

Analiză Matematică 2

Temă (CC)

Problema 1 Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{4x} \sin 3x$. Calculați $df(x)$, $df(0)$, $df(0; \frac{1}{10})$.

Problema 2 Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$.

1) Calculați $df(x)$, $df(\frac{\pi}{3})$, $df(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{180})$.

2) Precizați o valoare aproximativă a lui $\cos 61^\circ$ obținută cu ajutorul uneia dintre diferențialele de mai sus.

Problema 3 Calculați $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ pentru funcțiile $f : D \rightarrow \mathbb{R}$,

1) $f(x, y) = x^4 + 5xy^3 - y^4$, 2) $f(x, y) = \frac{3x+4y}{2x+5y}$, 3) $f(x, y) = e^{x^3y+x} \sin y$,

4) $f(x, y) = \sqrt[4]{x^2 + 4xy + 5y^3}$.

Problema 4 Fie $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \frac{x}{y} \cos \frac{y}{x}$.

1) Demonstrați că $x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$, $\forall (x, y) \in D$.

2) Calculați $df(x, y)$, $df(1, \frac{\pi}{2})$, $df(1, \frac{\pi}{2}; \frac{1}{10}, \frac{2}{10})$.

3) Precizați o valoare aproximativă a lui $f(1 + \frac{1}{10}, \frac{\pi}{2} + \frac{2}{10})$ obținută cu ajutorul uneia dintre diferențialele de mai sus.

Problema 5 Determinați punctele de extrem ale funcțiilor

1) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^5 + y^5 - 5xy$,

2) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2x + 4y - 6z$

și precizați natura acestora.

Problema 6 Fie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^3y^2 + 4y$. Calculați $\frac{df}{d\vec{v}}(1, 3)$, unde $\vec{v} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$. Crește f într-o vecinătate a lui $A(1, 3)$ după direcția lui \vec{v} , sau scade după această direcție?

Problema 7 Fie seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n + 4^n}$.

1) Determinați raza de convergență, intervalul de convergență și mulțimea de convergență pentru seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n + 4^n}$.

2) Este seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n + 4^n}$ convergentă, sau divergentă?

Problema 8 Determinați

1) $\int \sin(3x + 2) dx$; 2) $\int \frac{dx}{(x + 1)^5}$.

Problema 9 Determinați

$$1) \int x \arctg x dx; \quad 2) \int x^2 \cos x dx.$$

Problema 10 Determinați

$$1) \int \sqrt[5]{\ln x} \frac{1}{x} dx; \quad 2) \int \sin^3 x \cos^2 x dx.$$

Problema 11 Determinați primitivele următoarelor funcții raționale.

$$1) \int \frac{dx}{x^2 + 7x + 12}; \quad 2) \int \frac{x + 1}{x^2 - 4x + 3} dx.$$

Problema 12 Determinați primitivele următoarelor funcții reductibile la funcții raționale.

$$1) \int e^{\sqrt{x}} dx; \quad 2) \int \frac{dx}{\sqrt{5-x} + \sqrt[3]{5-x}}.$$

Problema 13 Demonstrați că funcția

$$f : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_{\sin x}^{\cos x} e^t dt,$$

este strict descrescătoare.

Problema 14 Determinați

$$1) \int_1^2 \ln(1 + x^2) dx; \quad 2) \int_0^2 x e^{2x} dx.$$

Problema 15 Determinați

$$1) \int_1^e \frac{\cos(\ln x)}{x} dx; \quad 2) \int_0^1 \frac{x^2}{1 + x^6} dx.$$

Problema 16 Studiind paritatea integrandului, demonstrați că

$$1) \int_{-1}^1 \frac{x^5}{1 + x^{10}} dx = 0; \quad 2) \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} \cos x \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) dx = 0.$$

Problema 17 Determinați $\int_{\pi}^{2\pi} \cos x \sqrt{1 + \sin^2 x} dx$.

Problema 18 Determinați valorile următoarelor limite

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \operatorname{tg} t dt}{x^2}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\int_0^{\operatorname{tg} x} e^{t^2} dt}{\int_0^{\sin x} e^{t^2} dt}.$$

Problema 19 Determinați ariile domeniilor plane mărginite de graficele următoarelor funcții

$$1. f, g : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x^3, g(x) = -4x.$$

Problema 20 Determinați ariile suprafețelor de rotație obținute prin rotația graficelor următoarelor funcții în jurul axei Ox

1. $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3$.

Problema 21 Determinați volumele corpurilor de rotație obținute prin rotația graficelor următoarelor funcții în jurul axei Ox

1. $f : [1, e] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x \ln x$.

Problema 22 Determinați valorile următoarelor integrale improprii

1) $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2 + 5x + 6} dx$.

Problema 23 Studiați convergența următoarelor integrale improprii

1) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 2x^2 + 1}$; 2) $\int_1^{\infty} \frac{x^2}{\sqrt{1 + 3x^4 + 2x^8}} dx$.

Problema 24 Studiați convergența următoarelor integrale improprii

1) $\int_1^3 \frac{1}{(x-1)^3(4-x)} dx$; 2) $\int_3^5 \frac{1}{(x-1)(x-3)} dx$.

Problema 25 Determinați $\int_C y ds$, unde $(C) : \begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{t} \end{cases}, t \in [2, 3]$.

Problema 26 Determinați valorile următoarelor integrale pe domenii dreptunghiulare

1) $\iint_{[0,1] \times [\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}]} \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)(1-y^2)}} dx dy$.

Problema 27 Determinați aria domeniului plan mărginit de dreapta $(D) : y = x$ și de parabola $(P) : y^2 = x$.

Problema 28 Determinați

$$\iint_D (x^2 + y) dx dy,$$

unde D este domeniul mărginit de parabolele $(P_1) : x^2 = y$ și $(P_2) : y^2 = x$.

Problema 29 Cu ajutorul coordonatelor polare, determinați

1. $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy, D = \{(x, y); 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4; x \leq 0, y \geq 0\}$.