Capitolul 5

LIMITE DE FUNCŢII

5.1 Limita unei funcţii într-un punct

Fie o funcţie $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ne punem problema de a studia comportarea lui f în apropierea unui punct dat $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, în sensul de a observa dacă pentru valori x ale argumentului apropiate de x_0 valorile $f(x)$ ale funcţiei se apropie şi ele de o valoare reală fixă sau sunt arbitrar de mari, respectiv arbitrar de mici.

Formulată în acest sens, suficient de intuitiv dar relativ imprecis, problema necesită unele clarificări şi restricţii. Din cele de mai sus, se poate observa faptul că sunt de interes valorile funcţiei f pentru argumente apropiate de x_0 şi nu valoarea $f(x_0)$ însăşi. De fapt, f poate nici să nu fie definită în x_0, adică nu este necesar ca x_0 să aparţină lui D. Totuşi, este necesar ca D să conţină valori x ale argumentului oricât de apropiate de x_0, adică x_0 trebuie să fie punct de acumulare al lui D. Mai mult, nu este necesar ca x_0 să fie finit, el putând fi $-\infty$ sau $+\infty$.

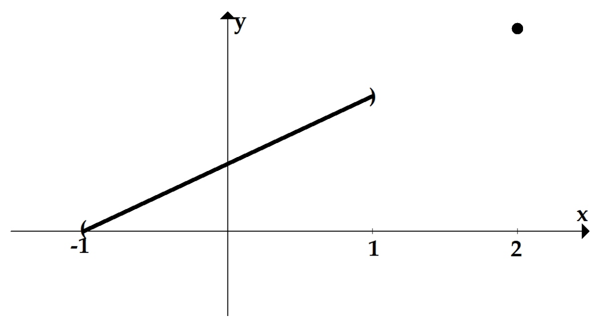
Pentru o funcţie $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi pentru $x_0 \in D'$, vom spune că funcţia f *are limita* $l \in \overline{\mathbb{R}}$ în x_0 dacă pentru orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(l)$ există o vecinătate $U \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel încât pentru orice $x \in U \cap D$, $x \neq x_0$, urmează că $f(x) \in V$. În acest caz, vom nota $f(x) \to l$ *pentru* $x \to x_0$ sau $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, spunându-se şi că $f(x)$ *tinde la* l *pentru* x *tinzând la* x_0.

Se observă că dacă x_0 nu este punct de acumulare al lui D, adică dacă x_0 este punct izolat al lui D sau punct exterior lui D, atunci problema existenţei limitei lui f în D nu are sens, întrucât D nu conţine valori ale argumentului x oricât de apropiate de x_0.

De asemenea, într-un mod similar demonstraţiei rezultatului corespunzător privind limite de şiruri, se poate demonstra că dacă limita unei funcţii există, atunci aceasta este unică.

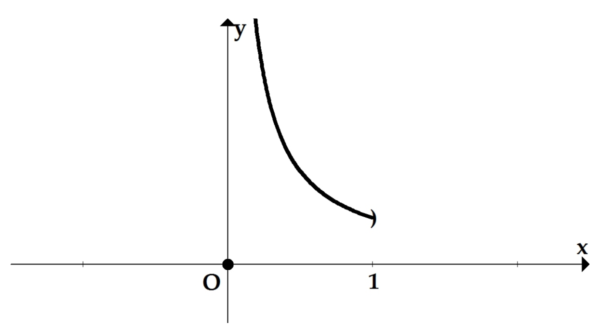
Exemple. 1. Fie $f : (-1,1) \cup \{2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$.

Atunci $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$, iar $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$, problema existenţei limitei lui f în $x_0 = 1$ având sens, deoarece acesta este punct de acumulare al domeniului de definiţie, chiar dacă nu aparţine acestuia. În acelaşi timp, problema existenţei limitei lui f în $x_0 = 2$ nu are sens, deoarece acesta este punct izolat al domeniului de definiţie. În mod similar, problema existenţei limitei lui f în $x_0 = 3$ nu are sens, deoarece acesta este punct exterior domeniului de definiţie.



2. Fie $f : [0,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in (0,1) \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

Atunci $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$, în timp ce $f(0) = 0$, deci o funcţie poate avea într-un punct dat o limită diferită de valoarea funcţiei în acel punct. În general, dacă $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, iar $x_0 \in D'$, se poate întâmpla ca $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$, adică valoarea limitei unei funcţii într-un punct poate fi diferită de valoarea funcţiei în acel punct. Funcţiile care verifică egalitatea $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ se numesc *funcţii continue în* x_0 şi vor fi studiate în capitolul următor.



5.1.1 Caracterizări analitice

Să presupunem pentru moment că $x_0 \in \mathbb{R}$ şi să considerăm vecinătăţi V ale lui l de tipul $(l-\varepsilon, l+\varepsilon)$ dacă l este finit, respectiv $(M, +\infty]$ dacă $l = +\infty$ şi $[-\infty, -M)$ dacă $l = -\infty$. Conform definiţiei de mai sus, obţinem următoarea *teoremă de caracterizare analitică* a limitei unei funcţii într-un punct, numită şi *teorema de caracterizare cu* $\varepsilon - \delta$.

Teorema 5.1. *Fie* $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *şi* $x_0 \in D' \cap \mathbb{R}$. *Atunci au loc următoarele afirmaţii.*

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ *Pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există* $\delta_\varepsilon > 0$ *astfel ca* $|f(x) - l| < \varepsilon$ *pentru orice* $x \in D$, $x \neq x_0$ *cu proprietatea că* $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$.

2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$ *Pentru orice* $M > 0$ *există* $\delta_M > 0$ *astfel ca* $f(x) > M$ *pentru orice* $x \in D$, $x \neq x_0$ *cu proprietatea că* $|x - x_0| < \delta_M$.

3. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$ *Pentru orice* $M > 0$ *există* $\delta_M > 0$ *astfel ca* $f(x) < -M$ *pentru orice* $x \in D$, $x \neq x_0$ *cu proprietatea că* $|x - x_0| < \delta_M$.

Pentru $x_0 = +\infty$, se obţine în mod similar următoarea caracterizare a funcţiilor cu limită la $+\infty$, un rezultat asemănător având loc şi pentru $x_0 = -\infty$.

Teorema 5.2. *Fie* $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *cu* $+\infty \in D'$. *Atunci au loc următoarele afirmaţii.*

1. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ *Pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există* $\delta_\varepsilon > 0$ *astfel ca* $|f(x) - l| < \varepsilon$ *pentru orice* $x \in D$, $x > \delta_\varepsilon$.

2. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$ *Pentru orice* $M > 0$ *există* $\delta_M > 0$ *astfel ca* $f(x) > M$ *pentru orice* $x \in D$, $x > \delta_M$.

3. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$ *Pentru orice* $M > 0$ *există* $\delta_M > 0$ *astfel ca* $f(x) < -M$ *pentru orice* $x \in D$, $x > \delta_M$.

5.1.2 Teorema de caracterizare cu şiruri

Teorema următoare, denumită şi *teorema de caracterizare cu şiruri a limitei unei funcţii într-un punct* sau *teorema de caracterizare Heine a limitei unei funcţii într-un punct*, permite transferul unor proprietăţi şi reguli de calcul ale limitelor de şiruri la limite de funcţii.

Teorema 5.3. *Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D'$. Atunci f are limita l în x_0 (finită sau infinită) dacă şi numai dacă pentru orice şir $(a_n)_{n\geq 0}$ cu limita x_0 astfel încât $a_n \in D$, $a_n \neq x_0$ pentru orice $n \geq 0$, urmează că şirul valorilor $(f(a_n))_{n\geq 0}$ are limita l.*

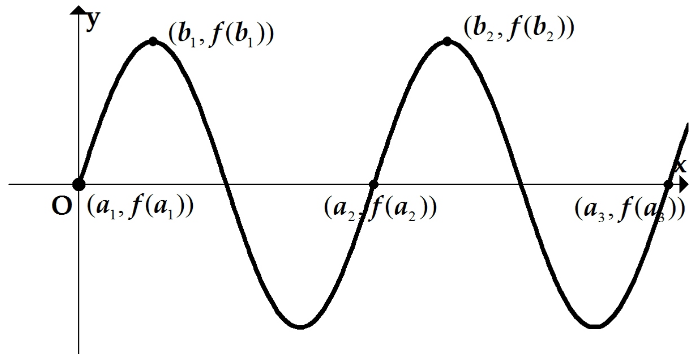
Condiţii suficiente ca o funcţie să nu aibă limită într-un punct

Conform teoremei de mai sus, se observă că dacă este îndeplinită una dintre condiţiile următoare, atunci funcţia $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nu are limită în $x_0 \in D'$.

1. Există două şiruri $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ cu limita x_0 astfel ca $a_n, b_n \in D$, $a_n, b_n \neq x_0$ pentru orice $n \geq 0$, iar şirurile de valori $(f(a_n))_{n\geq 0}$, $(f(b_n))_{n\geq 0}$ au limite diferite l_1 şi l_2.

2. Există un şir $(a_n)_n \geq 0$ cu limita x_0 astfel ca $a_n \in D$, $a_n \neq x_0$ pentru orice $n \geq 0$, iar şirul valorilor $(f(a_n))_{n\geq 0}$ nu are limită.

Exemplu. Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ nu are limită la $+\infty$. În acest sens, să observăm că pentru şirul $(a_n)_{n\geq 0}$, $a_n = 2n\pi$, cu limita $+\infty$, şirul valorilor $(f(a_n))_{n\geq 0}$ are limita 0, fiind constant nul, în timp ce pentru şirul $(b_n)_{n\geq 0}$, $b_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, de asemenea cu limita $+\infty$, şirul valorilor $(f(b_n))_{n\geq 0}$ are limita 1, fiind constant egal cu 1.



De fapt, cu un raţionament asemănător se poate observa că are loc următoarea proprietate mai generală.

Teorema 5.4. *Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodică şi neconstantă. Atunci f nu are limită la $+\infty$ sau $-\infty$.*

În particular, teorema de mai sus atestă faptul că funcţiile trigonometrice directe uzuale nu au limită la $\pm\infty$.

5.1.3 Limite laterale

În situaţia în care argumentul x se apropie de punctul x_0 dat doar prin valori mai mici, respectiv mai mari decât x_0, se obţine conceptul de limită laterală.

Pentru o funcţie $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi pentru $x_0 \in (D \cap (-\infty, x_0))'$ (adică pentru x_0 punct de acumulare la stânga al mulţimii D), vom spune că funcţia f *are limita la stânga* $l_s \in \overline{\mathbb{R}}$ în x_0 dacă pentru orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(l_s)$ există o vecinătate $U \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel încât pentru orice $x \in U \cap D$, $x < x_0$, urmează că $f(x) \in V$. În acest caz, vom nota

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = l_s, \text{ sau } \lim_{x \nearrow x_0} f(x) = l_s, \text{ sau } f(x_0 - 0) = l_s.$$

Similar, vom spune că funcţia f *are limita la dreapta* $l_d \in \overline{\mathbb{R}}$ în $x_0 \in (D \cap (x_0, +\infty))'$ (adică pentru x_0 punct de acumulare la dreapta al mulţimii D) dacă pentru orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(l_d)$ există o vecinătate $U \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel încât pentru orice $x \in U \cap D$, $x > x_0$, urmează că $f(x) \in V$. În acest caz, vom nota

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = l_d, \text{ sau } \lim_{x \searrow x_0} f(x) = l_d, \text{ sau } f(x_0 + 0) = l_d.$$

Limitele la stânga şi la dreapta ale unei funcţii într-un punct x_0 se mai numesc şi *limite laterale* în x_0.

Caracterizarea cu şiruri a limitelor laterale într-un punct

În mod analog teoremei de caracterizare cu şiruri a limitei unei funcţii într-un punct se poate demonstra următorul rezultat.

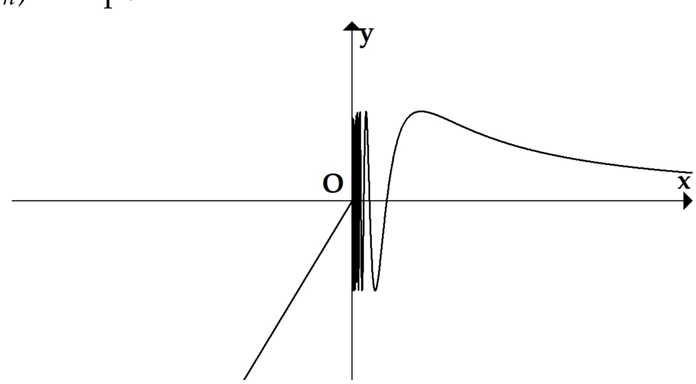
Teorema 5.5. *Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Au loc următoarele afirmaţii.*

1. *Funcţia f are limita la stânga $l_s \in \overline{\mathbb{R}}$ în $x_0 \in (D \cap (-\infty, x_0))'$ dacă şi numai dacă pentru orice şir $(a_n)_{n\geq 0}$ cu limita x_0 astfel încât $a_n \in D$, $a_n < x_0$ pentru orice $n \geq 0$, urmează că şirul valorilor $(f(a_n))_{n\geq 0}$ are limita l_s.*

2. *Funcţia f are limita la dreapta $l_d \in \overline{\mathbb{R}}$ în $x_0 \in (D \cap (x_0, +\infty))'$ dacă şi numai dacă pentru orice şir $(a_n)_{n\geq 0}$ cu limita x_0 astfel încât $a_n \in D$, $a_n > x_0$ pentru orice $n \geq 0$, urmează că şirul valorilor $(f(a_n))_{n\geq 0}$ are limita l_d.*

Se poate observa că existenţa uneia dintre limitele laterale într-un punct nu antrenează automat şi existenţa celeilalte. În anumite situaţii, se poate întâmpla ca una dintre limitele laterale să existe, în timp ce problema existenţei celelalte nici măcar să nu aibă sens.

Exemplu. 1. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$. Se observă că, pentru $x_0 = 0$, $l_s = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} x = 0$. Totuşi, l_d nu există, deoarece pentru $(a_n)_{n\geq 0}$, $a_n = \frac{1}{2n\pi}$, $a_n \to 0$ pentru $n \to \infty$, $a_n > 0$ pentru $n \geq 0$, $f(a_n) = \sin 2n\pi = 0$, deci $f(a_n) \to 0$ pentru $n \to \infty$, în vreme ce pentru $(b_n)_{n\geq 0}$, $b_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$, $b_n \to 0$ pentru $n \to \infty$, $b_n > 0$ pentru $n \geq 0$, $f(b_n) = \sin(\frac{\pi}{2} + 2n\pi) = 1$, deci $f(b_n) \to 1$ pentru $n \to \infty$.



2. Fie $f : [0,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$. Se observă că pentru $x_0 = 0$, $l_d = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x = 0$, în vreme ce problema existenţei lui l_s nu are sens, deoarece 0 nu este punct de acumulare la stânga al lui $[0,2]$.

Caracterizarea limitei unei funcţii într-un punct cu ajutorul limitelor laterale

Se poate observa că definiţia limitei într-un punct conţine condiţii mai restrictive decât definiţiile limitelor laterale, fiind necesar ca $f(x) \in V$ pentru orice $x \in U \cap D$, $x \neq x_0$, nu doar pentru $x \in U \cap D$, $x < x_0$ (respectiv $x > x_0$). Urmează că dacă x_0 este simultan punct de acumulare la stânga şi la dreapta al unei mulţimi D, iar funcţia $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are limita l în x_0, atunci are în mod necesar şi limite laterale în x_0 şi acestea sunt egale tot cu l. Reciproca nu este neapărat adevărată, în sensul că o funcţie poate avea limite laterale într-un punct fără să aibă neapărat limită în acel punct.

Totuşi, se poate demonstra că dacă limitele laterale într-un punct sunt egale, atunci funcţia are limită în acel punct, fapt descris de următoarea teoremă.

Teorema 5.6. *Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi fie $x_0 \in (D \cap (-\infty, x_0))' \cap (D \cap (x_0, +\infty))'$ (adică x_0 este simultan punct de acumulare la stânga şi la dreapta al mulţimii D). Atunci f are limită în x_0 dacă şi numai dacă f are limite laterale în x_0 şi*

$$l_s = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x) = l_d.$$

În acest caz, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ este egală cu valoarea comună a limitelor.

Exerciţiu. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} ax+1, & x \leq 2 \\ x+3, & x > 2 \end{cases}$. Determinaţi $a \in \mathbb{R}$ astfel ca f să aibă limită în $x_0 = 2$.

Soluţie. Cum

$$l_s = \lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} (ax+1) = 2a+1; \qquad l_d = \lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} (x+3) = 5,$$

pentru existenţa limitei funcţiei f în $x_0 = 2$ este necesar şi suficient ca $2a+1 = 5$, deci $a = 2$.

5.1.4 Criterii de existenţă a limitei unei funcţii într-un punct

Criteriu de existenţă a unei limite finite

Ca şi în cazul limitelor de şiruri, pentru a arăta că limita unei funcţii $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ în $x_0 \in D'$ este $l \in \mathbb{R}$, poate fi studiată diferenţa dintre valorile $f(x)$ ale funcţiei pentru x apropiat de x_0 şi limita l. În situaţia în care modulul acestei diferenţe este „mic", în sensul că poate fi majorat cu o funcţie cu limita 0 în x_0, atunci funcţia f are limita l în x_0, fapt observat în următorul rezultat, numit şi *criteriul majorării*.

Teorema 5.7. *Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D'$ şi $l \in \mathbb{R}$. Dacă există o funcţie $\alpha : D \to [0, \infty)$ şi o vecinătate $V \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel ca*

$$|f(x) - l| \leq \alpha(x) \quad \text{pentru orice } x \in V \cap D, x \neq x_0,$$

iar $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$, atunci $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$.

Exerciţiu. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$. Demonstraţi că $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

Soluţie. Cum $|f(x) - l| = |x \sin \frac{1}{x} - 0| \leq |x|$ pentru orice $x \neq 0$, iar $\lim\limits_{x\to 0}|x| = 0$, urmează conform celor de mai sus că $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

Criteriu de existenţă a unei limite infinite

De asemenea, pentru a arăta că o funcţie $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are limita $+\infty$ în $x_0 \in D'$, este suficient să se demonstreze că valorile lui f sunt minorate pe o vecinătate a lui x_0 de valorile unei funcţii g, cu o expresie posibil mai simplă, iar $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$. Similar, pentru a arăta că o funcţie $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are limita $-\infty$ în $x_0 \in D'$ este suficient să se demonstreze că valorile lui f sunt majorate pe o vecinătate a lui x_0 de valorile unei funcţii g, cu o expresie posibil mai simplă, iar $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty$.

Teorema 5.8. *Fie* $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *şi fie* $x_0 \in D'$.

1. *Dacă există* $g : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *cu proprietatea că există o vecinătate* $V \in \mathcal{V}(x_0)$ *astfel ca* $f(x) \geq g(x)$ *pentru orice* $x \in V \cap D$, $x \neq x_0$, *iar* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, *atunci* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$.
2. *Dacă există* $g : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *cu proprietatea că există o vecinătate* $V \in \mathcal{V}(x_0)$ *astfel ca* $f(x) \leq g(x)$ *pentru orice* $x \in V \cap D$, $x \neq x_0$, *iar* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, *atunci* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$.

Exerciţiu. Demonstraţi că $\lim\limits_{x\to\infty}(-x + \sin x) = -\infty$.

Soluţie. Cum $-x + \sin x \leq -x + 1$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, iar $\lim\limits_{x\to\infty}(-x + 1) = -\infty$, urmează conform celor de mai sus că $\lim\limits_{x\to\infty}(-x + \sin x) = -\infty$.

A se nota că, în exemplul de mai sus, $\lim\limits_{x\to\infty}(-x + \sin x)$ există, deşi funcţia sinus, ca funcţie de sine stătătoare, nu are limită la $+\infty$.

Criteriul Cauchy-Bolzano

În cazul şirurilor de numere reale, se putea demonstra că un şir $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent fără a-i cunoaşte limita, arătând că acesta este şir Cauchy. În cazul funcţiilor, se poate obţine un criteriu analog de existenţă a unei limite finite într-un punct, numit *criteriul Cauchy-Bolzano*.

Teorema 5.9. *Fie* $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *şi* $x_0 \in D' \cap \mathbb{R}$. *Atunci* f *are limită finită în* x_0 *dacă şi numai dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există* $\delta_\varepsilon > 0$ *astfel ca* $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ *pentru orice* $x, y \in D$, $x, y \neq x_0$, *astfel ca* $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$, $|y - x_0| < \delta_\varepsilon$.

5.1.5 Proprietăţi ale funcţiilor cu limită

În situaţia în care o funcţie are limită finită într-un punct x_0, valorile sale $f(x)$ sunt apropiate de valoarea (finită) a limitei pentru valori x ale argumentului suficient de apropiate de x_0, neputând deveni arbitrar de mari, respectiv arbitrar de mici, pentru aceste valori ale argumentului. Acest lucru este exprimat în următoarea teoremă.

Mărginirea funcţiilor cu limită

Teorema 5.10. *Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D'$ astfel încât f are limită finită în x_0. Atunci există o vecinătate a lui x_0 pe care f este mărginită.*

Demonstraţie. Fie $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ şi fie $V = (l-1, l+1)$ o vecinătate a lui l. Conform definiţiei limitei, există o vecinătate $U \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel ca $f(x) \in V$ pentru orice $x \in U \cap D$, $x \neq x_0$. Atunci $|f(x)| < |l| + 1$ pentru orice $x \in U \cap D$, $x \neq x_0$, deci f este mărginită pe U. ■

Proprietatea de păstrare a semnului

Teorema 5.11. *Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D'$ astfel încât f are limită nenulă în x_0. Atunci există o vecinătate a lui x_0 pe care f păstrează semnul limitei.*

Trecerea la limită în inegalităţi

Teorema ce urmează, numită şi *teorema de trecere la limită în inegalităţi* exprimă faptul că inegalităţile (nestricte) dintre două funcţii se păstrează prin trecere la limită.

Teorema 5.12. *Fie două funcţii $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D'$ cu proprietăţile*

1. *Există o vecinătate $V \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel ca*

$$f(x) \leq g(x) \quad \textit{pentru } x \in V \cap D, x \neq x_0.$$

2. $\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1 \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$.

Atunci $l_1 \leq l_2$.

Inegalităţile nestricte dintre termenii a două funcţii nu se păstrează neapărat prin trecere la limită. Aceasta se poate observa considerând funcţiile $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ şi $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{2}{x}$ pentru care $f(x) < g(x)$ pentru orice $x > 0$, dar $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0$, inegalitatea strictă dintre valorile lui f şi g transformându-se în egalitate.

Teorema cleştelui

Teorema de mai jos, numită şi *teorema cleştelui* (pentru funcţii), ne permite să calculăm limita într-un punct a unei funcţii care, pe o vecinătate a acelui punct, poate fi încadrată între alte două funcţii având aceeaşi limită.

Teorema 5.13. *Fie trei funcţii* $a, f, b : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *şi* $x_0 \in D'$ *cu proprietăţile*

1. *Există o vecinătate* $V \in \mathcal{V}(x_0)$ *astfel ca*

$$a(x) \leq f(x) \leq b(x) \quad \text{pentru } x \in V \cap D, x \neq x_0.$$

2. $\lim\limits_{x\to x_0} a(x) = \lim\limits_{x\to x_0} b(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$.

Atunci există $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, *iar* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$.

Limita funcţiei compuse

Următoarea teoremă de calcul a *limitei funcţiei compuse* stă la baza calculului limitelor cu ajutorul schimbărilor de variabilă.

Teorema 5.14. *Fie* $u : D \subseteq \mathbb{R} \to E$, $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *şi* $x_0 \in D'$ *astfel încât* $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = u_0$ *şi* $u(x) \neq u_0$ *pentru* $x \in V \cap D$, $x \neq x_0$, *unde* $V \in \mathcal{V}(x_0)$ *este o vecinătate a lui* x_0, *iar* $\lim\limits_{y\to u_0} f(y) = l$. *Atunci funcţia compusă* $f \circ u : D \to \mathbb{R}$ *are limită în* x_0, *iar*

$$\lim_{x\to x_0} (f(u(x)) = \lim_{y\to u_0} f(y) = l.$$

Corolar 5.14.1. *Dacă* $u : D \subseteq \mathbb{R} \to E$, $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *şi* $x_0 \in D'$ *astfel încât* $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = u_0$, *iar* $\lim\limits_{y\to u_0} f(y) = f(u_0)$, *atunci*

$$\lim_{x\to x_0} (f(u(x)) = f(\lim_{x\to x_0} u(x)).$$

Corolar 5.14.2. *Dacă* $u : D \subseteq \mathbb{R} \to E$, $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *şi* $x_0 \in D'$ *astfel încât* $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = u(x_0)$, *iar* $\lim\limits_{y\to u_0} f(y) = f(u_0)$ *şi* $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = u_0$, *atunci*

$$\lim_{x\to x_0} (f(u(x)) = f(u(x_0)).$$

Limitele funcţiilor monotone

Pentru cazul şirurilor, s-a demonstrat că orice şir monoton are limită, finită sau nu. Acest lucru va rămâne adevărat şi în cazul funcţiilor monotone, cu precizarea că de această dată este asigurată doar existenţa limitelor laterale. În acest sens, teorema următoare precizează faptul că funcţiile monotone au limite laterale în orice punct de acumulare al domeniului lor de definiţie.

Teorema 5.15. *Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f monotonă, şi $x_0 \in D'$. Atunci există limitele laterale $l_s = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$ şi $l_d = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$, finite sau nu.*

Cum limita intr-un punct a unei funcţii este influenţată doar de valorile funcţiei pentru argumente dintr-o vecinătate a acelui punct, se poate observa că în teorema de mai sus este de fapt suficient ca funcţia să fie monotonă doar pe o vecinătate a acelui punct.

Produsul dintre o funcţie cu limita 0 şi o funcţie mărginită

Teorema 5.16. *Fie $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D'$. Dacă f este mărginită pe o vecinătate $V \in \mathcal{V}(x_0)$, iar $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$, atunci $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)g(x) = 0$.*

În teorema de mai sus, trebuie remarcat faptul că nu este necesar ca f să aibă limită în x_0.

Exerciţiu. Determinaţi $\lim\limits_{x \to 0} \left(x \sin^2 \frac{1}{x} \right)$.

Soluţie. Deoarece $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin^2 \frac{1}{x}$, este mărginită pe o vecinătate a lui $x_0 = 0$ (de fapt, f este mărginită pe întreg domeniul de definiţie, deoarece $|f(x)| \leq 1$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^*$), iar $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x$ are limita 0 în $x_0 = 0$, urmează că $\lim\limits_{x \to 0} \left(x \sin^2 \frac{1}{x} \right) = 0$, conform celor de mai sus.

5.2 Proprietăţi de calcul ale limitelor de funcţii

5.2.1 Operaţii cu limite de funcţii

Cu ajutorul teoremei de caracterizare cu şiruri a limitelor de funcţii, se pot deduce următoarele proprietăţi ale operaţiilor cu limite de funcţii cu ajutorul proprietăţilor corespunzătoare ale operaţiilor cu limite de şiruri.

Teorema 5.17. *Fie $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D'$ astfel încât există $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l_1$ şi $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l_2$.*

1. *Dacă suma $l_1 + l_2$ a limitelor are sens, atunci funcţia sumă $f + g$ are limită în x_0 şi*
$$\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = \big(\lim_{x\to x_0} f(x)\big) + \big(\lim_{x\to x_0} g(x)\big)$$
(caz exceptat: una dintre limitele l_1, l_2 este $+\infty$ iar cealaltă $-\infty$).

2. *Dacă produsul $l_1 l_2$ al limitelor are sens, atunci funcţia produs fg are limită în x_0 şi*
$$\lim_{x\to x_0} (f(x)g(x)) = \big(\lim_{x\to x_0} f(x)\big) \cdot \big(\lim_{x\to x_0} g(x)\big)$$
(caz exceptat: una dintre limitele l_1, l_2 este 0 iar cealaltă este $+\infty$ sau $-\infty$).

3. *αf are limită în x_0 pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$, iar*
$$\lim_{x\to x_0} (\alpha f(x)) = \alpha\big(\lim_{x\to x_0} f(x)\big),\ \textit{pentru } \alpha \neq 0,$$
iar $\lim\limits_{x\to x_0} (\alpha f(x)) = 0$, pentru $\alpha = 0$.

4. *Dacă raportul $\frac{l_1}{l_2}$ al limitelor are sens, iar $\frac{f}{g}$ este bine definită pe o vecinătate a lui x_0, atunci $\frac{f}{g}$ are limită în x_0 şi*
$$\lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\big(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\big)}{\big(\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\big)}$$
(cazuri exceptate: l_2 este 0, sau ambele limite l_1, l_2 sunt infinite).

5. *Dacă ${l_1}^{l_2}$ are sens, iar f^g este bine definită pe o vecinătate a lui x_0 atunci f^g are limită în x_0 şi*
$$\lim_{x\to x_0} (f(x)^{g(x)}) = \big(\lim_{x\to x_0} f(x)\big)^{\left(\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\right)}$$
(cazuri exceptate: $(l_1, l_2) = (0, 0)$, $(l_1, l_2) = (+\infty, 0)$, $(l_1, l_2) = (1, +\infty)$).

Pentru studiul limitei raportului a două funcţii, se poate observa că are loc si următorul rezultat care completează (parţial) teorema de mai sus pentru cazul în care $l_2 = 0$.

Teorema 5.18. *Fie $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D'$ astfel încât există $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l_1 \neq 0$ şi $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$.*

1. *Dacă $\frac{f}{g}$ este bine definită pe o vecinătate $V \in \mathcal{V}(x_0)$, iar $g(x) > 0$ pentru orice $x \in V \cap D$, $x \neq x_0$, atunci $\frac{f}{g}$ are limită în x_0 şi*

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = +\infty \cdot \operatorname{sgn}(l_1)$$

2. *Dacă $\frac{f}{g}$ este bine definită pe o vecinătate $V \in \mathcal{V}(x_0)$, iar $g(x) < 0$ pentru orice $x \in V \cap D$, $x \neq x_0$, atunci $\frac{f}{g}$ are limită în x_0 şi*

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = -\infty \cdot \operatorname{sgn}(l_1)$$

Cazurile exceptate din teoremele de mai sus, numite, pe scurt, şi *cazuri de nedeterminare*, pot fi exprimate pe scurt sub forma $\boldsymbol{\infty - \infty}$ (pentru sumă), $\mathbf{0} \cdot \boldsymbol{\infty}$ (pentru produs), $\frac{\pm\boldsymbol{\infty}}{\pm\boldsymbol{\infty}}$, $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$ (pentru raport), $\mathbf{0^0}$, $\boldsymbol{\infty}^{\mathbf{0}}$, $\mathbf{1}^{\boldsymbol{\infty}}$ (pentru exponenţiere).

Se poate de asemenea demonstra prin inducţie matematică faptul că proprietăţile 1 şi 3 din Teorema 5.17 rămân valabile şi pentru mai mult de două funcţii. În speţă, are loc următorul rezultat.

Teorema 5.19. *Fie $f_1, f_2, \ldots, f_n : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D'$ astfel încât există $\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) = l_1$, $\lim\limits_{x \to x_0} f_2(x) = l_2, \ldots, \lim\limits_{x \to x_0} f_n(x) = l_n$.*

1. *Dacă suma $l_1 + l_2 + \ldots + l_n$ a limitelor are sens, atunci funcţia sumă $f_1 + f_2 + \ldots + f_n$ are limită în x_0 şi*

$$\lim_{x \to x_0} (f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x))$$
$$= \lim_{x \to x_0} f_1(x) + \lim_{x \to x_0} f_2(x) + \ldots + \lim_{x \to x_0} f_n(x).$$

2. *Dacă produsul $l_1 l_2 \ldots l_n$ al limitelor are sens, atunci funcţia produs $f_1 f_2 \ldots f_n$ are limită în x_0 şi*

$$\lim_{x \to x_0} (f_1(x) f_2(x) \ldots f_n(x)) = \big(\lim_{x \to x_0} f_1(x)\big) \cdot \big(\lim_{x \to x_0} f_2(x)\big) \cdot \ldots \cdot \big(\lim_{x \to x_0} f_n(x)\big).$$

În particular,

$$\lim_{x \to x_0} (f_1(x)^n) = \big(\lim_{x \to x_0} f_1(x)\big)^n.$$

5.2.2 Limitele funcţiilor elementare

Limitele funcţiilor polinomiale

Fie P o funcţie polinomială de grad $k \geq 1$,

$$P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, P(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \quad a_k \neq 0.$$

Pentru calculul limitei $\lim\limits_{x \to x_0} P(x)$, $x_0 \in \mathbb{R}$, se observă că, pentru orice $l \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{x \to x_0} \left(a_l x^l\right) = a_l \big(\lim_{x \to x_0} x^l\big) = a_l (\lim_{x \to x_0} x)^l = a_l x_0^l.$$

Se obţine că

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} P(x) &= \lim_{x \to x_0} \left(a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0\right) \\
&= \lim_{x \to x_0} \left(a_k x^k\right) + \lim_{x \to x_0} \left(a_{k-1} x^{k-1}\right) + \ldots + \lim_{x \to x_0} \left(a_1 x\right) + a_0 \\
&= a_k {x_0}^k + a_{k-1} {x_0}^{k-1} + \ldots + a_1 x_0 + a_0 \\
&= P(x_0).
\end{aligned}$$

De aici, *valoarea limitei funcţiei polinomiale într-un punct $x_0 \in \mathbb{R}$ se obţine calculând valoarea funcţiei polinomiale în acel punct*.

Exemple. 1. $\lim\limits_{x \to 2} (3x^2 + 4x + 5) = 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 5 = 25.$

2. $\lim\limits_{x \to 1} (4x^3 - 2x^2 + 6) = 4 \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 6 = 8.$

La fel ca şi în cazul şirurilor, pentru calculul limitei $\lim_{x\to\infty} P(x)$ se va scoate factor comun forţat x^k ($k = \text{grad } P$). Se obţine că

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} P(x) &= \lim_{x\to\infty}\left(a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0\right)\\ &= \lim_{x\to\infty} x^k\left(a_k + a_{k-1}\frac{1}{x} + \ldots + a_1\frac{1}{x^{k-1}} + a_0\frac{1}{x^k}\right)\\ &= \infty\cdot a_k = \begin{cases}+\infty, & \text{dacă } a_k > 0\\ -\infty, & \text{dacă } a_k < 0\end{cases}.\end{aligned}$$

Să observăm că limita termenului de grad maxim al lui P este de asemenea

$$\lim_{x\to\infty} a_k x^k = \infty\cdot a_k = \lim_{x\to\infty} P(x),$$

de unde se poate remarca faptul că *limita la $+\infty$ a lui $P(x)$ este egală cu limita termenului de grad maxim al lui P*.

Cu un raţionament similar, se poate obţine că

$$\lim_{x\to-\infty} P(x) = (-\infty)^k\cdot a_k$$

deci şi *limita la $-\infty$ a lui $P(x)$ este egală cu limita termenului de grad maxim al lui P*.

Exemple. 1. $\lim_{x\to+\infty}\left(x^5 + 3x^2 - 2x + 1\right) = (+\infty)^5 = +\infty.$

2. $\lim_{x\to-\infty}(-2x^3 + 3x^2 - \frac{1}{3}x + \sqrt{3}) = -2(-\infty)^3 = +\infty.$

Limitele funcţiilor raţionale

Fie P, Q două funcţii polinomiale de grad k, respectiv l, unde $k, l \geq 1$,

$$\begin{aligned}&P:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, P(x) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \quad a_k \neq 0,\\ &Q:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, Q(x) = b_l x^l + b_{l-1}x^{l-1} + \ldots + b_1 x + b_0, \quad b_l \neq 0.\end{aligned}$$

Pentru calculul limitei $\lim_{x\to x_0}\left(\frac{P(x)}{Q(x)}\right)$ într-un punct $x_0\in\mathbb{R}$ în care numitorul nu se anulează ($Q(x_0)\neq 0$), se observă că, datorită proprietăţilor operaţiilor cu limite de funcţii şi celor demonstrate mai sus privitoare la limita unui polinom într-un punct $x_0\in\mathbb{R}$,

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{P(x)}{Q(x)}\right) = \frac{\lim_{x\to x_0} P(x)}{\lim_{x\to x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}.$$

De aici, *valoarea limitei funcţiei raţionale într-un punct $x_0 \in \mathbb{R}$ în care nu se anulează numitorul se obţine calculând valoarea funcţiei polinomiale în acel punct*.

Dacă x_0 este rădăcină a lui Q ($Q(x_0) = 0$), atunci

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{P(x)}{Q(x)} \right) = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)^p P_1(x)}{(x - x_0)^q Q_1(x)},$$

unde p, q sunt ordinele de multiplicitate ale rădăcinii x_0 pentru funcţiile polinomiale P, respectiv Q, iar $P_1(x_0) \neq 0$, $Q_1(x_0) \neq 0$. Se obţine că

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{P(x)}{Q(x)} \right) = \begin{cases} 0, & p > q \\ \frac{P_1(x_0)}{Q_1(x_0)}, & p = q \\ +\infty \cdot \frac{P_1(x_0)}{Q_1(x_0)}, & q > p, q - p \text{ par} \\ \text{nu există}, & q > p, q - p \text{ impar} \end{cases}.$$

Exemple. 1.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 + 2x + 1}{2x^4 - 5x + 9} = \frac{2^3 + 2 \cdot 2 + 1}{2 \cdot 2^4 - 5 \cdot 2 + 9} = \frac{13}{31}.$$

2.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 5x^2 + 7x - 3}{x^3 - 3x + 2} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)^2 (x-3)}{(x-1)^2 (x+2)} = \lim_{x \to 1} \frac{x-3}{x+2} = -\frac{2}{3}.$$

3.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^3 - 3x + 2} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)^2 (x+2)} = \lim_{x \to 1} \frac{x-3}{(x-1)(x+2)}.$$

Atunci $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^3 - 3x + 2}$ nu există, deoarece $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^3 - 3x + 2} = \frac{-2}{(0+) \cdot 3} = -\infty$, iar $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^3 - 3x + 2} = \frac{-2}{(0-) \cdot 3} = +\infty$.

Considerăm limita $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{P(x)}{Q(x)} \right)$. La fel ca şi în cazul şirurilor, pentru calculul acesteia se va scoate factor comun forţat x^k de la numărător ($k = \text{grad } P$), respectiv x^l de la numitor ($l = \text{grad } Q$). Se obţine că

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{P(x)}{Q(x)} \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_l x^l + b_{l-1} x^{l-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^k\left(a_k + a_{k-1}\frac{1}{x} + \ldots + a_1\frac{1}{x^{k-1}} + a_0\frac{1}{x^k}\right)}{x^l\left(b_l + b_{l-1}\frac{1}{x} + \ldots + b_1\frac{1}{x^{l-1}} + b_0\frac{1}{x^l}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} x^{k-l}\frac{a_k}{b^l} = \begin{cases} 0, & \text{dacă } k < l \\ \frac{a_k}{b_l}, & \text{dacă } k = l \\ +\infty\frac{a_k}{b_l}, & \text{dacă } k > l \end{cases}.$$

Să observăm că limita raportului termenilor de grad maxim este de asemenea

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_k x^k}{b_l x^l} = \lim_{x\to\infty} x^{k-l}\frac{a_k}{b^l},$$

de unde se poate remarca faptul că *limita lui* $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *este egală cu limita raportului termenilor de grad maxim ai lui P şi Q*, pentru $x \to +\infty$. Cu un raţionament similar, se poate obţine că acelaşi lucru se întâmplă şi pentru $x \to -\infty$.

Exemple. 1.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+4x+2}{2x^2-3x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(3+4\frac{1}{x}+2\frac{2}{x^2})}{x^2(2-3\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})} = \frac{3}{2}.$$

2.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-2x^3+3x^2+x-1}{3x^2+4x+6} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3(-2+3\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3})}{x^2(3+4\frac{1}{x}+6\frac{1}{x^2})}$$
$$= (-\infty)\cdot\frac{-2}{3} = +\infty.$$

3.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+4x-2}{4x^3+3x^2+2x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(3+4\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2})}{x^3(4+3\frac{1}{x}+2\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3})} = 0\cdot\frac{3}{4} = 0.$$

Limitele radicalilor

Se poate observa că, dacă $x_0 \in \mathbb{R}$ şi n este un număr natural impar, atunci

$$\lim_{x\to x_0} \sqrt[n]{x} = \lim_{x\to x_0}\left(x^{\frac{1}{n}}\right) = \left(\lim_{x\to x_0} x\right)^{\frac{1}{n}} = x_0^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x_0},$$

iar, cu acelaşi raţionament,

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} \sqrt[n]{x} = -\infty.$$

În mod similar, dacă $x_0 > 0$ şi n este un număr natural par, $n \geq 2$, atunci

$$\lim_{x \to x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}, \quad \lim_{x \to \infty} \sqrt[n]{x} = +\infty.$$

Exerciţiu. Determinaţi valoarea limitei

$$\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - x \right).$$

Soluţie. Deoarece $\lim\limits_{x \to \infty} \left(x^3 + x^2 + 1 \right) = +\infty$, urmează, conform teoremei limitei funcţiei compuse şi celor de mai sus, că $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} = +\infty$, ceea ce înseamnă că limita de mai sus prezintă o nedeterminare de forma $\boldsymbol{\infty} - \boldsymbol{\infty}$. Pentru înlăturarea acesteia se amplifică cu expresia conjugată celei din enunţ. Urmează că

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - x \right) \\
&= \lim_{x \to \infty} \frac{\left(\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - x \right) \left(\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1}^2 + \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} \cdot x + x^2 \right)}{\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1}^2 + \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} \cdot x + x^2} \\
&= \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 + x^2 + 1 - x^3}{\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1}^2 + \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} \cdot x + x^2} \\
&= \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 (1 + \frac{1}{x^2})}{x^2 \left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}}^2 + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}} + 1 \right)} \\
&= \lim_{x \to \infty} \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}}^2 + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}} + 1} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Limitele funcţiilor exponenţiale

Fie $a > 0$, $a \neq 1$, şi fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$. Se poate observa că, dacă $x_0 \in \mathbb{R}$, atunci

$$\lim_{x \to x_0} a^x = \left(\lim_{x \to x_0} a \right)^{\lim\limits_{x \to x_0} x} = a^{x_0}.$$

Pentru $a > 1$, se observă că f este strict crescătoare, iar

$$a^x \geq a^{[x]} = (1 + (a-1))^{[x]} \geq 1 + (a-1)[x],$$

conform inegalităţii lui Bernoulli, de unde urmează conform criteriului majorării că $\lim_{x\to\infty} a^x = +\infty$. De asemenea,

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{a^{-x}} = \lim_{u\to\infty} \frac{1}{a^u} = \frac{1}{\infty} = 0,$$

cu notaţia $u = -x$, conform teoremei limitei funcţiei compuse.

Dacă $a \in (0,1)$, atunci f este strict descrescătoare, iar $a = \frac{1}{b}$, $b > 1$. Urmează că

$$\lim_{x\to\infty} a^x = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{b}\right)^x = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{b^x} = \frac{1}{\infty} = 0,$$

cu un raţionament asemănător obţinându-se că $\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$.

Adăugând şi cazul $a = 1$, în cazul în care f este identic egală cu 1, discuţia de mai sus se poate sistematiza sub următoarea formă

$$\lim_{x\to\infty} a^x = \begin{cases} \infty, & a > 1 \\ 1, & a = 1 \\ 0, & a \in (0,1) \end{cases}, \quad \lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} 0, & a > 1 \\ 1, & a = 1 \\ \infty, & a \in (0,1) \end{cases}.$$

Limitele funcţiilor logaritmice

Fie $a > 0$, $a \neq 1$, şi fie $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$. Mai întâi, se observă că f este strict crescătoare pentru $a > 1$, respectiv strict descrescătoare pentru $a \in (0,1)$.

Dacă $x_0 \in \mathbb{R}$, atunci, cum f este strict monotonă, ea are limite laterale în x_0. Mai mult, deoarece $a^{\log_a x} = x$ pentru orice $x \in (0,\infty)$,

$$\lim_{x\to x_0} \left(a^{\log_a x}\right) = \lim_{x\to x_0} x = x_0.$$

Deoarece

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\x>x_0}} \left(a^{\log_a x}\right) = \left(\lim_{\substack{x\to x_0\\x>x_0}} a\right)^{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x>x_0}} \left(\log_a x\right)} = a^{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x>x_0}} \left(\log_a x\right)},$$

urmează că $a^{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x>x_0}} \left(\log_a x\right)} = x_0$, deci $\lim_{\substack{x\to x_0\\x>x_0}} \left(\log_a x\right) = \log_a x_0$. În mod similar se demonstrează că $\lim_{\substack{x\to x_0\\x<x_0}} \left(\log_a x\right) = \log_a x_0$, deci exită $\lim_{x\to x_0} \left(\log_a x\right) = \log_a x_0$, deoarece limitele laterale sunt ambele egale cu această valoare.

Cu un raţionament analog celui realizat pentru $x_0 \in \mathbb{R}$, obţinem că

$$\lim_{x\to\infty} \log_a x = \begin{cases} \infty, & a > 1 \\ -\infty, & a \in (0,1) \end{cases}, \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \log_a x = \begin{cases} -\infty, & a > 1 \\ \infty, & a \in (0,1) \end{cases}.$$

Limitele unor funcţii trigonometrice

Mai întâi, reamintim inegalitatea

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x, \quad \text{pentru } x \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

Ţinând seama că $\sin(-x) = -\sin x$ şi $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$ pentru $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, urmează că

$$|\sin x| \leq |x| \leq |\operatorname{tg} x|, \quad \text{pentru } x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$$

De asemenea,

$$|\sin x| \leq 1 < \frac{\pi}{2} \leq |x|, \quad \text{pentru } x \in (-\infty, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{\pi}{2}, +\infty)$$

deci

$$|\sin x| \leq |x|, \quad \text{pentru } x \in \mathbb{R}.$$

Funcţia sinus

Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ şi fie $x_0 \in \mathbb{R}$. Se observă că

$$|\sin x - \sin x_0| = 2|\sin \frac{x - x_0}{2}||\cos \frac{x + x_0}{2}| \leq 2|\frac{x - x_0}{2}| = |x - x_0|,$$

de unde, conform criteriului majorării,

$$\lim_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0 \quad \text{pentru } x_0 \in \mathbb{R}.$$

S-a observat deja că funcţia sinus nu are limită nici la $+\infty$ nici la $-\infty$. Într-adevăr, pentru şirul $(a_n)_{n\geq 0}$, $a_n = 2n\pi$, cu limita $+\infty$, şirul valorilor $(\sin(a_n))_{n\geq 0}$ are limita 0, fiind constant nul, în timp ce pentru şirul $(b_n)_{n\geq 0}$, $b_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$, de asemenea cu limita $+\infty$, şirul valorilor $(\sin(b_n))_{n\geq 0}$ are limita 1, fiind constant egal cu 1, deci funcţia sinus nu are limită la $+\infty$, în mod analog demonstrându-se că funcţia sinus nu are limită nici la $-\infty$.

Funcţia cosinus

În mod similar celor de mai sus se demonstrează că

$$\lim_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0, \quad \text{pentru } x \in \mathbb{R},$$

în vreme ce nici funcţia cosinus nu are limită nici la $+\infty$ nici la $-\infty$.

Funcţia tangentă

Fie funcţia $f : \mathbb{R}\setminus \left\{\frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{N}\right\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{tg} x$. Conform inegalităţilor

$$|\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x_0| \leq \left|\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\sin x_0}{\cos x_0}\right| = \left|\frac{\sin(x - x_0)}{\cos x \cos x_0}\right|,$$

valabile pentru $x, x_0 \in \mathbb{R}\setminus \left\{\frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{N}\right\}$, urmează că

$$\lim_{x\to x_0} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x_0, \quad \text{pentru } x_0 \in \mathbb{R}\setminus \left\{\frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

De asemenea,

$$\lim_{\substack{x\to \frac{\pi}{2}+n\pi \\ x<\frac{\pi}{2}+n\pi}} \operatorname{tg} x = \lim_{\substack{u\to \frac{\pi}{2} \\ x<\frac{\pi}{2}}} \operatorname{tg}(u + n\pi) = \lim_{\substack{u\to \frac{\pi}{2} \\ x<\frac{\pi}{2}}} \operatorname{tg} u = +\infty$$

ţinând seama de teorema limitei funcţiei compuse şi de faptul că funcţia tangentă este periodică de perioadă π. În mod similar se demonstrează că

$$\lim_{\substack{x\to \frac{\pi}{2}+n\pi \\ x>\frac{\pi}{2}+n\pi}} \operatorname{tg} x = -\infty.$$

Se poate observa că funcţia tangentă nu are limită nici la $+\infty$ nici la $-\infty$. Într-adevăr, pentru şirul $(a_n)_{n\geq 0}$, $a_n = n\pi$, cu limita $+\infty$, şirul valorilor $(\operatorname{tg}(a_n))_{n\geq 0}$ are limita 0, fiind constant nul, în timp ce pentru şirul $(b_n)_{n\geq 0}$, $b_n = \frac{\pi}{4} + n\pi$, de asemenea cu limita $+\infty$, şirul valorilor $(\operatorname{tg}(b_n))_{n\geq 0}$ are limita 1, fiind constant egal cu 1, deci funcţia tangentă nu are limită la $+\infty$, în mod analog raţionându-se pentru $x \to -\infty$.

Funcţia cotangentă

Fie funcţia $f : \mathbb{R}\setminus \{n\pi, n \in \mathbb{N}\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{ctg} x$. Ca mai sus, se obţine că

$$\lim_{x\to x_0} \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} x_0 \quad \text{pentru } x_0 \in \mathbb{R}\setminus \{n\pi, n \in \mathbb{N}\}.$$

De asemenea,

$$\lim_{\substack{x\to n\pi \\ x>n\pi}} \operatorname{ctg} x = \infty, \quad \lim_{\substack{x\to n\pi \\ x<n\pi}} \operatorname{ctg} x = -\infty.$$

Se poate observa că nici funcţia cotangentă nu are limita nici la $+\infty$ nici la $-\infty$.

Funcţia arcsinus

Fie funcţia $f : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) = \arcsin x$. Folosind un raţionament analog celui utilizat pentru a stabili limitele funcţiei logaritmice, se poate obţine că

$$\lim_{x\to x_0} \arcsin x = \arcsin x_0, \quad \text{pentru } x_0 \in [-1, 1].$$

Funcţia arccosinus

Fie funcţia $f : [-1, 1] \to [0, \pi]$, $f(x) = \arcsin x$. Ca mai sus, se poate obţine că

$$\lim_{x\to x_0} \arccos x = \arccos x_0, \quad \text{pentru } x_0 \in [-1, 1].$$

Funcţia arctangentă

Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$. Ca mai sus, se poate obţine că

$$\lim_{x\to x_0} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} x_0, \quad \text{pentru } x_0 \in \mathbb{R},$$

în vreme ce

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}.$$

Funcţia arccotangentă

Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to (0, \pi)$, $f(x) = \operatorname{arcctg} x$. Ca mai sus, se poate obţine că

$$\lim_{x\to x_0} \operatorname{arcctg} x = \operatorname{arcctg} x_0 \quad \text{pentru } x \in \mathbb{R},$$

în vreme ce

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{arcctg} x = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arcctg} x = \pi.$$

5.2.3 Limite fundamentale

Au loc relaţiile:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,$ **2)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1,$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1,$ **4)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=1$

5) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e,$

6) $\lim\limits_{y\to \infty}(1+\frac{1}{y})^{y}=e,$ $\lim\limits_{y\to -\infty}(1+\frac{1}{y})^{y}=e,$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e,$ **8)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,$

9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a,$ **10)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$

11) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^p-1}{x}=p, p\in\mathbb{R}^*.$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

Deoarece $\sin x<x<\operatorname{tg} x$ pentru $x\in(0,\frac{\pi}{2})$, urmează că

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1 \quad \text{pentru } x\in(0,\frac{\pi}{2}),$$

de unde, conform criteriului cleştelui, urmează că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\sin x}{x}=1$. Cu un raţionament asemănător, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{\sin x}{x}=1$, de unde $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, limitele laterale fiind ambele egale cu 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$$

Cu schimbarea de variabilă $\arcsin x=u$, urmează că $x=\sin u$, iar $u\to 0$ pentru $x\to 0$. Conform teoremei limitei funcţiei compuse, urmează că

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim_{u\to 0}\frac{u}{\sin u}=\lim_{u\to 0}\frac{1}{\frac{\sin u}{u}}=\frac{1}{\lim\limits_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}}=1.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1$$

Deoarece $\sin x<x<\operatorname{tg} x$ pentru $x\in(0,\frac{\pi}{2})$, urmează că

$$1<\frac{\operatorname{tg} x}{x}<\frac{1}{\cos x} \quad \text{pentru } x\in(0,\frac{\pi}{2}),$$

de unde, conform criteriului cleştelui, urmează că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$. Cu un raţionament asemănător, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$, de unde $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$, limitele laterale fiind ambele egale cu 1.

$$\lim_{\mathbf{x}\to 0} \frac{\mathbf{arctg\, x}}{\mathbf{x}} = \mathbf{1}$$

Cu schimbarea de variabilă $\operatorname{arctg} x = u$, urmează că $x = \operatorname{tg} u$, iar $u \to 0$ pentru $x \to 0$. Conform teoremei limitei funcţiei compuse, urmează că

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{u\to 0} \frac{u}{\operatorname{tg} u} = \lim_{u\to 0} \frac{1}{\frac{\operatorname{tg} u}{u}} = \frac{1}{\lim\limits_{u\to 0} \frac{\operatorname{tg} u}{u}} = 1.$$

$$\lim_{\mathbf{x}\to 0} (\mathbf{1} + \mathbf{x})^{\frac{1}{\mathbf{x}}} = e$$

A fost demonstrat în Capitolul 2 că $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$. Fie $x > 0$. Să notăm $n = \left[\frac{1}{x}\right]$. Cum $\left[\frac{1}{x}\right] \leq \frac{1}{x} < \left[\frac{1}{x}\right] + 1$, urmează că $n \leq \frac{1}{x} < n + 1$, deci $\frac{1}{n} \geq x > \frac{1}{n+1}$. În concluzie,

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \leq (1 + x)^{\frac{1}{x}} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

adică

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{n+1}} \leq (1 + x)^{\frac{1}{x}} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Cum $n \to \infty$ pentru $x \to 0$, $x > 0$, iar $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$, urmează conform criteriului cleştelui că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$. În mod asemănător se demonstrează că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$, deci $\lim\limits_{x\to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$, ambele limite laterale fiind egale cu e.

$$\lim_{\mathbf{y}\to\infty} (\mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{y}})^{\mathbf{y}} = \mathbf{e}, \quad \lim_{\mathbf{y}\to-\infty} (\mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{y}})^{\mathbf{y}} = \mathbf{e}$$

Deoarece $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$, cu notaţia $\frac{1}{x} = y$ urmează că $\lim\limits_{y\to\infty} (1 + \frac{1}{y})^y = e$. Deoarece şi $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$, tot cu notaţia $\frac{1}{x} = y$, urmează că şi $\lim\limits_{y\to-\infty} (1 + \frac{1}{y})^y = e$.

$$\lim_{\mathbf{x}\to 0} \frac{\log_{\mathbf{a}}(\mathbf{1} + \mathbf{x})}{\mathbf{x}} = \log_{\mathbf{a}} \mathbf{e}.$$

Conform proprietăţilor operaţiilor cu limite de funcţii, urmează că

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}\right)=\log_a\left(\lim_{x\to 0}\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right)\right)=\log_a e.$$

$$\mathbf{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1}$$

Punând $a=e$ în formula de mai sus, obţinem că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\log_e e=1$.

$$\mathbf{\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a}$$

Cu schimbarea de variabilă $a^x-1=u$, urmează că $x=\log_a(1+u)$, iar $u\to 0$ pentru $x\to 0$. Conform teoremei limitei funcţiei compuse, urmează că

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{u\to 0}\frac{u}{\log_a(1+u)}=\frac{1}{\lim\limits_{u\to 0}\frac{\log_a(1+u)}{u}}=\frac{1}{\log_a e}=\log_e a=\ln a$$

$$\mathbf{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1}$$

Punând $a=e$ în formula de mai sus, obţinem că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=\ln e=1$.

$$\mathbf{\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^p-1}{x}=p}$$

Cu schimbarea de variabilă $x=e^u-1$, urmează că $u=\ln(1+x)$, iar $u\to 0$ pentru $x\to 0$. Conform teoremei limitei funcţiei compuse, urmează că

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^p-1}{x}=\lim_{u\to 0}\frac{(e^u)^p-1}{e^u-1}=\lim_{u\to 0}\frac{\frac{e^{pu}-1}{u}}{\frac{e^u-1}{u}}=\frac{\lim\limits_{u\to 0}\frac{e^{pu}-1}{pu}\cdot p}{\lim\limits_{u\to 0}\frac{e^u-1}{u}}=\frac{\ln e\cdot p}{\ln e}=p.$$

Compararea creşterii funcţiilor $\ln x$, x^p ($p>0$) şi e^x

În cele ce urmează vom studia diferenţele între vitezele de creştere spre $+\infty$ ale funcţiei exponenţiale, funcţiei putere şi funcţiei logaritmice, observând că funcţia exponenţială are cea mai mare viteză de creştere spre $+\infty$, urmată de funcţia putere şi funcţia logaritmică.

Vom demonstra mai întâi că $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^p} = 0$. În acest sens, s-a demonstrat deja că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^p} = 0$ pentru orice $p > 0$. Notând $[x] = n$, observăm că $n \leq x < n+1$ şi atunci

$$\frac{\ln n}{(n+1)^p} < \frac{\ln x}{x^p} < \frac{\ln(n+1)}{n^p},$$

adică

$$\frac{\ln n}{n^p}\left(\frac{n}{n+1}\right)^p < \frac{\ln x}{x^p} < \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^p}\left(\frac{n+1}{n}\right)^p,$$

de unde, ţinând seama de cele de mai sus, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^p} = 0$.

Arătăm acum că $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^p}{e^x} = 0$. Cu schimbarea de variabilă $x = \ln u$, urmează că $u = e^x$ şi $u \to \infty$ pentru $x \to \infty$. Ţinând seama de teorema funcţiei compuse, se obţine că

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^p}{e^x} = \lim_{u\to\infty} \frac{(\ln u)^p}{u} = \lim_{u\to\infty} \left(\frac{\ln u}{u^{\frac{1}{p}}}\right)^p = \left(\lim_{u\to\infty} \frac{\ln u}{u^{\frac{1}{p}}}\right)^p = 0^p = 0.$$

Pentru o altă demonstraţie a acestor relaţii, să arătăm mai întâi că

$$\ln x < x < e^x, \quad \text{pentru } x > 0,$$

inegalitate care prezintă un interes de sine stătător.

În acest sens, să observăm că

$$e^x \geq e^{[x]} = (1 + (e-1))^{[x]} \geq 1 + (e-1)[x],$$

conform inegalităţii lui Bernoulli. În plus,

$$1 + (e-1)[x] > \{x\} + [x] = x,$$

de unde $e^x > x$, pentru orice $x > 0$. Prin logaritmarea acestei inegalităţi, se obţine că $x > \ln x$, pentru orice $x > 0$, de unde concluzia.

De aici, $\ln\sqrt{x} < \sqrt{x}$, pentru orice $x > 0$, iar cum $\ln\sqrt{x} = \ln x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln x$, urmează că $\frac{\frac{1}{2}\ln x}{\sqrt{x}} < 1$, deci $\frac{\ln x}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}$, pentru $x > 0$. Atunci

$$0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}, \quad \text{pentru } x > 1,$$

de unde urmează conform criteriului cleştelui că $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. Arătăm acum că $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^p} = 0$, pentru $p > 0$. Într-adevăr, cu schimbarea de variabilă $u = x^p$

şi ţinând seama că $u \to \infty$ când $x \to \infty$, obţinem cu ajutorul teoremei limitei funcţiei compuse că

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^p} = \lim_{u\to\infty} \frac{\ln\left(u^{\frac{1}{p}}\right)}{u} = \lim_{u\to\infty} \frac{\frac{1}{p}\ln u}{u} = \frac{1}{p}\lim_{u\to\infty} \frac{\ln u}{u} = 0.$$

Faptul că $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^p}{e^x} = 0$ se obţine ca mai sus.

În fine, să precizăm câteva consideraţii asupra tratării cazurilor de nedeterminare. Cazurile $\dfrac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$, $\dfrac{\pm\boldsymbol{\infty}}{\pm\boldsymbol{\infty}}$ se tratează cu ajutorul limitelor fundamentale menţionate mai sus, pentru cazul de nedeterminare $\dfrac{\pm\boldsymbol{\infty}}{\pm\boldsymbol{\infty}}$ putându-se da şi factor comun forţat. Cazul $\mathbf{0}\cdot\boldsymbol{\infty}$ se tratează transformând produsul în raport cu ajutorul formulei $fg = \frac{f}{\frac{1}{g}}$. Cazul $\boldsymbol{\infty} - \boldsymbol{\infty}$ se tratează prin reducere la o nedeterminare de tip $\mathbf{0}\cdot\boldsymbol{\infty}$ dând factor comun forţat, sau, în unele situaţii în care apar radicali, prin amplificare cu expresii conjugate. Cazurile $\mathbf{0}^{\mathbf{0}}$, $\boldsymbol{\infty}^{\mathbf{0}}$, $\mathbf{1}^{\boldsymbol{\infty}}$ se tratează prin reducerea nedeterminării la una de tip produs, cu ajutorul formulei $f^g = e^{g\ln f}$, pentru cazul de nedeterminare $\mathbf{1}^{\boldsymbol{\infty}}$ putându-se utiliza şi limita $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$, numită în continuare şi *limita standard ce defineşte numărul e*.

Exemple. 1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+\sin x)}{\sin 4x}$

Fiind vorba despre cazul de nedeterminare $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$, vom folosi limite fundamentale. Urmează că

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{\sin 4x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x}\cdot \sin x}{\sin 4x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x}\cdot \frac{\sin x}{x}\cdot x}{\frac{\sin 4x}{4x}\cdot 4x}$$
$$= \frac{1}{4}\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x}\cdot \frac{\sin x}{x}}{\frac{\sin 4x}{4x}} = \frac{1}{4}.$$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+3x}-1}{\sqrt[3]{1+2x}-1}$

Fiind vorba despre cazul de nedeterminare $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$, vom folosi limite fundamentale. Urmează că

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+3x}-1}{\sqrt[3]{1+2x}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+3x)^{\frac{1}{2}}-1}{(1+2x)^{\frac{1}{3}}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{(1+3x)^{\frac{1}{2}}-1}{3x}\cdot 3x}{\frac{(1+2x)^{\frac{1}{3}}-1}{2x}\cdot 2x}$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+3x)^{\frac{1}{2}}-1}{3x}}{\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+2x)^{\frac{1}{3}}-1}{2x}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{9}{4}.$$

Exemple. 1. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x \ln x$

Fiind vorba despre cazul de nedeterminare $\mathbf{0} \cdot \boldsymbol{\infty}$, vom transforma mai întâi nedeterminarea într-una de tip raport. Observăm că

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x \ln x = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}.$$

Cu notaţia $u = \frac{1}{x}$, ţinând seama că $u \to \infty$ pentru $x \to 0$, $x > 0$, se obţine că

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{u\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{u}}{u} = \lim_{u\to\infty} \frac{-\ln u}{u} = 0,$$

de unde limita căutată este 0.

2. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^x$

Fiind vorba despre cazul de nedeterminare $\mathbf{0^0}$, transformăm mai întâi nedeterminarea într-una de tip produs. Atunci

$$x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x},$$

de unde

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^x = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} e^{x \ln x} = e^{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x \ln x} = e^0 = 1,$$

conform exemplului precedent.

Exemple. 1. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\cos \frac{1}{n} + \sin^2 \frac{2}{n}\right)^n$

Vom determina valoarea limitei $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\cos \frac{1}{x} + \sin^2 \frac{2}{x}\right)^x$, valoarea limitei din enunţ obţinându-se ca un caz particular. Fiind vorba despre cazul de nedeterminare $\mathbf{1^\infty}$, se va folosi limita standard ce defineşte numărul *e*. Au loc egalităţile

$$\lim_{x\to\infty}\left(\cos\frac{1}{x}+\sin^2\frac{2}{x}\right)^x$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\cos\frac{1}{x}+\sin^2\frac{2}{x}-1\right)^{\frac{1}{\cos\frac{1}{x}+\sin^2\frac{2}{x}-1}}\right]^{x\left(\cos\frac{1}{x}+\sin^2\frac{2}{x}-1\right)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\cos\frac{1}{x}+\sin^2\frac{2}{x}-1\right)^{\frac{1}{\cos\frac{1}{x}+\sin^2\frac{2}{x}-1}}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\cos\frac{1}{x}+\sin^2\frac{2}{x}-1\right)}$$
$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\cos\frac{1}{x}+\sin^2\frac{2}{x}-1}{\frac{1}{x}}}.$$

Cu notaţia $u=\frac{1}{x}$, ţinând seama că $u\to 0$ când $x\to\infty$, urmează că

$$e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\cos\frac{1}{x}+\sin^2\frac{2}{x}-1}{\frac{1}{x}}}=e^{\lim\limits_{u\to0}\frac{\cos u+\sin^2 2u-1}{u}}=e^{\lim\limits_{u\to0}\frac{-2\sin^2\frac{u}{2}+\sin^2 2u}{u}}=e^{\lim\limits_{u\to0}\frac{-2\sin^2\frac{u}{2}}{u}+\lim\limits_{u\to0}\frac{\sin^2 2u}{u}}$$
$$=e^{\lim\limits_{u\to0}\frac{-2\sin^2\frac{u}{2}}{u}+\lim\limits_{u\to0}\frac{\sin^2 2u}{u}}=e^{\lim\limits_{u\to0}\frac{-2\sin^2\frac{u}{2}}{\left(\frac{u}{2}\right)^2}\cdot\frac{\left(\frac{u}{2}\right)^2}{u}+\lim\limits_{u\to0}\frac{\sin^2 2u}{(2u)^2}\cdot\frac{(2u)^2}{u}}$$
$$=e^{\lim\limits_{u\to0}-\left(\frac{\sin\frac{u}{2}}{\frac{u}{2}}\right)^2\cdot\frac{u}{2}+\lim\limits_{u\to0}\left(\frac{\sin 2u}{2u}\right)^2\cdot 4u}$$
$$=e^{-\lim\limits_{u\to0}\left(\frac{\sin\frac{u}{2}}{\frac{u}{2}}\right)^2\cdot\lim\limits_{u\to0}\frac{u}{2}+\lim\limits_{u\to0}\left(\frac{\sin 2u}{2u}\right)^2\cdot\lim\limits_{u\to0}4u}=e^0=1.$$

Atunci

$$\lim_{x\to\infty}\left(\cos\frac{1}{x}+\sin^2\frac{2}{x}\right)^x=1,$$

de unde limita din enunţ este 1.

2. $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}-2}{x-1}$

O limită calculată pentru x tinzând la un număr nenul poate transformată într-o limită în care variabila tinde la zero alegând ca nouă variabilă diferenţa dintre x şi acel număr. Cu notaţia $u=x-1$, ţinând seama că $u\to0$ când $x\to1$, urmează că

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}-2}{x-1}=\lim_{u\to0}\frac{\sqrt{1+u}+\sqrt[3]{1+u}-2}{u}$$

$$= \lim_{u\to 0}\frac{(1+u)^{\frac{1}{2}}-1}{u} + \lim_{u\to 0}\frac{(1+u)^{\frac{1}{3}}-1}{u}$$
$$= \frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}.$$

Aplicaţii

5.1. *Determinaţi valorile următoarelor limite*

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^{\sin x}-1}{x}$; *2)* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(2^x-1)(3^x-1)}{x^2}$; *3)* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(2^x-1)^3}{x^3}$;
4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-x^2+x-1}{x}$; *5)* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx}{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 2x+\ldots+\operatorname{tg} nx}$; *6)* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\operatorname{arctg} x)}{\operatorname{tg}(\arcsin x)}$;
7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left[(1+3x)^2\right]}{x}$; *8)* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-x^2)}{x\arcsin x}$; *9)* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^x-2^x}{4x}$; *10)* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x+5^x-2}{3^x+4^x-2}$;
11) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^{2x}}{\sin 3x-\sin 2x}$; *12)* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x-\sin x}{x^2}$; *13)* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}}{4x}$;
14) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}+x)}{x}$; *15)* $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{\sin(2\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$; *16)* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$, $m,n\in\mathbb{N}$, $m,n\geq 2$; *17)* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(a+x)^x-1}{x}$; *18)* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$;
19) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(\operatorname{tg} x)-\sin(\sin x)}{\operatorname{tg} x-\sin x}$.

5.2. *Fie $p,q>0$. Determinaţi valorile următoarelor limite*

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{p-2^x}{q-3^x}$; *2)* $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(1+e^{px})}{\ln(1+e^{qx})}$; *3)* $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(x^p+e^x)}{\ln(x^q+e^x)}$; *4)* $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+p\operatorname{arctg} x}{x+q\operatorname{arcctg} x}$;
5) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\ln\sin px}{\ln\sin qx}$.

5.3. *Determinaţi valorile următoarelor limite*

1) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2\operatorname{tg}^2 x)^{\frac{4}{\sin^2 x}}$; *2)* $\lim\limits_{x\to 0}(1+\ln(1+x)+\ln(1+2x)+\ldots+\ln(1+nx))^{\frac{1}{x}}$;
3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$, $a,b>0$; *4)* $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^{\arcsin x}+b^{\operatorname{arctg} x}}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$, $a,b>0$;
5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}\right)^x$; *6)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{\frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}}\right)^x$; *7)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x$;
8) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\cos nx}\right)^{\frac{1}{x^2}}$; *9)* $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x}}$, $a\in\mathbb{R}\setminus\{k\pi; k\in\mathbb{Z}\}$.

5.4. *Determinaţi valorile următoarelor limite*

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \left(\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$; 2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\frac{1}{2x-\pi}}$; 3) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^n-1-n(x-1)}{(x-1)^2}$; 4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{3^{\operatorname{tg} x}-3}{x-\frac{\pi}{4}}$;

5) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt[3]{x+24}-3}{x-3}$; 6) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x+7}-2}{\sqrt[3]{x}-1}$; 7) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[p]{x}-1}{\sqrt[q]{x}-1}$, $p,q \in \mathbb{N}^*$, $p,q \geq 2$;

8) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin^n x-\cos^n x}{\sin(x-\frac{\pi}{4})}$; 9) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+x^2+\ldots+x^n-n}{x-1}$;

10) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\ldots+\sqrt[n]{x}-(n-1)}{x-1}$.

5.5. *Determinaţi valorile următoarelor limite*

1) $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{1}{x}$; 2) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} (x-2)e^{\frac{1}{x-2}}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty} x\,[\ln(x+2)-\ln x]$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x+1}}\right)$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\dfrac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}(x+1)\right)$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\operatorname{arctg}\dfrac{x}{x+2}-\operatorname{arctg}\dfrac{x-1}{x+1}\right)$.

5.6. *Determinaţi valorile următoarelor limite*

1) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\sin\frac{1}{x}}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{\sin x}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}}$; 4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (-\ln x)^{2x}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty} (x+e^x)^{\frac{1}{x}}$.

5.7. *Determinaţi valorile următoarelor limite*

1) $\lim\limits_{x\to\infty} (x-\ln x)$; 2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (\dfrac{1}{x^2}+\ln x)$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\ln(e^x+e^{-x})-x\right)$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x-\sqrt[n]{(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}\right)$, $n\in\mathbb{N}^*$; 5) $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}} (\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} 3x)$.

5.8. *Determinaţi valorile următoarelor limite*

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$; 2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (\operatorname{arctg} x)^{\arcsin x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{arctg}|x|)^{|\operatorname{arctg} x|}$;

4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (\sin x+x\cos x)^x$; 5) $\lim\limits_{x\to\infty} \left[\sin\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)\right]^{\frac{\ln x}{x}}$.

5.9. *Fie* $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$, $a_0,a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{R}$, $a_n\neq 0$. *Arătaţi că* $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{P(x)}{e^x}=0$, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{P(x)}=0$.

5.10. *Fie* $a>0$. *Demonstraţi că*

$$1)\ \lim_{x\to a} \frac{x^x-a^a}{x-a}=a^a(1+\ln a);\quad 2)\ \lim_{x\to a} \frac{x\ln a-a\ln x}{x-a}=\ln a-1.$$

5.11. *Fie* $p \in (0,1)$. *Determinaţi* $a \in \mathbb{R}$ *astfel ca* $\lim\limits_{x\to\infty}((x+1)^p - x^p + a) = p$.

5.12. *Fie funcţia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$. *Determinaţi punctele* $x_0 \in \mathbb{R}$ *pentru care* f *are limită în* x_0.

5.13.

1. *Demonstraţi că* $\sin(\arccos u) = \sqrt{1-u^2}$ *pentru* $u \in [-1,1]$.
2. *Fie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{\arccos \frac{2x}{1+x^2}}{x-1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$. *Demonstraţi că* f *nu are limită în* $x = 1$.

5.14. *Fie* $L_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-\cos x \cos 2x \ldots \cos nx}{x^2}$, $n \in \mathbb{N}$.

1. *Determinaţi* L_0, L_1.
2. *Demonstraţi că* $L_{n+1} = L_n + \frac{(n+1)^2}{2}$ *pentru* $n \in \mathbb{N}$.
3. *Demonstraţi că* $L_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{12}$ *pentru* $n \in \mathbb{N}$.

5.15. *Fie* $L_n = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{\ln(e+x)\ln(e+2x)\ldots\ln(e+nx)}}{x}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

1. *Determinaţi* L_1.
2. *Demonstraţi că* $L_{n+1} = L_n - \frac{n+1}{e}$ *pentru* $n \in \mathbb{N}$.
3. *Demonstraţi că* $L_n = -\frac{n(n+1)}{2}$ *pentru* $n \in \mathbb{N}$.

5.16. *Fie* $L_n = \lim\limits_{x\to 0} \frac{(1-\sin x)(1-\sin^2 x)\ldots(1-\sin^n x)}{\cos^{2n} x}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

1. *Determinaţi* L_1.
2. *Demonstraţi că* $L_{n+1} = \frac{n+1}{2} L_n$ *pentru* $n \in \mathbb{N}$.
3. *Demonstraţi că* $L_n = \frac{n!}{2^n}$ *pentru* $n \in \mathbb{N}$.

5.17. *Determinaţi valoarea limitei* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{ax^2+2x+1} - \sqrt{x^2+2}\right)$ *în funcţie de valorile parametrului real* a, $a > 0$.

5.18. *Determinaţi valorile parametrilor reali* a, b *astfel încât*

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{x+1} - ax - b\right) = 1.$$

5.19. *Determinaţi valorile parametrilor reali a, b astfel încât*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - ax - b}{x^2} \in \mathbb{R}.$$

5.20. *Determinaţi valorile parametrilor reali a, b, $a > 0$, astfel încât*

$$\lim_{x\to 0}(a\cos x + b\sin x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

5.21. *Fie $f, g : (0,\infty) \to (0,\infty)$ astfel ca $f(x) > \frac{1}{x^2+x} > g(x)$ pentru $x > 0$. Demonstraţi că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$, iar $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$.*

5.22. *Fie $a, b \in \mathbb{R}$.*

1. *Arătaţi că există $\delta_1 > 0$ astfel ca $a\sin x + \cos(bx) > 0$ pentru $x \in (-\delta_1, \delta_1)$.*
2. *Arătaţi că există $\delta_2 > 0$ astfel ca $e^{ax} - bx > 0$ pentru $x \in (\delta_2, +\infty)$.*
3. *Arătaţi că există $\delta_3 > 0$ astfel ca $\dfrac{1}{2} < \dfrac{\sin x}{x} < \dfrac{3}{2}$ pentru $x \in (-\delta_3, \delta_3)$.*

5.23. *Demonstraţi că*

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{[x]}{x} = 1$; *2)* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\left[\dfrac{1}{x}\right] = 1$; *3)* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\left(\left[\dfrac{1}{x}\right] + \left[\dfrac{2}{x}\right] + \ldots + \left[\dfrac{n}{x}\right]\right) = 1.$

5.24. *Demonstraţi că*

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{x^2-1}\cos x = 0$; *2)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{x^2+1}\cos\dfrac{1}{x} = 0$; *3)* $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x \sin\dfrac{1}{x} = 0.$

5.25. *Fie $f : \mathbb{R}^* \to (0,\infty)$ astfel ca $\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x) + \dfrac{1}{f(x)}\right) = 2$. Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.*

5.26. *Demonstraţi că $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$. Cu ajutorul acestei limite, justificaţi că $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$.*

5.27. *Calculaţi următoarele limite de şiruri*

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n}\ln\left(1 + \frac{n}{n^2+2}\right)$; *2)* $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(e^{\sin\frac{1}{n}} - \cos\frac{1}{n}\right)$; *3)* $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(e^{\frac{n+1}{n}} - e\right).$