Capitolul 4

PROPRIETĂŢI TOPOLOGICE ŞI DE NUMĂRARE ALE LUI $\overline{\mathbb{R}}$

În cele ce urmează, vom studia unele proprietăţi ale mulţimilor din $\overline{\mathbb{R}}$. Astfel, vom caracteriza „locul" unui punct în cadrul unei mulţimi (în limba greacă, „topos" înseamnă „loc") sau „apropierea" unui punct de o mulţime dată, clasificând de asemenea submulţimile lui $\mathbb{R}$ cu un număr infinit de elemente după cum aceste elemente pot fi numărate sau nu.

4.1 Proprietăţi topologice ale lui $\overline{\mathbb{R}}$

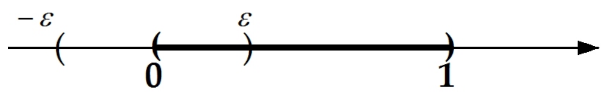
4.1.1 Puncte de acumulare

Fie o mulţime $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Vom spune că $a \in \overline{\mathbb{R}}$ se numeşte *punct de acumulare* al mulţimii A dacă orice vecinătate V a lui a conţine puncte ale lui A diferite de a, adică

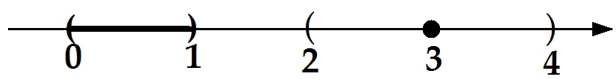
$$\forall V \in \mathcal{V}(a), \big(V \setminus \{a\}\big) \cap A \neq \emptyset.$$

Exemple. 1. $a = 0$ este punct de acumulare al mulţimii $A = (0, 1)$ deoarece orice vecinătate V a lui 0 conţine un interval $I = (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, deci şi puncte ale lui $(0, 1)$ diferite de 0. Altfel spus,

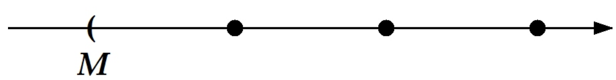
$$\big(V \setminus \{0\}\big) \cap A \supset (0, \varepsilon) \neq \emptyset.$$



2. $a = 3$ nu este punct de acumulare al mulţimii $A = (0,1) \cup \{3\}$ deoarece vecinătatea $V = (2,4)$ a lui 3 nu conţine puncte ale lui A diferite de 3. Altfel spus,
$$\big(V \setminus \{3\}\big) \cap A = \emptyset.$$



3. $a = +\infty$ este punct de acumulare al mulţimii $A = \mathbb{N}$ deoarece orice vecinătate V a lui $+\infty$ conţine un interval $I = (M, +\infty]$, $M > 0$, deci şi puncte ale lui $\mathbb{N}$ diferite de $+\infty$. Altfel spus,
$$\big(V \setminus \{+\infty\}\big) \cap A = \{[M]+1, [M]+2, \ldots\} \neq \emptyset.$$



Din exemplele de mai sus se deduc câteva consecinţe privind localizarea punctelor de acumulare. Mai întâi, un punct de acumulare al unei mulţimi A poate să nu fie element al acelei mulţimi (exemplul 1). De asemenea, nu orice element al unei mulţimi A este neapărat punct de acumulare al acelei mulţimi (exemplul 2). Din cel de-al treilea exemplu, se poate observa că punctele de acumulare ale unei mulţimi pot fi şi la infinit.

Mulţimea tuturor punctelor de acumulare ale mulţimii A se numeşte atunci *mulţimea derivată* a lui A şi se notează A', în vreme ce un element al unei mulţimi A care nu este punct de acumulare al acelei mulţimi se numeşte *punct izolat* al lui A. De aici se poate observa că $a \in A$ este punct izolat al lui A dacă există o vecinătate V a lui A care nu conţine puncte din A.

Exemple. 1. Dacă $A = (0,3) \cup \{5\}$, atunci $A' = [0,3]$, iar 5 este punct izolat al lui A.

2. Dacă $A = \{0, 1, 2\}$, atunci $A' = \emptyset$, toate elementele lui A fiind puncte izolate.

3. Dacă $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$, atunci $A' = \{0\}$, toate elementele lui A fiind puncte izolate.

Alegând în mod potrivit în definiţia unui punct de acumulare vecinătăţi V din ce în ce mai mici se obţin puncte ale lui A diferite de a care sunt din ce în ce mai aproape de a. În acest mod se poate obţine următoarea caracterizare echivalentă a unui punct de acumulare cu ajutorul şirurilor, exprimând faptul că o mulţime care are un punct de acumulare a conţine elemente „oricât de apropiate" de a şi diferite de a.

Teorema 4.1. *Fie $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Atunci $a \in \overline{\mathbb{R}}$ este punct de acumulare al lui A dacă şi numai dacă există un şir $\{a_n\}_{n \geq 0}$ de elemente ale lui A, diferite de a, cu limita a.*

Din cele de mai sus, observând că şirul $\{a_n\}_{n \geq 0}$ poate fi ales cu termenii diferiţi între ei, deducem că o mulţime A care are un punct de acumulare a este în mod necesar infinită. În particular, o mulţime finită nu are puncte de acumulare, toate elementele sale fiind deci puncte izolate.

De asemenea, din aceeaşi observaţie se obţine în mod imediat următorul rezultat.

Corolar 4.1.1. *Un punct $a \in \overline{\mathbb{R}}$ este punct de acumulare al unei mulţimi $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ dacă şi numai dacă orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(a)$ conţine o infinitate de elemente ale lui A.*

Pot fi demonstrate cu ajutorul celor de mai sus următoarele proprietăţi de calcul.

Teorema 4.2. *Fie $A, B \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Au loc următoarele proprietăţi.*

1. *Dacă $A \subseteq B$, atunci $A' \subseteq B'$.*

2. $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

3. $(A \cap B)' \subseteq A' \cap B'$.

Faptul că $(A \cap B)'$ şi $A' \cap B'$ nu sunt neapărat egale se poate observa considerând $A = (0, 1)$ şi $B = (1, 2)$. Atunci $A' = [0, 1]$ şi $B' = [1, 2]$, deci $A' \cap B' = \{1\}$. Totuşi, $A \cap B = \emptyset$, deci $(A \cap B)' = \emptyset$, iar $(A \cap B)' \neq A' \cap B'$.

4.1.2 Puncte aderente

Fie o mulţime $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Vom spune că $a \in \overline{\mathbb{R}}$ se numeşte *punct aderent* al mulţimii A dacă orice vecinătate V a lui a conţine puncte ale lui A, adică

$$\forall V \in \mathcal{V}(a), V \cap A \neq \emptyset.$$

Cum definiţia unui punct aderent este mai puţin restrictivă decat definiţia unui punct de acumulare (este necesar ca $V \cap A \neq \emptyset$, în loc de $\big(V \setminus \{a\}\big) \cap A \neq \emptyset$, când cea din urmă relaţie este satisfăcută, fiind satisfăcută în mod evident şi cea dintâi), urmează că orice punct de acumulare al unei mulţimi A este în acelaşi timp şi punct aderent al acelei mulţimi.

De asemenea, deoarece $a \in V$ pentru orice $V \in \mathcal{V}(a)$, urmează că $a \in V \cap A$ pentru orice $a \in A$ şi orice $V \in \mathcal{V}(a)$, deci $V \cap A \neq \emptyset$. De aici, orice $a \in A$ este punct aderent al lui A.

Mulţimea tuturor punctelor aderente ale mulţimii A se numeşte atunci *aderenţa* sau *închiderea* mulţimii A şi se notează $\overline{A}$. Din cele de mai sus se observă că $A \subseteq \overline{A}$ şi $A' \subseteq \overline{A}$.

În mod analog Teoremei 4.1 se poate demonstra următorul rezultat, care afirmă faptul că A conţine, pe lângă elementele din A, şi limitele de şiruri cu termeni din A.

Teorema 4.3. *Fie $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Atunci $a \in \overline{\mathbb{R}}$ este punct aderent al lui A dacă şi numai dacă există un şir $\{a_n\}_{n\geq 0}$ de elemente ale lui A, cu limita a.*

Exemple.

1. Dacă $A = \{0, 1, \ldots, n\}$, atunci $\overline{A} = A$.
2. Dacă $A = (0, 1)$, atunci $\overline{A} = [0, 1]$.
3. Dacă $A = \mathbb{Q}$, atunci $\overline{A} = \overline{\mathbb{R}}$, deoarece orice număr real este limita unui şir de numere raţionale, $+\infty$ este limita şirului $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = n \in \mathbb{Q}$, iar $-\infty$ este limita şirului $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = -n \in \mathbb{Q}$.

Cu ajutorul celor de mai sus se pot demonstra următoarele proprietăţi de calcul.

Teorema 4.4. *Fie* $A, B \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. *Au loc următoarele proprietăţi.*

1. $\overline{A} = A \cup A'$.
2. *Dacă* $A \subseteq B$, *atunci* $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.
3. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
4. $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.

Faptul că $\overline{A \cap B}$ şi $\overline{A} \cap \overline{B}$ nu sunt neapărat egale se poate observa considerând $A = (0, 1)$ şi $B = (1, 2)$. Atunci $\overline{A} = [0, 1]$, $\overline{B} = [1, 2]$, deci $\overline{A} \cap \overline{B} = \{1\}$. Totuşi, $A \cap B = \emptyset$, deci $\overline{A \cap B} = \emptyset$, iar $\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$.

4.1.3 Puncte interioare

Fie o mulţime $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Vom spune că $a \in \overline{\mathbb{R}}$ se numeşte *punct interior* al mulţimii A dacă A este vecinătate pentru a. Deoarece A este vecinătate pentru a, rezultă că $a \in A$, adică un punct interior al unei mulţimi aparţine în mod necesar acelei mulţimi.

Conform definiţiei vecinătăţii unui punct, urmează că $a \in \mathbb{R}$ este punct interior al lui A dacă există (c, d) astfel ca $a \in (c, d) \subseteq A$, respectiv $+\infty$ este punct interior lui A dacă există $(c, \infty]$ astfel ca $+\infty \in (c, \infty] \subseteq A$, iar $-\infty$ este punct interior lui A dacă există $[-\infty, d)$ astfel ca $-\infty \in [-\infty, d) \subseteq A$. De asemenea, dacă A nu conţine intervale, atunci A nu are puncte interioare, neputând fi vecinătate pentru niciun punct al său. În cele ce urmează, prin „interval deschis I" vom înţelege un interval de tip (c, d), $(c, \infty]$ sau $[-\infty, d)$, potrivit cu situaţia în care este utilizat.

Exemple.

1. $a = \frac{1}{2}$ este punct interior al mulţimii $A = [0, 1) \cup 2$ deoarece $a \in (0, 1) \subseteq A$, dar $a = 0$ şi $a = 2$ nu sunt puncte interioare ale lui A, întrucât A nu conţine intervale deschise în care se află 0 şi 2, neconţinând nici numere negative, nici numere mai mari ca 2.
2. $A = \mathbb{Q}$ nu are puncte interioare deoarece nu conţine intervale.

Mulţimea tuturor punctelor interioare ale mulţimii A se numeşte atunci *interiorul* mulţimii A şi se notează $\overset{\circ}{A}$.

Teorema 4.5. *Fie $A, B \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Au loc următoarele proprietăţi.*

1. $\overset{\circ}{A} \subseteq A$.
2. *Dacă* $A \subseteq B$, *atunci* $\overset{\circ}{A} \subseteq \overset{\circ}{B}$.
3. $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.
4. $\overset{\circ}{\widehat{A \cup B}} \supset \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$.

Faptul că $\overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}$ şi $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$ nu sunt neapărat egale se poate observa considerând $A = (0,1)$ şi $B = [1,2)$. Atunci $\overset{\circ}{A} = (0,1)$, $\overset{\circ}{B} = (1,2)$, deci $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} = (0,1) \cup (1,2)$. Totuşi, $A \cup B = (0,2)$, deci $A \overset{\circ}{\cup} B = (0,2)$, iar $\overset{\circ}{\widehat{A \cup B}} \neq \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$.

Un alt tip de legătură între aderenţa şi interiorul unei mulţimi, exprimat cu ajutorul mulţimilor complementare, este precizat în teorema următoare. În cele ce urmează, pentru o mulţime M dată, prin cM se va înţelege complementara mulţimii M în raport cu $\overline{\mathbb{R}}$, adică mulţimea $\overline{\mathbb{R}} \backslash M$. De asemenea, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ se va numi *punct exterior* al mulţimii M dacă cM este vecinătate pentru a.

Teorema 4.6. *Fie $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Au loc egalităţile*

1. $c\overline{A} = \overset{\circ}{\widehat{cA}}$;
2. $c\overset{\circ}{A} = \overline{cA}$.

Corolar 4.6.1. *Fie $B \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Au loc egalităţile*

1. $\overline{B} = c\big(\overset{\circ}{\widehat{cB}}\big)$;
2. $\overset{\circ}{B} = c\left(\overline{cB}\right)$.

Demonstraţie. Demonstraţiile celor două egalităţi se obţin în mod imediat punând $B = cA$ în Teorema 4.6, ţinând seama că $c(cB) = B$. ■

4.1.4 Puncte de frontieră

Fie $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Vom spune că $a \in \overline{\mathbb{R}}$ se numeşte *punct de frontieră* al lui A dacă $a \in \overline{A} \cap \overline{cA}$.

Din definiţia de mai sus se observă că un punct $a \in \overline{\mathbb{R}}$ este punct de frontieră al lui A dacă este limita atât a unui şir de elemente din A cât şi a unui şir de elemente din cA, adică există două şiruri $(a_n)_{n\geq 0} \subseteq A$ şi $(b_n)_{n\geq 0} \subseteq cA$ astfel ca $a_n \to a$ şi $b_n \to a$ pentru $n \to \infty$.

Mulţimea tuturor punctelor de frontieră ale lui A se numeşte atunci *frontiera* lui A şi se notează $\operatorname{Fr} A$ sau ∂A.

Are loc de asemenea următoarea proprietate de calcul, utilă în determinarea frontierei unei mulţimi.

Teorema 4.7. *Fie* $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. *Atunci* $\operatorname{Fr} A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$.

Demonstraţie. Au loc relaţiile

$$\operatorname{Fr} A = \overline{A} \cap \overline{cA} = \overline{A} \cap c\overset{\circ}{A} = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A},$$

de unde concluzia. ■

Exemple.

1. Dacă $A = (0,1)$, atunci $\overline{A} = [0,1]$, $\overset{\circ}{A} = (0,1)$, deci $\operatorname{Fr} A = \{0,1\}$.

2. Dacă $A = \{1,2,\ldots,n\}$, atunci $\overline{A} = A$, $\overset{\circ}{A} = \emptyset$ (deoarece A nu conţine intervale), deci $\operatorname{Fr} A = A$.

3. Dacă $A = \mathbb{Q}$, atunci $\overline{A} = \overline{\mathbb{R}}$, $\overset{\circ}{A} = \emptyset$, deci $\operatorname{Fr} A = \overline{\mathbb{R}}$.

4.1.5 Mulţimi deschise, mulţimi închise, mulţimi compacte

Mulţimi deschise

Fie $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Vom spune că A este *deschisă* dacă este mulţimea vidă sau este vecinătate pentru orice punct al său.

Exemple. 1. Dacă $A = (0, 1)$, atunci ea este deschisă, fiind vecinătate pentru orice $a \in (0, 1)$.

2. Dacă $A = [0, 2)$, atunci A nu este deschisă, întrucât ea nu este vecinătate pentru $a = 0$.

3. Dacă $A = \mathbb{N}$, atunci A nu este deschisă, întrucât ea nu este vecinătate pentru niciun punct al său, neconţinând intervale.

4. Dacă $A = \emptyset$, ea este deschisă prin definiţie. Dacă $A = \mathbb{R}$, atunci pentru orice $a \in \mathbb{R}$, $a \in (a-1, a+1) \subseteq \mathbb{R}$, deci $\mathbb{R}$ este vecinătate pentru a. Cum a este arbitrar, $\mathbb{R}$ este deschisă. Dacă $A = \overline{\mathbb{R}}$, la observaţia anterioară se adaugă faptul că $+\infty \in (0, \infty] \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, iar $-\infty \subseteq [-\infty, 0) \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, deci $\overline{\mathbb{R}}$ este de asemenea deschisă.

Are loc următoarea teoremă de caracterizare a mulţimilor deschise prin intermediul interiorului acestora.

Teorema 4.8. *Fie $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Atunci A este deschisă dacă şi numai dacă $A = \overset{\circ}{A}$.*

În particular, din rezultatul de mai sus se obţine uşor faptul că $I_1 = (c, d)$, $I_2 = (c, +\infty)$, $I_3 = (c, +\infty]$, $I_4 = [-\infty, d]$ şi $I_5 = (-\infty, d)$ sunt mulţimi deschise pentru orice $c, d \in \mathbb{R}$.

Se va observa în cele ce urmează că interiorul unei mulţimi A este mulţime deschisă şi este cea mai mare mulţime deschisă inclusă în A, în sensul că oricare altă mulţime deschisă inclusă în A este conţinută în $\overset{\circ}{A}$.

Teorema 4.9. *Fie $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Atunci $\overset{\circ}{A}$ este o mulţime deschisă, iar $\overset{\circ}{\overset{\frown}{\overset{\circ}{A}}} = \overset{\circ}{A}$. Mai mult, dacă $B \subseteq A$ este o altă mulţime deschisă, atunci $B \subseteq \overset{\circ}{A}$.*

Operaţii cu mulţimi deschise

Teorema 4.10. *Au loc următoarele proprietăţi.*

1. *Orice reuniune de mulţimi deschise este mulţime deschisă.*

2. *Orice intersecţie finită de mulţimi deschise este mulţime deschisă.*

Se poate observa că o intersecţie infinită de mulţimi deschise nu este neapărat mulţime deschisă. În acest sens, să considerăm $(A_i)_{i\geq 1} : A_i = (-\frac{1}{i}, \frac{1}{i})$. Atunci A_i este deschisă pentru orice $i \geq 1$, dar $\bigcap\limits_{i\geq 1} A_i = \{0\}$, care nu este mulţime deschisă.

Exemplu. $A = (0,1) \cup (2,4)$ este deschisă, ca reuniune a mulţimilor deschise $(0,1)$ şi $(2,4)$.

Mulţimi închise

Fie $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Vom spune că A este *închisă* dacă cA este deschisă.

Se poate observa imediat că are loc următoarea teoremă de caracterizare a mulţimilor închise prin intermediul aderenţei acestora.

Teorema 4.11. *Fie* $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. *Atunci* A *este închisă dacă şi numai dacă* $A = \overline{A}$.

Demonstraţie. Au loc următoarele echivalenţe

A închisă $\Leftrightarrow cA$ deschisă $\Leftrightarrow cA = \overset{\circ}{\widehat{cA}} \Leftrightarrow cA = c\overline{A} \Leftrightarrow A = \overline{A}$. ■

Din teorema de mai sus şi din teorema de caracterizare a mulţimilor închise cu ajutorul limitelor de şiruri (Teorema 4.3) se poate observa că $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ este închisă dacă si numai dacă ea conţine limitele tuturor şirurilor cu elemente din A.

Exemple.

1. $A = [0,1]$ este mulţime închisă, deoarece $\overline{A} = A$. Altfel, $cA = [-\infty, 0) \cup (0, \infty]$, care este mulţime deschisă, fiind reuniunea mulţimilor deschise $[-\infty, 0)$ şi $(0, \infty]$.

2. $A = \mathbb{R}$ nu este mulţime închisă, deoarece $\overline{A} = \overline{\mathbb{R}} \neq A$. Altfel, A nu conţine $+\infty$, care este limita şirului $(x_n)_{n\geq 0} : x_n = n$ cu elemente din A.

3. $A = (-\infty, 0]$ nu este mulţime închisă, deoarece $cA = \{-\infty\} \cup (0, \infty]$, care nu este mulţime deschisă, întrucât nu este vecinătate a lui $+\infty$. Altfel, $\overline{A} = [-\infty, 0] \neq A$, sau A nu conţine $-\infty$, care este limita şirului $(x_n)_{n\geq 0} : x_n = -n$ cu elemente din A.

4. $\emptyset$ este mulţime închisă deoarece $c\emptyset = \overline{\mathbb{R}}$, care este mulţime deschisă.

De asemenea, $\overline{\mathbb{R}}$ este mulţime închisă, deoarece $c\overline{\mathbb{R}} = \emptyset$, care este mulţime deschisă.

Din exemplele de mai sus se poate observa că $\emptyset$ şi $\overline{\mathbb{R}}$ sunt atât mulţimi deschise, cât şi închise. Se poate demonstra că aceste mulţimi sunt singurele care au simultan cele două proprietăţi.

Prin analogie cu Teorema 4.9, se va observa că aderenţa unei mulţimi date A este mulţime închisă şi este cea mai mică mulţime închisă care include pe A, în sensul că oricare altă mulţime închisă care include pe A, conţine şi $\overline{A}$.

Teorema 4.12. *Fie $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Atunci $\overline{A}$ este o mulţime închisă, iar $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$. Mai mult, dacă $B \supset A$ este o altă mulţime închisă, atunci $B \supset \overline{A}$.*

Operaţii cu mulţimi închise

Teorema 4.13. *Au loc următoarele proprietăţi.*

1. *Orice reuniune finită de mulţimi închise este mulţime închisă.*

2. *Orice intersecţie de mulţimi închise este mulţime închisă.*

Se poate observa că o reuniune infinită de mulţimi închise nu este neapărat mulţime închisă. În acest sens, să considerăm $(A_i)_{i \geq 0} : A_i = [-i, i]$. Atunci A_i este închisă pentru orice $i \geq 0$, dar $\bigcup\limits_{i \geq 0} A_i = \mathbb{R}$, care nu este mulţime închisă.

Exemplu. $A = [-1, 2] \cup [4, 5]$ este închisă, ca reuniune a mulţimilor închise $[-1, 2]$ şi $[4, 5]$.

Mulţimi compacte

Fie $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Vom spune că A este *compactă* dacă este închisă şi mărginită.

Exemple.

1. $A = [0, 1]$ este compactă, fiind închisă şi mărginită.

2. $A = [0, 2] \cup [4, 6]$ este compactă, fiind închisă (ca reuniune finită de mulţimi închise) şi mărginită.

3. $A = [0, \infty]$ nu este compactă, nefiind mărginită.

4. $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$ nu este compactă, nefiind închisă, deoarece limita şirului $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ este 0, element neconţinut în mulţimea A.

Operaţii cu mulţimi compacte

Teorema 4.14. *Au loc următoarele proprietăţi.*

1. *Orice reuniune finită de mulţimi compacte este mulţime compactă.*
2. *Orice intersecţie de mulţimi compacte este mulţime compactă.*

Teorema 4.15. *Fie $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Atunci A este compactă dacă şi numai dacă din orice şir de elemente din A se poate extrage un subşir convergent la un element din A.*

Mulţimi dense

Fie $A, B \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Vom spune că A este *densă în* B dacă orice element al lui B este limita unui şir cu elemente din A, adică $B \subseteq \overline{A}$. Dacă $B = \overline{\mathbb{R}}$, adică orice element al lui $\overline{\mathbb{R}}$ este limita unui şir cu elemente din A, atunci A se numeşte *densă*.

Din definiţia de mai sus, se observă că dacă A este densă, atunci $\overline{A} = \overline{\mathbb{R}}$. Într-adevăr, conform definiţiei, $\overline{\mathbb{R}} \subseteq \overline{A}$, iar cum $\overline{A} \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, urmează că $\overline{A} = \overline{\mathbb{R}}$. De asemenea, pentru a se demonstra că A este densă este suficient să se arate că $\overline{A} \supset \mathbb{R}$. În acest sens, dacă $\overline{A} \supset \mathbb{R}$, atunci $\overline{\overline{A}} \supset \overline{\mathbb{R}}$, iar cum $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$, urmează că $\overline{A} \supset \overline{\mathbb{R}}$.

Exemple. 1. $\mathbb{Q}$ este densă, deoarece orice număr real este limita unui şir de numere raţionale.

2. $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ este de asemenea densă, deoarece orice număr real este limita unui şir de numere iraţionale. Altfel,

$$\overline{\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}} = \overline{\overline{\mathbb{R}} \backslash (\mathbb{Q} \cup \{-\infty, +\infty\})} = \overline{c(\mathbb{Q} \cup \{-\infty, +\infty\})}$$
$$= c\overset{\circ}{\widehat{\mathbb{Q} \cup \{-\infty, +\infty\}}} = c\emptyset = \overline{\mathbb{R}},$$

deci $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ este densă. S-a folosit faptul că $\overset{\circ}{\widehat{\mathbb{Q} \cup \{-\infty, +\infty\}}} = \emptyset$, deoarece $\mathbb{Q} \cup \{-\infty, +\infty\}$ nu conţine intervale.

3. $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ este densă în $[0,1]$, deoarece $\overline{\mathbb{Q} \cap [0,1]} = \overline{\mathbb{Q}} \cap \overline{[0,1]} = \overline{\mathbb{R}} \cap [0,1] = [0,1]$.

4. $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$ nu este densă în $[0,1]$, deoarece $\overline{A} = A \cup \{0\} \not\supset [0,1]$.

Denumirea de mulţime densă este justificată de următoarea teoremă, care afirmă faptul că pentru oricare două numere reale date, o mulţime densă conţine măcar un element situat între acestea.

Teorema 4.16. *Fie $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Atunci A este densă dacă şi numai dacă pentru orice x, $y \in \mathbb{R}$, $x < y$, există $a \in A$ astfel ca $x < a < y$.*

Exemple. 1. $\mathbb{Z}$ nu este densă, deoarece nu conţine niciun punct situat între 0 şi 1.

2. $(\mathbb{Q} \cap (-\infty, -1]) \cup (\mathbb{Q} \cap [1, \infty))$ nu este densă, deoarece nu conţine niciun punct situat între -1 şi 1.

4.2 Proprietăţi de numărare ale lui $\overline{\mathbb{R}}$

4.2.1 Numere cardinale

Fie $A, B \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Vom spune că A, B *au acelaşi cardinal* şi vom nota $A \sim B$ dacă există o funcţie bijectivă $f : A \to B$. Se observă că relaţia „$\sim$" astfel definită între mulţimi este relaţie de echivalenţă, întrucât este

1. reflexivă, deoarece $A \sim A$, cu $f : A \to A$, $f(x) = x$.

2. simetrică, deoarece dacă $A \sim B$, cu $f : A \to B$ bijectivă, atunci şi $B \sim A$, cu $f^{-1} : B \to A$ bijectivă.

3. tranzitivă, deoarece dacă $A \sim B$, cu $f : A \to B$ bijectivă, iar $B \sim C$, cu $g : B \to C$ bijectivă, atunci $A \sim C$, cu $g \circ f : A \to C$ bijectivă.

Mulţimi finite

O mulţime A va fi numită *finită* dacă este mulţimea vidă (şi atunci are cardinal 0, sau are 0 elemente) sau are acelaşi cardinal cu $A_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ pentru un $n \in \mathbb{N}$ oarecare (şi atunci se spune că are cardinal n, sau are n elemente).

4.2.2 Mulţimi numărabile

Fie $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Vom spune că A este *numărabilă* dacă există o funcţie bijectivă $f : \mathbb{N} \to A$. În această situaţie, cardinalul mulţimii A se va nota cu $\aleph_0$ (alef zero). O mulţime care nu este numărabilă se va numi *nenumărabilă*.

Dacă notăm $f(n) = a_n$, $n \in \mathbb{N}$, atunci se observă că A este numărabilă dacă elementele sale pot fi puse sub forma unui şir cu termeni distincţi, anume

$$A = \{a_0, a_1, \dots, a_n, \dots\}.$$

O mulţime A se va numi *cel mult numărabilă* dacă este finită sau numărabilă. Se observă atunci că A este cel mult numărabilă dacă şi numai dacă există o funcţie injectivă $f : A \to \mathbb{N}$.

Exemple. 1. $A = \mathbb{N}$ este numărabilă. În acest caz, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = n$ este funcţia căutată. Altfel, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, elementele sale putând fi puse sub forma unui şir cu termeni distincţi.

2. $A = \mathbb{Z}$ este numărabilă, deoarece $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$, elementele sale putând fi puse sub forma unui şir cu termeni distincţi. Altfel,

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, \quad f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{dacă } n \text{ este par} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{dacă } n \text{ este impar} \end{cases}.$$

este bijectivă.

Din Exemplul 2, în care s-a construit o funcţie bijectivă $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, se observă că o mulţime infinită poate avea acelaşi cardinal ca şi o submulţime proprie a sa. De asemenea,

$$f_1 : \mathbb{R} \to (-1, 1), \quad f_1(x) = \frac{x}{1 + |x|}$$

$$f_2 : \mathbb{R} \to (0, \infty), \quad f_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x}, & \text{dacă } x \in [0, \infty) \\ 1 - x, & \text{dacă } x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

sunt bijective, deci $\mathbb{R}$, $(0, \infty)$ şi $(-1, 1)$ au acelaşi cardinal. De fapt, toate intervalele deschise (a, b) au acelaşi cardinal, întrucât au acelaşi cardinal cu $(-1, 1)$, acest lucru observându-se din faptul că

$$f_3 : (a,b) \to (-1,1), \quad f_3(x) = \frac{2}{b-a}x - \frac{a+b}{b-a}$$

este bijectivă. Similar, intervalele (a,∞) au acelaşi cardinal cu $(0,\infty)$ întrucât

$$f_4 : (a,\infty) \to (0,\infty), \quad f_4(x) = x - a$$

este bijectivă, iar intervalele $(-\infty,b)$ au acelaşi cardinal cu $(-\infty,0)$ întrucât

$$f_5 : (-\infty,b) \to (-\infty,0), \quad f_5(x) = x - b$$

este bijectivă. Cum $(0,\infty)$ şi $(-\infty,0)$ au acelaşi cardinal, întrucât

$$f_6 : (0,\infty) \to (-\infty,0), \quad f_6(x) = -x$$

este bijectivă, urmează că mulţimile $\mathbb{R}$, (a,∞), $(-\infty,b)$, (a,b) au acelaşi cardinal pentru orice $a,b \in \mathbb{R}$. Vom demonstra ulterior că aceste mulţimi nu sunt numărabile.

Operaţii cu mulţimi numărabile

Se poate observa că o reuniune finită de mulţimi numărabile este numărabilă. În acest sens, fie $(A_i)_{1\le i\le n}$ o familie finită de mulţimi numărabile. Atunci A_i poate fi pusă sub forma unui şir cu termeni distincţi, $A_i = \left\{a_0^i, a_1^i, a_2^i, \ldots\right\}$ pentru orice $1 \le i \le n$. De aici,

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \left\{a_0^1, a_0^2, \ldots, a_0^n, a_1^1, a_1^2, \ldots a_1^n, \ldots\right\}.$$

Eliminând eventualele repetări, elementele mulţimii $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ pot fi scrise sub forma unui şir cu termeni distincţi, iar $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ este numărabilă. Cu un raţionament asemănător, se poate demonstra că dacă F este finită iar A este numărabilă, atunci $A \cup F$ este numărabilă. De asemenea, dacă A este numărabilă, atunci orice submulţime a sa este finită sau numărabilă.

Vom studia acum situaţia în care se face reuniunea unei familii numărabile de mulţimi numărabile.

Teorema 4.17. *Fie* $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *o familie de mulţimi numărabile. Atunci* $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i$ *este numărabilă.*

Cu ajutorul acestei teoreme se poate demonstra că mulţimea numerelor raţionale este numărabilă.

Teorema 4.18. $\mathbb{Q}$ *este numărabilă.*

4.2.3 Mulţimi de puterea continuului

Vom demonstra în cele ce urmează că intervalul $[0,1]$ „are mai multe elemente" decât $\mathbb{Q}$, proprietate care nu este evidentă intuitiv, în sensul că elementele lui $\mathbb{Q}$ se pot număra, iar elementele lui $[0,1]$ nu, deşi este evident că ambele mulţimi au un număr infinit de elemente.

Teorema 4.19. *Intervalul* $[0,1]$ *nu este o mulţime numărabilă.*

Demonstraţie. Presupunem prin reducere la absurd că $[0,1]$ este o mulţime numărabilă. Atunci

$$[0,1] = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\},$$

intervalul $[0,1]$ putându-se pune sub forma unui şir cu termeni distincţi.

Notâm $I_0 = [0,1]$ şi împărţim acest interval în subintervalele $[0,\frac{1}{3}]$, $[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]$, $[\frac{2}{3},1]$ de lungimi egale; fie I_1 un interval dintre acestea care nu-l conţine pe x_0. Împărţim acum I_1 în trei subintervale de lungimi egale şi fie I_2 un interval dintre acestea care nu-l conţine pe x_1. Procedând în mod inductiv, obţinem un şir de intervale $(I_n)_{n\geq 0}$, $I_n = [a_n, b_n]$, $b_n - a_n = \frac{1}{3^n}$, astfel ca

$$I_0 \supset I_1 \supset I_2 \ldots \supset I_n \supset \ldots$$

şi I_n nu conţine x_0, $x_1, \ldots x_{n-1}$. Şirul de intervale $(I_n)_{n\geq 0}$ este descrescător, cu lungimea tinzând la 0, intersecţia tuturor intervalelor fiind un punct.

Urmează că $\bigcap\limits_{n\geq 0} I_n = \{x\}$, iar cum $x \in [0,1]$, $x = x_{n_0}$ pentru $n_0 \in \mathbb{N}$ oarecare, ceea ce este o contradicţie, deoarece atunci $x \notin I_{n_0+1}$, deci $x \notin \bigcap\limits_{n\geq 0} I_n$. ■

Vom nota cardinalul intervalului $[0,1]$ cu c (*puterea continuului*) , înţelegând că o mulţime cu cardinal c „are mai multe elemente" decât o mulţime numărabilă, de cardinal $\aleph_0$. Cum

$$f : [0,1] \to (0,1), \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{dacă } x = 0, \\ \frac{1}{n+2}, & \text{dacă } x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \\ x, & \text{în rest} \end{cases}$$

este bijectivă, urmează că $[0,1]$ şi $(0,1)$ au acelaşi cardinal. Cu ajutorul unei construcţii similare se poate demonstra că $[0,1]$ şi $[0,1)$ au acelaşi cardinal. Din consideraţiile enunţate anterior se deduce că atât mulţimea $\mathbb{R}$ cât şi toate intervalele $[a,b]$, (a,b), $(-\infty,b]$, $(-\infty,b)$, $[a,\infty)$, (a,∞) au acelaşi cardinal c.

Din cele ce urmează se va observa că numerele iraţionale, fiind în număr mai mare decât cele raţionale, sunt „responsabile" pentru faptul că mulţimea numerelor reale nu este numărabilă.

Corolar 4.19.1. *Mulţimea I a numerelor iraţionale nu este numărabilă.*

Demonstraţie. Presupunem prin reducere la absurd că I este numărabilă. Atunci, deoarece $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup I$, urmează că $\mathbb{R}$ este numărabilă, ca reuniunea unui număr finit de mulţimi numărabile, contradicţie. ■

Aplicaţii

4.1. *Precizaţi interiorul următoarelor mulţimi:*

$A_1 = (0,1) \cup [2,3]$; $A_2 = [0,2) \cup (4,5] \cup \{6\}$; $A_3 = [2,\infty)$; $A_4 = [-\infty,5]$; $A_5 = \mathbb{Q} \cap [1,2]$; $A_6 = (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}) \cap [2,3]$; $A_7 = \{x \in \mathbb{R}; 4 \leq x < 8\}$; $A_8 = \mathbb{R}^*$; $A_9 = \{0,1,2,\ldots,10\}$.

4.2. *Precizaţi mulţimea derivată şi aderenţa următoarelor mulţimi:*

$A_1 = (0,1) \cup (1,2)$; $A_2 = (1,2) \cup (3,4) \cup \{7\}$; $A_3 = \mathbb{N}$; $A_4 = (2,\infty)$; $A_5 = \mathbb{Q} \cap (-1,1)$; $A_6 = (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}) \cap (0,2)$; $A_7 = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots\right\}$; $A_8 = \left\{2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \ldots, \frac{n+1}{n}, \ldots\right\}$.

4.3. *Fie $A = [0,1) \cup (1,2] \cup \{6\}$. Determinaţi A', $\overline{A}$, $\overset{\circ}{A}$,* Fr A. *Este A deschisă? Dar închisă sau compactă?*

4.4. *Demonstraţi că* $A = \bigcup\limits_{i \geq 0} \left(\frac{2i+1}{i+1}, \frac{2i+3}{i+1} \right)$ *este mulţime deschisă.*

4.5. *Demonstraţi că* $A = \bigcap\limits_{i=1}^{10} \left[\frac{2n+1}{n+1}, \frac{3n+5}{n+2} \right]$ *este mulţime închisă.*

4.6. *Precizaţi dacă următoarele mulţimi sunt dense în mulţimile precizate:*

$A_1 = \mathbb{Z}$ *în* $B_1 = \mathbb{R}$; $A_2 = \mathbb{N}$ *în* $B_2 = \mathbb{Z}$; $A_3 = [0, 1]$ *în* $B_3 = [-1, 2]$; $A_4 = \mathbb{Q}^*$ *în* $B_4 = \mathbb{R}$; $A_5 = \{0, 1, 2, \ldots, 10\}$ *în* $B_5 = [0, 10]$; $A_6 = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots\right\}$ *în* $B_6 = [0, 1]$.

4.7. *Precizaţi care dintre următoarele mulţimi sunt numărabile:*

$A_1 = [0, 1) \cup (2, 3]$; $A_2 = 2\mathbb{Z} = \{x; x = 2k, k \in \mathbb{Z}\}$; $A_3 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$; $A_4 = \mathbb{Q} \times \mathbb{Z}$; $A_5 = \mathbb{R} \times \mathbb{Q}$; $A_6 = \mathbb{R}^n$; $A_7 = \mathbb{Q}^n$.