LABORATOR 10 - INTERPOLARE PRIN FUNCŢII SPLINE

1. Funcţii spline cubice

Fie
$$\Delta : a = x_0 < x_1 < ... < x_{i-1} < x_i < ... < x_n = b$$
o diviziune oarecare a intervalului $[a, b]$. Se numeşte *funcţie spline cubică* o funcţie $s : [a, b] \to \mathbb{R}$ cu proprietăţile:

(i) restricţia lui s la fiecare subinterval $[x_{i-1}, x_i]$ este un polinom de grad cel mult trei;

(ii) s, s', s'' sunt continue pe $[a, b]$.

În continuare ne punem problema interpolării unei funcţii $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ cu ajutorul unei funcţii spline cubice. Cu alte cuvinte, ne punem problema găsirii unei funcţii spline cubice s astfel încât $f(x_i) = s(x_i), i = \overline{0, n}$. Deoarece restricţia lui s la subintervalele $[x_{i-1}, x_i]$ este un polinom de grad cel mult trei, rezultă că
$$s(x) = a_i + b_i x + c_i x^2 + d_i x^3, \forall x \in [x_{i-1}, x_i].$$

Determinarea funcţiei s constă deci în determinarea a $4n$ coeficienţi $a_i, b_i, c_i, d_i, i = \overline{1, n}$. Evaluăm în continuare de câte condiţii dispunem. Din
$$f(x_i) = s(x_i), i = \overline{0, n}$$
avem $n + 1$ condiţii. Din continuitatea lui s, a lui s' şi a lui s'' rezultă
$$s^{(k)}(x_i - 0) = s^{(k)}(x_i + 0), i = \overline{1, n-1}, k = 0, 1, 2,$$
deci $3(n-1)$ condiţii. În total dispunem de $4n-2$ condiţii, cu două mai puţin decât numărul coeficienţilor care urmează a fi determinaţi. Dacă se cunosc derivatele $f'(a)$ şi $f'(b)$, adăugăm condiţiile
$$s'(a) = f'(a), s'(b) = f'(b).$$
Dacă nu se cunosc aceste derivate, atunci se aproximează $f'(a) \approx y'_0, f'(b) \approx y'_n$ şi se pun condiţiile
$$s'(a) = y'_0, s'(b) = y'_n.$$
Dacă nu avem nici o informaţie despre $f'(a)$ şi $f'(b)$, atunci se pot pune condiţiile
$$s''(a) = s''(b) = 0,$$
iar în acest caz se obţin aşa numitele *funcţii spline cubice naturale.*

Reamintim următorul rezultat de algebră liniară:

Propoziţia 1. *Orice matrice pătratică strict diagonal dominată este nesingulară.*

Demonstraţie. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ cu proprietatea
$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| . \tag{1.1}$$

Dacă vom arăta că sistemul $Ax = 0$ admite numai soluţia banală, va rezulta că $\det A \neq 0$.

Presupunem prin reducere la absurd că există $\alpha \neq 0$ astfel încât $A\alpha = 0$. Fie $\alpha_j = \|\alpha\|_\infty = \max\{|\alpha_1|, |\alpha_2|, ..., |\alpha_n|\}$. Cum $A\alpha = 0$, avem

$$a_{j1}\alpha_1 + a_{j2}\alpha_2 + ... + a_{jn}\alpha_n = 0, \text{ sau}$$

$$a_{jj} + \sum_{k=1,k\neq j}^{n} a_{jk}\frac{\alpha_k}{\alpha_j} = 0. \tag{1.2}$$

Avem deci

$$|a_{jj}| \leq \sum_{k=1,k\neq j}^{n} |a_{jk}| \left|\frac{\alpha_k}{\alpha_j}\right| \leq \sum_{k=1,k\neq j}^{n} |a_{jk}|,$$

ceea ce contrazice 1.1. □

Teorema 2. *Pentru orice $n+3$ numere date $y_0', y_0, y_1, ..., y_n, y_n'$, există o unică funcţie spline cubică s, cu proprietăţile:*

$$s(x_i) = y_i, i = \overline{0,n}, s'(x_0) = y_0', s'(x_n) = y_n'.$$

Demonstraţie. Vom nota $M_i = s''(x_i)$. Deoarece $s''(x) = \alpha x + \beta, \forall x \in [x_{i-1}, x_i]$, rezultă $\alpha = \dfrac{M_i - M_{i-1}}{h_i}$, $\beta = \dfrac{M_{i-1}x_i - M_i x_{i-1}}{h_i}$, unde $h_i = x_i - x_{i-1}$. Aşadar, pe intervalul $[x_{i-1}, x_i]$ avem

$$s''(x) = \frac{(x_i - x)M_{i-1} + (x - x_{i-1})M_i}{h_i}, i = \overline{1,n}. \tag{1.3}$$

Integrând de două ori obţinem

$$s(x) = \frac{(x_i - x)^3 M_{i-1} + (x - x_{i-1})^3 M_i}{6h_i} + C_i(x_i - x) + D_i(x - x_{i-1}), i = \overline{1,n}, \tag{1.4}$$

unde C_i şi D_i sunt constante arbitrare.

Punând condiţiile de interpolare $s(x_i) = y_i, i = \overline{0,n}$, obţinem

$$\frac{h_i^2 M_i}{6} + D_i h_i = y_i, \frac{h_i^2 M_{i-1}}{6} + C_i h_i = y_{i-1},$$

de unde

$$C_i = \frac{y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i M_{i-1}}{6}, D_i = \frac{y_i}{h_i} - \frac{h_i M_i}{6}. \tag{1.5}$$

Combinând relaţiile 1.4 şi 1.5 obţinem:

$$\begin{aligned} s(x) &= \frac{(x_i - x)^3 M_{i-1} + (x - x_{i-1})^3 M_i}{6h_i} + \frac{(x_i - x)y_{i-1} + (x - x_{i-1})y_i}{h_i} \\ &\quad - \frac{(x_i - x)M_{i-1} + (x - x_{i-1})M_i}{6} h_i. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Observăm că s este continuă în fiecare $x_i, i = \overline{0,n}$. Într-adevăr,

$$\lim_{\substack{x \to x_i \\ x < x_i}} s(x) = \frac{h_i^2 M_i}{6} + y_i - \frac{h_i^2 M_i}{6} = \lim_{\substack{x \to x_i \\ x > x_i}} s(x).$$

Punem în continuare condiţia ca s' să fie continuă în fiecare punct $x_i, i = \overline{1, n-1}$. Avem:

$$s'(x) = \begin{cases} \cdots \\ \dfrac{-(x_i - x)^2 M_{i-1} + (x - x_{i-1})^2 M_i}{2h_i} + \dfrac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \dfrac{M_i - M_{i-1}}{6} h_i, \\ x \in (x_{i-1}, x_i) \\ \dfrac{-(x_{i+1} - x)^2 M_i + (x - x_i)^2 M_{i+1}}{2h_{i+1}} + \dfrac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \dfrac{M_{i+1} - M_i}{6} h_{i+1}, \\ x \in (x_i, x_{i+1}) \\ \cdots \end{cases}.$$

Atunci:

$$\begin{aligned} s'(x_i - 0) &= \frac{h_i M_i}{2} + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{M_i - M_{i-1}}{6} h_i \\ &= \frac{h_i M_i}{3} + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} + \frac{h_i M_{i-1}}{6} \\ s'(x_i + 0) &= \frac{-h_{i+1} M_i}{2} + \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{M_{i+1} - M_i}{6} h_{i+1} \\ &= -\frac{h_{i+1} M_i}{3} + \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{h_{i+1} M_{i+1}}{6}. \end{aligned}$$

Din egalitatea $s'(x_i - 0) = s'(x_i + 0)$ obţinem

$$\text{(1.7)} \quad \frac{h_i M_{i-1}}{6} + \frac{(h_i + h_{i+1}) M_i}{3} + \frac{h_{i+1} M_{i+1}}{6} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}, i = \overline{1, n-1}.$$

Folosind şi egalităţile $s'(x_0) = y'_0, s'(x_n) = y'_n$, avem

$$\begin{aligned} -\frac{h_1 M_0}{2} + \frac{y_1 - y_0}{h_1} - \frac{M_1 - M_0}{6} h_1 &= y'_0 \\ \frac{h_n M_n}{2} + \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n} - \frac{M_n - M_{n-1}}{6} h_n &= y'_n, \end{aligned}$$

de unde

$$\text{(1.8)} \quad \begin{aligned} \frac{h_1}{3} M_0 + \frac{h_1}{6} M_1 &= \frac{y_1 - y_0}{h_1} - y'_0 \\ \frac{h_n}{6} M_{n-1} + \frac{h_n}{3} M_n &= y'_n - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n}. \end{aligned}$$

Comdinând relaţiile 1.7 şi 1.8 obţinem sistemul $AM = Y$, unde

$$A = \begin{bmatrix} \frac{h_1}{3} & \frac{h_1}{6} & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ \frac{h_1}{6} & \frac{h_1+h_2}{3} & \frac{h_2}{6} & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h_2}{6} & \frac{h_2+h_3}{3} & \frac{h_3}{6} & ... & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & \frac{h_{n-1}}{6} & \frac{h_{n-1}+h_n}{3} & \frac{h_n}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & & \frac{h_n}{6} & \frac{h_n}{3} \end{bmatrix},$$

$$M = \begin{bmatrix} M_0 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_n \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} \dfrac{y_1 - y_0}{h_1} - y_0' \\ ... \\ \dfrac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \dfrac{y_i - y_{i-1}}{h_i} \\ ... \\ y_n' - \dfrac{y_n - y_{n-1}}{h_n} \end{bmatrix}.$$

Observăm că A este strict diagonal dominată, deci nesingulară, simetrică şi tridiagonală. Atunci sistemul $AM = Y$ are soluţie unică. Înlocuind în 1.6 această soluţie, obţinem funcţia căutată. Unicitatea acesteia rezultă din unicitatea lui M. □

Se poate demonstra următoarea teoremă:

Teorema 3. *Fie* $f \in \mathcal{C}^4[a,b]$ *şi* $M_4 = \sup\{\left|f^{IV}(x)\right| \mid x \in (a,b)\}$ *şi fie* $x_i^{(n)} = a + ih, i = \overline{0,n}$ *noduri echidistante, unde* $h = \dfrac{b-a}{n}$. *Dacă* s_n *este funcţia spline cubică cu proprietăţile:*

$$s_n(x_i^{(n)}) = f(x_i^{(n)}), i = \overline{0,n}, s_n'(a) = f'(a), s_n'(b) = f'(b),$$

atunci pentru orice $x \in [a,b]$ *avem:*

$$|f(x) - s_n(x)| \leq \frac{5}{384} M_4 h^4; |f'(x) - s_n'(x)| \leq \frac{1}{24} M_4 h^3; |f''(x) - s_n''(x)| \leq \frac{3}{8} M_4 h^2.$$

Aşadar, din **Teorema 3** rezultă că şirul funcţiilor spline cubice (s_n) care interpolează funcţia f în nodurile echidistante $(x_i^{(n)})$ converge uniform pe intervalul $[a,b]$ către funcţia f. Mai mult, $s_n' \xrightarrow{u} f'$ şi $s_n'' \xrightarrow{u} f''$ pe intervalul $[a,b]$.

Algoritmul MATLAB pentru interpolarea cu funcţii spline

```
% Introducere capete inteval, a,b
% Introducere vector x, reprezentând nodurile
% Introducere vector z, reprezentând valorile cunoscute ale funcţiei în noduri
% Introducere y'_0 şi y'_n
n=length(x);
for i=1:n-1
    h(i)=x(i+1)-x(i);
end
h
A=zeros(n);
```

```
Y=zeros(n,1);
A(1,1)=h(1)/3;
A(1,2)=h(1)/6;
Y(1)=(y(2)-y(1))/h(1)-y0;
for i=2:n-1
    A(i,i-1)=h(i-1)/6;
    A(i,i)=(h(i-1)+h(i))/3;
    A(i,i+1)=h(i)/6;
    Y(i)=(y(i+1)-y(i))/h(i)+(y(i)-y(i-1))/h(i-1);
end
A(n,n-1)=h(n-1)/6;
A(n,n)=h(n-1)/3;
Y(n)=yn-(y(n)-y(n-1))/h(n-1);
A
Y
% Se rezolva sistemul prin metoda suprarelaxarii
% Introducere punct pentru interpolare, x_stea
i=2;
flag=1;
while(flag~=0)
    if (x_stea<=x(i))
        flag=0;
    else
        i=i+1;
    end
end
fprintf('\n%g este intre x(%g)=%g si x(%g)=%g',x_stea,i-1,x(i-1),i,x(i))
S=((x(i)-x_stea)^3*M(i-1)+(x_stea-x(i-1))^3*M(i))/(6*h(i-1))
+((x(i)-x_stea)*y(i-1)+(x_stea-x(i-1))*y(i))/(h(i-1))
-((x(i)-x_stea)*M(i-1)+(x_stea-x(i-1))*M(i))*h(i-1)/6;
disp('Valoarea aproximativă a funcţiei în a este')
S
```