

Capitolul 8

ȘIRURI ȘI SERII DE FUNCȚII

8.1 Șiruri de funcții

Fie $D \subseteq \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$ și fie f_0, f_1, f_2, \dots funcții reale definite pe mulțimea D . Șirul f_0, f_1, f_2, \dots se numește *șir de funcții* și se notează cu $(f_n)_{n \geq 0}$. La fel ca și în cazul șirurilor numerice, dorim să studiem proprietățile de convergență ale șirurilor de funcții, investigând posibilele moduri în care se poate defini noțiunea de convergență, și să cercetăm dacă tipurile de convergență astfel definite realizează sau nu transmiterea unor proprietăți uzuale ale funcțiilor de la termenii unui șir de funcții la funcția limită.

8.1.1 Punct de convergență. Mulțime de de convergență. Limita unui șir de funcții

Mărginire uniformă

Fie $(f_n)_{n \geq 0}$ un șir de funcții definite pe mulțimea D . Vom spune că $(f_n)_{n \geq 0}$ este *uniform mărginit* dacă există $M > 0$ astfel încât $|f_n(x)| \leq M$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și $x \in D$.

Exemplu. Fie $(f_n)_{n \geq 0}$, $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sin nx$. Atunci $|f_n(x)| \leq 1$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și $x \in \mathbb{R}$, deci $(f_n)_{n \geq 0}$ este uniform mărginit.

Punct de convergență. Mulțime de de convergență

Fie $(f_n)_{n \geq 0}$ un șir de funcții definite pe mulțimea D . Vom spune că $a \in D$ este un *punct de convergență* al șirului de funcții $(f_n)_{n \geq 0}$ dacă șirul numeric $(f_n(a))_{n \geq 0}$ al valorilor funcțiilor în a este convergent. Mulțimea tuturor punctelor de convergență ale șirului de funcții $(f_n)_{n \geq 0}$ se va numi atunci *mulțimea de convergență* a acestui șir.

Funcția limită a unui șir de funcții

Fie $(f_n)_{n \geq 0}$ un șir de funcții definite pe mulțimea D și fie $E \subseteq D$ mulțimea de convergență a șirului de funcții $(f_n)_{n \geq 0}$. Funcția $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$f : E \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x),$$

se numește *funcția limită* a șirului de funcții $(f_n)_{n \geq 0}$.

Exemplu. Fie $(f_n)_{n \geq 0}$, $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{nx}{nx+1}$. Atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{nx}} = 1, \text{ pentru } x \in (0, 1],$$

iar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0, \text{ pentru } x = 0.$$

Urmează că mulțimea de convergență a șirului de funcții $(f_n)_{n \geq 0}$ este $[0, 1]$, iar funcția limită este

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, 1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

8.1.2 Convergența punctuală a unui șir de funcții

Fie $(f_n)_{n \geq 0}$ un șir de funcții definite pe mulțimea D și fie de asemenea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Vom spune că $(f_n)_{n \geq 0}$ *converge punctual* sau *simplic* la f și vom nota $f_n \xrightarrow{s} f$ pentru $n \rightarrow \infty$ dacă pentru orice $x \in D$ șirul numeric $(f_n(x))_{n \geq 0}$ este convergent la $f(x)$. În aceste condiții, pentru orice $x \in D$ și orice $\varepsilon > 0$ există un rang $n_{\varepsilon, x} \in \mathbb{N}$ astfel ca

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \text{pentru orice } n \geq n_{\varepsilon, x}. \quad (8.1)$$

Din exemplul anterior se observă însă că acest tip de convergență nu asigură transferul unor proprietăți cum ar fi continuitatea și derivabilitatea de la termenii șirului de funcții către funcția limită. În acest sens, deși toți termenii șirului $(f_n)_{n \geq 0}$ sunt funcții derivabile pe $[0, 1]$, funcția limită f nu este nici măcar continuă pe acest interval, fiind discontinuă în $x_0 = 0$. Este naturală atunci introducerea unui concept mai puternic de convergență.

8.1.3 Convergența uniformă a unui șir de funcții

Fie $(f_n)_{n \geq 0}$ un șir de funcții definite pe mulțimea D și fie de asemenea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Vom spune că $(f_n)_{n \geq 0}$ converge uniform la f și vom nota $f_n \xrightarrow{u} f$ pentru $n \rightarrow \infty$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un rang $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel ca

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \text{pentru orice } n \geq n_\varepsilon \text{ și orice } x \in D,$$

adică rangul $n_{\varepsilon, x}$ introdus în (8.1) nu mai depinde de x , iar diferența $|f_n(x) - f(x)|$ poate fi făcută suficient de mică de la un rang n_ε încolo indiferent de valoarea lui $x \in D$.

Conform definiției, se observă atunci că dacă $f_n \xrightarrow{u} f$ pentru $n \rightarrow \infty$, atunci și $f_n \xrightarrow{s} f$ pentru $n \rightarrow \infty$. Implicația inversă nu este însă adevărată, în acest sens putându-se considera următorul exemplu.

Exemplu. Fie $(f_n)_{n \geq 0}$, $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n(1 - x^n)$. Atunci, deoarece

$$0 \leq x^n(1 - x^n) \leq x^n,$$

iar $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$ pentru $x \in [0, 1)$, urmează că $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ pentru $x \in [0, 1)$.

Deoarece $f_n(1) = 0$ pentru $n \geq 0$, urmează că $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(1) = 0$, deci $f_n \xrightarrow{s} f$ pentru $n \rightarrow \infty$, unde $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 0$.

Fie $\varepsilon = \frac{1}{4}$ și să presupunem că $f_n \xrightarrow{u} f$ pentru $n \rightarrow \infty$. Atunci există un rang $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel ca

$$|f_n(x)| < \frac{1}{4}, \quad \text{pentru orice } n \geq n_\varepsilon \text{ și orice } x \in [0, 1].$$

Însă $f_n\left(\sqrt[n]{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{4}$ pentru orice $n \geq 1$, ceea ce contrazice inegalitatea de mai sus. În concluzie, $f_n \not\xrightarrow{u} f$ pentru $n \rightarrow \infty$.

8.1.4 Criterii de convergență uniformă

Se poate obține în mod imediat următorul criteriu de convergență uniformă, util atunci când limita șirului este cunoscută de la bun început, sau poate fi ușor determinată.

Teorema 8.1. Fie $(f_n)_{n \geq 0}$ un șir de funcții definite pe mulțimea D și fie de asemenea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Atunci $f_n \xrightarrow{u} f$ pentru $n \rightarrow \infty$ dacă și numai dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| \right) = 0,$$

Exemplu. Fie $(f_n)_{n \geq 0}$, $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$. Să arătăm că $f_n \xrightarrow{u} f$ pentru $n \rightarrow \infty$, unde $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 0$. În acest sens, conform celor de mai sus, este suficient să demonstrăm că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| \right) = 0.$$

Deoarece f_n este impară pentru orice $n \geq 0$, iar $f_n(x) \geq 0$ pentru $x \geq 0$, urmează că

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| = \sup_{x \geq 0} |f_n(x)| = \sup_{x \geq 0} f_n(x).$$

Întrucât

$$f_n'(x) = \frac{1 + nx^2 - 2nx^2}{(1 + nx^2)^2} = \frac{1 - nx^2}{(1 + nx^2)^2},$$

urmează că $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ este unicul punct de maxim local al lui f_n pe $[0, \infty)$, iar cum $f_n(x_n) = \frac{1}{2\sqrt{n}}$, urmează că

$$f_n(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}, \quad \text{pentru orice } x \geq 0,$$

iar

$$\sup_{x \geq 0} f_n(x) = \frac{1}{2\sqrt{n}} \rightarrow 0, \quad \text{pentru } n \rightarrow \infty,$$

deci $f_n \xrightarrow{u} f$ pentru $n \rightarrow \infty$.

Vom preciza în cele ce urmează un criteriu care constituie o adaptare a criteriului de convergență Cauchy pentru șiruri, menționând în esență faptul că dacă

șirurile numerice $(f_n(x))_{n \geq 0}$ sunt fundamentale în mod uniform, în sensul că rangul indicat în condiția Cauchy depinde doar de ε , nu și de x , atunci $(f_n)_{n \geq 0}$ este uniform convergent. La fel ca și în cazul șirurilor numerice, nu este necesar să fie cunoscută limita șirului de funcții, așa cum s-a întâmplat în cazul criteriului anterior.

Teorema 8.2. Fie $(f_n)_{n \geq 0}$ un șir de funcții definite pe mulțimea D . Atunci $(f_n)_{n \geq 0}$ este uniform convergent către o funcție $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un rang $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \quad \text{pentru orice } m, n \geq n_\varepsilon \text{ și orice } x \in D.$$

Rezultatul se poate exprima și sub următoarea formă echivalentă.

Teorema 8.3. Fie $(f_n)_{n \geq 0}$ un șir de funcții definite pe mulțimea D . Atunci $(f_n)_{n \geq 0}$ este uniform convergent către o funcție $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \quad \text{pentru orice } n \geq n_\varepsilon, \text{ orice } p \geq 0 \text{ și orice } x \in D.$$

Exemplu. Fie $(f_n)_{n \geq 1}$, $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k(k+1)}$. Să arătăm că $(f_n)_{n \geq 1}$ este uniform convergent.

Fie $\varepsilon > 0$. Atunci

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\sin kx}{k(k+1)} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \left| \frac{\sin kx}{k(k+1)} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k(k+1)}.$$

Deoarece

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=n+1}^{n+p} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{n+1} < \varepsilon$$

pentru $n \geq n_\varepsilon = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$, urmează că

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \quad \text{pentru orice } n \geq n_\varepsilon, \text{ orice } p \geq 0 \text{ și orice } x \in D.$$

Conform teoremei de mai sus, urmează că $(f_n)_{n \geq 0}$ este uniform convergent.

Următorul rezultat poartă numele de *criteriul majorării* și indică faptul că o condiție suficientă pentru convergența uniformă a unui șir de funcții către o func-

ție dată este ca modulul diferenței dintre termenii șirului și acea funcție să poată fi majorat, indiferent de valoarea argumentului, de termenii unui șir cu limita 0.

Teorema 8.4. Fie $(f_n)_{n \geq 0}$ un șir de funcții definite pe mulțimea D și fie de asemenea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă există $(\alpha_n)_{n \geq 0}$ un șir de numere reale pozitive astfel încât

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0 \text{ și}$$

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n, \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N} \text{ și } x \in D,$$

atunci $f_n \xrightarrow{u} f$ pentru $n \rightarrow \infty$.

Demonstrație. Deoarece

$$\sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n, \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N},$$

concluzia urmează în mod imediat cu ajutorul Teoremei 8.1. ■

Exemplu. Fie $(f_n)_{n \geq 0}$, $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{\cos nx}{n^2 + 1}$. Atunci

$$|f_n(x) - 0| = \frac{|\cos nx|}{n^2 + 1} \leq \frac{1}{n^2 + 1}, \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N} \text{ și } x \in [0, 1],$$

iar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2 + 1} = 0,$$

deci $(f_n)_{n \geq 0}$ converge uniform către funcția $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ pentru $x \in [0, 1]$.

Pentru studierea convergenței uniforme a unui șir de funcții a cărei limită nu este cunoscută de la început, este utilă mai întâi determinarea funcției limită „punct cu punct”, ținând seama de faptul că orice șir de funcții uniform convergent este în mod necesar și convergent punctual, după care diferența dintre termenii șirului și funcția limită astfel obținută se estimează în mod uniform.

Exercițiu. Studiați convergența șirului de funcții $(f_n)_{n \geq 0}$, $f_n : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{nx^2 + 2}{nx}$.

Soluție. Mai întâi, se observă că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx^2 + 2}{nx} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(x + \frac{2}{nx}\right) = x, \quad \text{pentru orice } x \in [1, 2],$$

deci $(f_n)_{n \geq 0}$ converge, deocamdată punctual, către funcția

$$f : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x.$$

Să arătăm că această convergență este uniformă. Observăm că

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{2}{nx} \leq \frac{2}{n}, \quad \text{pentru orice } x \in [1, 2],$$

iar deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} = 0$, urmează conform criteriului majorării că $f_n \xrightarrow{u} f$ pentru $n \rightarrow \infty$.

În fine, în prezența proprietății de monotonie, convergența punctuală se poate transforma în convergență uniformă, așa cum va fi observat din rezultatul următor, numit *teorema lui Dini*.

Teorema 8.5. Fie $(f_n)_{n \geq 0}$ un șir de funcții continue definit pe mulțimea compactă D și de asemenea o funcție constantă $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă sunt îndeplinite următoarele condiții:

1. $f_n \xrightarrow{s} f$ pentru $n \rightarrow \infty$,
2. $(f_n(x))_{n \geq 0}$ este monoton pentru orice $x \in D$,

atunci $f_n \xrightarrow{u} f$ pentru $n \rightarrow \infty$.

8.1.5 Transmiterea unor proprietăți prin convergență uniformă

S-a observat anterior că prin convergență punctuală proprietățile de continuitate și derivabilitate nu se transmit neapărat de la termenii șirului către funcția limită. Vom observa în cele ce urmează că vehiculul potrivit de transmitere a proprietăților uzuale este convergența uniformă.

Mărginire

Teorema 8.6. Fie $(f_n)_{n \geq 0}$ un șir de funcții definite pe mulțimea D și mărginite pe D , astfel încât $f_n \xrightarrow{u} f$ pentru $n \rightarrow \infty$, unde $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Atunci f este de asemenea mărginită pe D .

Continuitate

Teorema 8.7. Fie $(f_n)_{n \geq 0}$ un șir de funcții definite pe mulțimea D și continue în $a \in D$, astfel încât $f_n \xrightarrow{u} f$ pentru $n \rightarrow \infty$, unde $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Atunci f este de asemenea continuă în a .

Conform definiției continuității pe o mulțime, teorema de mai sus conduce la următorul corolar.

Corolar 8.7.1. Fie $(f_n)_{n \geq 0}$ un șir de funcții definite pe mulțimea D și continue pe D , $f_n \xrightarrow{u} f$ pentru $n \rightarrow \infty$. Atunci f este de asemenea continuă pe D .

Exemplu. Fie $(f_n)_{n \geq 0}$, $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$. Atunci

$$f_n \xrightarrow{s} f \text{ pentru } n \rightarrow \infty, \text{ unde } f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}.$$

Totuși, f_n nu converge și uniform la această funcție, deoarece în caz contrar ar trebui ca f să fie continuă, fiind limita uniformă a unui șir de funcții continue, iar f este discontinuă în $x_0 = 1$.

Derivabilitate

Prin analogie cu transmiterea proprietăților de mărginire și continuitate de la termenii unui șir uniform convergent către funcția limită, s-ar putea crede că și proprietatea de derivabilitate se transmite prin convergență uniformă. Acest lucru nu este însă adevărat, așa cum se poate observa din următorul exemplu.

Exemplu. Fie $(f_n)_{n \geq 1}$, $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \begin{cases} -x - \frac{1}{2n}, & x \leq -\frac{1}{n} \\ \frac{n}{2}x^2, & x \in (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \\ x + \frac{1}{2n}, & x \geq \frac{1}{n} \end{cases}.$$

Atunci

$$f'_n(x) = \begin{cases} -1, & x < -\frac{1}{n} \\ nx, & x \in (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \\ 1, & x > \frac{1}{n} \end{cases}.$$

În plus,

$$(f'_n)_s\left(-\frac{1}{n}\right) = \lim_{\substack{x \rightarrow -\frac{1}{n} \\ x < -\frac{1}{n}}} \frac{f_n(x) - f_n\left(-\frac{1}{n}\right)}{x - \left(-\frac{1}{n}\right)} = \lim_{\substack{x \rightarrow -\frac{1}{n} \\ x < -\frac{1}{n}}} \frac{-x - \frac{1}{n}}{x + \frac{1}{n}} = -1$$

$$(f'_n)_d\left(-\frac{1}{n}\right) = \lim_{\substack{x \rightarrow -\frac{1}{n} \\ x > -\frac{1}{n}}} \frac{f_n(x) - f_n\left(-\frac{1}{n}\right)}{x - \left(-\frac{1}{n}\right)} = \lim_{\substack{x \rightarrow -\frac{1}{n} \\ x > -\frac{1}{n}}} \frac{\frac{n}{2}x^2 - \frac{1}{2n}}{x + \frac{1}{n}} = -1,$$

deci f_n este derivabilă în $x_1 = -\frac{1}{n}$, iar $f'_n\left(-\frac{1}{n}\right) = -1$. Similar, f_n este derivabilă în $x_2 = \frac{1}{n}$, iar $f'_n\left(\frac{1}{n}\right) = 1$. În concluzie, f_n este derivabilă pe \mathbb{R} pentru orice $n \geq 1$.

Fie acum $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$. Vom estima $|f_n(x) - f(x)|$, pentru $x \in \mathbb{R}$, cu scopul de a demonstra că $f_n \xrightarrow{u} f$ pentru $n \rightarrow \infty$.

Avem că

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left| -\frac{1}{2n} \right| = \frac{1}{2n}, && \text{pentru } x \leq -\frac{1}{n} \\ |f_n(x) - f(x)| &= \left| \frac{n}{2}x^2 - |x| \right| \leq \frac{n}{2}|x|^2 + |x| \leq \frac{3}{2n}, && \text{pentru } x \in \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \\ |f_n(x) - f(x)| &= \left| \frac{1}{2n} \right| = \frac{1}{2n}, && \text{pentru } x \geq \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

În concluzie,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{3}{2n}, \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R},$$

iar conform criteriului majorării urmează că $f_n \xrightarrow{u} f$ pentru $n \rightarrow \infty$. Totuși, funcția limită f nu este derivabilă în $x = 0$, deci proprietatea de derivabilitate nu se transmite neapărat prin convergență uniformă.

Exemplul, totuși, nu este surprinzător. Convergența uniformă a unui șir de funcții este o proprietate globală, măsurând, într-un anumit sens, cât de „aproape”

sunt termenii acestui șir de funcția limită, în vreme ce derivabilitatea unei funcții este o proprietate locală, măsurând viteza de variație a acelei funcții. În acest sens, două funcții pot avea valori „apropiate”, dar valorile uneia dintre ele pot varia cu mult mai repede decât valorile celeilalte, fie și doar local, caz în care derivatele celor două funcții nu vor fi „apropiate” una de alta.

O altă întrebare naturală este dacă uniforma convergență a unui șir $(f_n)_{n \geq 0}$ atrage uniforma convergență a șirului derivatelor sale $(f'_n)_{n \geq 0}$. Răspunsul la această întrebare este de asemenea negativ, din aceleași motive enunțate mai sus, așa cum se poate observa din următorul exemplu.

Exemplu. Fie $(f_n)_{n \geq 0}$, $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{1}{n} \sin nx$. Deoarece

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{n}, \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R},$$

urmează conform criteriului majorării că $f_n \xrightarrow{u} f$, unde $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 0$. Totuși, deoarece $f'_n(x) = \cos nx$, iar $f'_n(\frac{\pi}{2}) = (-1)^n$, urmează că $(f'_n(\frac{\pi}{2}))_{n \geq 0}$ nu este convergent, iar $(f'_n)_{n \geq 0}$ nu poate fi uniform convergent pe \mathbb{R} , întrucât mulțimea sa de convergență nu este întreg \mathbb{R} .

Se va observa însă că transferul de derivabilitate se produce în condițiile în care sunt asigurate atât convergența uniformă a șirului funcțiilor, cât și convergența uniformă a șirului derivatelor.

Teorema 8.8. Fie $(f_n)_{n \geq 0}$ un șir de funcții derivabile definite pe un interval I și fie $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât

1. $(f_n)_{n \geq 0}$ este uniform convergent, $f_n \xrightarrow{u} f$ pentru $n \rightarrow \infty$.
2. $(f'_n)_{n \geq 0}$ este uniform convergent, $f'_n \xrightarrow{u} g$ pentru $n \rightarrow \infty$.

Atunci f este derivabilă, iar $f' = g$.

Egalitatea $f' = g$ de mai sus se poate pune și sub forma

$$(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n)' = \lim_{n \rightarrow \infty} (f'_n),$$

spunându-se că, în condițiile teoremei, *limita derivatelor este derivata limitei*.

Dacă intervalul I este mărginit, atunci este suficient ca $(f_n)_{n \geq 0}$ să fie convergent într-un singur punct, restul ipotezelor implicând convergența uniformă a acestui șir.

Teorema 8.9. Fie $(f_n)_{n \geq 0}$ un șir de funcții derivabile definite pe un interval mărginit I și fie $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât

1. $(f_n)_{n \geq 0}$ este convergent într-un punct $a \in I$.
2. $(f'_n)_{n \geq 0}$ este uniform convergent, $f'_n \xrightarrow{u} g$ pentru $n \rightarrow \infty$.

Atunci $(f_n)_{n \geq 0}$ este uniform convergent către o funcție $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, f este derivabilă, iar $f' = g$.

Integrabilitate

Pentru conformitate, menționăm aici că și proprietatea unei funcții de a fi integrabilă Riemann, care va fi studiată ulterior, se transmite la rândul ei de la termenii unui șir uniform convergent către funcția limită.

Teorema 8.10. Fie $(f_n)_{n \geq 0}$ un șir de funcții integrabile Riemann definite pe un interval $[a, b]$ astfel încât $f_n \xrightarrow{u} f$ pentru $n \rightarrow \infty$, unde $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Atunci f este de asemenea integrabilă Riemann pe $[a, b]$, iar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Observăm atunci că, în condițiile teoremei, limita integralelor este integrala limitei.

8.2 Serii de funcții

Fiind dat un șir de funcții $(f_n)_{n \geq 0}$, vom numi *serie de funcții de termen general* f_n cuplul $((f_n)_{n \geq 0}, (S_n)_{n \geq 0})$ format din șirul $(f_n)_{n \geq 0}$ al termenilor seriei și șirul de funcții $(S_n)_{n \geq 0}$ al sumelor parțiale, definit după regula

$$S_n = f_0 + f_1 + f_2 + \dots + f_n.$$

În această situație, f_n se va numi și *termenul de rang n sau indice n al seriei*. Vom nota o serie de funcții de termen general f_n prin

$$f_0 + f_1 + f_2 + \dots + f_n + \dots,$$

sau, sub formă prescurtată, prin

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n.$$

Dacă primii k termeni f_0, f_1, \dots, f_{k-1} nu sunt definiți, vom nota seria de funcții de termen general f_n prin

$$f_k + f_{k+1} + f_{k+2} + \dots + f_n + \dots,$$

respectiv prin

$$\sum_{n=k}^{\infty} f_n.$$

8.2.1 Punct de convergență. Mulțime de convergență. Suma unei serii de funcții

Pentru a studia convergența seriilor de funcții, vom utiliza noțiunile și rezultatele menționate anterior pentru șiruri de funcții și serii numerice.

Punct de convergență. Mulțimea de convergență

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ o serie de funcții definite pe mulțimea D . Vom spune că $a \in D$ este un *punct de convergență* al seriei de funcții $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ dacă șirul numeric $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(a)$ este convergent, adică a este punct de convergență pentru șirul de funcții $(S_n)_{n \geq 0}$ al sumelor parțiale. Mulțimea tuturor punctelor de convergență ale seriei de funcții $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ se va numi atunci *mulțimea de convergență* a acestei serii.

Exemplu. Fie seria de funcții $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$ și fie $x \in \mathbb{R}$ fixat. Studiem absoluta convergență a seriei numerice obținute. Urmează că

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{x^n}{1+x^{2n}} \right|} = |x| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[2n]{1+x^{2n}}}.$$

Pentru $x \in (-1, 1)$, $L = |x| < 1$, deci seria obținută pentru acest x este absolut

convergentă, conform criteriului radicalului. Pentru $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$,

$$L = |x| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2 \sqrt[n]{\frac{1}{x^{2n}} + 1}} = \frac{1}{|x|} < 1,$$

deci seria obținută pentru acest x este absolut convergentă, conform criteriului radicalului. Pentru $x = -1$, seria inițială devine $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}$, care este divergentă, deoarece termenul general nu tinde la 0. Pentru $x = 1$, seria inițială devine $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2}$, care este divergentă, deoarece termenul general nu tinde la 0. În concluzie, mulțimea de convergență a seriei date este $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Suma unei serii de funcții

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ o serie de funcții definite pe mulțimea D și fie $E \subseteq D$ mulțimea sa de convergență. Funcția $S : E \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$S : E \rightarrow \mathbb{R}, \quad S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x),$$

se va numi *suma* seriei de funcții $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$.

8.2.2 Convergența punctuală a unei serii de funcții

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ o serie de funcții definite pe mulțimea D . Seria $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ se va numi *convergentă punctual* sau *simplu* către $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ dacă șirul sumelor parțiale $(S_n)_{n \geq 0}$ este convergent punctual către f , adică pentru orice $a \in D$ seria numerică $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(a)$ este convergentă către $f(a)$.

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ o serie de funcții definite pe mulțimea D . Seria $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ se va numi *convergentă absolut* dacă seria $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n|$ este convergentă punctual, adică pentru orice $a \in D$ seria numerică $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(a)|$ este convergentă.

Să remarcăm că, la fel ca și în cazul seriilor numerice, dacă o serie de funcții $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ este absolut convergentă, atunci ea este și convergentă. În plus, deoarece pentru seriile numerice cu termeni pozitivi convergența este echivalentă cu mărginirea, $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ este absolut convergentă dacă și numai dacă $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(a)|$ este mărginită pentru orice $a \in D$.

8.2.3 Convergența uniformă a unei serii de funcții

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ o serie de funcții definite pe mulțimea D . Seria $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ se va numi *convergentă uniform* către $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ dacă șirul sumelor parțiale $(S_n)_{n \geq 0}$ este convergent uniform către f .

Exemplu. Fie seria de funcții $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$. Să demonstrăm că seria este convergentă uniform pe $(0, \infty)$.

Într-adevăr,

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(x+k)(x+k+1)} = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{x+k} - \frac{1}{x+k+1} \right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+n+1}$$

Atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+n+1} \right) = \frac{1}{x}, \quad \text{pentru orice } x \in (0, \infty),$$

deci $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$ este convergentă, deocamdată punctual, la $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$. Deoarece

$$|S_n(x) - f(x)| = \frac{1}{x+n+1} \leq \frac{1}{n+1},$$

urmează conform criteriului majorării că $(S_n)_{n \geq 0}$ este convergent uniform la f , deci seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$ este convergentă uniform pe $(0, \infty)$.

8.2.4 Criterii de convergență uniformă

Conform Teoremei 8.3 și definiției convergenței uniforme, se obține următorul criteriu de convergență uniformă.

Teorema 8.11. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ o serie de funcții definite pe mulțimea D . Atunci $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ este uniform convergentă dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$|f_n(x) + f_{n+1}(x) + \dots + f_{n+p}(x)| < \varepsilon,$$

pentru orice $n \geq n_\varepsilon$, orice $p \geq 0$ și orice $x \in D$.

De asemenea, prin analogie cu Teorema 8.4, se poate enunța și demonstra următorul criteriu de convergență uniformă și absolută pentru serii de funcții, numit *criteriul lui Weierstrass*.

Teorema 8.12. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ o serie de funcții definite pe mulțimea D . Dacă există $(\alpha_n)_{n \geq 0}$ un șir de numere reale pozitive astfel încât $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$ este convergentă și

$$|f_n(x)| \leq \alpha_n, \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N} \text{ și } x \in D,$$

atunci $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ este absolut și uniform convergentă.

Exemplu. Fie seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2 + x^2 + 1}$. Deoarece

$$\left| \frac{\sin nx}{n^2 + x^2 + 1} \right| \leq \frac{1}{n^2 + 1}, \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N} \text{ și orice } x \in \mathbb{R},$$

iar seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$ este convergentă, fapt care poate fi demonstrat, de exemplu, cu ajutorul criteriului Raabe-Duhamel sau comparând seria dată cu seria convergentă $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ cu ajutorul criteriului de comparație cu limită, urmează

că seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2 + x^2 + 1}$ este absolut și uniform convergentă pe \mathbb{R} .

Criteriul lui Dirichlet

La fel ca și în cazul seriilor numerice, înmulțirea termenului general al unei serii de funcții nu neapărat convergente, dar cu șirul sumelor parțiale uniform mărginit cu termenul general al unui șir de funcții cu valori „mici” (monoton descrescător pentru orice valoare fixată a argumentului și uniform convergent la 0) „îmbunătățește” convergența seriei, în sensul că seria de funcții ce are ca termen general rezultatul acestui produs este uniform convergentă.

Teorema 8.13. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ o serie de funcții definite pe mulțimea D care are șirul sumelor parțiale uniform mărginit. Fie $(g_n)_{n \geq 0}$ un șir de funcții definite pe D cu proprietățile următoare.

1. $g_n \xrightarrow{u} 0$ pentru $n \rightarrow \infty$.
2. Șirul numeric $(g_n(x))_{n \geq 0}$ este monoton descrescător pentru orice $x \in D$.

Atunci $\sum_{n=0}^{\infty} f_n g_n$ este uniform convergentă.

Criteriul lui Abel

Similar, înmulțirea termenului general al unei serii de funcții uniform convergente cu termenul general al unui șir de funcții cu proprietăți suficient de bune (uniform mărginit și monoton pentru valoare fixată a argumentului) păstrează uniformă convergența a seriei.

Teorema 8.14. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ o serie de funcții definite pe mulțimea D care este uniform convergentă. Fie $(g_n)_{n \geq 0}$ un șir de funcții definite pe D cu proprietățile următoare:

1. $(g_n)_{n \geq 0}$ este uniform mărginit.
2. Șirul numeric $(g_n(x))_{n \geq 0}$ este monoton pentru orice $x \in D$.

Atunci $\sum_{n=0}^{\infty} f_n g_n$ este uniform convergentă pe D .

Criteriul lui Leibniz

Teorema 8.15. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n f_n$ o serie de funcții definite pe mulțimea D cu proprietățile următoare:

1. $f_n \xrightarrow{u} 0$ pentru $n \rightarrow \infty$.
2. Șirul numeric $(f_n(x))_{n \geq 0}$ este monoton descrescător pentru orice $x \in D$.

Atunci $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n f_n$ este uniform convergentă pe D .

8.2.5 Transmiterea unor proprietăți prin convergență uniformă

Prin analogie cu rezultatele corespunzătoare pentru șiruri de funcții, se pot discuta continuitatea, derivabilitatea și integrabilitatea sumelor seriilor uniform convergente.

Continuitatea seriilor uniform convergente

Teorema 8.16. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ o serie de funcții definite pe mulțimea D care este uniform convergentă către o funcție $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă toate funcțiile f_n sunt continue în $a \in D$ (respectiv pe D), atunci f este de asemenea continuă în a (respectiv pe D).

Derivabilitatea seriilor uniform convergente

Teorema 8.17. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ o serie de funcții derivabile definite pe un interval I și fie $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât

1. $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ este uniform convergentă, $\sum_{n=0}^{\infty} f_n \xrightarrow{u} f$.

$$2. \sum_{n=0}^{\infty} f'_n \text{ este uniform convergentă, } \sum_{n=0}^{\infty} f'_n \xrightarrow{u} g.$$

Atunci f este derivabilă, iar $f' = g$.

Egalitatea $f' = g$ de mai sus se poate pune și sub forma

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (f'_n),$$

spunându-se că, în condițiile teoremei, seriile de funcții convergente uniform se pot *deriva termen cu termen*.

Dacă intervalul I este mărginit, atunci este suficient ca $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ să fie convergentă într-un singur punct, restul ipotezelor implicând convergența uniformă a acestei serii.

Teorema 8.18. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ o serie de funcții derivabile definite pe un interval mărginit I și fie $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât

$$1. \sum_{n=0}^{\infty} f_n \text{ este convergentă într-un punct } a \in I.$$

$$2. \sum_{n=0}^{\infty} f'_n \text{ este uniform convergentă, } \sum_{n=0}^{\infty} f'_n \xrightarrow{u} g.$$

Atunci $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ este uniform convergentă către o funcție $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, f este derivabilă, iar $f' = g$.

Pentru conformitate, menționăm aici și un rezultat privitor la integrarea seriilor uniform convergente.

Integrabilitatea seriilor uniform convergente

Teorema 8.19. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ o serie de funcții integrabile Riemann definite pe un interval mărginit $[a, b]$, uniform convergentă către o funcție $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Atunci f este de asemenea integrabilă Riemann pe $[a, b]$, seria integralelor $\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx$

este convergentă, iar

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

8.3 Serii de puteri

Vom numi *serie de puteri centrată în x_0* o serie de funcții $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ pentru care funcțiile $f_n, n \geq 0$, au forma particulară $f_n = a_n(x - x_0)^n$, unde $a_n, n \geq 0$, și x_0 sunt numere reale. O serie de puteri centrată în x_0 are deci forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots, \quad (8.2)$$

fiind unic determinată de numărul $x_0 \in \mathbb{R}$ și de șirul $(a_n)_{n \geq 0}$. Dacă $x_0 = 0$, se obține cazul particular al seriei de puteri centrată în origine

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (8.3)$$

Întrucât după schimbarea de variabilă $x - x_0 = y$ seria (8.2) de mai sus se scrie sub forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n,$$

similară cu (8.3), se va considera în cele ce urmează doar cazul în care $x_0 = 0$, iar seria de puteri se scrie sub forma (8.3), adaptarea rezultatelor pentru cazul $x_0 \neq 0$ putându-se face cu ușurință.

8.3.1 Mulțimea de convergență a unei serii de puteri

Pentru o serie de funcții oarecare, mulțimea de convergență poate avea o structură complexă. Totuși, pentru serii de puteri situația este cu mult mai simplă. Se poate observa că seria (8.3) este convergentă pentru $x = 0$, având suma a_0 . Mai departe, se va demonstra că (8.3) poate converge doar în $x = 0$, poate converge pe întreaga axă reală sau poate converge pe un interval deschis simetric față de origine, o întrebare adițională fiind dacă seria (8.3) converge și în capetele acestui interval.

Mai întâi, vom exemplifica aceste situații.

Convergență doar în 0

Fie seria $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$ și fie $x \neq 0$ fixat. Atunci notând $b_n = n!x^n$, urmează că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)|x| = \infty,$$

ceea înseamnă că $\lim_{n \rightarrow \infty} |b_n| = +\infty$, iar, pentru acest x fixat, seria dată nu poate fi convergentă, întrucât termenul ei general nu tinde la 0. În concluzie, seria dată converge doar pentru $x = 0$.

Convergență pentru orice $x \in \mathbb{R}$

Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ și fie $x \neq 0$ fixat. Atunci notând $b_n = \frac{x^n}{n!}$, urmează că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{n+1} = 0,$$

iar, conform criteriului raportului pentru serii numerice, seria dată este absolut convergentă pentru acest x fixat, deci și convergentă. În concluzie, seria dată converge pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Convergență pe un interval deschis centrat în 0

Fie seria $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$. S-a observat deja că pentru $x \in (-1, 1)$ fixat, seria dată este convergentă, cu suma $\frac{1}{1-x}$, iar pentru $x \in (-\infty - 1] \cup [1, \infty)$ fixat, seria dată este divergentă, întrucât termenul său general nu tinde la 0. În concluzie, mulțimea de convergență a seriei date este $(-1, 1)$.

Convergență pe un interval deschis centrat în 0

Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ și fie $x \neq 0$ fixat. Atunci, notând $b_n = \frac{x^n}{n}$, urmează că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n|x|}{n+1} = |x|.$$

Pentru $x \in (-1, 1)$, urmează, conform criteriului raportului pentru serii numerice, că seria dată este absolut convergentă, deci și convergentă. Pentru $|x| > 1$,

urmează că $\lim_{n \rightarrow \infty} |b_n| = \infty$, iar seria dată este divergentă, întrucât termenul general nu tinde la 0.

Rămâne deci să studiem convergența seriei în capetele intervalului menționat anterior, anume în $x = -1$ și $x = 1$. Pentru $x = 1$, seria dată devine seria armonică $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, care este divergentă. Pentru $x = -1$, seria dată devine seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, care este convergentă, conform criteriului lui Leibniz pentru serii numerice. În concluzie, mulțimea de convergență a seriei date este $[-1, 1)$.

Cu un raționament similar celui de mai sus, se poate observa că mulțimea de convergență a seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ este $(-1, 1]$, în vreme ce mulțimea de convergență a seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ este $[-1, 1]$, nicio afirmație generală neputând fi făcută *a priori* relativ la convergența sau divergența seriei la extremitățile mulțimii de convergență.

Rezultatul următor, cunoscut sub numele de *teorema lui Abel*, furnizează informații adiționale despre conținutul mulțimii de convergență.

Teorema 8.20. Fie seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Fie de asemenea $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ astfel încât seria numerică $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$ este convergentă, respectiv seria numerică $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_2^n$ este divergentă. Au loc atunci următoarele proprietăți.

1. Seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge în orice punct x cu $|x| < |x_1|$, respectiv diverge în orice punct x cu $|x| > |x_2|$.
2. Pentru orice $r \in (0, |x_1|)$, seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este uniform convergentă pe intervalul $[-r, r]$.

Determinarea razei de convergență a unei serii de puteri

S-a observat deja că seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este convergentă pentru $x = 0$, iar teorema lui Abel ne asigură de următoarele lucruri.

1. Dacă seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este convergentă pentru $x = x_1$, atunci este convergentă și pentru $|x| < |x_1|$.
2. Dacă seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este divergentă pentru $x = x_2$, atunci este divergentă și pentru $|x| > |x_2|$.

Fie E mulțimea de convergență a seriei de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ și fie

$$R = \sup E,$$

numit și *raza de convergență* a seriei de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Conform celor de mai sus, $0 \in E$, deci $R \geq 0$. Sunt posibile următoarele situații.

1. $\mathbf{R} = 0$

Dacă $x \neq 0 \in E$, atunci $(-|x|, |x|) \subseteq E$, deci $R \geq |x|$, contradicție. Atunci $E = \{0\}$.

2. $\mathbf{0} < \mathbf{R} < \infty$

Conform caracterizării analitice a marginii superioare a unei mulțimi și teoremei lui Abel, seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este absolut convergentă pe $(-R, R)$, divergentă pe $(-\infty, -R) \cup (R, +\infty)$ și absolut convergentă pe orice interval $[-r, r]$, cu $r < R$. Relativ la comportarea seriei de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ în cele două capete ale intervalului $(-R, R)$, aceasta poate fi convergentă în ambele, într-unul singur, sau în niciunul, în acest sens putând fi studiate exemplele menționate anterior.

3. $\mathbf{R} = +\infty$

Atunci seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este absolut convergentă pe \mathbb{R} și uniform convergentă pe orice interval $[-r, r]$, cu $r \in \mathbb{R}$.

În toate aceste cazuri, dacă E este mulțimea de convergență a seriei de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, iar R este raza sa de convergență, atunci

$$(-R, R) \subseteq E \subseteq [-R, R].$$

Intervalul $(-R, R)$ poartă numele de *intervalul de convergență* al seriei de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (a nu se confunda cu mulțimea de convergență a acestei serii, care mai poate conține eventual și capetele $-R$ și R ale acestui interval).

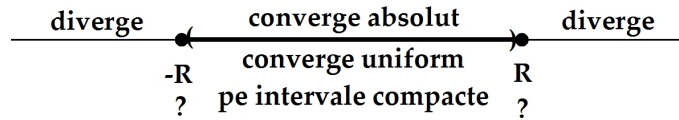


Figura 8.1: Convergența unei serii de puteri

Formulele Cauchy-Hadamard

Având în vedere faptul că pe intervalul de convergență $(-R, R)$ seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este absolut convergentă, pentru determinarea razei de convergență vom folosi criteriul de convergență pentru serii cu termeni pozitivi, aplicate seriei modulelor $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$.

Mai întâi, vom preciza o modalitate de determinare a razei de convergență a seriei de puteri cu ajutorul limitei unui raport.

Teorema 8.21. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o serie de puteri cu coeficienți nenuli. Dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lambda,$$

atunci

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}, & \text{dacă } \lambda \in (0, \infty), \\ \infty, & \text{dacă } \lambda = 0, \\ 0, & \text{dacă } \lambda = +\infty. \end{cases}$$

Demonstrație. Fie $x \in \mathbb{R}^*$. Aplicând criteriul raportului seriei numerice cu termeni strict pozitivi $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$, observăm că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1} x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} |x| = \lambda |x|,$$

iar seria $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ este convergentă pentru $|x| < \frac{1}{\lambda}$ și divergentă pentru $|x| > \frac{1}{\lambda}$.

De aici rezultă în mod imediat teorema de mai sus. ■

Exemplu. Fie seria de puteri $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} x^n$. Atunci

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{n(n+1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+2} = 1,$$

iar raza de convergență a seriei de puteri date este $R = 1$. Pentru $x =$

1, seria dată devine $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, care este convergentă, conform criteriului

Raabe-Duhamel, sau conform criteriului de comparație cu limită, folosind

ca termen de comparație seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Pentru $x = -1$, seria dată devine

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n(n+1)}$, care este convergentă, conform criteriului lui Leibniz. Ur-

mează că mulțimea de convergență a seriei de puteri date este $[-1, 1]$.

Vom preciza acum o modalitate de determinare a razei de convergență a seriei de puteri cu ajutorul limitei unui radical.

Teorema 8.22. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o serie de puteri. Dacă

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lambda,$$

atunci

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}, & \text{dacă } \lambda \in \mathbb{R}, \\ \infty, & \text{dacă } \lambda = 0, \\ 0, & \text{dacă } \lambda = +\infty. \end{cases}$$

Demonstrație. Fie $x \in \mathbb{R}$. Aplicând criteriul radicalului cu limite extreme seriei

cu termeni pozitivi $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$, observăm că

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} |x| = \lambda |x|,$$

iar seria $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ este convergentă pentru $|x| < \frac{1}{\lambda}$ și divergentă pentru $|x| > \frac{1}{\lambda}$.

De aici rezultă în mod imediat teorema de mai sus. ■

Teorema de mai sus se poate particulariza sub următoarea formă.

Teorema 8.23. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o serie de puteri. Dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lambda,$$

atunci

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}, & \text{dacă } \lambda \in (0, \infty), \\ \infty, & \text{dacă } \lambda = 0, \\ 0, & \text{dacă } \lambda = +\infty. \end{cases}$$

Formulele cuprinse în Teoremele 8.21 și 8.22 poartă numele de *formulele Cauchy-Hadamard*.

Exemple. 1. Fie seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n + 5^n} x^n$. Atunci

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n + 5^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{5 \sqrt[n]{\left(\frac{2}{5}\right)^n + 1}} = \frac{1}{5},$$

iar raza de convergență a seriei de puteri date este $R = 5$. Pentru $x = 5$, seria dată devine $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{2^n + 5^n}$, care este divergentă, deoarece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n}{2^n + 5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{2}{5}\right)^n + 1} = 1, \text{ iar limita termenului său general nu este}$$

0. Pentru $x = -5$, seria dată devine $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-5)^n}{2^n + 5^n}$, care este divergentă,

deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-5)^n}{2^n + 5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{\left(\frac{2}{5}\right)^n + 1}$ nu există, întrucât numărătorul nu are limită pentru $n \rightarrow \infty$, iar limita numitorului este 1. Urmează că mulțimea de convergență a seriei de puteri date este $(-5, 5)$.

2. Fie seria de puteri $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n$. Cu notația $x+1 = y$, obținem

seria de puteri $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} y^n$. Atunci

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{3^n + (-2)^n}{n}} = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{1 + \left(\frac{-2}{3}\right)^n}}{\sqrt[n]{n}} = 3,$$

iar raza de convergență a seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} y^n$ este $R = \frac{1}{3}$. Pentru $y = \frac{1}{3}$, această serie devine $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{3^n} \frac{1}{n}$, fiind serie cu termeni pozitivi, iar cum

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3^n + (-2)^n}{3^n} \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1,$$

seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{3^n} \frac{1}{n}$ are aceeași natură cu seria armonică $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, deci

este divergentă. Pentru $y = -\frac{1}{3}$, seria de puteri în y devine $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^n}{n}$,

care este convergentă, conform criteriului lui Leibniz. Urmează că mulțimea de convergență a seriei în y este $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, iar ținând seama că $y = x + 1$, deci $x = y - 1$, mulțimea de convergență a seriei de puteri în x este $\left[-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

Suma unei serii de puteri

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o serie de puteri cu raza de convergență $R > 0$ și fie E mulțimea sa de convergență. S-a observat deja că $(-R, R) \subseteq E \subseteq [-R, R]$. Ca și în cazul general al seriilor de funcții, se poate defini funcția $S : E \rightarrow \mathbb{R}$,

$$S : E \rightarrow \mathbb{R}, \quad S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n,$$

numită *suma* seriei de puteri, unde

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

reprezintă suma parțială de ordinul n a seriei de puteri.

Teorema 8.24. *Suma seriei de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este funcție continuă pe $(-R, R)$.*

Demonstrație. Fie $r \in (0, R)$. Conform teoremei lui Abel, seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este uniform convergentă pe $[-r, r]$, iar cum sumele parțiale S_n ale seriei sunt funcții continue pe $[-r, r]$, urmează că S este funcție continuă pe $[-r, r]$, întrucât proprietatea de continuitate a sumelor parțiale se transmite prin convergență uniformă. Cum $r \in (0, R)$ era arbitrar, urmează că S este funcție continuă pe $(-R, R)$. ■

Comportarea funcției sumă în capetele intervalului de convergență

Dacă seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este convergentă și în R sau $-R$, atunci funcția sumă S este bine definită și în aceste puncte, continuitatea sa neputându-se însă decide cu ajutorul teoremei de mai sus. Teorema de mai jos, numită și *teorema a doua a lui Abel*, furnizează un răspuns în această direcție.

Teorema 8.25. *Fie seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, cu raza de convergență $R > 0$. Dacă seria de puteri este convergentă în $x = R$ (respectiv în $x = -R$), atunci suma sa S este funcție continuă în $x = R$ (respectiv în $x = -R$).*

Combinând teorema a doua a lui Abel cu proprietatea de continuitate pe $(-R, R)$ obținută anterior, observăm că suma unei serii de puteri este continuă în toate punctele în care este bine definită, lucru afirmat în următorul rezultat.

Corolar 8.25.1. *Fie seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Atunci suma sa este o funcție continuă pe mulțimea de convergență a seriei de puteri.*

Derivarea unei serii de puteri

Fie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

o serie de puteri și fie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + n a_n x^{n-1} + \dots$$

seria de puteri obținută prin derivarea termen cu termen a seriei inițiale, numită *seria derivatelor*. Vom preciza în cele ce urmează legăturile dintre razele de convergență ale celor două serii și dintre sumele acestora.

Teorema 8.26. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o serie de puteri și fie R raza sa de convergență, iar S funcția sa sumă. Atunci seria derivatelor $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ are aceeași rază de convergență R , S este derivabilă pe $(-R, R)$, iar

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad \text{pentru } x \in (-R, R).$$

Să notăm că relația de derivare din teorema de mai sus se poate scrie sub forma

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1},$$

iar derivarea unei serii de puteri se poate face termen cu termen pe intervalul de convergență. Repetând raționamentul în mod inductiv, se poate deduce următorul rezultat.

Teorema 8.27. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o serie de puteri și fie R raza sa de convergență, iar S funcția sa sumă. Atunci seria derivatelor de ordinul k ,

$$\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) x^{n-k}, \quad k \geq 1,$$

are aceeași rază de convergență, S este indefinit derivabilă pe $(-R, R)$, iar

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) x^{n-k}, \quad \text{pentru } x \in (-R, R).$$

Exercițiu. Fie seria de puteri $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$.

1. Determinați raza de convergență a acestei serii de puteri, studiați-i convergența și precizați suma sa.

2. Calculați $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Soluție. 1. Deoarece

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1,$$

urmează că raza de convergență a seriei de puteri date este $R = 1$. Pentru $x = 1$, seria dată devine $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, care este convergentă, conform criteriului lui Leibniz. Pentru $x = -1$ seria dată devine $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, care este divergentă, fiind seria armonică înmulțită cu constanta -1 . În concluzie, mulțimea de convergență a seriei date este $(-1, 1]$.

Pentru $x \in (-1, 1)$, să notăm $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$. Atunci

$$\begin{aligned} S'(x) &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{x^n}{n} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+2} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \frac{1}{1+x}. \end{aligned}$$

Cum $S'(x) = \frac{1}{1+x}$, urmează că $S(x) = \ln(1+x) + C$, conform unui corolar al teoremei lui Lagrange. Deoarece $S(0) = 0$, se obține că $C = 0$, iar $S(x) = \ln(1+x)$ pentru orice $x \in (-1, 1)$. Deoarece seria de puteri $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$ este convergentă și în $x = 1$, urmează conform celei de-a doua teoreme a lui Abel că suma sa S este funcție continuă în $x = 1$, și deci

$$S(1) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} S(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \ln(1+x) = \ln 2,$$

deci $S(x) = \ln(1+x)$ pentru orice $x \in (-1, 1]$.

2. În particular, din cele de mai sus se obține că

$$S(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \dots = \ln 2.$$

8.3.2 Seria binomială

Fie seria de puteri

$$1 + \frac{k}{1!}x + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{n!}x^n + \dots, \quad k \in \mathbb{R}, \quad (8.4)$$

numită în cele ce urmează *seria binomială*. Observăm că pentru $k = n$, $n \in \mathbb{N}$, seria se transformă într-o sumă finită, având ca rezultat o funcție polinomială de gradul n . Vom presupune acum că $k \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$. Deoarece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{|k(k-1)\dots(k-n+1)(k-n)|}{(n+1)!}}{\frac{|k(k-1)\dots(k-n+1)|}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|k-n|}{|n+1|} = 1,$$

urmează că seria binomială (8.4) are raza de convergență $R = 1$. Fie $S : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ suma sa. Atunci, conform teoremei de derivare a seriilor de puteri,

$$S'(x) = k + \frac{k(k-1)}{1!}x + \dots + \frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1} + \dots, \quad x \in (-1, 1)$$

de unde

$$xS'(x) = kx + \frac{k(k-1)}{1!}x^2 + \dots + \frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{(n-1)!}x^n + \dots, \quad x \in (-1, 1)$$

iar

$$(1+x)S'(x) = kS(x), \quad x \in (-1, 1).$$

De aici, înmulțind ambii membri cu $(1+x)^{k-1}$, obținem că

$$(1+x)^k S'(x) - k(1+x)^{k-1} S(x) = 0, \quad x \in (-1, 1),$$

deci

$$\left(\frac{S(x)}{(1+x)^k} \right)' = 0, \quad x \in (-1, 1),$$

iar $S(x) = C(1+x)^k$, $C \in \mathbb{R}$. Deoarece $S(0) = 1$, urmează că $C = 1$, de unde $S(x) = (1+x)^k$. Obținem deci că, pentru orice $x \in (-1, 1)$,

$$(1+x)^k = 1 + \frac{k}{1!}x + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{n!}x^n + \dots,$$

formulă care generalizează formula binomială a lui Newton, valabilă pentru $k \in \mathbb{N}$. Pentru diverse valori particulare ale lui k se obțin sumele unor serii uzuale de puteri.

Astfel, pentru $k = -1$ obținem

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n x^n + \dots, \quad x \in (-1, 1),$$

de unde, substituind x cu $-x$ obținem

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots, \quad x \in (-1, 1),$$

iar substituind x cu x^2 obținem

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots, \quad x \in (-1, 1).$$

Pentru $k = \frac{1}{2}$ obținem

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \dots + \frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n + \dots, \quad x \in (-1, 1),$$

iar pentru $k = -\frac{1}{2}$ obținem

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 + \dots + \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n + \dots, \quad x \in (-1, 1).$$

Reamintim aici că $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)$, $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n$. Substituind x cu $-x^2$ obținem că

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2 \cdot 1!}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!}x^4 + \dots + \frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!}x^{2n} + \dots, \quad x \in (-1, 1).$$

Integrarea unei serii de puteri

Teorema 8.28. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o serie de puteri și fie R raza sa de convergență, iar S funcția sa sumă. Atunci seria obținută prin integrare termen cu termen $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ are aceeași rază de convergență R , S este integrabilă pe orice interval $[a, b] \subseteq (-R, R)$,

iar

$$\int_0^x S(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, \quad x \in (-R, R).$$

Exercițiu. Fie seria de puteri $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n$.

1. Determinați raza de convergență și mulțimea de convergență a seriei de puteri.
2. Determinați suma seriei de puteri.

Soluție. 1. Deoarece

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| \frac{n+1}{n+2} \right|}{\left| \frac{n}{n+1} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|(n+1)^2|}{|n(n+2)|} = 1,$$

urmează că raza de convergență a seriei de puteri date este $R = 1$. Pentru $x = 1$, seria dată devine $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$, care este divergentă, deoarece termenul general nu tinde la 0. Pentru $x = -1$, seria dată devine $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n+1}$, care este divergentă, deoarece termenul general nu tinde la 0. În concluzie, mulțimea de convergență a seriei date este $(-1, 1)$.

2. Observăm mai întâi că

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) x^n = \sum_{n=1}^{\infty} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n - 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = \frac{1}{1-x} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}, \quad x \in (-1, 1). \end{aligned}$$

Rămâne deci să calculăm suma seriei de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = S(x)$. Cum

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x},$$

obținem prin integrare termen cu termen în condițiile Teoremei 8.28 că

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-x), \quad x \in (-1, 1),$$

deci

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n = \frac{1}{1-x} + \frac{\ln(1-x)}{x}, \quad x \in (-1, 1).$$

Alternativ, puteam observa că

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad x \in (-1, 1),$$

deci $S(x) = -\ln(1-x) + C$. Deoarece $S(0) = 0$, urmează că $C = 0$, iar $S(x) = -\ln(1-x)$.

8.3.3 Dezvoltarea unei funcții în serie Taylor

În situația în care o funcție se poate reprezenta ca suma unei serii de puteri centrate în x_0 , $x_0 \in \mathbb{R}$, ea se poate deriva ușor termen cu termen pe intervalul de convergență al seriei, derivatele sale exprimându-se tot ca serii de puteri cu aceeași rază de convergență. Astfel, dacă

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots, \\ x \in (x_0 - R, x_0 + R),$$

atunci

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \cdots + (n+1)a_{n+1}(x - x_0)^n + \cdots, \\ x \in (x_0 - R, x_0 + R)$$

și, în general,

$$f^{(k)}(x) = k!a_k + (k+1)k \cdots 2a_{k+1}(x - x_0) + \cdots \\ + (n+k)(n+k-1) \cdots (n+1)(x - x_0)^n + \cdots, \\ x \in (x_0 - R, x_0 + R), \quad k \geq 1.$$

Să notăm faptul că, înlocuind $x = x_0$ în formulele de mai sus, obținem că

$$f^{(k)}(x_0) = k!a_k \quad \text{pentru orice } k \geq 0.$$

Cunoscându-se deci faptul că o funcție f se poate exprima ca o serie de puteri centrată într-un punct oarecare și cu raza de convergență nenulă (fiind deci indefinit derivabilă pe intervalul de convergență), se poate determina o formulă de calcul pentru derivatele sale de orice ordin în acel punct.

Teorema 8.29. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ o serie de puteri centrată în x_0 cu raza de convergență $R > 0$, mulțimea de convergență E și suma $f : E \rightarrow \mathbb{R}$. Atunci f este indefinit derivabilă pe intervalul $(x_0 - R, x_0 + R)$, iar

$$f^{(k)}(x_0) = k!a_k \quad \text{pentru orice } k \geq 0. \quad (8.5)$$

O întrebare naturală este dacă se poate reface drumul și în sens invers, adică dată fiind o funcție indefinit derivabilă, aceasta se poate scrie ca suma unei serii de puteri centrate într-un punct dat, coeficienții seriei de puteri fiind calculați cu ajutorul formulei (8.5). În absența unor condiții suplimentare asupra funcției f , răspunsul este negativ, așa cum se poate observa din următorul exemplu.

Exemplu. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. Să observăm că pentru orice polinom $P \in \mathbb{R}[X]$,

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{P(u)}{e^{u^2}} = \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{P(u)}{e^{u^2}} = 0,$$

egalități demonstrabile ușor cu ajutorul regulii lui l'Hôpital, și deci

$$\lim_{x \rightarrow 0} P\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}} = 0.$$

Se poate observa că

$$\left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right)^{(n)} = P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}},$$

unde $(P_n)_{n \geq 0} \subseteq \mathbb{R}[X]$ este un șir de polinoame care verifică relația de recurență

$$P_{n+1}(X) = 2P_n(X)X^3 - X^2P_n'(X),$$

de unde, conform celor de mai sus, f admite derivate de orice ordin în $x = 0$, iar $f^{(k)}(0) = 0$ pentru $k \geq 0$. Atunci, conform formulei (8.5), ar trebui ca $a_k = 0$ pentru $k \geq 0$. Cum $f(x) \neq 0$ pentru $x \neq 0$, f nu poate fi suma seriei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, cu $a_k, k \geq 0$, precizați de (8.5) pe niciun subinterval al lui \mathbb{R} .

Vom preciza în continuare condiții suplimentare cu ajutorul cărora se poate

asocia unei funcții f o serie de puteri centrată în x_0 și convergentă la f prin intermediul formulelor (8.5).

Seria Taylor asociată unei funcții într-un punct. Seria MacLaurin

Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, I interval, și fie $x_0 \in I$ astfel încât f este indefinit derivabilă în x_0 . Vom numi *serie Taylor centrată în x_0 asociată lui f* seria de puteri T_f definită prin

$$T_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n. \quad (8.6)$$

Pentru $x_0 = 0$, vom numi *seria MacLaurin asociată lui f* seria de puteri

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Să notăm că T_f este o serie de funcții definite pe întreg \mathbb{R} , nu doar pe I , iar sumele parțiale de ordinul k , S_k , ale seriei Taylor centrate în x_0 asociate lui f sunt polinoamele Taylor definite în Capitolul 7, anume

$$\begin{aligned} T_k &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \\ &= \sum_{n=0}^k \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n. \end{aligned}$$

Totuși, în acest moment, această asociere este pur formală, întrucât chiar dacă seria Taylor T_f definită mai sus converge în mod obligatoriu pentru $x = x_0$, ea poate să nu mai convergă în niciun alt punct, având raza de convergență 0. Mai mult, chiar dacă seria Taylor T_f este convergentă, ea poate converge la o altă funcție decât funcția f inițială, în acest sens putându-se observa exemplul de mai sus, în care T_f este funcția identic nulă, fără ca f să aibă aceeași proprietate.

Vom spune atunci că $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, f indefinit derivabilă în $x_0 \in I$, este *dezvoltabilă în serie Taylor în jurul lui x_0* dacă seria Taylor centrată în x_0 asociată lui f are raza de convergență $R > 0$ și converge la f pe $(x_0 - R, x_0 + R) \cap I$, adică

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n, \quad \text{pentru } x \in (x_0 - R, x_0 + R) \cap I.$$

Convergența seriei Taylor

Să ne reamintim că

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x),$$

unde R_n este restul formulei lui Taylor de ordinul n , iar T_n reprezintă polinomul Taylor de ordinul n , egal cu suma parțială de ordinul n a seriei de funcții T_f . Intrucât dorim ca T_f să coincidă cu f cel puțin pentru funcții f cu regularitate ridicată, intuim că diferența $R_n(x)$ între „funcția țintă” $f(x)$ și suma parțială $T_n(x)$ trebuie să tindă la 0. Se poate obține atunci următorul rezultat.

Teorema 8.30. Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, I interval, și fie $x_0 \in I$ astfel încât f este indefinit derivabilă în x_0 . Fie de asemenea $a \in I$. Atunci seria Taylor T_f este convergentă în a la $f(a)$ dacă și numai dacă șirul $(R_n(a))_{n \geq 0}$ al resturilor formulei lui Taylor calculate pentru $x = a$ este convergent la 0.

Demonstrație. Fie $a \in I$. Atunci

$$f(a) = T_n(a) + R_n(a) = S_n(a) + R_n(a),$$

unde S_n reprezintă sumele parțiale ale lui T_f , egale cu polinoamele Taylor de ordinul n , T_n . Atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(a) = 0 \Leftrightarrow (S_n(a))_{n \geq 0}$ este convergent, cu limita $f(a) \Leftrightarrow T_f$ este convergentă în $x = a$, iar $T_f(a) = f(a)$. ■

Estimând restul de ordinul n sub forma lui Lagrange, obținem cu ajutorul teoremei de mai sus următoarele condiții suficiente de convergență.

Teorema 8.31. Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, I interval, $f \in C^\infty(I)$, astfel încât există $M > 0$ și $\delta > 0$ cu proprietatea că

$$|f^{(n)}(x)| \leq \frac{M}{\delta^n} n! \quad \text{pentru orice } n \geq 0 \text{ și } x \in I.$$

Atunci f este dezvoltabilă în serie Taylor în jurul lui x_0 , iar

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n, \quad \text{pentru } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I.$$

Teorema 8.32. Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, I interval, $f \in C^\infty(I)$, astfel încât există $M > 0$ cu proprietatea că

$$|f^{(n)}(x)| \leq M \quad \text{pentru orice } n \geq 0 \text{ și } x \in I.$$

Atunci f este dezvoltabilă în serie Taylor în jurul lui x_0 , iar

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k, \quad \text{pentru } x \in I.$$

Demonstrație. Ca mai sus,

$$|R_n(x)| \leq M \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Notând $a_n = \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$, observăm că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x - x_0|}{n+2} = 0.$$

De aici, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, deci $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$, de unde concluzia. ■

Vom spune atunci că funcția $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, f indefinit derivabilă pe I , I interval, este *analitică* pe I dacă pentru orice $x_0 \in I$ f este dezvoltabilă în serie Taylor în jurul lui x_0 .

8.3.4 Exemple de dezvoltări în serie Taylor

Exemplu. 1. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$. S-a observat deja că

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x),$$

unde

$$R_n(x) = \frac{e^{\theta_x x}}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad \theta_x \in (0, 1).$$

Atunci

$$|R_n(x)| \leq \frac{e^{|x|}}{(n+1)!} |x|^{n+1},$$

iar cum $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, urmează că $\lim_{n \rightarrow \infty} |R_n(x)| = 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

În concluzie,

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Substituind x cu $-x$, obținem și că

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Exemple. 1. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$. S-a observat deja că

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_n(x),$$

unde

$$R_n(x) = \frac{(-1)^{n+1} \sin\left(\theta_x x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right)}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad \theta_x \in (0, 1).$$

Atunci

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

iar cum $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0$, urmează că $\lim_{n \rightarrow \infty} |R_n(x)| = 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

În concluzie,

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R}.$$

2. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$. S-a observat deja că

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n}}{(2n)!} + R_n(x),$$

unde

$$R_n(x) = \frac{(-1)^{n+1} \cos\left(\theta_x x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right)}{(2n+2)!} x^{2n+2}, \quad \theta_x \in (0, 1).$$

Atunci

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!},$$

iar cum $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} = 0$, urmează că $\lim_{n \rightarrow \infty} |R_n(x)| = 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

În concluzie,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Alte dezvoltări remarcabile în serie MacLaurin sunt

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \dots, \quad x \in (-1, 1),$$

$$\operatorname{arcsin} x = 1 + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots, \quad x \in (-1, 1),$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Operații cu serii de puteri

Fie seriile de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ și $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, cu razele de convergență R_1 , respectiv R_2 , și fie $c \in \mathbb{R}^*$.

Suma a două serii de puteri

Suma celor două serii de puteri este seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$, cu raza de convergență $R \geq \min(R_1, R_2)$. În plus,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \quad x \in (-R, R).$$

Seria produs cu o constantă

Seria $\sum_{n=0}^{\infty} (ca_n) x^n$ are raza de convergență R_1 . În plus,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (ca_n) x^n = c \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad x \in (-R_1, R_1).$$

Seria produs după Cauchy

Seria produs după Cauchy a celor două serii de puteri este seria de puteri

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0 = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k},$$

cu raza de convergență $R \geq \min(R_1, R_2)$. În plus,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right), \quad x \in (-R, R).$$

Exercițiu. Să se dezvolte în serie MacLaurin funcțiile

$$1) f : \mathbb{R} \setminus \{1, 3\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{3x-7}{x^2-4x+3}; \quad 2) g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^3 e^{-2x}.$$

Soluție. 1) Se observă că f se poate descompune în fracții simple sub forma

$$f(x) = \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x-3}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 3\},$$

fiind de asemenea cunoscut că

$$\frac{1}{1-y} = 1 + y + y^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} y^n, \quad y \in (-1, 1).$$

Atunci

$$\frac{2}{x-1} = -2 \frac{1}{1-x} = -2 \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad x \in (-1, 1)$$

$$\frac{1}{x-3} = -\frac{1}{3-x} = -\frac{1}{3} \frac{1}{1-\frac{x}{3}} = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n, \quad x \in (-3, 3).$$

De aici

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-2 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^n}\right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} -\left(2 + \frac{1}{3^{n+1}}\right) x^n, \quad x \in (-1, 1).$$

2) Este cunoscut că

$$e^y = 1 + \frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Atunci

$$e^{-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!} x^n, \quad x \in \mathbb{R},$$

de unde

$$x^3 e^{-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!} x^{n+3} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-2)^{n-3}}{(n-3)!} x^n, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Aplicații

8.1. Fie $(f_n)_{n \geq 0}$, $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$.

1. Demonstrați că $x_n = \frac{n}{n+1}$ este punct de maxim pentru f_n , iar

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \cdot \frac{1}{n+1}, \quad \text{pentru orice } n \geq 0 \text{ și orice } x \in [0, 1].$$

2. Demonstrați că $(f_n)_{n \geq 0}$ este convergent uniform către funcția nulă pe $[0, 1]$.

8.2. Fie $(f_n)_{n \geq 0}$, $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$.

1. Demonstrați că

$$|f_n(x) - |x|| \leq \frac{1}{n}, \quad \text{pentru orice } n \geq 0 \text{ și orice } x \in \mathbb{R}.$$

2. Demonstrați că $(f_n)_{n \geq 0}$ este convergent uniform către funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$.

8.3. Fie $(f_n)_{n \geq 0}$, $f_n : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{n+x}{n+1}$.

1. Demonstrați că $(f_n)_{n \geq 0}$ este convergent punctual către funcția constantă 1 pe $[1, \infty)$.

2. Calculați $f_n(n+2)$. Este $(f_n)_{n \geq 0}$ convergent și uniform către funcția constantă 1 pe $[1, \infty)$?

8.4. Fie $(f_n)_{n \geq 0}$, $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = nx(1-x)^n$.

1. Demonstrați că $(f_n)_{n \geq 0}$ este convergent punctual către funcția nulă pe $[0, 1]$.

2. Calculați $f_n\left(\frac{1}{n}\right)$. Este $(f_n)_{n \geq 0}$ convergent și uniform către funcția nulă pe $[0, 1]$?

8.5. Fie $(f_n)_{n \geq 0}$, $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n - x^{2n}$.

1. Demonstrați că $(f_n)_{n \geq 0}$ este convergent punctual către funcția nulă pe $[0, 1]$.
2. Calculați $f_n\left(\sqrt[n]{\frac{1}{2}}\right)$. Este $(f_n)_{n \geq 0}$ convergent și uniform către funcția nulă pe $[0, 1]$?

8.6. Fie $(f_n)_{n \geq 0}$, $f_n : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = e^{n(x-1)}$.

1. Demonstrați că $(f_n)_{n \geq 0}$ este convergent punctual către funcția nulă pe $(0, 1)$.
2. Calculați $f_n\left(1 - \frac{1}{n}\right)$. Este $(f_n)_{n \geq 0}$ convergent și uniform către funcția nulă pe $(0, 1)$?

8.7. Fie $(f_n)_{n \geq 0}$, $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^3x^2}$.

1. Folosind eventual inegalitatea $a^2 + b^2 \geq 2ab$ pentru orice $a, b \geq 0$, demonstrați că

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}, \quad \text{pentru orice } n \geq 0 \text{ și orice } x \in \mathbb{R}.$$

2. Demonstrați că $(f_n)_{n \geq 0}$ este uniform convergent către funcția nulă pe \mathbb{R} .

8.8. Fie $(f_n)_{n \geq 0}$, $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{\sin(nx+2)+n}{\sqrt{n^2+1}}$.

1. Demonstrați că

$$|f_n(x) - 1| < \frac{2}{\sqrt{n^2+1}}, \quad \text{pentru orice } n \geq 0 \text{ și orice } x \in \mathbb{R}.$$

2. Demonstrați că $(f_n)_{n \geq 0}$ converge uniform către funcția constantă 1 pe \mathbb{R} .

8.9. Fie $(f_n)_{n \geq 0}$, $f_n : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sin \frac{nx}{n+1}$.

1. Demonstrați că

$$|f_n(x) - \sin x| \leq \frac{\pi}{n+1}, \quad \text{pentru orice } n \geq 0 \text{ și orice } x \in \mathbb{R}.$$

2. Demonstrați că $(f_n)_{n \geq 0}$ converge uniform către funcția $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$.

8.10. Fie $(f_n)_{n \geq 0}$, $f_n : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sin^n x$.

1. Demonstrați că $(f_n)_{n \geq 0}$ este convergent punctual către funcția $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi] \\ 1, & x = \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

2. Este $(f_n)_{n \geq 0}$ convergent și uniform la f ?

8.11. Fie $(f_n)_{n \geq 1}$, $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \begin{cases} n, & x \in (0, \frac{1}{n}] \\ 1, & \text{în rest} \end{cases}$.

1. Demonstrați că $(f_n)_{n \geq 0}$ este convergent punctual către funcția constantă 1 pe \mathbb{R} .

2. Este $(f_n)_{n \geq 0}$ convergent și uniform la această funcție?

8.12. Fie $(f_n)_{n \geq 1}$, $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \begin{cases} \frac{nx}{n+x}, & x \in [0, \frac{n-1}{n}] \\ x, & x \in (\frac{n-1}{n}, 1] \end{cases}$. Demonstrați că $(f_n)_{n \geq 1}$ este uniform convergent.

8.13. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție uniform continuă și fie $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = f(x + \frac{1}{n})$, $n \geq 1$. Demonstrați că $f_n \xrightarrow{u} f$ pentru $n \rightarrow \infty$.

8.14. Fie $(f_n)_{n \geq 1}$, $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x + \frac{1}{n}$. Demonstrați că $f_n \xrightarrow{u} f$ pentru $n \rightarrow \infty$, dar $f_n^2 \not\xrightarrow{u} f^2$ pentru $n \rightarrow \infty$.

8.15. Fie $(f_n)_{n \geq 1}$, $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sqrt[n]{1 + x^{2n}}$. Determinați funcția limită a șirului $(f_n)_{n \geq 1}$ și demonstrați că $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniform la această funcție.

8.16. Fie $(f_n)_{n \geq 0}$, $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{n + \cos nx}{n+1}$. Demonstrați că $(f_n)_{n \geq 0}$ este uniform convergent, dar $(f'_n)_{n \geq 0}$ nu este uniform convergent.

8.17. Determinați suma seriei $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n}$.

8.18. Fie seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1} \right)$.

1. Determinați suma parțială de ordinul n , S_n , a seriei.

2. Demonstrați că seria de funcții dată este uniform convergentă.

8.19. Fie seria de funcții $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{(1+nx)(1+(n+1)x)}$, $x \in [1, \infty)$.

1. Determinați suma parțială de ordinul n , S_n , a seriei.
2. Demonstrați că seria de funcții dată este uniform convergentă.

8.20. Folosind eventual criteriul lui Weierstrass, demonstrați că următoarele serii de funcții sunt absolut și uniform convergente pe \mathbb{R} .

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(nx)}{n^2}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{\sqrt{n^4 + x^2}}; \quad 3) \sum_{n=0}^{\infty} x^2 e^{-nx}.$$

8.21. Folosind eventual inegalitatea $|\sin y| \leq |y|$ pentru orice $y \in \mathbb{R}$, demonstrați că seria de funcții $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \sin \frac{x}{3^n}$ este absolut și uniform convergentă pe \mathbb{R} .

8.22. Folosind eventual inegalitatea $|\operatorname{arctg} y| \leq |y|$ pentru orice $y \in \mathbb{R}$, demonstrați că seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{x^2 + n^4}$ este absolut convergentă pe \mathbb{R} .

8.23. Folosind criteriul lui Dirichlet, demonstrați convergența uniformă a următoarelor serii de funcții.

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \quad x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) \frac{\cos nx}{n}, \quad x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right].$$

8.24. Fie seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{1}{n^2 + x^2}$.

1. Demonstrați că $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este uniform convergentă pe \mathbb{R} .
2. Demonstrați că $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n$ este uniform convergentă pe \mathbb{R} .
3. Folosind teorema de derivare termen cu termen, respectiv proprietatea de transfer de continuitate în condiții de convergență uniformă, demonstrați că suma seriei $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este o funcție derivabilă, cu derivata continuă.

8.25. Demonstrați că suma seriei de funcții $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx}{1 + n^5 x^2}$ este o funcție continuă pe \mathbb{R} .

8.26. Demonstrați că suma seriei de funcții $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^4}$ este o funcție derivabilă pe \mathbb{R} și cu derivata continuă.

8.27. Determinați raza de convergență și mulțimea de convergență pentru următoarele serii de puteri.

$$1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n + 3^n}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 3^n}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2+2n} x^n; \quad 4) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{2^n + 3};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) x^n; \quad 6) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)^{n+2}}; \quad 7) \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^{n+2} x^n.$$

8.28. Precizați mulțimea de convergență pentru următoarele serii de funcții reducibile la serii de puteri prin schimbări de variabilă.

$$1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+2} \left(\frac{x}{3}\right)^n; \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n+2}{4n^3+2n+1} \left(\frac{x}{2x+1}\right)^n; \quad 3) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!x^n};$$

$$4) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n+1}{(n^3+2)x^{2n}}; \quad 5) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin^n x}{n^2+3n+2}; \quad 6) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2 + \frac{1}{4})^n}{(n+1)(n+2)x^n}.$$

8.29. Fie seria de puteri $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{3n-2}}{3n-2}$.

- Determinați raza de convergență și mulțimea de convergență a seriei de puteri.
- Notând cu S suma seriei de puteri, demonstrați că

$$S'(x) = \frac{1}{1+x^3}, \quad x \in (-1, 1).$$

- Demonstrați că $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-2} = \frac{\ln 2}{3} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

8.30. Fie seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 x^n$.

- Determinați raza de convergență și mulțimea de convergență a seriei de puteri.
- Folosind eventual egalitatea

$$(n+1)^2 x^n = (n+2)(n+1)x^n - (n+1)x^n$$

precum și teorema de derivare termen cu termen aplicată seriei $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, determinați suma seriei date.

8.31. Fie seria de funcții $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n+1}$.

1. Determinați mulțimea de convergență a seriei de funcții.
2. Notând cu S funcția sa sumă, demonstrați că

$$S'(x) = S(x) - \frac{e^x}{e^x + 1}, \quad x > 0.$$

8.32. Fie seria de puteri $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (2n-1)x^{2n-2}$.

1. Determinați mulțimea de convergență a seriei de puteri.
2. Notând cu S funcția sa sumă, demonstrați că

$$\int_0^x S(t) dt = \frac{x}{1+x^2}.$$

3. Determinați S .

8.33. Folosind eventual egalitatea

$$\frac{x+5}{x^2+4x+3} = \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x+3}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -1\},$$

dezvoltați în serie MacLaurin funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{-3, -1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+5}{x^2+4x+3}$.

8.34. Folosind eventual egalitățile

$$\frac{1}{x^2+x+1} = \frac{1-x}{1-x^3} = \frac{1}{1-x^3} - x \frac{1}{1-x^3}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{1\},$$

dezvoltați în serie MacLaurin funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2+x+1}$.

8.35. Folosind eventual egalitatea

$$\ln \frac{1+x}{1+x^2} = \ln(1+x) - \ln(1+x^2), \quad x \in (-1, \infty),$$

dezvoltați în serie MacLaurin funcția $f: (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln \frac{1+x}{1+x^2}$.

8.36. Folosind eventual egalitatea

$$\frac{1}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} = \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad x \in (-2, 2)$$

dezvoltați în serie MacLaurin funcția $f: (-2, 2) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$.