şi coroana circulară



$\Delta(a;\varepsilon,r_2) = \{z \in \mathbb{C}; \varepsilon < |z-a| < r_2\}$.

Fie $f : \Delta(a;\varepsilon,r_2) \to \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(\Delta)$ astfel încât $z = a$ să fie punct singular izolat pentru f. Atunci, pentru orice cerc $\gamma = \mathcal{C}(a,r) \subset \Delta(a;\varepsilon,r_2)$ se numeşte *reziduul funcţiei f în punctul a* numărul complex

$\boxed{\operatorname{rez}(f;a) = \dfrac{1}{2\pi\,\mathrm{j}}\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz.}$ Se notează şi $\operatorname{rez} f(a); \operatorname{Rez}(f;a); \operatorname{Rez} f(a)$.

(este unic, independent de cercul γ ales).

Teorema 1 (**de calcul a reziduurilor**). În ipotezele definiţiei anterioare, reziduul funcţiei f în punctul a se calculează astfel:

1°. În general,

$\boxed{\operatorname{rez}(f;a) = c_{-1}}$ = coeficientul lui $\dfrac{1}{z-a}$ din dezvoltarea în serie Laurent a f pe $\Delta(a;\varepsilon,r_2)$, în "jurul" lui a, în serie de puteri întregi ale lui $z-a$.

2°. În particular, dacă a este pol de ordin p pentru f :

$$\boxed{\operatorname{rez}(f;a) = \frac{1}{(p-1)!}\lim_{z\to a}\left(\left((z-a)^p f(z)\right)^{(p-1)}\right).}$$

În particular, dacă a este pol de ordin 1 pentru f :

$$\boxed{\operatorname{rez}(f;a) = \lim_{z\to a}\left((z-a)f(z)\right).}$$

3°. În particular, dacă $f(z) = \dfrac{g(z)}{h(z)}$, cu $g(a) \neq 0, h(a) = 0, h'(a) \neq 0$, iar $g, h \in \mathcal{H}(V)$, cu $V \in \mathcal{V}(a)$, atunci

$$\boxed{\operatorname{rez}(f;a) = \frac{g(a)}{h'(a)}.}$$

Teorema 2 (**teorema reziduurilor**). Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu simplu conex şi $\gamma \subseteq D$ o curbă simplă, închisă. Fie f o funcţie ce are în $\operatorname{Int}\gamma$ un număr finit de puncte singulare izolate $a_1, ..., a_n$ şi a.î. $f \in \mathcal{H}(D \setminus \{a_1,...,a_n\})$. Atunci

$$\boxed{\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi\,\mathrm{j}\cdot\sum_{k=1}^{n}\operatorname{rez}(f;a_k) = 2\pi\,\mathrm{j}\cdot\left(\operatorname{rez}(f;a_1)+...+\operatorname{rez}(f;a_n)\right).}$$

Teorema 3 (**teorema semireziduurilor**). Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu simplu conex şi $\gamma \subseteq D$ o curbă simplă, închisă. Fie f o funcţie ce are în $\operatorname{Int}\gamma$ un număr finit de puncte singulare izolate $a_1, ..., a_n$, precum şi $b_1, ..., b_m$ un număr finit de poli de ordin 1 situaţi pe γ, a.î. $f \in \mathcal{H}(D \setminus \{a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_m\})$. Atunci

$$\boxed{\text{v.p.}\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi\,\mathrm{j}\cdot\sum_{k=1}^{n}\operatorname{rez}(f;a_k) + \mathrm{j}\cdot\sum_{l=1}^{m}(\pi-\delta_l)\operatorname{rez}(f;b_l),}$$

unde $\pi - \delta_l$ este unghiul format de cele două semitangente la γ în b_l.
Dacă γ admite tangentă în toate punctele b_l la γ, atunci $\pi - \delta_l = \pi$ şi

$$\boxed{\text{v.p.}\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi\,\mathrm{j}\cdot\sum_{k=1}^{n}\operatorname{rez}(f;a_k) + \pi\,\mathrm{j}\cdot\sum_{l=1}^{m}\operatorname{rez}(f;b_l)} \text{ sau}$$

$$\boxed{\text{v.p.}\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi\,\mathrm{j}\cdot(\operatorname{rez}(f;a_1)+...+\operatorname{rez}(f;a_n)) + \pi\,\mathrm{j}\cdot(\operatorname{rez}(f;b_1)+...+\operatorname{rez}(f;b_m)).}$$

Observaţie. Se menţionează că:

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + ... + z^n + ..., \forall z \in \mathbb{C} \text{ cu } |z| < 1 \tag{$*$}$$

$$e^z = 1 + \frac{1}{1!}z + \frac{1}{2!}z^2 + ... + \frac{1}{n!}z^n + ..., \forall z \in \mathbb{C} \tag{2}$$

$$\cos z = 1 - \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{4!}z^4 ... + \frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n} + ..., \forall z \in \mathbb{C} \tag{3}$$

$$\sin z = \frac{1}{1!}z - \frac{1}{3!}z^3 + ... + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1} + ..., \forall z \in \mathbb{C} \tag{4}$$

$$\operatorname{ch} z = 1 + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{4!}z^4 ... + \frac{1}{(2n)!}z^{2n} + ..., \forall z \in \mathbb{C} \tag{5}$$

$$\operatorname{sh} z = \frac{1}{1!}z + \frac{1}{3!}z^3 + ... + \frac{1}{(2n+1)!}z^{2n+1} + ..., \forall z \in \mathbb{C} \tag{6}$$

Exerciţiul 1. Să se determine punctele singulare şi reziduurile funcţiei în aceste puncte pentru:
a) $f(z) = \dfrac{\sin z}{(z^3 - z)(z - \mathrm{j})}$.
Rezolvare. A se vedea Curs.
b) $f(z) = \dfrac{e^{\frac{1}{z-1}}}{z}$.
Rezolvare. A se vedea Curs.

Exerciţiul 2. Să se calculeze:
a) $\operatorname{rez}(f;-1)$ şi $\operatorname{rez}(f;1)$ pentru $f(z) = \dfrac{z}{(z+1)(z-1)^3}$;
b) $\operatorname{rez}(f;0)$ pentru $f(z) = z^k \cdot e^{\frac{1}{z}}$, cu $k \in \mathbb{Z}$;
c) $\operatorname{rez}\left(f;\frac{\pi}{2}\right)$ pentru $f(z) = e^{\mathrm{j}\,z}\operatorname{tg} z$.
Rezolvare. a) A se vedea Curs.
b) $\operatorname{rez}(f;0)$ pentru $f(z) = z^k \cdot e^{\frac{1}{z}}$, cu $k \in \mathbb{Z}$.
•Se determină punctele singulare izolate ale f.

$*z_1 = 0$ este

-dacă $k \in \mathbb{Z}, k \geq 1$, este punct singular esenţial, deoarece $\nexists \lim\limits_{z\to 0}\left(z^k \cdot e^{\frac{1}{z}}\right)$;

-dacă $k \in \mathbb{Z}, k < 1$, este punct removabil, deoarece $\exists \lim\limits_{z\to 0}\left(z^k \cdot e^{\frac{1}{z}}\right) = 0$;

•Se aplică teorema de calcul a reziduurilor:

$\operatorname{rez}(f;-1) \overset{-1 \text{ e punct singular}}{\underset{\text{conform } 1.}{=}} c_{-1}$.

Se dezvoltă f în serie Laurent, de puteri întregi ale $z-0$, pe $\Delta(0;\varepsilon,r_2)$, cu $\varepsilon>0$ foarte mic.

$$e^{\frac{1}{z}} \overset{(2) \text{ cu } z \rightsquigarrow \frac{1}{z}}{=} 1+\frac{1}{1!}\left(\frac{1}{z}\right)+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{z}\right)^2+...+\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z}\right)^n+..., \forall z\in\mathbb{C}, \text{ cu } \frac{1}{z}\in\mathbb{C}, \text{ adică } 0<|z|.$$

$$f(z)=z^k\cdot e^{\frac{1}{z}}=z^k\cdot\left(1+\frac{1}{1!}\left(\frac{1}{z}\right)+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{z}\right)^2+...+\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z}\right)^n+...\right) \overset{\text{se scrie din dezvoltarea L.}}{\underset{\text{doar termenul cu } c_{-1}}{=}}$$

$$=...+c_{-1}\cdot\frac{1}{z-1}+..., \forall z\in\mathbb{C}, \text{ cu } 0<|z-0|<+\infty,$$

unde $c_{-1}=\begin{cases}\frac{1}{(k+1)!}, & \text{dacă } k\in\mathbb{Z}, k\geq 1\\ 0 & \text{dacă } k\in\mathbb{Z}, k<-1\end{cases}$

Se obţine: $\operatorname{rez}(f;0)=c_{-1}=\begin{cases}\frac{1}{(k+1)!}, & \text{dacă } k\in\mathbb{Z}, k\geq 1\\ 0 & \text{dacă } k\in\mathbb{Z}, k<-1\end{cases}$.

c) $\operatorname{rez}\left(f;\frac{\pi}{2}\right)$ pentru $f(z)=e^{\mathrm{j}\,z}\operatorname{tg} z$.

•Se determină punctele singulare izolate ale f.

$*z_1=\frac{\pi}{2}$ este pol de ordin 1 pentru f.

•Se aplică teorema de calcul a reziduurilor pentru

$f(z)=e^{\mathrm{j}\,z}\operatorname{tg} z=\dfrac{e^{\mathrm{j}\,z}\cdot\sin z}{\cos z}$.

$$\operatorname{rez}\left(f;\tfrac{\pi}{2}\right) \overset{\frac{\pi}{2} \text{ e pol de ordin 1}}{\underset{\text{conform } 2.}{=}} \lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\left(\left(z-\tfrac{\pi}{2}\right)\frac{e^{\mathrm{j}\,z}\cdot\sin z}{\cos z}\right)=\lim_{w\to 0}\left(w\cdot\frac{e^{\mathrm{j}\left(w+\frac{\pi}{2}\right)}\cdot\sin\left(w+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(w+\frac{\pi}{2}\right)}\right)$$

$$=\lim_{w\to 0}\left(w\cdot\frac{e^{\mathrm{j}\left(w+\frac{\pi}{2}\right)}\cdot\cos w}{-\sin w}\right)=\lim_{w\to 0}\left(\frac{w}{\sin w}\cdot\left(-e^{\mathrm{j}\left(w+\frac{\pi}{2}\right)}\cdot\cos w\right)\right)=-1\cdot e^{\mathrm{j}\left(0+\frac{\pi}{2}\right)}\cdot\cos 0=$$

$$=-e^{\mathrm{j}\,\frac{\pi}{2}}=-\left(\cos\tfrac{\pi}{2}+\mathrm{j}\sin\tfrac{\pi}{2}\right)=-\,\mathrm{j}\,.$$

Sau:

$$\operatorname{rez}\left(f;\tfrac{\pi}{2}\right) \overset{\frac{\pi}{2} \text{ e pol de ordin 1}}{\underset{\text{conform } 2^3}{=}} =\left.\left(\frac{e^{\mathrm{j}\,z}\cdot\sin z}{(\cos z)'}\right)\right|_{z=\frac{\pi}{2}}=\left.\left(\frac{e^{\mathrm{j}\,z}\cdot\sin z}{-\sin z}\right)\right|_{z=\frac{\pi}{2}}=-e^{\mathrm{j}\,\frac{\pi}{2}}=$$

$$=-\left(\cos\tfrac{\pi}{2}+\mathrm{j}\sin\tfrac{\pi}{2}\right)=-\,\mathrm{j}\,.$$

Exerciţiul 3. Să se calculeze

a) $\mathcal{I}=\displaystyle\int_{|z|=R}\frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}dz$, cu discuţie după $R>0$.

b) $\mathcal{I}=\displaystyle\int_{|z|=R}\frac{z^3e^{\frac{1}{z}}}{z+1}dz$, unde (i) $|z|=\frac{\sqrt{2}}{2}$; (ii) $|z|=\sqrt{2}$.

c) $\mathcal{I}=\displaystyle\int_{\gamma}\frac{1+\sin\frac{\pi}{z}}{1+z}dz$, unde curba γ este elipsa $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, cu $a>1, b>0$, parcursă o singură dată în sens trigonometric.

d) $\mathcal{I}=\displaystyle\int_{|z|=R}\sin^k\left(\tfrac{1}{z}\right)dz$, unde $R>0, k\in\mathbb{N}$.

Rezolvare. a) $\mathcal{I}=\displaystyle\int_{|z|=R}\frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}dz$, cu discuţie după $R>0$.

<u>etapele $1,2,3$</u> - calculul integralei cu definiţia. Nu, din cauză că este greu de exprimat

$f(z)=u(x,y)+\mathrm{j}\,v(x,y)$

etapa 4 - calculul integralei cu teoremele Cauchy. Nu, din cauză că f are $a=0$ punct singular esenţial situat în $\operatorname{Int}\gamma$.

etapa 5 -calculul integralei cu teoria reziduurilor.

•Se reprezintă curba γ $\gamma : |z| = R, R > 0$. Este un cerc centrat în 0 şi de rază R. Este curbă netedă, simplă, închisă.

•Se determină punctele singulare izolate ale

$f(z) = \dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}$:

$z_1 = 1$ pol de ordin 1 şi

$z_2 = 0$ punct singular esenţial situat în $\operatorname{Int}\gamma$ independent de $R > 0$.

Se reprezintă pe cazuri.

•Se aplică teorema reziduurilor sau a semireziduurilor:

caz $R \in]0,1[$ $\Rightarrow a_1 = z_1 = 1 \in \operatorname{Ext}\gamma$, $a_2 = z_2 = 0 \in \operatorname{Int}\gamma$.

Se alege D simplu conex a.î. $\gamma \cup \operatorname{Im}\gamma \subset D$ şi $1 \notin D$ şi $f \in \mathcal{H}(D \setminus \{0\}) \underset{\text{pe dom. s. conexe}}{\overset{\text{teor. reziduurilor}}{\Rightarrow}}$

$\mathcal{I} = 2\pi \,\mathrm{j} \cdot \operatorname{rez}(f;0)$.

caz $R = 1$ $\Rightarrow a_1 = z_1 = 1 \in \gamma$, $a_2 = z_2 = 0 \in \operatorname{Int}\gamma$.

Se alege D simplu conex a.î. $\gamma \cup \operatorname{Im}\gamma \subset D$ şi $f \in \mathcal{H}(D \setminus \{0,1\}) \underset{\text{pe dom. s. conexe}}{\overset{\text{teor. semireziduurilor}}{\Rightarrow}}$

$\mathcal{I} = 2\pi \,\mathrm{j} \cdot \operatorname{rez}(f;0) + \pi \,\mathrm{j} \cdot \operatorname{rez}(f;1)$.

caz $R > 1$ $\Rightarrow a_1 = z_1 = 1 \in \operatorname{Int}\gamma$, $a_2 = z_2 = 0 \in \operatorname{Int}\gamma$.

Se alege D simplu conex a.î. $\gamma \cup \operatorname{Im}\gamma \subset D$ şi $f \in \mathcal{H}(D \setminus \{0,1\}) \underset{\text{pe dom. s. conexe}}{\overset{\text{teor. reziduurilor}}{\Rightarrow}}$

$\mathcal{I} = 2\pi \,\mathrm{j} \cdot (\operatorname{rez}(f;0) + \operatorname{rez}(f;1))$.

•Se aplică teorema de calcul a reziduurilor:

$$\operatorname{rez}(f;1) \underset{\text{conform 2}^{\cdot}}{\overset{\text{1 e pol de ordin 1}}{=}} \lim_{z\to 1}((z-1)f(z)) = \lim_{z\to 1}\left((z-1)\frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}\right) = \lim_{z\to 1}\left(-e^{\frac{1}{z}}\right) = -e.$$

$\operatorname{rez}(f;0) \underset{\text{conform 1}^{\cdot}}{\overset{\text{0 e punct sing. esenţial}}{=}} c_{-1}$ =coef. lui $\dfrac{1}{z-0}$ din dezvoltarea în serie Laurent a f în "jurul" lui 0, pe $\Delta(0;\varepsilon,r_2)$, cu $\varepsilon > 0$ foarte mic.

Se scrie: $f(z) = \dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z} = \dfrac{1}{1-z} \cdot e^{\frac{1}{z}}$.

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + ... + z^n + ..., \forall z \in \mathbb{C} \text{ cu } |z| < 1.$$

$$e^{\frac{1}{z}} \overset{(2) \text{ cu } z \rightsquigarrow \frac{1}{z}}{=} 1 + \frac{1}{1!}\left(\frac{1}{z}\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{z}\right)^2 + ... + \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z}\right)^n + ..., \forall z \in \mathbb{C} \text{ cu } \left|\frac{1}{z}\right| < +\infty, \text{ adică } |z| > 0.$$

Atunci, pe domeniul comun de convergenţă a dezvoltărilor anterioare în serie$\Rightarrow$

$$f(z) = \left(1 + z + z^2 + z^3 + ... + z^n + ...\right) \cdot$$

$$\cdot \left(1 + \frac{1}{1!}\frac{1}{z} + \frac{1}{2!}\frac{1}{z^2} + ... + \frac{1}{n!}\frac{1}{z^n} + ...\right) \underset{\text{doar termenul cu } c_{-1}}{\overset{\text{se scrie din dezvoltarea L.}}{=}}$$

$$= ... + \left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!} + ...\right)\frac{1}{z} + ..., \forall z \in \mathbb{C} \text{ cu } 0 < |z| < 1.$$

Se observă că $z_2 = 0$ punct singular esenţial pentru f şi din faptul că partea principală a dezvoltării Laurent anterioare are o infinitate de termeni. În plus,

$$\operatorname{rez}(f;0) = c_{-1} = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!} + ... = e^1 - 1.$$

•Se înlocuieşte:

$R \in]0,1[\Rightarrow \mathcal{I} = 2\pi \,\mathrm{j} \cdot (e-1)$.

$R = 1 \Rightarrow \mathcal{I} = 2\pi\,\mathrm{j}\cdot(e-1) + \pi\,\mathrm{j}\cdot(-e) = \pi\,\mathrm{j}\cdot(e-2)$.
$R > 1 \Rightarrow \mathcal{I} = 2\pi\,\mathrm{j}\cdot((e-1)+(-e)) = -2\pi\,\mathrm{j}$.

b) $\mathcal{I} = \displaystyle\int_{|z|=R} \frac{z^3 e^{\frac{1}{z}}}{z+1}dz$, unde (i) $|z| = \frac{\sqrt{2}}{2}$; (ii) $|z| = \sqrt{2}$.

etapa 5 -calculul integralei cu teoria reziduurilor.

•Se determină punctele singulare izolate ale

$f(z) = \dfrac{z^3 e^{\frac{1}{z}}}{z+1}$.

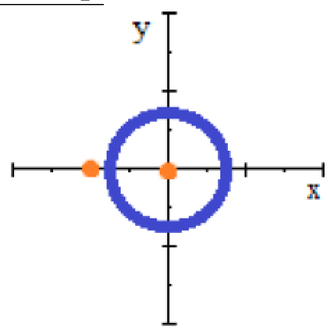
$a_1 = z_1 = -1$ pol de ordin 1 şi

$a_2 = z_2 = 0$ punct singular esenţial

Se reprezintă pe cazuri.

•Se aplică teorema reziduurilor:

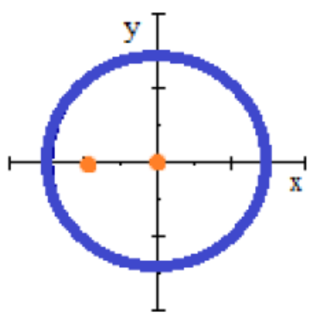
caz $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\Rightarrow a_1 = z_1 = -1 \in \operatorname{Ext}\gamma$, deoarece $1 > \frac{\sqrt{2}}{2}$; $a_2 = z_2 = 0 \in \operatorname{Int}\gamma$.



Se alege D simplu conex a.î. $\gamma \cup \operatorname{Im}\gamma \subset D$ şi $f \in \mathcal{H}(D \setminus \{0\}) \underset{\text{pe dom. s. conexe}}{\overset{\text{teor. reziduurilor}}{\Rightarrow}}$

$\mathcal{I} = 2\pi\,\mathrm{j}\cdot \operatorname{rez}(f;0)$.

caz $R = \sqrt{2}$ $\Rightarrow a_1 = z_1 = -1 \in \operatorname{Int}\gamma$, deoarece $\sqrt{2} > 1$; $a_2 = z_2 = 0 \in \operatorname{Int}\gamma$



Se alege D simplu conex a.î. $\gamma \cup \operatorname{Im}\gamma \subset D$ şi $f \in \mathcal{H}(D \setminus \{0,-1\}) \underset{\text{pe dom. s. conexe}}{\overset{\text{teor. reziduurilor}}{\Rightarrow}}$

$\mathcal{I} = 2\pi\,\mathrm{j}\cdot(\operatorname{rez}(f;0) + \operatorname{rez}(f;-1))$.

•Se aplică teorema de calcul a reziduurilor

$$\operatorname{rez}(f;-1) \underset{\text{conform 2.}}{\overset{-1 \text{ e pol de ordin } 1}{=}} \lim_{z\to -1}((z+1)f(z)) = \lim_{z\to -1}\left((z+1)\frac{z^3 e^{\frac{1}{z}}}{z+1}\right) = \lim_{z\to -1}\left(-e^{-1}\right) = -e^{-1}.$$

$\operatorname{rez}(f;0) \underset{\text{conform 1.}}{\overset{0 \text{ e punct sing. esenţial}}{=}} c_{-1}$ =coef. lui $\dfrac{1}{z-0}$ din dezvoltarea în serie Laurent a f în "jurul" lui 0, pe $\Delta(0;\varepsilon,r_2)$, cu $\varepsilon > 0$ foarte mic.

Se scrie: $f(z) = \dfrac{z^3 e^{\frac{1}{z}}}{z+1} = z^3 \dfrac{1}{1+z}\cdot e^{\frac{1}{z}}$.

$$\frac{1}{1-(-z)} \overset{(*)\text{ cu } z\rightsquigarrow -z}{=} 1 - z + z^2 - z^3 + ... + (-1)\, z^n + ..., \forall z \in \mathbb{C} \text{ cu } |-z| < 1, \text{ adică } |z| < 1.$$

$$e^{\frac{1}{z}} \overset{(2)\text{ cu } z\rightsquigarrow \frac{1}{z}}{=} 1 + \frac{1}{1!}\left(\frac{1}{z}\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{z}\right)^2 + ... + \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z}\right)^n + ..., \forall z \in \mathbb{C} \text{ cu } \left|\frac{1}{z}\right| < +\infty, \text{ adică } |z| > 0.$$

Atunci, pe domeniul comun de convergenţă a dezvoltărilor anterioare în serie$\Rightarrow$

$$f(z) = z^3 \cdot \left(1 - z + z^2 - z^3 + ... + (-1)^n z^n + ...\right) \cdot$$

$$\cdot \left(1 + \frac{1}{1!}\frac{1}{z} + \frac{1}{2!}\frac{1}{z^2} + ... + \frac{1}{n!}\frac{1}{z^n} + ...\right) \underset{\text{doar termenul cu } c_{-1}}{\overset{\text{se scrie din dezvoltarea L.}}{=}}$$

$$= ... + \left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + ... + \frac{(-1)^n}{(n+4)!} + ...\right)\frac{1}{z} + ..., \forall z \in \mathbb{C} \text{ cu } 0 < |z| < 1.$$

Se observă că $z_2 = 0$ punct singular esenţial pentru f şi din faptul că partea principală a dezvoltării Laurent anterioare are o infinitate de termeni. În plus,

$$\operatorname{rez}(f;0) = c_{-1} = \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + ... + \frac{(-1)^n}{(n+4)!} + ...$$

$$\text{Cum } e^{-1} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - ... + \frac{(-1)^n}{n!} + ... \Rightarrow$$

$$\operatorname{rez}(f;0) = c_{-1} = e^{-1} - \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) = e^{-1} - \frac{1}{3}.$$

•Se înlocuieşte

$$R = \tfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \mathcal{I} = 2\pi\,\mathrm{j} \cdot \left(e^{-1} - \frac{1}{3}\right).$$

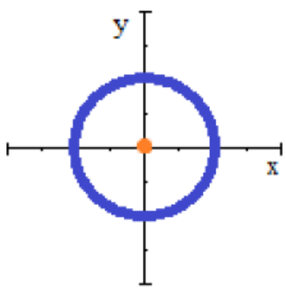
$$R = \sqrt{2} \Rightarrow \mathcal{I} = 2\pi\,\mathrm{j} \cdot \left(\left(e^{-1} - \frac{1}{3}\right) + \left(-e^{-1}\right)\right) = 2\pi\,\mathrm{j}\,\frac{-1}{3}.$$

c) A se vedea Curs.

d) $\mathcal{I} = \displaystyle\int_{|z|=R} \sin^k\left(\tfrac{1}{z}\right) dz$, unde $R > 0, k \in \mathbb{N}$.

etapa 5 -calculul integralei cu teoria reziduurilor.

•Se reprezintă curba $\gamma : |z| = R$. Este un cerc centrat în 0 şi de rază $R > 0$. Este curbă netedă, simplă, închisă.



•Se determină punctele singulare izolate ale

$f(z) = \sin^k\left(\frac{1}{z}\right)$.

$a_1 = z_1 = 0$ punct singular esenţial pentru f.

Se reprezintă.

•Se aplică teorema reziduurilor:

$a_1 = z_1 = 0 \in \operatorname{Int}\gamma$.

Se alege D simplu conex a.î. $\gamma \cup \operatorname{Im}\gamma \subset D$ şi $f \in \mathcal{H}(D \setminus \{0\}) \underset{\text{pe dom. s. conexe}}{\overset{\text{teor. reziduurilor}}{\Rightarrow}}$

$\mathcal{I} = 2\pi\,\mathrm{j} \cdot \operatorname{rez}(f;0)$.

•Se aplică teorema de calcul a reziduurilor

$\operatorname{rez}(f;0) \overset{\text{0 e punct sing. esenţial}}{\underset{\text{conform 1.}}{=}} c_{-1}$ =coef. lui $\dfrac{1}{z-0}$ din dezvoltarea în serie Laurent a f în "jurul" lui 0, pe $\Delta(0;\varepsilon,r_2)$, cu $\varepsilon>0$ foarte mic.

$\sin\frac{1}{z} \overset{(4)\text{ cu } z\rightsquigarrow\frac{1}{z}}{=} \dfrac{1}{1!}\left(\dfrac{1}{z}\right)-\dfrac{1}{3!}\left(\dfrac{1}{z}\right)^3+...+\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\dfrac{1}{z}\right)^{2n+1}+...,\forall z\in\mathbb{C}$ cu $\left|\dfrac{1}{z}\right|<+\infty$, adică $|z|>0$.

$f(z)=\left(\sin\frac{1}{z}\right)^k=\left(\dfrac{1}{1!}\left(\dfrac{1}{z}\right)-\dfrac{1}{3!}\left(\dfrac{1}{z}\right)^3+...+\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\dfrac{1}{z}\right)^{2n+1}+...\right)^k \overset{\text{se scrie din dezvoltarea L.}}{\underset{\text{doar termenul cu } c_{-1}}{=}}$

$=...c_{-3}\dfrac{1}{z^3}+c_{-2}\dfrac{1}{z^2}+c_{-1}\dfrac{1}{z}+...,\forall z\in\mathbb{C},\ 0<|z|<+\infty,$

unde $c_{-1}=\begin{cases}1, & \text{dacă } k=1\\ 0, & \text{dacă } k\in\mathbb{N},k>1\end{cases}$

Se obţine: $\operatorname{rez}(f;0)=c_{-1}=\begin{cases}1, & \text{dacă } k=1\\ 0, & \text{dacă } k\in\mathbb{N},k>1\end{cases}$.

•Se înlocuieşte $\mathcal{I}=2\pi\,\mathrm{j}\cdot\operatorname{rez}(f;0)=\begin{cases}2\pi\,\mathrm{j}, & \text{dacă } k=1\\ 0, & \text{dacă } k\in\mathbb{N},k>1\end{cases}$.

Exerciţiul 4. Să se calculeze

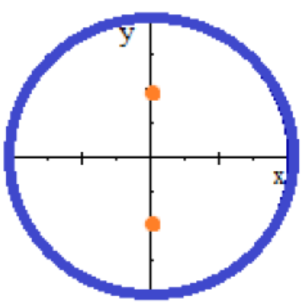
a) $\mathcal{I}=\displaystyle\int_{|z|=2}\dfrac{e^{\frac{\pi}{z-\mathrm{j}}}}{z^2+1}dz$;**b)** $\mathcal{I}=\displaystyle\int_{|z|=R}\dfrac{1}{z\left(z^2+a^2\right)^2}dz$, unde $a\in\mathbb{R},a>0$ şi $R>a$.

c) $\mathcal{I}=\displaystyle\int_{|z|=2}\dfrac{\sin z}{z^2\left(z^4+1\right)}dz.$

Rezolvare. a) $\mathcal{I}=\displaystyle\int_{|z|=2}\dfrac{e^{\frac{\pi}{z-\mathrm{j}}}}{z^2+1}dz.$

etapa 5 -calculul integralei cu teoria reziduurilor.

•Se reprezintă curba $\gamma:|z|=2$.Este un cerc centrat în 0 şi de rază 2. Este curbă netedă, simplă, închisă.



•Se determină punctele singulare izolate ale

$f(z)=\dfrac{e^{\frac{\pi}{z-\mathrm{j}}}}{z^2+1}$:

$z-\mathrm{j}=0\Rightarrow z=\mathrm{j}$

$z^2+1=0\Leftrightarrow(z+\mathrm{j})(z-\mathrm{j})=0\Rightarrow z=-\mathrm{j}$ şi $z=\mathrm{j}$.

$*a_1=z_1=-\mathrm{j}$ pol de ordin 1 pentru f.

$*a_2=z_2=\mathrm{j}$ punct singular esenţial pentru f.

•Se aplică teorema reziduurilor:

$a_1=z_1=-\mathrm{j}\in\operatorname{Int}\gamma;a_2=z_2=\mathrm{j}\in\operatorname{Int}\gamma.$

Se alege D simplu conex a.î. $\gamma\cup\operatorname{Im}\gamma\subset D$ şi $f\in\mathcal{H}(D\setminus\{-\mathrm{j},\mathrm{j}\}) \overset{\text{teor. reziduurilor}}{\underset{\text{pe dom. s. conexe}}{\Rightarrow}}$

$\mathcal{I} = 2\pi\,\mathrm{j}\cdot(\operatorname{rez}(f;-\mathrm{j}) + \operatorname{rez}(f;\mathrm{j}))$.

•Se aplică teorema de calcul a reziduurilor

$$\operatorname{rez}(f;-\mathrm{j}) \underset{\text{conform } 2.}{\overset{-\mathrm{j} \text{ e pol de ordin } 1}{=}} \lim_{z\to-\mathrm{j}}((z+\mathrm{j})f(z)) = \lim_{z\to-\mathrm{j}}\left((z+\mathrm{j})\frac{e^{\frac{\pi}{z-\mathrm{j}}}}{(z+\mathrm{j})(z-\mathrm{j})}\right) =$$

$$= \frac{e^{\frac{\pi}{-\mathrm{j}-\mathrm{j}}}}{-\mathrm{j}-\mathrm{j}} = \frac{\mathrm{j}\,e^{\frac{\pi\,\mathrm{j}}{2}}}{2} = \tfrac{\mathrm{j}}{2}\left(\cos\tfrac{\pi}{2} + \mathrm{j}\sin\tfrac{\pi}{2}\right) = \tfrac{-1}{2}.$$

$\operatorname{rez}(f;\mathrm{j}) \underset{\text{conform } 1.}{\overset{\mathrm{j} \text{ e punct sing. esenţial}}{=}} c_{-1}$ =coef. lui $\dfrac{1}{z-\mathrm{j}}$ din dezvoltarea în serie Laurent a f în "jurul" lui 0, pe $\Delta(\mathrm{j};\varepsilon,r_2)$, cu $\varepsilon > 0$ foarte mic.

Se scrie:

$$f(z) = \frac{e^{\frac{\pi}{z-\mathrm{j}}}}{(z+\mathrm{j})(z-\mathrm{j})} = \frac{1}{z-\mathrm{j}}\cdot\frac{1}{z+\mathrm{j}}\cdot e^{\frac{\pi}{z-\mathrm{j}}}\cdot\frac{1}{z-\mathrm{j}+2\mathrm{j}} = \frac{1}{2\mathrm{j}}\cdot\frac{1}{z-\mathrm{j}}e^{\frac{\pi}{z-\mathrm{j}}}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-\mathrm{j}}{2\mathrm{j}}}.$$

$\dfrac{1}{z-\mathrm{j}} = \dfrac{1}{z-\mathrm{j}}, \forall z\in\mathbb{C}$ cu $\frac{1}{z-\mathrm{j}}\in\mathbb{C}$, adică $z\neq\mathrm{j}$, adică $|z-\mathrm{j}|>0$.

$$\frac{1}{z+\mathrm{j}} = \frac{1}{(z-\mathrm{j})+2\mathrm{j}} = \frac{1}{2\mathrm{j}}\cdot\frac{1}{\frac{z-\mathrm{j}}{2\mathrm{j}}+1} = \frac{1}{2\mathrm{j}}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{z-\mathrm{j}}{2\mathrm{j}}\right)} \overset{(*)\text{ cu } z\rightsquigarrow -\frac{z-\mathrm{j}}{2\mathrm{j}}}{=}$$

$$= 1 - \left(\tfrac{z-\mathrm{j}}{2\mathrm{j}}\right) + \left(\tfrac{z-\mathrm{j}}{2\mathrm{j}}\right)^2 - \left(\tfrac{z-\mathrm{j}}{2\mathrm{j}}\right)^3 + \ldots + (-1)^n\left(\tfrac{z-\mathrm{j}}{2\mathrm{j}}\right)^n + \ldots, \forall z\in\mathbb{C} \text{ cu } \left|-\tfrac{z-\mathrm{j}}{2\mathrm{j}}\right| < 1,$$

adică $|z-\mathrm{j}|<2$.

$$e^{\frac{\pi}{z-\mathrm{j}}} \overset{(2)\text{ cu } z\rightsquigarrow\frac{\pi}{z-\mathrm{j}}}{=} 1 + \frac{1}{1!}\left(\tfrac{\pi}{z-\mathrm{j}}\right) + \frac{1}{2!}\left(\tfrac{\pi}{z-\mathrm{j}}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}\left(\tfrac{\pi}{z-\mathrm{j}}\right)^n + \ldots, \forall z\in\mathbb{C} \text{ cu } \tfrac{1}{z-\mathrm{j}}\in\mathbb{C},$$

adică $z\neq\mathrm{j}$, adică $|z-\mathrm{j}|>0$.

Atunci, pe domeniul comun de convergenţă a dezvoltărilor anterioare în serie$\Rightarrow$

$$f(z) = \frac{1}{2\mathrm{j}}\cdot\frac{1}{z-\mathrm{j}}\cdot\left(1 - \left(\tfrac{z-\mathrm{j}}{2\mathrm{j}}\right) + \left(\tfrac{z-\mathrm{j}}{2\mathrm{j}}\right)^2 - \left(\tfrac{z-\mathrm{j}}{2\mathrm{j}}\right)^3 + \ldots + (-1)^n\left(\tfrac{z-\mathrm{j}}{2\mathrm{j}}\right)^n + \ldots\right)\cdot$$

$$\cdot\left(1 + \frac{1}{1!}\left(\tfrac{\pi}{z-\mathrm{j}}\right) + \frac{1}{2!}\left(\tfrac{\pi}{z-\mathrm{j}}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}\left(\tfrac{\pi}{z-\mathrm{j}}\right)^n + \ldots\right) \underset{\text{doar termenul cu } c_{-1}}{\overset{\text{se scrie din dezvoltarea L.}}{=}}$$

$$= \ldots + \frac{1}{2\mathrm{j}}\left(1 - \frac{\pi}{2\mathrm{j}\cdot 1!} + \frac{\pi^2}{(2\mathrm{j})^2\,2!} + \ldots + \frac{(-1)^n\pi^n}{(2\mathrm{j})^n\,n!} + \ldots\right)\frac{1}{z-\mathrm{j}} + \ldots, \forall z\in\mathbb{C} \text{ cu } 0<|z-\mathrm{j}|<2.$$

Se observă că $z_2 = \mathrm{j}$ punct singular esenţial pentru f şi din faptul că partea principală a dezvoltării Laurent anterioare are o infinitate de termeni. În plus,

$$\operatorname{rez}(f;\mathrm{j}) = c_{-1} = \frac{1}{2\mathrm{j}}\left(1 + \frac{1}{1!}\left(\frac{-\pi}{2\mathrm{j}}\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{-\pi}{2\mathrm{j}}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}\left(\frac{-\pi}{2\mathrm{j}}\right)^n + \ldots\right) = \frac{1}{2\mathrm{j}}e^{-\frac{\pi}{2\mathrm{j}}} = \frac{1}{2}.$$

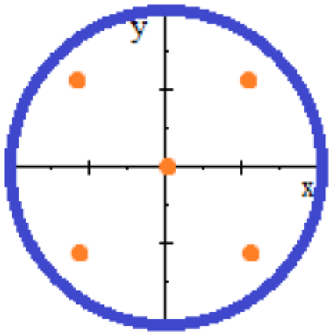
•Se înlocuieşte $\mathcal{I} = 2\pi\,\mathrm{j}\cdot\left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\right) = 0$.

b) $\mathcal{I} = \displaystyle\int_{|z|=R}\frac{1}{z\,(z^2+a^2)^2}dz$,unde $a\in\mathbb{R}, a>0$ şi $R>a$. A se vedea Curs.

c) $\mathcal{I} = \displaystyle\int_{|z|=2}\frac{\sin z}{z^2\,(z^4+1)}dz$.

etapa 5 -calculul integralei cu teoria reziduurilor.

•Se reprezintă curba $\gamma : |z| = 2$. Este un cerc centrat în 0 şi de rază 2. Este curbă netedă, simplă, închisă.



•Se determină punctele singulare izolate ale

$f(z) = \dfrac{\sin z}{z^2(z^4+1)}$

$z^2\left(z^4+1\right) = 0 \Leftrightarrow [z = 0 \text{ sau } z^4+1 = 0] \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} z_1 = 0 \\ \left(z^2+1\right)^2 - 2z^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = 0 \\ \left(z^2-\sqrt{2}z+1\right)\left(z^2+\sqrt{2}z+1\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} z_1 = 0 \text{ sau} \\ z_{2,3} = \frac{\sqrt{2}\pm \mathrm{j}\sqrt{2}}{2} \text{ sau } z_{4,5} = \frac{-\sqrt{2}\pm \mathrm{j}\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$*z_1 = 0$ pol de ordin 1 pentru f, $z_1 = 0 \in \operatorname{Int}\gamma$, sau cu definiţia, deoarece $\sin 0 = 0$ şi $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin z}{z} = 1$, sau deoarece

$$\frac{\sin z}{z^2} = \frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{1!}z - \frac{1}{3!}z^3 + ... + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1} + ...\right) =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{1!}\frac{1}{z}}_{\text{partea princ.}} + \underbrace{\left(-\frac{1}{3!}z + ... + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n-1} + ...\right)}_{\text{partea tayloriană}}, \forall z \in \mathbb{C}, \text{ cu } 0 < |z| < +\infty.$$

Se observă că $z_1 = 0$ este pol de ordin 1 pentru $\dfrac{\sin z}{z^2}$, deci şi pentru f şi din faptul că partea principală a dezvoltării Laurent anterioare are un termen.

$*z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\mathrm{j})$ pol de ordin 1 pentru f, $z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\mathrm{j}) \in \operatorname{Int}\gamma$.

$*z_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-\mathrm{j})$ pol de ordin 1 pentru f, $z_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-\mathrm{j}) \in \operatorname{Int}\gamma$.

$*z_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+\mathrm{j})$ pol de ordin 1 pentru f, $z_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+\mathrm{j}) \in \operatorname{Int}\gamma$.

$*z_5 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1-\mathrm{j})$ pol de ordin 1 pentru f, $z_5 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1-\mathrm{j}) \in \operatorname{Int}\gamma$.

•Se aplică teorema reziduurilor:

$z_{1,2,3,4,5} \in \operatorname{Int}\gamma$.

Se alege D simplu conex a.î. $\gamma \cup \operatorname{Im}\gamma \subset D$ şi $f \in \mathcal{H}(D \setminus \{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5\}) \overset{\text{teor. reziduurilor}}{\underset{\text{pe dom. s. conexe}}{\Rightarrow}}$

$\mathcal{I} = 2\pi\,\mathrm{j}\cdot[\operatorname{rez}(f; z_1) + \operatorname{rez}(f; z_2) + \operatorname{rez}(f; z_3) + \operatorname{rez}(f; z_4) + \operatorname{rez}(f; z_5)]$.

•Se aplică teorema de calcul a reziduurilor

$$\operatorname{rez}(f; z_1) \overset{0 \text{ e pol de ordin } 1}{\underset{\text{conform } 2\cdot}{=}} \lim_{z\to 0}[(z-0)f(z)] = \lim_{z\to 0}\left((z-0)\frac{\sin z}{z^2(z^4+1)}\right) = \lim_{z\to 0}\left(\frac{\sin z}{z}\cdot\frac{1}{z^4+1}\right) = 1.$$

$$\operatorname{rez}(f; z_2) \overset{z_2 \text{ e pol de ordin } 1}{\underset{\text{conform } 2\cdot}{=}} \lim_{z\to z_2}\left((z-z_2)\frac{\sin z}{z^2(z-z_2)(z-z_3)\left(z^2+\sqrt{2}z+1\right)}\right) =$$

$$= \frac{\sin z_2}{z_2^2(z_2-z_3)\left(z_2^2+\sqrt{2}z_2+1\right)}.$$

$$\operatorname{rez}(f;z_3) \overset{z_3 \text{ e pol de ordin } 1}{\underset{\text{conform } 2^{\cdot}}{=}} \lim_{z\to z_3}\left((z-z_3)\frac{\sin z}{z^2(z-z_2)(z-z_3)\left(z^2+\sqrt{2}z+1\right)}\right) =$$
$$= \frac{\sin z_3}{z_3^2(z_3-z_2)\left(z_3^2+\sqrt{2}z_3+1\right)}.$$
$$\operatorname{rez}(f;z_4) \overset{z_4 \text{ e pol de ordin } 1}{\underset{\text{conform } 2^{\cdot}}{=}} \lim_{z\to z_4}\left((z-z_4)\frac{\sin z}{z^2\left(z^2-\sqrt{2}z+1\right)(z-z_4)(z-z_5)}\right) =$$
$$= \frac{\sin z_4}{z_4^2\left(z_4^2-\sqrt{2}z_4+1\right)(z_4-z_5)}.$$
$$\operatorname{rez}(f;z_5) \overset{z_5 \text{ e pol de ordin } 1}{\underset{\text{conform } 2^{\cdot}}{=}} \lim_{z\to z_5}\left((z-z_5)\frac{\sin z}{z^2\left(z^2-\sqrt{2}z+1\right)(z-z_4)(z-z_5)}\right) =$$
$$= \frac{\sin z_5}{z_5^2\left(z_5^2-\sqrt{2}z_5+1\right)(z_5-z_4)}.$$

•Se înlocuieşte

$$\mathcal{I} = 2\pi\,\mathrm{j}\cdot\left(1+\frac{\sin z_2}{z_2^2(z_2-z_3)\left(z_2^2+\sqrt{2}z_2+1\right)}+\frac{\sin z_3}{z_3^2(z_3-z_2)\left(z_3^2+\sqrt{2}z_3+1\right)}+\right.$$
$$\left.+\frac{\sin z_4}{z_4^2\left(z_4^2-\sqrt{2}z_4+1\right)(z_4-z_5)}+\frac{\sin z_5}{z_5^2\left(z_5^2-\sqrt{2}z_5+1\right)(z_5-z_4)}\right).$$

<u>Comentariu</u>. Se putea folosi reziduul lui f în infinit.

Exerciţiul 5. Să se calculeze

$$\mathcal{I} = \int_\gamma \frac{z^{13}}{(z-2)^4(z+1)}dz, \text{unde } \gamma : 4x^2+9y^2-36=0.$$

Rezolvare. <u>etapele $1,2,3$</u> - calculul integralei cu definiţia. Nu, din cauză că este greu de exprimat

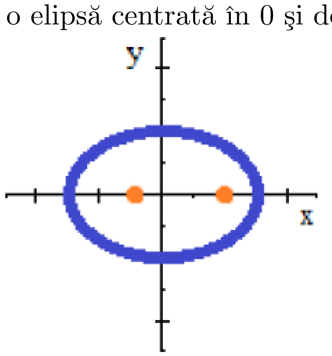
$f(z) = u(x,y) + \mathrm{j}\,v(x,y)$

<u>etapa 4</u> - calculul integralei cu teoremele Cauchy. Da, temă.

<u>etapa 5</u> -calculul integralei cu teoria reziduurilor.

•Se reprezintă curba $\gamma : 4x^2+9y^2-36=0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{3^2}+\dfrac{y^2}{2^2}=1.$

Este o elipsă centrată în 0 şi de semiaxe $3,2$. Este curbă netedă, simplă, închisă.



•Se determină punctele singulare izolate ale

$$f(z) = \frac{z^{13}}{(z-2)^4(z+1)}.$$

$(z-2)^4(z+1) = 0 \Leftrightarrow [z=2 \text{ sau } z=-1]$.

$*z_1 = 2$ pol de ordin 4 pentru f, $z_1 = 2 \in \operatorname{Int}\gamma$.

$*z_2 = -1$ pol de ordin 1 pentru f, $z_2 = -1 \in \operatorname{Int}\gamma$.

Se reprezintă.

•Se aplică teorema reziduurilor:

$a_1 = z_1 = 2 \in \operatorname{Int}\gamma, a_2 = z_2 = -1 \in \operatorname{Int}\gamma$.

Se alege D simplu conex a.î. $\gamma \cup \operatorname{Im}\gamma \subset D$ şi $f \in \mathcal{H}\left(\widetilde{D} \setminus \{z_1, z_2\}\right) \underset{\text{pe dom. s. conexe}}{\overset{\text{teor. reziduurilor}}{\Longrightarrow}}$

$\mathcal{I} = 2\pi\,\mathrm{j} \cdot (\operatorname{rez}(f;2) + \operatorname{rez}(f;-1))$.

•Se aplică teorema de calcul a reziduurilor

$$\operatorname{rez}(f;-1) \underset{\text{conform 2.}}{\overset{-1 \text{ e pol de ordin } 1}{=}} \lim_{z\to -1}\left((z+1)\frac{z^{13}}{(z-2)^4(z+1)}\right) = \frac{-1}{(-3)^4} = \frac{-1}{3^4}.$$

$$\operatorname{rez}(f;2) \underset{\text{conform 2.}}{\overset{2 \text{ e pol de ordin } 4}{=}} \frac{1}{(4-1)!}\lim_{z\to 2}\left((z-2)^4 f(z)\right)^{(4-1)} =$$

$$= \frac{1}{3!}\lim_{z\to 2}\left((z-2)^4\frac{z^{13}}{(z-2)^4(z+1)}\right)^{(3)} = \frac{1}{6}\lim_{z\to 2}\left(\frac{z^{13}}{z+1}\right)'''.$$

$$\left(\frac{z^{13}}{z+1}\right)''' = \left(z^{13}\cdot\frac{1}{z+1}\right)''' =$$

$$= \left(C_3^0\left(z^{13}\right)''' + C_3^1\left(z^{13}\right)''\left(\frac{1}{z+1}\right)' + C_3^2\left(z^{13}\right)'\left(\frac{1}{z+1}\right)'' + C_3^3\left(\frac{1}{z+1}\right)'''\right) =$$

$$= \left(1\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot z^{10} + 3\cdot 13\cdot 12\cdot z^{11}\cdot\frac{-1}{(z+1)^2} + 3\cdot 13\cdot z^{12}\frac{(-1)(-2)}{(z+1)^3} + \frac{(-1)(-2)(-3)}{(z+1)^4}\right).$$

$$\operatorname{rez}(f;2) = \frac{1}{6}\left(1\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 2^{10} + 3\cdot 13\cdot 12\cdot 2^{11}\cdot\tfrac{-1}{3^2} + 3\cdot 13\cdot 2^{12}\tfrac{(-1)(-2)}{3^3} + \tfrac{(-1)(-2)(-3)}{3^4}\right) =$$

$$= 13\cdot 11\cdot 2^{11} - 13\cdot 2^{12}\cdot\tfrac{1}{3} + 13\cdot 2^{11}\cdot\tfrac{1}{3^2} - \tfrac{1}{3^4} = 13\cdot 2^{11}\left(11 - \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{9}\right) - \tfrac{1}{3^4}$$

$$= 13\cdot 2^{11}\cdot\tfrac{94}{9} - \tfrac{1}{3^4} = \tfrac{22\,523\,903}{81}.$$

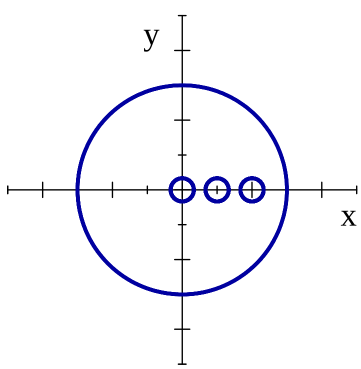
•Se înlocuieşte $\mathcal{I} = 2\pi\,\mathrm{j}\cdot\left(\dfrac{-1}{3^4} + 13\cdot 2^{11}\cdot\tfrac{94}{9} - \dfrac{1}{3^4}\right)$.

Exerciţiul 6. Să se calculeze

$\mathcal{I} = \displaystyle\int_\gamma \left(1+z+z^2\right)\left(e^{\frac{1}{z}} + e^{\frac{1}{z-1}} + e^{\frac{1}{z-2}}\right)dz$,unde $\gamma : |z| = 3$.

Rezolvare. etapa 5 -calculul integralei cu teoria reziduurilor.

•Se reprezintă curba $\gamma : |z| = 3$. Este un cerc centrat în 0 şi de rază 3. Este curbă netedă, simplă, închisă.



•Se determină punctele singulare izolate ale

$f(z) = \left(1+z+z^2\right)\left(e^{\frac{1}{z}} + e^{\frac{1}{z-1}} + e^{\frac{1}{z-2}}\right)$

$z_1 = 0$ punct singular esenţial situat în $\operatorname{Int}\gamma$;

$z_2 = 1$ punct singular esenţial situat în $\operatorname{Int}\gamma$;

$z_3 = 2$ punct singular esenţial situat în $\operatorname{Int}\gamma$.

•Pentru reducerea volumului de calcul construim cercurile:

$\gamma_1 : |z| = r, r < \frac{1}{2}; \gamma_2 : |z-1| = r, r < \frac{1}{2}; \gamma_3 : |z-2| = r, r < \frac{1}{2}$,

interioare cercului iniţial şi care nu se intersectează două câte două, ca în figură. Atunci

$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz + \int_{\gamma_3} f(z)\,dz$, unde

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{|z|=r} f(z)\,dz = \int_{|z|=r} \left(1+z+z^2\right) e^{\frac{1}{z}} dz + \int_{|z|=r} \underbrace{\left(1+z+z^2\right)\left(e^{\frac{1}{z-1}} + e^{\frac{1}{z-2}}\right)}_{\text{olomorfă pe } |z|<r} dz =$$

$$\overset{\text{teorema Cauchy}}{=} \int_{|z|=r} \left(1+z+z^2\right) e^{\frac{1}{z}} dz + 0.$$

$$\int_{\gamma_2} f(z)\,dz = \int_{|z-1|=r} f(z)\,dz = \int_{|z-1|=r} \left(1+z+z^2\right) e^{\frac{1}{z-1}} dz + \int_{|z-1|=r} \underbrace{\left(1+z+z^2\right)\left(e^{\frac{1}{z}} + e^{\frac{1}{z-2}}\right)}_{\text{olomorfă pe } |z-1|<r} dz =$$

$$\overset{\text{teorema Cauchy}}{=} \int_{|z-1|=r} \left(1+z+z^2\right) e^{\frac{1}{z-1}} dz + 0.$$

$$\int_{\gamma_3} f(z)\,dz = \int_{|z-2|=r} f(z)\,dz = \int_{|z-2|=r} \left(1+z+z^2\right) e^{\frac{1}{z-2}} dz + \int_{|z-2|=r} \underbrace{\left(1+z+z^2\right)\left(e^{\frac{1}{z}} + e^{\frac{1}{z-1}}\right)}_{\text{olomorfă pe } |z-2|<r} dz =$$

$$\overset{\text{teorema Cauchy}}{=} \int_{|z-2|=r} \left(1+z+z^2\right) e^{\frac{1}{z-2}} dz + 0.$$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{|z|=r} \left(1+z+z^2\right) e^{\frac{1}{z}} dz + \int_{|z-1|=r} \left(1+z+z^2\right) e^{\frac{1}{z-1}} dz + \int_{|z-2|=r} \left(1+z+z^2\right) e^{\frac{1}{z-2}} dz.$$

Se aplică teorema reziduurilor pe domenii simplu conexe pentru fiecare din cele trei integrale$\Rightarrow$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi\,\mathrm{j}\cdot \operatorname{rez}(f_1;0) + 2\pi\,\mathrm{j}\cdot \operatorname{rez}(f_2;1) + 2\pi\,\mathrm{j}\cdot \operatorname{rez}(f_3;2).$$

Se foloseşte (2) $\Rightarrow$

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{1!}\left(\frac{1}{z}\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{z}\right)^2 + \dots + \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z}\right)^n + \dots, \forall z \in \mathbb{C} \text{ cu } \left|\frac{1}{z}\right| < +\infty, \text{ adică } |z| > 0.$$

$$e^{\frac{1}{z-1}} = 1 + \frac{1}{1!}\left(\frac{1}{z-1}\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{z-1}\right)^2 + \dots + \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z-1}\right)^n + \dots, \forall z \in \mathbb{C} \text{ cu } \left|\frac{1}{z-1}\right| < +\infty,$$

adică $|z-1| > 0$.

$$e^{\frac{1}{z-2}} = 1 + \frac{1}{1!}\left(\frac{1}{z-2}\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{z-2}\right)^2 + \dots + \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z-2}\right)^n + \dots, \forall z \in \mathbb{C} \text{ cu } \left|\frac{1}{z-1}\right| < +\infty,$$

adică $|z-1| > 0$.

$$f_1(z) = \left(1+z+z^2\right)\cdot e^{\frac{1}{z}} = \left(1+z+z^2\right)\left(1 + \frac{1}{1!}\left(\frac{1}{z}\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{z}\right)^2 + \dots + \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z}\right)^n + \dots\right) =$$

$$= \dots + \left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}\right)\frac{1}{z} + \dots, \forall z \in \mathbb{C},\ 0 < |z| < r.$$

$$f_2(z) = \left(1+z+z^2\right)\cdot e^{\frac{1}{z-1}} =$$

$$= \left((z-1)^2 + 3(z-1) + 3\right)\left(1 + \frac{1}{1!}\left(\frac{1}{z-1}\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{z-1}\right)^2 + \dots + \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z-1}\right)^n + \dots\right) =$$

$$= \dots + \left(\frac{3}{1!} + \frac{3}{2!} + \frac{1}{3!}\right)\frac{1}{z-1} + \dots, \forall z \in \mathbb{C},\ 0 < |z-1| < r.$$

$$f_3(z) = \left(1+z+z^2\right)\cdot e^{\frac{1}{z-2}} =$$

$$= \left((z-2)^2 + 5(z-2) + 7\right)\left(1 + \frac{1}{1!}\left(\frac{1}{z-2}\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{z-2}\right)^2 + ... + \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z-2}\right)^n + ...\right) =$$
$$= ... + \left(\frac{7}{1!} + \frac{5}{2!} + \frac{1}{3!}\right)\frac{1}{z-2} + ..., \forall z \in \mathbb{C},\ 0 < |z-2| < r.$$
$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi\,\mathrm{j}\cdot\left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}\right) + 2\pi\,\mathrm{j}\cdot\left(\frac{3}{1!} + \frac{3}{2!} + \frac{1}{3!}\right) + 2\pi\,\mathrm{j}\cdot\left(\frac{7}{1!} + \frac{5}{2!} + \frac{1}{3!}\right) =$$
$$= 2\pi\,\mathrm{j}\cdot\frac{5}{3} + 2\pi\,\mathrm{j}\cdot\frac{14}{3} + 2\pi\,\mathrm{j}\cdot\frac{29}{3} = 2\pi\,\mathrm{j}\cdot\frac{46}{3}.$$

6.2. Calcul de integrale reale cu teoria reziduurilor

Teorema 1. Fie $a > 0$ şi

$$\mathcal{I} = \int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,e^{\mathrm{j}\,ax}dx,\ \mathcal{I}_1 = \int_{-\infty}^{\infty} R(x)\cos(ax)\,dx, \mathcal{I}_2 = \int_{-\infty}^{\infty} R(x)\sin(ax)\,dx.$$

Dacă $R = \dfrac{P}{Q}, P, Q \in \mathbb{R}[x]\,, \mathrm{grad}\, Q \geq \mathrm{grad}\, P + 1, Q(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, atunci:

$$\mathcal{I} = 2\pi\,\mathrm{j}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{rez}\, f(z_k)\,, \mathcal{I}_1 = \mathrm{Re}\,\mathcal{I}, \mathcal{I}_2 = \mathrm{Im}\,\mathcal{I},$$

unde $f(z) = R(z)\,e^{\mathrm{j}\,az}$, iar z_k sunt acei poli cu $\mathrm{Im}\, z_k > 0$.

Exerciţiul 1. Să se calculeze $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2 - 2x + 10}dx.$

Rezolvare. A se vedea Curs.

Exerciţiul 2. Să se calculeze

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\,\mathrm{j}\,x}}{x^4 + 8x^2 + 16}dx.$

Rezolvare. Fie

$$\mathcal{I} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + 8x^2 + 16}e^{2\,\mathrm{j}\,x}dx$$

Se observă că

$P(x) = 1; \mathrm{grad}\, P = 0;$

$Q(x) = x^4 + 8x^2 + 16; \mathrm{grad}\, Q = 4; \mathrm{grad}\, Q \geq \mathrm{grad}\, P + 1.$

$Q(x) = \left(x^2 + 4\right)^2 \Rightarrow Q(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Conform Teoremei 1 $\Rightarrow$

$$\mathcal{I} = 2\pi\,\mathrm{j}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{rez}\, f(z_k) \text{ ,cu } \mathrm{Im}\, z_k > 0.$$

Aici $f(z) = \dfrac{1}{z^4 + 8z^2 + 16}e^{2\,\mathrm{j}\,z}$ are $z_{1,2} = 0 \pm 2\,\mathrm{j}$ poli de ordin 2, cu $\mathrm{Im}\, z_1 > 0$. Deci

$$\mathcal{I} = 2\pi\,\mathrm{j}\,\mathrm{rez}\, f(0 + 2\,\mathrm{j}) \overset{0+2\,\mathrm{j}\text{ e pol de ordin 2}}{\underset{\text{conform 2}\cdot}{=}}$$
$$= 2\pi\,\mathrm{j}\,\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 0+2\,\mathrm{j}}\left(\left((z-2\,\mathrm{j})^2\,\frac{1}{(z-2\,\mathrm{j})^2\,(z+2\,\mathrm{j})^2}e^{2\,\mathrm{j}\,z}\right)^{(2-1)}\right) =$$
$$= 2\pi\,\mathrm{j}\lim_{z\to 0+2\,\mathrm{j}}\left(\left(\frac{1}{(z+2\,\mathrm{j})^2}e^{2\,\mathrm{j}\,z}\right)'\right) = 2\pi\,\mathrm{j}\lim_{z\to 0+2\,\mathrm{j}}\frac{e^{2\,\mathrm{j}\,z}\cdot 2\,\mathrm{j}\,(z+2\,\mathrm{j})^2 - e^{2\,\mathrm{j}\,z}\cdot 2\,(z+2\,\mathrm{j})}{(z+2\,\mathrm{j})^4} =$$

$$= 2\pi \mathrm{j} \lim_{z\to 0+2\mathrm{j}} \frac{e^{2\mathrm{j}z}\cdot(2\mathrm{j}(z+2\mathrm{j})-2)}{(z+2\mathrm{j})^3} = 2\pi \mathrm{j} \frac{e^{2\mathrm{j}2\mathrm{j}}\cdot(2\mathrm{j}(2\mathrm{j}+2\mathrm{j})-2)}{(2\mathrm{j}+2\mathrm{j})^3} = 2\pi \mathrm{j} \frac{e^{-4}\cdot(-10)}{4\mathrm{j}\cdot(-16)} =$$
$$= \frac{5}{16}\pi e^{-4}.$$

Se poate deduce şi că:

$\mathcal{I}_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(2x)}{x^4+8x^2+16}dx = \frac{5}{16}\pi e^{-4}$ şi $\mathcal{I}_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2x)}{x^4+8x^2+16}dx = 0.$

b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\mathrm{j}x}}{x^2-2\mathrm{j}x-2}dx.$

Rezolvare. Fie $\mathcal{I} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2-2\mathrm{j}x-2}e^{\mathrm{j}x}dx$

Se observă că

$P(x) = 1; \mathrm{grad}\, P = 0;$
$Q(x) = x^2 - 2\mathrm{j}x - 2; \mathrm{grad}\, Q = 2; \mathrm{grad}\, Q \geq \mathrm{grad}\, P + 1.$
$Q(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Conform Teoremei 1 $\Rightarrow \mathcal{I} = 2\pi \mathrm{j} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{rez}\, f(z_k)$,cu $\mathrm{Im}\, z_k > 0$.

Aici $f(z) = \frac{1}{z^2-2\mathrm{j}z-2}e^{\mathrm{j}z}$ are $z_{1,2} = \pm1+\mathrm{j}$ poli de ordin 1, cu $\mathrm{Im}\, z_{1,2} > 0$. Deci

$$\mathcal{I} = 2\pi \mathrm{j}\left(\mathrm{rez}\, f(-1+\mathrm{j}) + \mathrm{rez}\, f(1+\mathrm{j})\right) \overset{\pm1+\mathrm{j} \text{ e pol de ordin 1}}{\underset{\text{conform 2.}}{=}}$$
$$= 2\pi \mathrm{j} \lim_{z\to -1+\mathrm{j}} \left((z-(-1+\mathrm{j}))\frac{1}{(z-(-1+\mathrm{j}))(z-(1+\mathrm{j}))}e^{\mathrm{j}z}\right) +$$
$$+ 2\pi \mathrm{j} \lim_{z\to 1+\mathrm{j}} \left((z-(1+\mathrm{j}))\frac{1}{(z-(-1+\mathrm{j}))(z-(1+\mathrm{j}))}e^{\mathrm{j}z}\right) =$$
$$= 2\pi \mathrm{j}\left(\frac{1}{((-1+\mathrm{j})-(1+\mathrm{j}))}e^{\mathrm{j}(-1+\mathrm{j})} + \frac{1}{((1+\mathrm{j})-(-1+\mathrm{j}))}e^{\mathrm{j}(1+\mathrm{j})}\right) =$$
$$= 2\pi \mathrm{j}\left(\frac{1}{-2}e^{\mathrm{j}(-1+\mathrm{j})} + \frac{1}{2}e^{\mathrm{j}(1+\mathrm{j})}\right) = \pi \mathrm{j}\left(-e^{-1-\mathrm{j}} + e^{-1+\mathrm{j}}\right) =$$
$$= \pi \mathrm{j}\, e^{-1}\left(-\cos(-1) - \mathrm{j}\sin(-1) + \cos 1 + \mathrm{j}\sin 1\right) =$$
$$= \pi \mathrm{j}\, e^{-1}\cdot 2\mathrm{j}\sin 1 = -2\pi e^{-1}\sin 1.$$